2.6. THE FACTORIZATION METHOD IN THE ABSTRACT RIEMANN PROBLEM

Наиболее эффективными из общего арсенала методов исследования физических процессов распространения звуковых и электромагнитных сигналов в средах с переменными характеристиками и формирования микротрещин в конструкционных материалах, имеющих различного рода неоднородности наследственного происхождения, к настоящему времени являются методы с применением интегралов Коши, краевых задач теории аналитических функций, в частности краевой задачи Римана, а также метод сингулярных интегральных уравнений[39].

Теория абстрактного сингулярного уравнения и абстрактной задачи Римана возникла на основе теории сингулярного интегрального уравнения и краевой задачи Римана на замкнутом контуре.

Пусть L – банахово пространство, на котором задан линейный ограниченный инволютивный оператор S. Этот оператор порождает два взаимно дополняющих проектора

$$P_{\pm} = \frac{1}{2}\left(I \pm S\right),\ I \text{ – единичный оператор.}$$

Пространство L раскладывается в прямую сумму образов этих проекторов:

$$L = L_{+} \oplus L_{-}.$$

Рассмотрим задачу о нахождении элементов $\varphi^{+} \in L_{+}$ и $\varphi^{-} \in L_{-}$, которые удовлетворяют условию:

$$\varphi^{+} = A\varphi^{-} + g\,, \tag{1}$$

где A – линейный ограниченный обратимый оператор, заданный на L, g – заданный элемент пространства L.

Рассмотрим сначала задачу (1) в частных случаях, когда оператор A имеет специальный вид[40]. Предположим, что на пространстве L заданы линейные ограниченные операторы

$$U_1, U_2, \ldots, U_n,$$

которые удовлетворяют следующим условиям:

1) $U_j \cdot U_k = U_k \cdot U_j,\ j,k = \overline{1,n};$;

2) для любых $\varphi^{\pm} \in L_{\pm}$

$$U_j\varphi^{+} \in L_{+},\ U_j^{-1}\varphi^{-} \in L_{-},\ j = \overline{1,n}.$$

3) для оператора U_j существует единственный с точностью до постоянного множителя элемент $h_j^{+} \in L_{+}$ такой, что

$$U_j^{-1}h_j^{+} \in L_{-},\ j = \overline{1,n}.$$

4) $U_j h_k^{+} = h_k^{+}$, если $k = \overline{1,n}$ и $j \neq k$.

Получим решение задачи (1) в каждом из четырех частных случаев:

---

[39] Моделирование систем: (монография) / Г.А. Оборский, А.Ф. Дащенко, А.В. Усов, Д.В. Дмитришин. – Одесса: Астропринт, 2013. – 664 с.

[40] Комарницкий А.Л., Колмакова Л.Н Абстрактная схема решения задачи Римана. XI International Scientific and Practical Conference "International Trends in Science and Texnology". Vol.1, March 31, 2019, Warsaw, Poland. Материалы конференции. С. 6-11.

1. $A = U_j,\ j = \overline{1,n}$.

2. $A = U_j^{ù},\ j = \overline{1,n},\ ù\ Î\ ¥,\ ù > 1$.

3. $A = U_j^{-1},\ j = \overline{1,n}$.

4. $A = U_j^{-ù},\ j = \overline{1,n},\ ù\ Î\ ¥$.

1. $A = U_j,\ j = \overline{1,n}$.

То есть нужно найти элементы $\varphi^{\pm} \in L_{\pm}$ по условию:

$$\varphi^{+} = U_j \varphi^{-} + g \tag{2}$$

Представим элемент g в виде

$$g = g^{+} - g^{-},\ \text{где}\ g^{\pm} = \pm P_{\pm} g.$$

Тогда задача (2) примет вид:

$$j^{+} - g^{+} = U_j j^{-} - g^{-}.$$

Подействуем на обе части равенства оператором U_j^{-1}:

$$U_j^{-1}\left(\varphi^{+} - g^{+}\right) = \varphi^{-} - U_j^{-1} g^{-},$$

так как $\varphi^{-} - U_j^{-1} g^{-} \in L_{-}$, то и $U_j^{-1}\left(\varphi^{+} - g^{+}\right) \in L_{-}$, тогда $j^{+} - g^{+} = c \times h_j^{+}$, c – произвольная постоянная.

Получаем решение задачи (2):

$$j^{+} = g^{+} + c \times h_j^{+},\ j^{-} = U_j^{-1} g^{-} + c \times U_j^{-1} h_j^{+}.$$

2. $A = U_j^{ù},\ j = \overline{1,n},\ ù\ Î\ ¥,\ ù > 1$.

$$\varphi^{+} = U_j^{ù} \varphi^{-} + g, \tag{3}$$

$$\varphi^{+} - g^{+} = U_j^{ù} \varphi^{-} - g^{-},$$

$$U_j^{-ù}\left(\varphi^{+} - g^{+}\right) = \varphi^{-} - U_j^{-ù} g^{-},$$

$$\varphi^{-} - U_j^{-ù} g^{-} \in L_{-},$$

$$U_j^{-ù}\left(\varphi^{+} - g^{+}\right) \in L_{-}.$$

В этом случае:

$$j^{+} - g^{+} = \overset{ù-1}{\underset{k=0}{å}} c_k U_j^k h_j^{+},$$

$c_0, c_1, K, c_{ù-1}$ – произвольные постоянные.

Получаем решение задачи (3) в виде:

$$j^{+} = g^{+} + \overset{ù-1}{\underset{k=0}{å}} c_k U_j^k h_j^{+},$$

$$\varphi^{-} = U_j^{-\text{ù}} g^{-} + \sum_{k=0}^{\text{ù}-1} c_k U_j^{-\text{ù}+k} h_j^{+}.$$

3. $A = U_j^{-1},\ j = \overline{1,n}$.

$$\varphi^{+} = U_j^{-1}\varphi^{-} + g, \tag{4}$$

$$\varphi^{+} - g^{+} = U_j^{-1}\varphi^{-} - g^{-},$$

элемент в левой части $\varphi^{+} - g^{+} \in L_{+}$, элемент в правой части $U_j^{-1}\varphi^{-} - g^{-} \in L_{-}$, следовательно, $\varphi^{+} - g^{+} = 0$, $U_j^{-1}\varphi^{-} - g^{-} = 0$.

Единственное решение задачи (4) в этом случае имеет вид:

$$\varphi^{+} = g^{+},\ \varphi^{-} = U_j g^{-}.$$

Отметим, что $U_j g^{-}$, согласно введенной аксиоматике, может не принадлежать L_{-}, тогда задача (4) не имеет решения.

Выясним, каким будет условие разрешимости задачи в этом случае.

Пространство L_{-} раскладывается в прямую сумму двух подпространств $L_{-}^{(1)}$ и $U_j^{-1}(L_{-})$, $L_{-}^{(1)}$ – линейная оболочка, натянутая на элемент $U_j^{-1}h_j^{+}$.

Таким образом, любой элемент $y^{-} \in L_{-}$ однозначно представим в виде $y^{-} = c \cdot U_j^{-1}h_j^{+} + U_j^{-1}y_1^{-}$, c – постоянная, $y_1^{-} \in L_{-}$.

Рассмотрим линейный функционал $F_j^{(1)}$, заданный на пространстве L_{-}, который действует по правилу:

$$F_j^{(1)}(y^{-}) = c.$$

Легко видеть, что задача (4) будет разрешима, только если выполнено условие

$$F_j^{(1)}(g^{-}) = 0.$$

Заметим, что пространство L_{-} можно также разложить в прямую сумму подпространств $L_{-}^{(\text{ù})} \oplus U_j^{\text{ù}}(L_{-})$, где $L_{-}^{\text{ù}}$ – линейная оболочка, натянутая на элементы $U_j^{-1}h_j^{+},\ U_j^{-2}h_j^{+}, \ldots, U_j^{-\text{ù}}h_j^{+}$. То есть произвольный элемент $y^{-} \in L_{-}$ однозначно представим в виде

$$y^{-} = c_1 \cdot U_j^{-1}h_j^{+} + c_2 \cdot U_j^{-2}h_j^{+} \ldots + c_{\text{ù}} \cdot U_j^{-\text{ù}}h_j^{+} + U_j^{-\text{ù}}y_1^{-},\ y_1^{-} \in L_{-},$$

$c_1, \ldots, c_{\text{ù}\ /}$ – некоторые постоянные, зависящие от y^{-}.

Рассмотрим линейные функционалы $F_j^{(1)}, F_j^{(2)}, \ldots, F_j^{(\text{ù})}$, заданные на пространстве L_{-}, которые действуют по правилу:

$$F_j^{(1)}(y^{-}) = c_1,\ F_j^{(2)}(y^{-}) = c_2, \ldots, F_j^{(\text{ù})}(y^{-}) = c_{\text{ù}}.$$

Перейдем к следующему случаю.

4. $A = U_j^{-\varkappa}$.

$$\varphi^+ = U_j^{-\varkappa}\varphi^- + g \tag{5}$$

$$\varphi^+ - g^+ = U_j^{-\varkappa}\varphi^- - g^-,\ \varphi^+ - g^+ \in L_+,\ U_j^{-\varkappa}\varphi^- - g^- \in L_-.$$

Решение задачи (5) имеет вид:

$$\varphi^+ = g^+,\ \varphi^- = U_j^{\varkappa} g^-.$$

Для того, чтобы $\varphi^- \in L_-$ необходимо и достаточно выполнение $\varkappa$ - условий разрешимости:

$$F_j^{(k)}\left(g^-\right) = 0,\ k = \overline{1,\varkappa}.$$

Обобщим рассмотренные выше случаи: пусть

$$A = U = U_1^{\varkappa_1} U_2^{\varkappa_2} \ldots U_n^{\varkappa_n},$$

$$\varphi^+ = U\varphi^- + g. \tag{6}$$

Предположим, что все $\varkappa_j > 0,\ j = \overline{1,n}$, тогда общее решение задачи (6) зависит от $\sum_{j=1}^{n} \varkappa_j$ произвольных постоянных c_{jk}, $k = \overline{0,\varkappa_j - 1},\ j = \overline{1,n}$ и имеет вид:

$$\varphi^+ = g^+ + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{\varkappa_j - 1} c_{jk} U_j^k h_j^+,$$

$$\varphi^- = U^{-1} g^- + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{\varkappa_j - 1} c_{jk} U_j^{-\varkappa_j + k} h_j^+.$$

Предположим, что все $\varkappa_j < 0,\ j = \overline{1,n}$, тогда задача (6) может иметь только одно решение и имеет вид:

$$\varphi^+ = g^+,\ \varphi^- = U^{-1} g^-,$$

но, чтобы $\varphi^- \in L_-$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись $-\sum_{j=m+1}^{l} \varkappa_j$ условий разрешимости:

$$F_j^{(k)}\left(g^-\right) = 0,\ j = \overline{1,n},\ k = \overline{1,-\varkappa_j}.$$

Если хотя бы одно из этих условий не выполнено, то $\varphi^- \notin L_-$ и задача (6) вообще не имеет решения.

В общем случае какие-то из частных индексов являются положительными, какие-то отрицательными, нулевыми. Пусть, для определенности:

$$\text{если } \varkappa_j > 0,\ j = \overline{1,m},$$

$$\text{если } \varkappa_j < 0,\ j = \overline{m+1,l},$$

$$\text{если } \varkappa_j = 0,\ j = \overline{l+1,n}.$$

Для разрешимости задачи (6) необходимо и достаточно выполнение $-\sum\limits_{j=m+1}^{l}\varkappa_j$ условий:

$$F_j^{(k)}\left(g^-\right)=0,\ j=\overline{m+1,l},\ k=\overline{1,-\varkappa_j}\,.$$

И если эти условия выполнены, то общее решение задачи (6) зависит от $\sum\limits_{j=1}^{m}\varkappa_j$ произвольных постоянных c_{jk}, $k=\overline{0,\varkappa_j-1}$, $j=\overline{1,m}$ и имеет вид:

$$\varphi^+=g^++\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{\varkappa_j-1}c_{jk}U_j^k h_j^+,$$

$$\varphi^-=U^{-1}g^-+\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{\varkappa_j-1}c_{jk}U_j^{-\varkappa_j+k}h_j^+.$$

Предположим теперь, что произвольный обратимый оператор A допускает факторизацию, т.е. представим в виде:

$$A=X^+U\left(X^-\right)^{-1},\tag{7}$$

где X^+,X^- – обратимые линейные операторы, заданные на L и отображающие соответственно подпространства $L_\pm$ в себя.

Тогда задача (1) принимает вид:

$$\varphi^+=X^+U\left(X^-\right)^{-1}\cdot\varphi^-+g,$$

$$\left(X^+\right)^{-1}\varphi^+=U\left(X^-\right)^{-1}\cdot\varphi^-+\left(X^+\right)^{-1}\cdot g.$$

Замена:

$$\psi^+=\left(X^+\right)^{-1}\cdot\varphi^+,\ \psi^-=\left(X^-\right)^{-1}\cdot\varphi^-,\ \left(X^+\right)^{-1}\cdot g=q.$$

Получаем:

$$\psi^+=U\cdot\psi^-+q.\tag{8}$$

Данная задача рассмотрена выше.

Для ее разрешимости необходимо выполнение $-\sum\limits_{j=m+1}^{l}\varkappa_j$ условий разрешимости:

$$F_j^{(k)}\left(q^-\right)=0,\ j=\overline{m+1,l},\ k=\overline{1,-\varkappa_j},\ q^\pm=\pm P_\pm q.$$

Общее решение задачи (8) зависит от $\sum\limits_{j=1}^{m}\varkappa_j$ произвольных постоянных и имеет вид:

$$\psi^+=q^++\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{\varkappa_j-1}c_{jk}U_j^k h_j^+,$$

$$\psi^-=U^{-1}q^-+\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{\varkappa_j-1}c_{jk}U_j^{-\varkappa_j+k}h_j^+.$$

Тогда:

$$\varphi^{+} = X^{+}\left(\theta^{+} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{\varkappa_j - 1} c_{jk}U_j^{k}\eta_j^{+}\right),$$

$$\varphi^{-} = X^{-}\left(U^{-1}\theta^{-} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{\varkappa_j - 1} c_{jk}U_j^{-\varkappa_j + k}\eta_j^{+}\right)$$

– решение задачи (1).

Мы предположили, что оператор A допускает факторизацию и провели конструктивное решение задачи, но не установили способы представления оператора в виде (7). Далее рассмотрим одну из ситуаций, когда факторизацию можно осуществить.

Пусть T является коммутативной подалгеброй с единицей алгебры линейных ограниченных операторов, заданных на L.

Пусть операторы $A,\ U_j \in T,\ j \in \overline{1,n}$. На алгебре задана экспоненциальная функция

$$\exp V = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{V^n}{n!}.$$

Элементы алгебры T, имеющие такой вид, называются логарифмируемыми. Обозначим множество логарифмируемых элементов $\exp(T)$. Это множество является группой относительно умножения.

Если оператор $W = \exp V \in exp(T)$, то оператор V называется логарифмом оператора W: $V = \ln W$.

Предположим, существует такой набор частных индексов $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_n$, что оператор $U^{-1} \cdot A \in \exp(T)$,

Покажем, что в этом случае оператор A допускает факторизацию.

В алгебре T рассмотрим задачу по скачку:

$$\Psi^{+} - \Psi^{-} = \ln U^{-1} \cdot A.$$

Это такая же задача, как и задача (1), но не в пространстве L, а в пространстве операторов T. Решение задачи $\Psi^{\pm}$ – линейные операторы, заданные в пространстве L, причем они соответственно принадлежат алгебрам $T_{\pm}$ операторов, переводящие пространства $L_{\pm}$ в себя.

Обозначим:

$$X^{\pm} = \exp \Psi^{\pm}.$$

Элементы $X^{\pm}$ обратимы в алгебрах $T_{\pm}$, причем имеет место факторизация (7).

Рассмотренная выше абстрактная схема решения задачи Римана имеет аксиоматику (условия 1) – 4)), которая, в отличие от ранее предлагаемых абстрактных схем[41], обобщает матричную краевую задачу Римана на замкнутом контуре Γ[42]:

$$\Phi^{+}(t) = G(t)\Phi^{-}(t) + g(t),\ t \in \Gamma.$$

Здесь $G(t)$ – обратимая матрица гёльдеровских функций, $g(t) \in H_{\lambda}$ – столбец гёльдеровских функций, $\Phi^{+}(t)$ состоит из функций, аналитически продолжимых внутрь

---

[41] Черский Ю.И. Общее сингулярное уравнение и уравнение типа свёртки. Мат. Сб. 1957. том 43. №3. – С. 277-296.

[42] Комарніцький А.Л., Колмакова Л.М. Матеріали XVII Міжнародної наукової конференції імені академіка Михайла Кравчука, Том 1, Київ, 19-20 травня 2016 р. (с. 150-151).

контура, $\Phi^{-}(t)$ – вне контура, S – оператор сингулярного интегрирования, точка 0 принадлежит области, ограниченной контуром Γ.

Оператором U_j в этом случае является диагональная квадратная матрица, у которой j-й элемент диагонали равен t, а все остальные диагональные элементы равны 1.

Элементом h_j^{+} является столбец, у которого в j-ой строке находится постоянная функция, тождественно равная 1, остальные равны 0.

Убедимся, что при таком выборе операторов U_j и элементов h_j^{+} выполняются условия 1) – 4):

1) $U_j \cdot U_k$ – диагональная матрица, у которой j-й и k-й элементы диагонали равны t, а все остальные диагональные элементы равны 1. $U_k \cdot U_j$ – та же самая матрица.

Таким образом, $U_j \cdot U_k = U_k \cdot U_j$, $j,k = \overline{1,n}$.

2) Пусть $\varphi^{+}(t)$ – произвольный столбец функций, имеющих аналитическое продолжение во внутреннюю область контура Γ. Если U_j умножим на $\varphi^{+}(t)$, то j-ая функция в столбце умножается на t, а все остальные останутся такими же. Очевидно, что новый столбец состоит из функций, имеющих аналитическое продолжение во внутреннюю область контура Γ.

Матрица U_j^{-1} – это диагональная матрица, у которой на j- ом месте диагонали – $1/t$, все остальные элементы равны 1.

Пусть $\varphi^{-}(t)$ – произвольный столбец функций, имеющих аналитическое продолжение во внешнюю область контура Γ. Если умножить теперь U_j^{-1} на $\varphi^{-}(t)$, то j-ая функция в столбце умножается на $1/t$, а все остальные останутся такими же. Очевидно, что новый столбец состоит из функций, имеющих аналитическое продолжение во внешнюю область контура Γ.

Таким образом, для любых $\varphi^{\pm} \in L_{\pm}$ выполняются условия:

$$U_j \varphi^{+} \in L_{+},\ U_j^{-1} \varphi^{-} \in L_{-},\ j = \overline{1,n}.$$

3) Столбец h_j^{+} состоит из постоянных функций. Они имеют аналитическое продолжение во внутреннюю область контура Γ. Если U_j^{-1} умножим на h_j^{+}, получим столбец, у которого на j- ом месте диагонали – $1/t$, все остальные элементы равны 0.
Таким образом:

$$U_j^{-1} h_j^{+} \in L_{-}.$$

4) Если $j \neq k$, $U_j h_k^{+}$ – столбец, у которого j- й (нулевой) элемент умножается на t, а все остальные элементы остаются прежними, т.е.

$$U_j h_k^{+} = h_k^{+}.$$

Легко видеть, что оператор U представляет диагональную матрицу с функциями $t^{ù_1}, t^{ù_2}, K, t^{ù_n}$ на диагонали.

При изучении темы может возникнуть впечатление, что только краевые задачи для аналитических функций являются реализацией задачи (1). Но это не так. Проиллюстрируем на примере.

Рассмотрим систему интегральных уравнений типа свертки:

$$\begin{cases} \varphi_1(t) + \sum\limits_{j=1}^{n} \left(\int\limits_{0}^{+\infty} k_{1j}^{(1)}(t-\tau)\varphi_j(\tau)\, d\tau + \int\limits_{-\infty}^{0} k_{1j}^{(2)}(t-\tau)\varphi_j(\tau)\, d\tau \right) = f_1(t), \\ \varphi_2(t) + \sum\limits_{j=1}^{n} \left(\int\limits_{0}^{+\infty} k_{2j}^{(1)}(t-\tau)\varphi_j(\tau)\, d\tau + \int\limits_{-\infty}^{0} k_{2j}^{(2)}(t-\tau)\varphi_j(\tau)\, d\tau \right) = f_2(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n(t) + \sum\limits_{j=1}^{n} \left(\int\limits_{0}^{+\infty} k_{nj}^{(1)}(t-\tau)\varphi_j(\tau)\, d\tau + \int\limits_{-\infty}^{0} k_{nj}^{(2)}(t-\tau)\varphi_j(\tau)\, d\tau \right) = f_n(t). \end{cases} \qquad (9)$$

Ограничимся простым случаем, когда функции:

$$k_{mj}^{(1)}(t),\ k_{mj}^{(2)}(t) \in L_1(\mathbb{R}),\ f_m(t),\ \varphi_m(t) \in L_2(\mathbb{R}).$$

$L_1(\mathbb{R})$ – пространство абсолютно интегрируемых по Лебегу функций, $L_2(\mathbb{R})$ – пространство функций, квадраты модулей которых интегрируемы по Лебегу, $m = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$.

Банаховым пространством L в этом случае является $L_2^n(\mathbb{R})$ – пространство n-мерных столбцов-функций из $L_2(\mathbb{R})$, оператором S – оператор, действующий по правилу:

$$S\varphi \equiv sgn\ t\varphi(t), \text{ где } \varphi(t) \in L_2^n(\mathbb{R}).$$

Тогда пространства:

L_+ – это пространство столбцов-функций, которые равны 0 при $t < 0$,

L_- – это пространство столбцов-функций, которые равны 0 при $t > 0$.

Система (9) – это обобщение интегрального уравнения типа свертки с двумя ядрами. Представим неизвестные $\varphi_j(t)$ следующим образом :

$$\varphi_j(t) = \varphi_j^+(t) + \varphi_j^-(t),\ j = \overline{1,n}.$$

$$\left\{ \varphi_m^+(t) + \varphi_m^-(t) + \sum_{j=1}^{n} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} k_{mj}^{(1)}(t-\tau)\varphi_j^+(\tau)\, d\tau + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} k_{mj}^{(2)}(t-\tau)\varphi_j^-(\tau)\, d\tau \right) = f_m(t) \right.$$

$$m = \overline{1,n}$$

Далее:

$$\left\{ \varphi_m^+(t) + \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} k_{mj}^{(1)}(t-\tau)\varphi_j^+(\tau)\, d\tau = -\varphi_m^-(t) - \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} k_{mj}^{(2)}(t-\tau)\varphi_j^-(\tau)\, d\tau + f_m(t) \right. \qquad (10)$$

$$m = \overline{1,n}$$

Рассмотрим два линейных оператора, заданных на $L_2^n(\mathbb{R})$:

$$A_1\varphi \equiv \left(\varphi_m(t) + \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} k_{mj}^{(1)}(t-\tau)\varphi_j(\tau)\, d\tau \right)_{n\times 1},$$

$$A_2\varphi \equiv \left(-\varphi_m(t) - \sum_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} k_{mj}^{(2)}(t-\tau)\varphi_j(\tau)\, d\tau \right)_{n\times 1}.$$

Систему (10) можно записать в виде:

$$A_1\varphi^+ = A_2\varphi^- + f. \tag{11}$$

Обратимость оператора A_1 зависит от функций $K_{mn}^{(1)}(x)$ изображений Фурье функций $k_{mn}^{(1)}(t)$. А именно, если матрица:

$$B = E + \left(K_{mj}^{(1)}(x)\right)_{m\times n} \text{ – невырожденная,}$$

то оператор A_1 имеет обратный оператор A_1^{-1}, его можно найти, если определить обратную матрицу и перейти к оригиналам Фурье.

Подействуем на (11) оператором A_1^{-1}:

$$\varphi^+ = A_1^{-1} A_2\varphi^- + A_1^{-1} f.$$

Обозначим:

$$A = A_1^{-1} A_2,\ g = A_1^{-1} f.$$

В результате получим еще одну реализацию задачи (1):

$$\varphi^+ = A\varphi^- + g.$$

Операторы U_j, участвующие в проведенной факторизации, определяются следующим образом : все элементы столбца $U_j\varphi$ кроме j-ого элемента остаются неизменными, а его j-ый элемент определяется по правилу:

$$\varphi_j(t) - 2e^{-t}\int_{-\infty}^{t} e^{\tau}\varphi_j(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Элемент h_j^+ – это столбец, у которого все элементы равны нулю, а на j-ом месте расположена функция $(1+\operatorname{sgn} t)\mathrm{e}^t$.

Построена теория решения абстрактной задачи Римана, которая обобщает как матричную задачу Римана для аналитических функций, так и многие другие задачи, которые не являются краевыми задачами для аналитических функций, в частности систему интегральных уравнений типа свертки с двумя ядрами. Определена конструктивная схема решения задачи в предположении, что её оператор допускает факторизацию. Однако в абстрактной схеме, как и в теории матричной краевой задачи Римана, факторизацию удается осуществить лишь в отдельных конкретных случаях, потому каждый новый случай построения факторизации представляет научную ценность как с теоретической точки зрения, так и с точки зрения их возможных приложений.

References:

1. Моделирование систем: (монография) / Г.А. Оборский, А.Ф. Дащенко, А.В. Усов, Д.В. Дмитришин. – Одесса: Астропринт, 2013. – 664 с.

2. Комарницкий А.Л., Колмакова Л.Н. Метод факторизации при решении двухиндексной системы Винера – Хопфа. Международная летняя математическая школа памяти В.А. Плотникова. 15-22 июня 2013 г. Одесса. Украина. Тезисы докладов.с.68

3. Комарницкий А.Л., Колмакова Л.Н. Метод факторизации при решении парной двухиндексной системы типа свертки. Международная летняя математическая школа памяти В.А. Плотникова. 11-16 июня 2018 г. Одесса. Украина. Тезисы докладов. с. 59

4. Комарницкий А.Л., Колмакова Л.Н Абстрактная схема решения задачи Римана. XI International Scientific and Practical Conference "International Trends in Science and Texnology". Vol.1, March 31, 2019, Warsaw, Poland. Материалы конференции. – С. 6-11.

5. Черский Ю.И. Общее сингулярное уравнение и уравнение типа свёртки. Мат. Сб. 1957. том 43. №3. – С. 277-296.

6. Комарніцький А.Л., Колмакова Л.М. Матеріали XVII Міжнародної наукової конференції імені академіка Михайла Кравчука, Том 1, Київ, 19-20 травня 2016 р. (с. 150-151).