МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

Кафедра вищої математики та моделювання систем

Теорія функції комплексної змінної

Навчально-методичний посібник та розрахунково-графічна робота
з дисципліни «Вища математика»
для студентів першого (бакалаврського) рівня освіти
по спеціальності
151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»

Одеса – 2021

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

Кафедра вищої математики та моделювання систем

Навчально-методичний посібник та розрахунково-графічна робота
до розділу «**Теорія функції комплексної змінної**»
з дисципліни «Вища математика»
для студентів першого (бакалаврського) рівня освіти
по спеціальності
151 «Автоматизація та комп’ютерно-інтегровані технології»

Затверджено
на засіданні кафедри вищої
математики та
моделювання систем
Протокол №5 від
28.12.2021 року

Одеса – 2021

УДК 517.5
ББК 22.11

Навчально-методичний посібник та розрахунково-графічна робота до розділу «Теорія функції комплексної змінної» з дисципліни «Вища математика» для студентів першого (бакалаврського) рівня освіти по спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» / Уклад.: Крапива Н. В., Тостановська І. Б. – Одеса: Держ. ун-т «Одеська політехніка», 2021. – 83с.

Укладачі: Н. В. Крапива, доц., канд. фіз.-мат. наук
І. Б. Тостановська, ст. викл.

Під редакцією доктора техн. наук, професора Усова А. В.

Навчально-методичний посібник призначений для використання у навчальному процесі та для самостійної роботи студентів Інституту комп'ютерних систем.

У навчальному посібнику викладено основи одного з розділів дисципліни «Вища математика», а саме розділ «Теорія функції комплексної змінної». До кожного параграфу додаються приклади розв'язування різноманітних задач. Наприкінці посібника дана розрахунково-графічна робота, яка призначена для використання у навчальному процесі та для самостійної роботи студентів спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології». Дана робота складається з 10 завдань, кожне з яких містить 30 варіантів.

Посібник може бути використаний як довідник, розв'язник та як задачник.

1. Комплексні числа

Упорядкована пара (x, y) двох дійсних чисел x та y позначається z і називається *комплексним числом* (КЧ), якщо:

1) $(x_1, y_1) \pm (x_2, y_2) = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2)$;

2) $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$.

Множина усіх комплексних чисел позначається C:

$$C = \{(x, y) : x \in R, y \in R\}.$$

Дійсне число x є окремим випадком комплексного числа: $(x, 0) = x$.

Комплексне число $(0,1)$ називають *уявною одиницею* і позначають буквою i (або j)

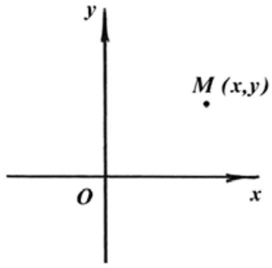
$$i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (0-1, 0+0) = (-1, 0) = -1.$$

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1$$

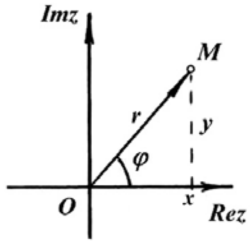
$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0,1)\cdot(y, 0) = x + iy,$$

x — дійсна частина КЧ z (позн.: $x = Re\, z$ від лат. ***realis*** – дійсний),
y — уявна частина КЧ z (позн.: $y = Im\, z$ від лат. ***imaginarius*** – уявний).

Геометричний зміст комплексного числа



Комплексне число
$z = (x, y)$ — це точка $M(x, y)$.
вісь x-ів — це дійсна вісь;
вісь y-ів — це уявна вісь.



Комплексне число z — це вектор $\overline{OM}$:
$r = |z|$ — це модуль КЧ (***modz***),

$$0 < |z| < +\infty;$$

$\varphi = Argz$ — це аргумент КЧ z,

$$-\infty < Argz < +\infty;$$

$Argz$ — це головне значення аргументу КЧ z, $-\pi < arg\, z \le \pi$.

Координатна площина, на якій комплексні числа зображаються точками або векторами, називається *комплексною площиною* (z).

Поширена комплексна площина є поєднання комплексної площини (z) з точкою $z = \infty$.

<table>
<tr><th colspan="2">Алгебраїчна форма комплексного числа: $z = x + iy$</th></tr>
<tr><th>Визначення</th><th>Дії над КЧ</th></tr>
<tr><td>$z_1 = x_1 + iy_1$
$z_2 = x_2 + iy_2$
1) $z_1 = z_2 \overset{def}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$
2) спряжене КЧ:
$\bar{z} = x - iy$</td><td>1) $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$
2) $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$
3) $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$
4) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Формула Ейлера: $e^{i\varphi} = cos\varphi + i\,sin\varphi$</td></tr>
<tr><th>Тригонометрична форма комплексного числа:
$z = r(cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi)$</th><th>Показникова форма комплексного числа:
$z = re^{i\varphi}$</th></tr>
<tr><td>спряжене КЧ:
$\bar{z} = r(cos\,\varphi - i\,sin\,\varphi)$</td><td>спряжене КЧ:
$\bar{z} = re^{-i\varphi}$</td></tr>
<tr><td>$z_1 = r_1(cos\,\varphi_1 + i\,sin\,\varphi_1)$
$z_2 = r_2(cos\,\varphi_2 + i\,sin\,\varphi_2)$</td><td>$z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$
$z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$z_1 = z_2 \overset{def}{\Leftrightarrow} \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \varphi_2 = \varphi_1 + 2k\pi,\ k \in Z \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\,(cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\,sin(\varphi_1 + \varphi_2))$
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\,sin(\varphi_1 - \varphi_2))$
Формули Муавра:
$z^n = r^n(cos\,n\varphi + i\,sin\,n\varphi),\quad n \in N$
$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\,sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$
$k = 0, 1, ..., n-1$
$\sqrt[n]{r} > 0$</td><td>$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$
Формули Муавра:
$z^n = r^ne^{in\varphi},\ n \in N$
$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi + 2\pi k}{n}},$
$k = 0, 1, ..., n-1$
$\sqrt[n]{r} > 0$</td></tr>
</table>

$$\frac{1}{i} = -i, \qquad i^2 = -1, \qquad i^3 = -i, \qquad i^4 = 1,$$

$$i^{4k} = 1, \qquad i^{4k+1} = i, \qquad i^{4k+2} = -1, \qquad i^{4k+3} = -i$$

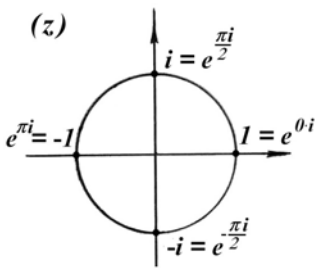
Перехід від алгебраїчної форми КЧ до показникової (або тригонометричної)

$$z = x + iy \quad \Rightarrow \quad z = re^{i\varphi}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,$$

$$\varphi \equiv \arg z = \begin{cases} arctg\,\dfrac{y}{x}, & x > 0 \\ \pi + arctg\,\dfrac{y}{x}, & x < 0,\ y \ge 0 \\ -\pi + arctg\,\dfrac{y}{x}, & x < 0,\ y < 0 \\ \dfrac{\pi}{2}, & x = 0,\ y \ge 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x = 0,\ y < 0 \end{cases}$$

або $$\varphi \equiv \arg z = \begin{cases} \arccos\dfrac{x}{r}, & y \ge 0 \\ -\arccos\dfrac{x}{r}, & y < 0 \end{cases}$$



Приклад 1. Знайти $Im\,z$ та $Re\,z$, коли $z = \dfrac{3 + i^{13}}{1 + i^7}$.

Виконаємо дії:

$$z = \frac{3 + i^{13}}{1 + i^7} = \frac{3 + i}{1 - i} = \frac{(3 + i)\cdot(1 + i)}{(1 - i)\cdot(1 + i)} = \frac{3 + 3i + i + i^2}{1^2 - i^2} = \frac{2 + 4i}{2} = 1 + 2i$$

Відповідь: $Im\,z = 2,\quad Re\,z = 1.$

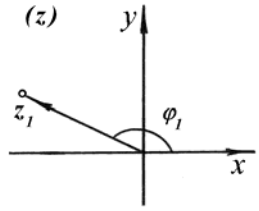
Приклад 2. Виконуючи дії в показниковій формі, обчислити $z = \dfrac{z_1^5}{z_2^3 \cdot z_3^4}$, коли $z_1 = -\sqrt{3} + i,\ z_2 = -2 - 2\sqrt{3}\,i,\ z_3 = 1 - i.$ Указати $|z|$, $\arg z$ та тригонометричну форму комплексного числа.

1) $z_1 = -\sqrt{3} + i$

$r_1 = \sqrt{3+1} = 2$

$\varphi_1 = \pi - arctg\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{5}{6}\pi$

$z_1 = 2e^{\frac{5}{6}\pi i}$

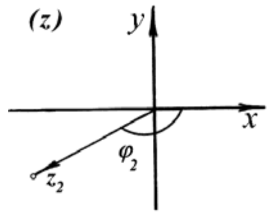


2) $z_2 = -2 - 2\sqrt{3}i$

$r_2 = \sqrt{4+12} = 4$

$\varphi_2 = -\pi + arctg\dfrac{2\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{2}{3}\pi$

$z_2 = 4e^{-\frac{2}{3}\pi i}$

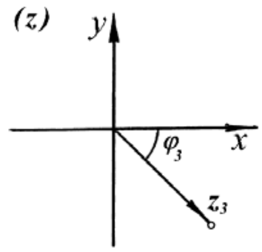


3) $z_3 = 1 - i$

$r_3 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\varphi_3 = -arctg1 = -\dfrac{\pi}{4}$

$z_3 = \sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{4}i}$



4)
$$z = \frac{\left(2e^{\frac{5}{6}\pi i}\right)^5}{\left(4e^{-\frac{2}{3}\pi i}\right)^3 \cdot \left(\sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)^4} = \frac{1}{8}e^{\frac{43}{6}\pi i},$$

$$arg\, z = \frac{43}{6}\pi - 8\pi = -\frac{5}{6}\pi, \text{ оскільки } -\pi < arg\, z \le \pi.$$

Відповідь: $z = \dfrac{1}{8}e^{-\frac{5}{6}\pi i}, \quad |z| = \dfrac{1}{8}, \quad arg\, z = -\dfrac{5}{6}\pi,$

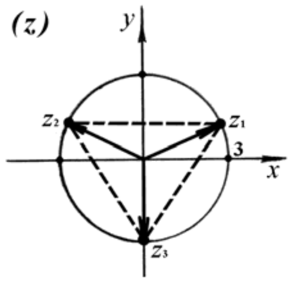
$$z = \frac{1}{8}\left(cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right) + i \cdot sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right).$$

Приклад 3. Розв'язати рівняння $z^3 - 27i = 0$ та зобразити його корені на комплексній площині (z) у вигляді векторів.

$$z^3 - 27i = 0 \Rightarrow z^3 = 27i \Rightarrow z = \sqrt[3]{27i} = \sqrt[3]{27e^{\frac{\pi}{2}i}}.$$

Скористаємось формулою $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\varphi + 2\pi k}{n}}$, $\quad k = 0, 1, ..., n-1.$

Одержимо $\sqrt[3]{27e^{\frac{\pi}{2}i}} = \sqrt[3]{27}\; e^{i\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3}}$, $k = 0, 1, 2$.



$k = 0 \Rightarrow z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$,

$k = 1 \Rightarrow z_2 = 3e^{i\frac{5\pi}{6}}$,

$k = 2 \Rightarrow z_3 = 3e^{i\frac{9\pi}{6}} = 3e^{i\frac{3\pi}{2}} = 3e^{-i\frac{\pi}{2}}.$

Приклад 4. Використовуючи формулу Муавра

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \quad n \in N,$$

довести, що $\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$ та $\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$.

За формулою Муавра: $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi.$

За формулою «куб суми»:

$$\cos^3\varphi + 3\cos^2\varphi \cdot i\sin\varphi + 3\cos\varphi \cdot i^2\sin^2\varphi + i^3\sin^3\varphi =$$
$$= \left(\cos^3\varphi - 3\cos\varphi \cdot \sin^2\varphi\right) + i\left(3\cos^2\varphi \cdot \sin\varphi - \sin^3\varphi\right) =$$
$$= \left(\cos^3\varphi - 3\cos\varphi\left(1 - \cos^2\varphi\right)\right) + i\left(3\left(1 - \sin^2\varphi\right)\sin\varphi - \sin^3\varphi\right) =$$
$$= \left(4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi\right) + i\left(3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi\right).$$

За означенням рівності двох комплексних чисел отримаємо:

$$\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi, \quad \sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi.$$

2. Криві та області на комплексній площині

Координатна площина, на якій комплексні числа зображаються точками або векторами, називається *комплексною площиною* (z).

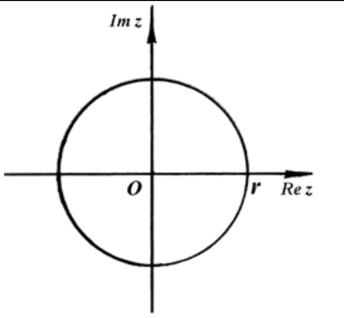
Розширена комплексна площина є поєднання комплексної площини (z) з точкою $z = \infty$.

Неперервна крива $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [\alpha;\beta]$ комплексної площини (z), що не має точок самоперетину, називається *кривою Жордана* (або *простою кривою*).

Параметричні рівняння кривої Жордана можна замінити одним *комплексним рівнянням* $z(t) = x(t) + i\,y(t),\quad t \in [\alpha;\beta]$.

Якщо $z(\alpha) = z(\beta)$, то крива Жордана *замкнена*.

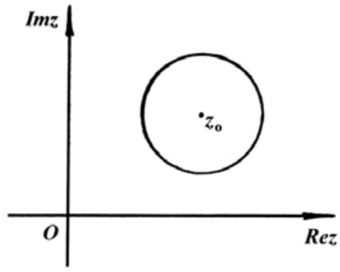
Коло — це жорданова крива



$|z| = r$

$z(t) = r\cos t + ir\sin t,\ t \in [0;2\pi]$

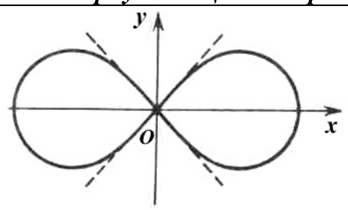
$z(t) = re^{it},\ t \in [0;2\pi]$



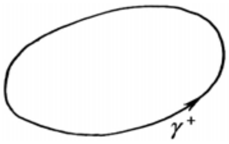
$|z - z_0| = r$

$z(t) = z_0 + re^{it},\ t \in [0;2\pi]$

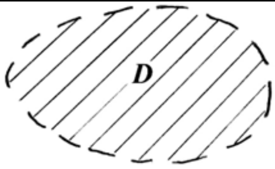
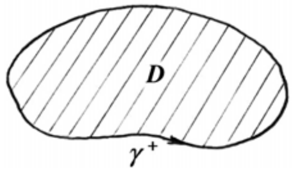
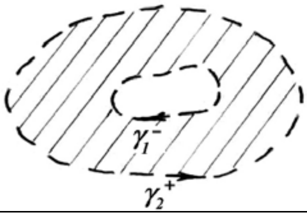
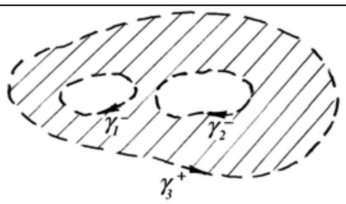
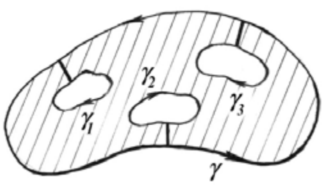
Лемніската Бернуллі —це не жорданова крива

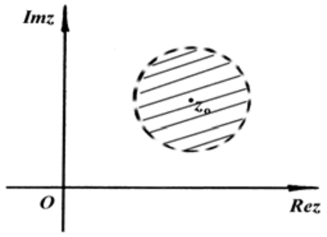


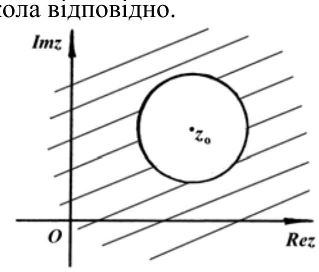
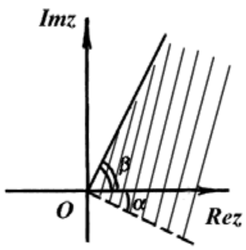
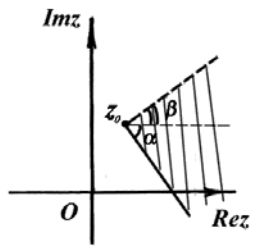
Обхід *замкненої* жорданової кривої, здійснюваний таким чином, що її *внутрішність* залишається *ліворуч,* називається *додатним.*



Якщо крива *незамкнена*, то її *додатний обхід* відповідає *зростанню* параметра t.

<table>
<tr><td colspan="2">Множина точок комплексної площини (z), що міститься всередині однієї замкненої жорданової кривої, називається однозв'язною областю.</td></tr>
<tr><td>Однозв'язна областьD</td><td>Замкнена однозв'язна область $\overline{D} = D \cup \gamma$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Двозв'язна область з границею
$\gamma = \gamma_1^- + \gamma_2^+$</td><td>Тризв'язна область з границею
$\gamma = \gamma_1^- + \gamma_2^- + \gamma_3^+$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Будь-яку n – зв'язну область можна перетворити в однозв'язну за допомогою $(n - 1)$-го перерізу так, як зображено на рисунку.</td><td>
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Геометричний зміст деяких співвідношень</th></tr>
<tr><td colspan="2">Нерівності $\left|z - z_0\right| < r$ та $\left|z - z_0\right| \geq r$ задають на площині (z) множину точок, розташованих усередині кола та поза кола відповідно.



</td></tr>
<tr><td colspan="2">Рівняння $\boldsymbol{arg}\, z = \varphi$ для заданого φ є рівняння променя, що виходить з початку $z = 0$ під кутом φ по відношенню до осі $\boldsymbol{Ox}$.</td></tr>
<tr><td>Подвійна нерівність
$\alpha < \boldsymbol{arg}\, z \leq \beta$
визначає множину точок площини (z), яка розташована усередині кута з вершиною в точці $z = 0$.

</td><td>Множина $\alpha \leq \boldsymbol{arg}(z - z_0) < \beta$ — це кут з вершиною в точці $z = z_0$.

</td></tr>
</table>

Приклад 1. Записати комплексне рівняння відрізка прямої $y = 2x + 2$ від т. $A(-2; -2)$ до т. $B(1; 4)$.

$$[AB]: \begin{cases} x = t, \\ y = 2t + 2, \\ t \in [-2; 1] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z(t) = t + i(2t + 2), \\ t \in [-2; 1] \end{cases}$$

Відповідь: $z(t) = t + i(2t + 2),\ t \in [-2; 1]$.

Приклад 2. Встановити тип кривої, яка задана рівнянням $\left|z+\frac{3+5i}{1-i}\right|=3$.

Перетворимо дане рівняння:

$$\left|x+iy+\frac{(3+5i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right|=3 \Rightarrow \left|x+iy+\frac{-2+8i}{2}\right|=3 \Rightarrow$$

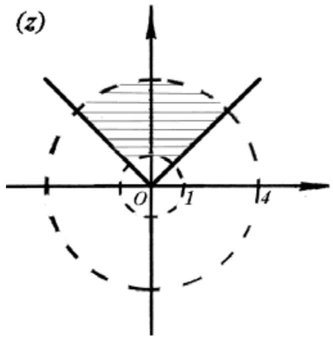
$$|x-1+i\cdot(y+4)|=3 \quad \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y+4)^2}=3.$$

Звідки: $(x-1)^2+(y+4)^2=3^2$.

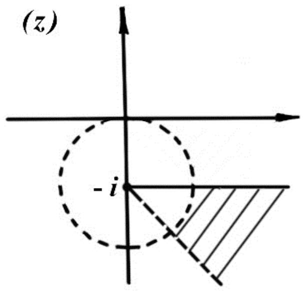
Відповідь: коло з центром в точці $(1;-4)$ радіуса 3 .

Приклад 3. Зобразити на комплексній площині (z) множину точок, що задовольняє системі нерівностей

à) $\begin{cases} 1<|z|<4, \\ \frac{\pi}{4}\le arg z \le \frac{3}{4}\pi \end{cases}$

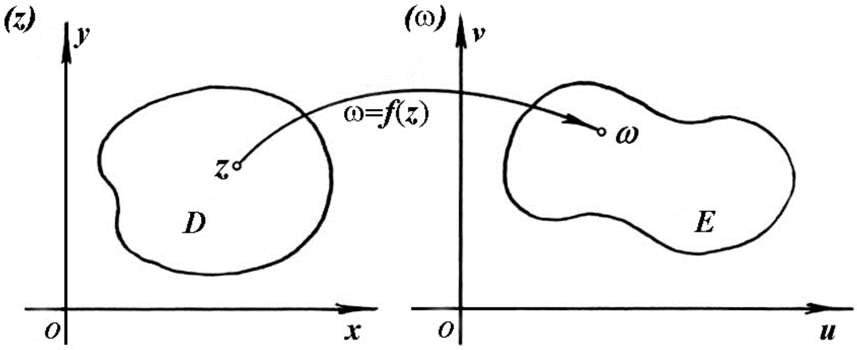


á) $\begin{cases} |z+i|>1, \\ -\frac{\pi}{4}< arg(z+i) \le 0 \end{cases}$



3. Елементарні функції комплексної змінної

Комплекснозначна функція $\omega = f(z)$ визначає закон, за яким кожному значенню комплексної змінної $z = x + iy$ з множини D відповідає одне, декілька або нескінченна множина значень комплексної змінної $\omega = u + iv$ з деякої множини E. У першому випадку функція називається *однозначною*, у другому — *багатозначною* функцією комплексної змінної (ФКЗ) з областю визначення D та множиною значень E .



З геометричної точки зору функція $\omega = f(z)$ здійснює *відображення* множини точок D комплексної площини (z) на множину точок E комплексної площини (ω).

Функцію $\omega = f(z)$ можна подати за допомогою двох дійсних функцій $u(x,y)$ та $v(x,y)$: $\omega = u(x,y) + i\,v(x,y)$,

де $u(x,y) = Re f(z)$, $v(x,y) = Im f(z)$.

Приклад 1. Виділити дійсну та уявну частини функції $\omega = \frac{1}{z}$.

$$\omega = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2} \cdot i .$$

Одержали: $u = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $v = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

Відповідь: $Re\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}$, $Im\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2}$.

Приклад 2. За допомогою функції $\omega = z^2$ відобразити лінію $x = 3$ на комплексну площину (ω).

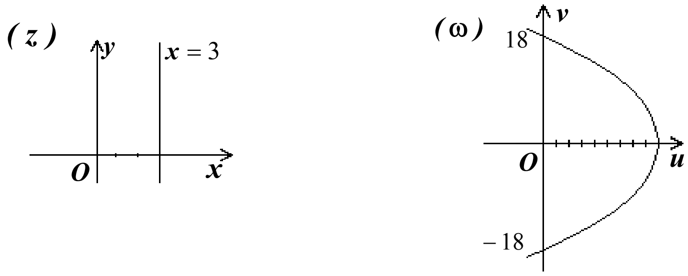
1) Виділяємо дійсну та уявну частини функції $\omega = z^2$:

$$\omega = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i \cdot 2xy \quad \Rightarrow \quad u = x^2 - y^2, \;\; v = 2xy.$$

2) Виключаємо x та y із системи:

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 9 - y^2 \\ v = 6y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{v}{6} \\ u = 9 - \dfrac{v^2}{36} \end{cases}$$

$v^2 = -36 \cdot (u-9)$ — парабола на площині (ω) з вершиною в точці $(9;0)$.



Приклад 3. За допомогою функції $\omega = 3z + i$ відобразити коло $x^2 + y^2 = 4$ на комплексну площину (ω).

1) Запишемо дану функцію у вигляді $\omega = u(x,y) + iv(x,y)$:

$\omega = 3z + i = 3(x+iy) + i = 3x + i(3y+1)$.

2) Виключимо x та y із системи:

$$\begin{cases} u = 3x \\ v = 3y + 1 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u}{3} \\ y = \dfrac{v-1}{3} \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{u^2}{3^2} + \frac{(v-1)^2}{3^2} = 4 \quad \text{або}$$

$u^2 + (v-1)^2 = 36$ — коло на площині (ω) з центром в т. $(0;1)$ радіуса 6.

Трансцендентні однозначні функції комплексної змінної

Визначення

1) $e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$

2) $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$

3) $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots$

4) $ch\, z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$

5) $sh\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$

Формули, що пов'язують функції 1) — 5)

$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

$\cos iz = ch\, z$

$ch\, iz = \cos z$

$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

$\sin iz = i\, sh\, z$

$sh\, iz = i \sin z$

Періодичність однозначних функцій комплексної змінної

$$\sin(z + 2\pi) = \sin z$$
$$\cos(z + 2\pi) = \cos z$$
$$e^{z+2\pi i} = e^z$$
$$sh(z + 2\pi i) = sh\, z$$
$$ch(z + 2\pi i) = ch\, z$$

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$$
$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$$
$$sh(z_1 \pm z_2) = sh z_1 ch z_2 \pm ch z_1 sh z_2$$
$$ch(z_1 \pm z_2) = ch z_1 ch z_2 \pm sh z_1 sh z_2$$

Приклад 1. Обчислити $e^{ln2+\frac{\pi}{2}i}$.

$$e^{ln2+\frac{\pi}{2}i}=e^{ln2}\cdot e^{\frac{\pi}{2}i}=2\cdot\left(cos\frac{\pi}{2}+i\,sin\frac{\pi}{2}\right)=2\cdot(0+i\cdot 1)=2i$$

Відповідь: $e^{ln2+\frac{\pi}{2}i}=2i$.

Приклад 2. Обчислити $cos\,i$.

$$cos\,i=ch1=\frac{e+e^{-1}}{2}=\frac{e^2+1}{2e}\approx 1{,}53\ (>1).$$

Відповідь **:** $cos\,i\approx 1{,}53.$

Приклад 3. Виділити дійсну та уявну частини функцій:

а) $\omega=e^z$, *б)* $\omega=sin\,z$, *в)* $\omega=ch\,z$.

а) $\omega=e^z=e^{x+iy}=e^x\cdot e^{iy}=e^x(cosy+i\,siny)=e^x\,cosy+i\,e^x\,siny.$

Відповідь : $Re\left(e^z\right)=e^x cosy,\ Im\left(e^z\right)=e^x\cdot siny$.

б) $\omega=sin\,z=sin(x+iy)=sin\,x\cdot cos\,iy+cos\,x\cdot sin\,iy=sin\,x\cdot chy+i\,cos\,x\cdot shy$

Відповідь : $Re(sin\,z)=sin\,x\cdot chy,\quad Im(sin\,z)=cos\,x\cdot shy.$

в) $\omega=ch\,z=ch(x+iy)=ch\,x\cdot ch\,iy+sh\,x\cdot sh\,iy=chx\cdot cos\,y+i\,shx\cdot sin\,y$

Відповідь : $Re(chz)=chx\cdot cos\,y,\quad Im(chz)=shx\cdot sin\,y.$

Багатозначні функції комплексної змінної	
1. Логарифмічна функція	
$\omega = Lnz = ln\lvert z\rvert + i(arg\,z + 2k\pi),\ k \in Z$ (однозначна гілка: $ln\,z = ln\lvert z\rvert + i\,argz$)	
2. Загальна степенева функція	
$z^a = e^{aLnz},\ a \in C$ ($z^a = e^{a\,ln\,z}$ — головне значення степеневої функції)	
3. Загальна показникова функція	
$\omega = a^z = e^{zLna},\ a \in C$ ($a^z = e^{z\,ln\,a}$ — головне значення показникової функції)	
4. Обернені тригонометричні функції	
$Arc\,sin\,z = -i\,Ln(iz + \sqrt{1 - z^2})$	$Arctgz = -\frac{i}{2}Ln\frac{1+iz}{1-iz}$
$Arc\,cos\,z = -i\,Ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$	$Arcctgz = -\frac{i}{2}Ln\frac{z+i}{z-i}$
5. Обернені гіперболічні функції	
$Arsh\,z = Ln\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right)$	$Arch\,z = Ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$
$Arth\,z = \frac{1}{2}Ln\frac{1+z}{1-z}$	$Arcth\,z = \frac{1}{2}Ln\frac{z+1}{z-1}$

Приклад 1. Знайти головне значення $\left(\sqrt{3}+i\right)^{i}$.

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^{i}=e^{i\cdot Ln\left(\sqrt{3}+i\right)}=e^{i\left(ln\left|\sqrt{3}+i\right|+i\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)\right)}$$

Головне значення одержимо при $k=0$:

$$e^{i\left(ln2+i\cdot\frac{\pi}{6}\right)}=e^{-\frac{\pi}{6}+i\,ln2}=e^{-\frac{\pi}{6}}\cdot e^{i\,ln2}=$$

$$=e^{-\frac{\pi}{6}}\left(cos\,ln2+i\,sin\,ln2\right)=e^{-\frac{\pi}{6}}\cdot cos\,ln2+i\cdot e^{-\frac{\pi}{6}}\,sin\,ln2.$$

Відповідь: $e^{-\frac{\pi}{6}}\cdot cos\,ln\,2+i\cdot e^{-\frac{\pi}{6}}\,sin\,ln\,2.$

Приклад 2. Розв'язати рівняння $cos\,z=2i$.

Використовуючи формулу $cos\,z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, отримаємо

$$e^{iz}+e^{-iz}=4i,$$

$$\left(e^{iz}\right)^{2}-4ie^{iz}+1=0,$$

$$\left(e^{iz}\right)_{1,2}=i\left(2\pm\sqrt{5}\right).$$

Звідки:

$$iz=Ln\left(i\left(2\pm\sqrt{5}\right)\right)=ln\left(\sqrt{5}\pm 2\right)\pm i\,\frac{\pi}{2}+2\pi ki,\quad k\in Z.$$

Остаточно:

$$z=-i\,ln\left(\sqrt{5}\pm 2\right)\pm\frac{\pi}{2}+2\pi k,\quad k\in Z.$$

Відповідь: $-i\,ln\left(\sqrt{5}\pm 2\right)\pm\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\quad k\in Z.$

4. Диференціювання функції комплексної змінної

Функція $\omega = f(z)$ *диференційовна* в точці $z_0 \in D$, якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0)$ ($\Delta z \to 0$ за будь-яким напрямком).

Необхідна та достатня умови диференційовності функції в точці

Критерій Коші–Рімана. Функція $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ диференційовна в точці $z_0 = x_0 + iy_0$ тоді і тільки тоді, коли функції $u(x,y)$ та $v(x,y)$ диференційовні в точці (x_0, y_0), причому в цій точці мають місце рівності $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ та $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

Умови Коші—Рімана (C.—R.):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \qquad f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \qquad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

Умови C.–R. в полярних координатах:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

$$f'(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right)\cdot e^{-i\varphi}$$

Якщо функція $\omega = f(z)$ диференційовна не тільки в точці z_0, а також і в деякому її околі, то її називають *аналітичною в точці* z_0.

Якщо функція $\omega = f(z)$ аналітична в кожній точці області D, то вона *аналітична* і *в самій області* D.

Функцію $f(z)$ називають аналітичною в замкненій області $\overline{D}$, якщо вона аналітична в деякій іншій області, що містить в собі область $\overline{D}$.

Точку $z = a$, в якій порушується аналітичність функції $f(z)$, називають *особливою точкою* цієї функції.

Усі елементарні однозначні функції аналітичні в їх областях визначення.	***Формули диференціювання, які доведені в R, мають місце і в C.***

Дійсна та *уявна* частини *аналітичної функції* $\omega = u(x,y) + i\,v(x,y)$ є функції *гармонічні*, тобто кожна з них задовольняє рівнянню Лапласа $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$, а саме:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{та} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Дві гармонічні функції, що задовольняють умовам C.–R., називають *спряжено-гармонічними функціями.*

Дійсна та уявна частини аналітичної функції є спряжені гармонічні функції.

Приклад 1. Перевірити на аналітичність функцію $\omega = z^2$ і знайти її похідну.

$$\omega = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy \;\Rightarrow\; \begin{cases} u(x,y) = x^2 - y^2 \\ v(x,y) = 2xy \end{cases}$$

Звідки: $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = 2x, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} = -2y. \end{cases}$

Умови C.–R. виконуються для всіх точок (x,y) комплексної площини (z).

Отже, функція $\omega = z^2$ *аналітична в* C. Її похідна:

$$\omega' = (z^2)' = 2x + i2y = 2(x+iy) = 2z,$$

$$\omega' = 2z.$$

Приклад 2. Перевірити на аналітичність функцію $\omega = z^n$ і знайти її похідну.

$$\omega = z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \Rightarrow \begin{cases} u(r,\varphi) = r^n \cos n\varphi \\ v(r,\varphi) = r^n \sin n\varphi \end{cases}$$

Звідки $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi} = nr^{n-1}\cos n\varphi \\ \dfrac{\partial v}{\partial r} = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi} = nr^{n-1}\sin n\varphi \end{cases}$

Умови C.–R. виконуються для всіх (r,φ). Функція $\omega = z^n$ *аналітична в* C.

$$\omega' = \left(z^n\right)' = nr^{n-1}(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)e^{-i\varphi} = nr^{n-1}e^{i(n-1)\varphi} = nz^{n-1},$$

$$\omega' = nz^{n-1}.$$

Приклад 3. Перевірити на аналітичність функцію $\omega = e^{\bar{z} i}$.

$$\omega = e^{\bar{z} i} = e^{i(x-iy)} = e^y(\cos x + i \sin x) \;\Rightarrow\; \begin{cases} u(x,y) = e^y \cdot \cos x \\ v(x,y) = e^y \cdot \sin x \end{cases}$$

Звідки $\dfrac{\partial u}{\partial x} = e^y \cdot (-\sin x), \quad \dfrac{\partial v}{\partial y} = e^y \cdot \sin x$

Оскільки $\dfrac{\partial u}{\partial x} \neq \dfrac{\partial v}{\partial y}$, то дана функція ***не аналітична***.

Приклад 4. Відновити аналітичну функцію $\omega = f(z)$ за її дійсною частиною $u = 2x^2 - 2y^2 - y + 6$, коли $f(0) = 6i$.

Перевіримо функцію $u = 2x^2 - 2y^2 - y + 6$ на гармонічність:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 4x \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -4y - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4 \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -4 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4 - 4 = 0.$$

Функція $u = 2x^2 - 2y^2 - y + 6$ гармонічна, а тому може бути дійсною частиною деякої аналітичної функції $\omega = u(x,y) + i\,v(x,y)$.

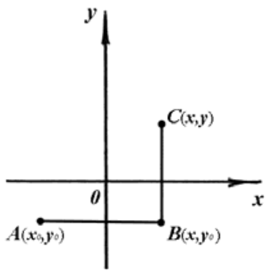
Уявна частина шуканої аналітичної функції: $v(x,y) = \int\limits_{(x_\circ,y_\circ)}^{(x,y)} dv$,

де $dv = \dfrac{\partial v}{\partial x}dx + \dfrac{\partial v}{\partial y}dy$ — повний диференціал функції $v(x,y)$.

За умовами C.–R.: $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} = 4y + 1$, $\quad \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x} = 4x$.

Отже, $v(x,y) = \int\limits_{(x_\circ,y_\circ)}^{(x,y)} (4y+1)dx + 4x\,dy$.

Оскільки інтеграл від повного диференціала не залежить від форми шляху інтегрування, то можна вибрати шлях інтегрування у вигляді ламаної, що складається із двох ланцюгів AB та BC , які паралельні відповідним координатним осям. Тоді:



$$v(x,y) = \int\limits_{AB} + \int\limits_{BC} = \int\limits_{x_\circ}^{x} (4y_\circ + 1)dx + \int\limits_{y_\circ}^{y} 4x\,dy = (4y_\circ + 1)x\Big|_{x_\circ}^{x} + 4xy\Big|_{y_\circ}^{y} =$$

$$= 4y_\circ x + x - 4y_\circ x_\circ - x_\circ + 4xy - 4xy_\circ = 4xy + x + C.$$

Одержали: $\omega = \left(2x^2 - 2y^2 - y + 6\right) + i(4xy + x + C)$;

$\omega = 2\left(x^2 - y^2 + i \cdot 2xy\right) + i(x + iy) + 6 + iC$; $\quad \omega = 2(x + iy)^2 + i(x + iy) + 6 + iC$;

$\omega = f(z) \equiv 2z^2 + iz + 6 + iC$.

Знайдемо C: $\begin{cases} \omega = 2z^2 + iz + 6 + iC, \\ f(0) = 6i \end{cases} \Rightarrow 6 + iC = 6i \Rightarrow C = 6 + 6i$.

Відповідь: $\omega = 2z^2 + iz + 6i$.

5. Конформні відображення

Будь-яку функцію комплексної змінної можна розглядати як відображення однієї комплексної площини на іншу. В теорії функцій комплексної змінної особливо велика увага надається відображенням, що здійснюються аналітичними функціями. Це пов'язано з тим, що значну кількість задач розв'язують за такою схемою: спочатку знаходять розв'язок задачі для найпростішої області , а потім шуканий розв'язок одержують, перетворюючи знайдений розв'язок за допомогою деяких аналітичних відображень.

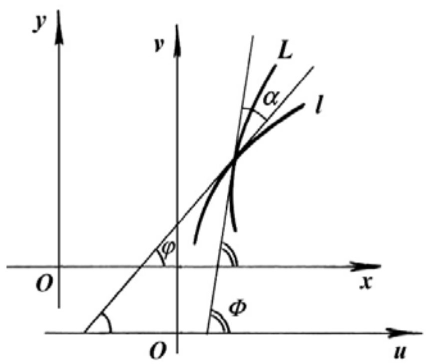
Розглянемо функцію $\omega = f(z)$, яка *аналітична* в деякій однозв'язній області $\boldsymbol{D}$, що містить точку z_0. Тоді існує

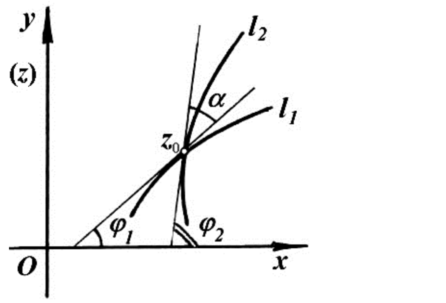
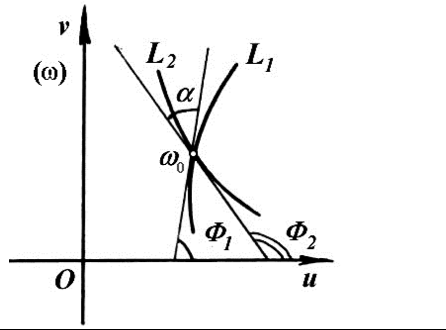
$$\lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ \text{за будь яким} \\ \text{законом}}} \frac{\Delta\omega(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0) \equiv k\, e^{i\alpha},$$

де $\alpha = \arg f'(z_0), \quad k = |f'(z_0)|$.

Геометричний зміст $\arg f'(z_0),\ f'(z_0) \neq 0$

$\arg f'(z_0)$ є кут, на який треба повернути дотичну в точці z_0 до будь-якої гладкої кривої $\boldsymbol{l}$, що проходить через т. z_0, щоб одержати напрямок дотичної у відповідній точці $\omega_0 = f(z_0)$ до образа $\boldsymbol{L}$ цієї кривої.



<table>
<tr>
<td rowspan="2">Відображення, яке здійснюється аналітичною функцією $\omega = f(z)$, має так звану *властивість консерватизму кутів*, яка означає, що кут між прообразами кривих, що проходять через деяку точку z_0, дорівнює куту між відповідними образами цих кривих, що проходять через відповідну точку $\omega_0 = f(z_0)$.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">***При відображенні за допомогою аналітичних функцій кути між відповідними образами зберігаються не лише за величиною, але й за напрямком відліку.***</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">***Геометричний зміст*** $\left|f'(z_0)\right|$, $f'(z_0) \neq 0$</td>
</tr>
<tr>
<td>$\left|f'(z_0)\right|$ є коефіцієнт *розтягу* (при $k > 1$), або *стиску* (при $0 < k < 1$) довільного нескінченно малого елемента, що виходить з т. z_0. При цьому коефіцієнт *розтягу* (*стиску*) буде однаковим у всіх напрямках в достатньо малому околі точки z_0.</td>
<td>$\Rightarrow$ Відображення, яке здійснюється *аналітичною* функцією $\omega = f(z)$, має *властивість сталості розтягу (стиску)* в точці z_0 в достатньо малому її околі.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">***Аналітичне відображення є відображення подібності в нескінченно малому (поблизу кожної точки*** z_0***, в якій*** $f'(z_0) \neq 0$***).***</td>
</tr>
</table>

Відображення, яким притаманні властивості *сталості розтягу* та *консерватизму кутів*, називають *конформними*, тобто такими, що зберігають форму.

Відображення за допомогою *аналітичних функцій* називають *конформними відображеннями I-го роду* (вони зберігають кути між образами кривих не лише за абсолютною величиною, але й за напрямком відліку).

Конформні відображення, при яких напрямок відліку кутів між образами кривих змінюється на протилежний, називають *конформними відображеннями II–го роду.*

Якщо $f(z)$ — *аналітична* функція, то відображення $\omega = \overline{f(z)}$ буде *конформним II–го роду.*

Якщо $\omega = \overline{f(z)}$ визначає *конформне відображення II–го роду,* то $\omega = \overline{\overline{f(z)}}$ визначає *конформне відображення I–го роду.*

Приклад. Знайти кут повороту та коефіцієнт розтягу в точці $z_\circ = 1 - 3i$ при відображенні $\omega = \frac{i}{2} z^2 + (i-1)z - 5i + 3.$

Коефіцієнт розтягу $k = |\omega'(z_\circ)|$, а кут повороту $\alpha = arg\,\omega'(z_\circ)$.

Знаходимо:

$$\omega'(z) = \frac{i}{2} \cdot 2z + i - 1 = iz + i - 1;$$

$$\omega'(z_\circ) = \omega'(1-3i) = i(1-3i) + i - 1 = i + 3 + i - 1 = 2 + 2i.$$

Отже,

$$k = |2+2i| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2};$$

$$\alpha = arctg\frac{y}{x} = arctg 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Відповідь: $k = 2\sqrt{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Найпростішим прикладом конформного відображення є відображення за допомогою лінійної функції.

Лінійна функція $\omega = a\,z + b$, $a \neq 0$,

де a, b — комплексні сталі, є аналітична функція, яка взаємно-однозначно і конформно відображає розширену комплексну площину (z) на розширену комплексну площину (ω). При цьому:

$$z = \infty \ \rightarrow \ \omega = \infty$$

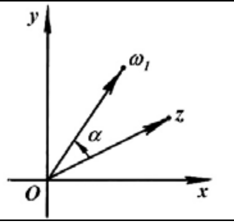
$$z = \frac{b}{1-a} \ \rightarrow \ \omega = \frac{b}{1-a}$$

$$\omega = az + b \equiv ke^{i\alpha} \cdot z + b$$

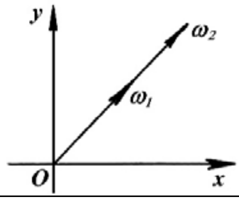
Перетворення комплексної площини на себе за допомогою функції $\omega = az + b$ складається із трьох елементарних перетворень:

$$z \underset{1)}{\longrightarrow} \omega_1 = ze^{i\alpha} \underset{2)}{\longrightarrow} \omega_2 = k\omega_1 \underset{3)}{\longrightarrow} \omega = \omega_2 + b$$

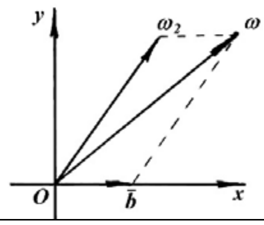
1) $\omega_1 = ze^{i\alpha}$ (*перетворення обертання* навколо т. $z = 0$).



2) $\omega_2 = k\omega_1$ (*перетворення подібності* з коефіцієнтом подібності k і центром подібності в т. $z = 0$).



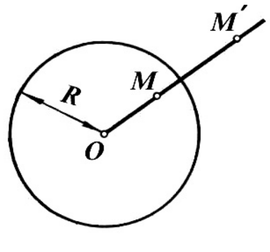
3) $\omega = \omega_2 + b$ (*перетворення паралельного перенесення*у напрямку вектора b).



Лінійне перетворення переводить прямі лінії в прямі, а коло — в коло.

Інверсія

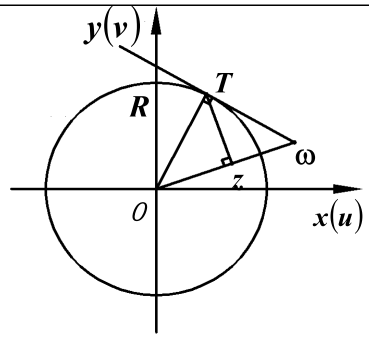
Точку $\boldsymbol{M'}$ називають *симетричною* точці $\boldsymbol{M}$ відносно кола радіуса $\boldsymbol{R}$, коли ці точки лежать на одному промені, що виходить з центра $\boldsymbol{O}$ цього кола і, крім того, $\boldsymbol{OM}\cdot\boldsymbol{OM'}=\boldsymbol{R}^2$.



Для побудови точки ω, симетричної точці z відносно кола $|z|=\boldsymbol{R}$, виконують додаткову побудову, суть якої зрозуміла із рисунка. Дійсно, оскільки

$\Delta\, \boldsymbol{OzT} \sim \Delta\, \boldsymbol{OT}\omega$, то $\dfrac{\boldsymbol{OT}}{|z|}=\dfrac{|\omega|}{\boldsymbol{OT}}$.

Звідки маємо $|z|\cdot|\omega|=\boldsymbol{R}^2$.



Інверсією відносно кола радіуса $\boldsymbol{R}$ називають таке *перетворення площини* на себе, при якому кожній точці $\boldsymbol{M}$ площини відповідає єдина точка $\boldsymbol{M'}$ цієї площини, яка симетрична точці $\boldsymbol{M}$ відносно цього кола. *Інверсія* відносно кола $|z|=\boldsymbol{R}$ задається функцією

$$\omega=\frac{\boldsymbol{R}^2}{\bar{z}}=\frac{\boldsymbol{R}^2}{re^{-i\varphi}}=\frac{\boldsymbol{R}^2}{r}\cdot e^{i\varphi}\ .$$

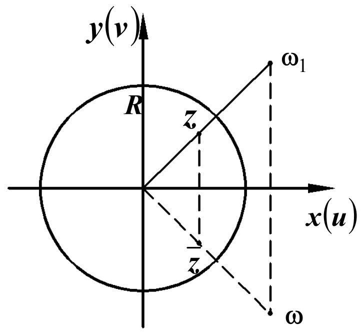
При цьому, коло $\boldsymbol{O(R)}$ називають *колом інверсії*, точку $\boldsymbol{O}$ називають *центром (полюсом) інверсії*, а число $\boldsymbol{R^2}$ називають *коефіцієнтом* інверсії.

Властивості інверсії:

1) інверсія є взаємно-однозначне перетворення точок площини (за виключенням точки 0);
2) будь-яка внутрішня точка кола $O(R)$ перетворюється в зовнішню (і навпаки);
3) пряма, яка проходить через центр інверсії, перетворюється в себе;
4) коло інверсії перетворюється в себе;
5) будь-яка пряма, що не проходить через центр інверсії, перетворюється в коло, яке проходить через центр інверсії (при цьому т. O виключається із кола);
6) коло, що проходить через центр інверсії, перетворюється в коло, яке не проходить через центр інверсії;
7) інверсія це конформне відображення 2-го роду.

Перетворення комплексної площини на себе за допомогою функції $\omega = \frac{R^2}{z}$ складається із двох елементарних перетворень:

1) *інверсії* відносно кола $|z| = R$;
2) *дзеркального відображення* відносно дійсної осі.



$$z = re^{i\varphi} \xrightarrow[1)]{} \omega_1 = \frac{R^2}{\bar{z}} = \frac{R^2}{r} \cdot e^{i\varphi} \xrightarrow[2)]{} \omega = \overline{\omega_1} = \frac{R^2}{r} \cdot e^{-i\varphi} = \frac{R^2}{z}$$

Зокрема, коли $\omega = \frac{1}{z}$, то

$$z = re^{i\varphi} \xrightarrow[1)]{} \omega_1 = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{r} \cdot e^{i\varphi} \xrightarrow[2)]{} \omega = \overline{\omega_1} = \frac{1}{r} \cdot e^{-i\varphi} = \frac{1}{z}$$

Дробово-лінійна функція $\omega = \dfrac{az+b}{cz+d}$,   де a,b,c,d — комплексні сталі, $ad - bc \neq 0$, є аналітична функція, яка взаємно однозначно і конформно відображає розширену комплексну площину (z) на розширену комплексну площину (ω).   При цьому: $z = -\dfrac{d}{c} \rightarrow \omega = \infty$ $z = \infty \rightarrow \omega = \dfrac{a}{c}$
$\omega = \dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{bc-ad}{c^2} \cdot \dfrac{1}{z+\dfrac{d}{c}} = m + e^{i\alpha}\dfrac{R^2}{z+n}$
Точку ω одержуємо, виконуючи послідовно декілька елементарних перетворень площини (z): $z \rightarrow \omega_1 = z+n \rightarrow \omega_2 = \dfrac{R^2}{\omega_1} \rightarrow \omega_3 = e^{i\alpha}\omega_2 \rightarrow \omega = \omega_3 + m$

Властивості дробово-лінійного перетворення
1) Дробово-лінійне перетворення відображає коло в коло в широкому розумінні цього слова (пряма лінія вважається колом нескінченного радіуса).   2) Існує єдина дробово-лінійна функція, яка три задані точки z_1, z_2, z_3 площини (z) переводить в три задані точки $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ площини (ω). Вона має вигляд: $\dfrac{\omega-\omega_1}{\omega-\omega_2} \cdot \dfrac{\omega_3-\omega_2}{\omega_3-\omega_1} = \dfrac{z-z_1}{z-z_2} \cdot \dfrac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$.   3) Якщо при дробово-лінійному перетворенні коло C переходить в коло Γ, то або область, що лежить всередині C перейде в область, що лежить всередині Γ (тоді зовнішність C перейде в зовнішність Γ), або область всередині C перейде в область, що лежить зовні Γ (тоді зовнішність C перейде в область, що лежить всередині Γ). Це так званий принцип відображення границі.   4) Коли дробово–лінійне перетворення переводить одне коло в широкому розумінні в інше, то точки, які симетричні відносно першого кола, воно переводить в точки, симетричні відносно другого кола.

Приклад 1. Знайти дробово-лінійне перетворення, яке переводить точки

$z_1=-1,\ z_2=1,\ z_3=\infty$ в точки $\omega_1=0,\ \omega_2=1,\ \omega_3=-1.$

Скористаємось дробово-лінійною функцією, яка три задані точки z_1, z_2, z_3 площини (z) переводить відповідно в три точки ω_1, ω_2, ω_3 площини (ω) та має вигляд: $\dfrac{\omega-\omega_1}{\omega-\omega_2}\cdot\dfrac{\omega_3-\omega_2}{\omega_3-\omega_1}=\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\dfrac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$.

$$\frac{\omega-0}{\omega-1}\cdot\frac{-1-1}{-1-0}=\frac{z+1}{z-1}\cdot\frac{z_3\left(1-\frac{z_2}{z_3}\right)}{z_3\left(1-\frac{z_1}{z_3}\right)}\Rightarrow\ \frac{2\omega}{\omega-1}=\frac{z+1}{z-1}\ \Rightarrow\ 2\omega(z-1)=\omega(z+1)-(z+1).$$

Звідки: $\omega=\dfrac{z+1}{3-z}$.

Приклад 2. В яку область перейде напівплощина $\boldsymbol{Re}\, z\ge 0$ при дробово-лінійному перетворенні $\omega=\dfrac{z+2}{2-z}$?

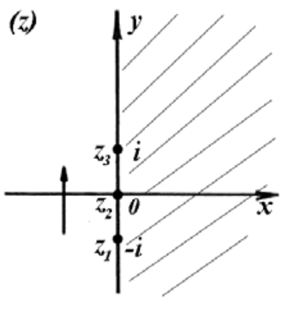
Границею області $\boldsymbol{Re}\, z\ge 0$ є вісь $\boldsymbol{y}$-ів, яка може перейти або в коло, або в пряму. Зауважимо, що $\omega=\dfrac{z+2}{2-z}$ переводить точку $z_1=2$ в точку $\omega_1=\infty$.

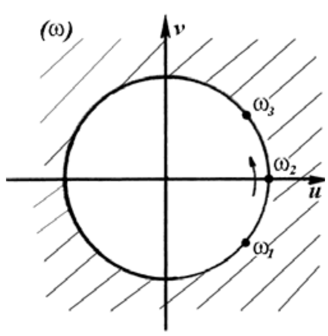
Оскільки відображення за допомогою дробово-лінійної функції взаємно однозначне, то більш ніяка точка не може перейти в точку $\omega=\infty$.

Отже, границя відображається не в пряму, а в коло. Щоб знайти рівняння цього кола візьмемо три довільні точки на границі області $\boldsymbol{Re}\, z\ge 0$ і знайдемо точки комплексної площині (ω), в які вони переходять:

$$z_1=-\boldsymbol{i}\ \Rightarrow\ \omega_1=\frac{3}{5}-\frac{4}{5}\boldsymbol{i};\qquad z_2=0\ \Rightarrow\ \omega_2=1;\qquad z_3=\boldsymbol{i}\ \Rightarrow\ \omega_3=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\boldsymbol{i}.$$

Зауважимо, що $|\omega_1|=|\omega_2|=|\omega_3|=1$. Отже, вісь $\boldsymbol{y}$-ів відображається в коло $|\omega|=1$, а відповідна множина точок $\boldsymbol{Re}\, z>0$ відображається в зовнішність цього кола.





6. Інтегрування функції комплексної змінної

$$\int_{\gamma} f(z)dz \overset{def}{=} \lim_{\substack{max|\Delta z_i|\to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta z_i \ ,$$

де γ — гладка або кусково-гладка замкнена або незамкнена орієнтована крива, що лежить в деякій області D; $f(z)$ — неперервна на кривій γ .

Властивості $\int_{\gamma} f(z)dz$

1) $\int_{\gamma^+} f(z)\,dz = -\int_{\gamma^-} f(z)\,dz.$

2) $\int_{\gamma} k\ f(z)\,dz = k\int_{\gamma} f(z)\,dz$, де k— комплексна константа.

3) $\int_{\gamma} (f_1(z) + f_2(z))\,dz = \int_{\gamma} f_1(z)\,dz + \int_{\gamma} f_2(z)\,dz$.

4) $\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \ldots + \int_{\gamma_n} f(z)\,dz,$

   де $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + ... + \gamma_n$.

5) $\left|\int_{\gamma} f(z)\,dz\right| \le M \cdot l$, де l — довжина контура γ ,

$|f(z)| \le M,\ \ M > 0$ скрізь на лінії γ .

Обчислення криволінійного інтеграла $\int\limits_{\gamma} f(z)dz$
$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \begin{bmatrix} z = x+iy \\ f(z) = u(x,y)+iv(x,y) \\ dz = dx+idy \end{bmatrix} = \int\limits_{\gamma} \left(u(x,y)+iv(x,y)\right)d(x+iy) =$$ $$= \int\limits_{\gamma} u\,dx - v\,dy + i\int\limits_{\gamma} v\,dx + u\,dy = \begin{bmatrix} \gamma : y=\varphi(x) \\ x_1 \le x \le x_2 \\ dy = \varphi'(x)dx \end{bmatrix} = \int\limits_{x_1}^{x_2} g_1(x)dx + i\int\limits_{x_1}^{x_2} g_2(x)dx$$ $$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \begin{bmatrix} \gamma : z = z(t) \\ t_1 \le t \le t_2 \end{bmatrix} = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(z(t))\cdot z'(t)dt$$
Невизначений та визначений інтеграли
Якщо функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D, а точки z_0 та z — довільні точки цієї області, то $\int\limits_{z_0}^{z} f(z)dz$ не залежить від форми кривої, яка повністю лежить в області D і з'єднує точки z_0 та z.   При фіксованій точці z_0: $\int\limits_{z_0}^{z} f(z)dz = F(z).$ Функція $F(z)$ називається *первісною* або *невизначеним інтегралом* від функції $f(z)$, позначається символом $\int f(z)dz$ і задовольняє наступним умовам: 1) $F(z)$ аналітична в області D; 2) $F'(z) = f(z).$
Якщо функція $f(z)$ *аналітична* в однозв'язній області D, що містить точки z_1 та z_2, то має місце формула *Ньютона-Лейбніца*, яка виражає визначений інтеграл через невизначений: $$\int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1)$$

Приклад 1. Обчислити $\int\limits_{\gamma}(i+\bar{z})dz$, де γ — відрізок прямої від $z_1=0$ до $z_2=1+2i$.

Рівняння даного відрізка прямої, що проходить через точку $(0,0)$ та точку $(1,2)$, має вигляд $\boldsymbol{y=2x,\ x\in[0,1]}$.

$$\int\limits_{\gamma}(i+\bar{z})dz=\int\limits_{\gamma}(x+i(1-y))(dx+idy)=\int\limits_{\gamma}xdx+(y-1)dy+i\int\limits_{\gamma}(1-y)dx+xdy=$$

$$=\begin{bmatrix} y=2x \\ dy=2dx \\ 0\le x\le 1\end{bmatrix}=\int\limits_{0}^{1}(5x-2)dx+i\int\limits_{0}^{1}dx=0{,}5+i.$$

Приклад 2. Обчислити $\int\limits_{\gamma^{+}}\frac{\bar{z}^2}{|z|}dz$, де $\gamma:\ |z|=3,\ -\frac{\pi}{2}\le \arg z\le\frac{\pi}{2}$.

За умовою: $\left\{\begin{matrix}\gamma:|z|=3 \\ -\frac{\pi}{2}\le \arg z\le\frac{\pi}{2}\end{matrix}\right\}\ \Leftrightarrow\ \left\{\begin{matrix}\gamma: z=3e^{it} \\ -\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2} \\ \bar{z}=3e^{-it}\end{matrix}\right\}$

Отже,

$$\int\limits_{\gamma^{+}}\frac{\bar{z}^2}{|z|}dz=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{9e^{-2it}}{3}d\left(3e^{it}\right)=9i\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{-it}dt=9i\cdot\left(-\frac{1}{i}\right)e^{-it}\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=-9\left(e^{-\frac{\pi}{2}i}-e^{\frac{\pi}{2}i}\right)=18i.$$

Приклад 3. Обчислити $\int\limits_{\gamma^{+}}\operatorname{Im} z\,dz$, де $\gamma:|z|=1,\quad 0\le \arg z\le\pi.$

За умовою: $\left\{\begin{matrix}\gamma:|z|=1 \\ 0\le \arg z\le\pi\end{matrix}\right\}\ \Leftrightarrow\ \left\{\begin{matrix}\gamma: z=\cos t+i\sin t \\ 0\le t\le\pi\end{matrix}\right\}.$

Оскільки $\operatorname{Im} z=\sin t$, то:

$$\int\limits_{\gamma^{+}}\operatorname{Im} z\,dz=\int\limits_{0}^{\pi}\sin t\,d(\cos t+i\sin t)=\int\limits_{0}^{\pi}\sin t(-\sin t+i\cos t)dt=-\int\limits_{0}^{\pi}\sin^2 t\,dt+i\int\limits_{0}^{\pi}\sin t\cos t\,dt=$$

$$=-\int\limits_{0}^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt+i\int\limits_{0}^{\pi}\sin t\,d(\sin t)=-\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{0}^{\pi}+i\frac{\sin^2 t}{2}\Bigg|_{0}^{\pi}=-\frac{\pi}{2}.$$

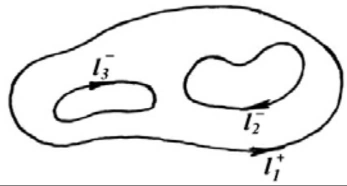
Інтегральні теореми Коші

Теорема 1. Якщо функція $f(z)$ аналітична та неперервна в однозв'язній замкненій області $\overline{D}$, що обмежена гладким або кусково-гладким контуром γ, то

$$\oint_{\gamma} f(z)\,dz = 0.$$

Теорема 2. Якщо функція $f(z)$ аналітична та неперервна в замкненій багатозв'язній області $\overline{D}$, що обмежена складним контуром γ, то $\oint_{\gamma} f(z)\,dz = 0.$ При цьому контур γ обходять так, що область D залишається ліворуч (або праворуч).

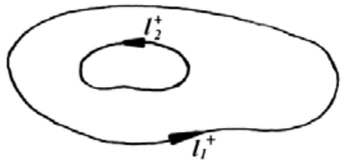
Зокрема, для тризв'язної області маємо:
$\gamma = l_1^+ + l_2^- + l_3^-$ або $\gamma = l_1^- + l_2^+ + l_3^+$



Теорема 3. Якщо функція $f(z)$ аналітична та неперервна в замкненій багатозв'язній області $\overline{D}$, то інтеграл по зовнішньому контуру дорівнює сумі інтегралів по внутрішнім контурам, що обмежують область $\overline{D}$. При цьому усі контури обходять за часовою стрілкою (або проти).

Зокрема, якщо область $\overline{D}$ двозв'язна,
тобто $\gamma = l_1^+ + l_2^-$, то $\int_{l_1^+} + \int_{l_2^-} = 0$.

Звідки: $\int_{l_1^+} = -\int_{l_2^-}$ або $\int_{l_1^+} = \int_{l_2^+}$.



Одержали: ***інтеграл по зовнішньому контуру дорівнює інтегралу по внутрішньому контуру.***

Інтегральні формули Коші

Теорема 4. Якщо функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області $\overline{D}$, що обмежена кусково-гладким замкненим контуром γ, то для будь-якої внутрішньої точки $z = a$ цієї області мають місце рівності:

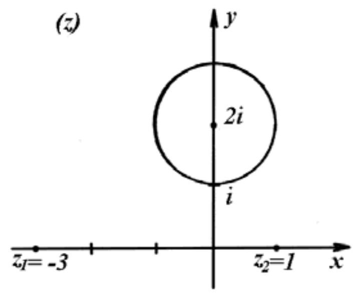
1) $f(a) = \dfrac{1}{2\pi i} \cdot \oint\limits_{\gamma} \dfrac{f(z)}{z-a} dz$ 2) $f^{(n)}(a) = \dfrac{n!}{2\pi i} \cdot \oint\limits_{\gamma} \dfrac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$

Звідки:

$\oint\limits_{\gamma} \dfrac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i \cdot f(a)$ $\oint\limits_{\gamma} \dfrac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = \dfrac{2\pi i}{n!} \cdot f^{(n)}(a)$

Приклад 1. Обчислити $\oint\limits_{\gamma} \dfrac{\sin \frac{\pi z}{2}}{z^2+2z-3} dz$, якщо:

а) $\gamma : |z-2i| = 1$; б) $\gamma : |z-1| = 2$.

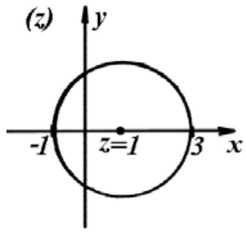


Особливі точки функції $f(z) = \dfrac{\sin \frac{\pi z}{2}}{z^2+2z-3}$:

$z_1 = -3, \quad z_2 = 1.$

а) Так як особливі точки даної функції знаходяться поза контуром $|z-2i| = 1$, то дана функція аналітична в області $|z-2i| \le 1.$ Тому

$$\oint\limits_{|z-2i|=1} \frac{\sin \frac{\pi z}{2}}{z^2+2z-3} dz = 0 .$$



б) Всередині області, яка обмежена колом $|z-1| = 2$, знаходиться одна особлива точка $z = 1$. Перетворимо даний інтеграл до вигляду

$$\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{\frac{\sin \frac{\pi z}{2}}{z+3}}{z-1} dz$$

Функція $f(z)=\dfrac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z+3}$ аналітична в області $|z-1|\le 2$.

Використовуючи формулу Коші $\oint\limits_{\gamma}\dfrac{f(z)}{z-a}dz=2\pi i\cdot f(a)$,

одержимо: $\oint\limits_{|z-1|=2}\dfrac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z^2+2z-3}dz=\oint\limits_{|z-1|=2}\dfrac{\frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z+3}}{z-1}dz=2\pi i\cdot\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}}{1+3}=\dfrac{\pi i}{2}$.

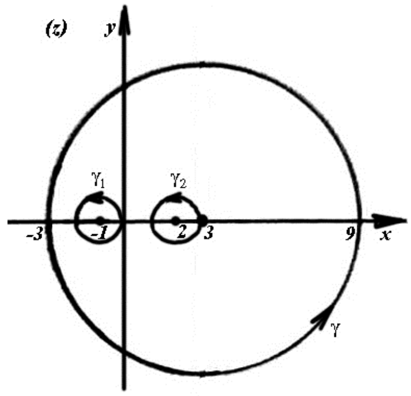
Приклад 2. Обчислити $I=\oint\limits_{\gamma}\dfrac{z}{(z-2)^3\cdot(z+1)}dz$, $\gamma:|z-3|=6$.

Підінтегральна функція $f(z)=\dfrac{z}{(z-2)^3\cdot(z+1)}$ має всередині

кола $|z-3|=6$ дві особливі точки $z_1=-1,\ z_2=2$. За теоремою Коші для багатозв'язної області (теорема 3):

$$\oint\limits_{\gamma}f(z)dz=\oint\limits_{\gamma_1}f(z)dz+\oint\limits_{\gamma_2}f(z)dz,$$

де γ_1 — замкнена крива, всередині якої знаходиться лише одна особлива точка $z_1=-1$, а γ_2 — замкнена крива, всередині якої знаходиться лише особлива точка $z_2=2$.



1) Знаходимо:

$$\oint\limits_{\gamma_1}\frac{z}{(z-2)^3\cdot(z+1)}dz=\oint\limits_{\gamma_1}\frac{\frac{z}{(z-2)^3}}{z+1}dz=$$

$$=\left[\oint\limits_{\gamma}\frac{f(z)}{z-a}dz=2\pi i\cdot f(a),\quad \text{де } f(z)-\text{аналітична всередині }\gamma\right]=$$

$$=2\pi i\cdot\left.\frac{z}{(z-2)^3}\right|_{z=-1}=\frac{2\pi i}{27}.$$

2) Знаходимо:

$$\oint_{\gamma_2} \frac{z}{(z-2)^3\cdot(z+1)}dz = \oint_{\gamma_2} \frac{\frac{z}{z+1}}{(z-2)^3}dz =$$

$$= \left[\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz = \frac{2\pi i}{n!}\cdot f^{(n)}(a), \quad \text{де } f(z) - \text{аналітична всередині } \gamma\right] =$$

$$= \frac{2\pi i}{2!}\cdot\left(\frac{z}{z+1}\right)''\bigg|_{z=2} == -\frac{2\pi i}{27}.$$

Одержали:

$$\oint_{|z-3|=6} \frac{z}{(z-2)^3\cdot(z+1)}dz = \frac{2\pi i}{27} - \frac{2\pi i}{27} = 0.$$

Приклад 3. Обчислити $\int_{\gamma} \frac{(z+1)dz}{(z^2+4)z^2}$, де $\gamma : \frac{x^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$.

За теоремою Коші для багатозв'язної області:

$$\oint_{\gamma} \frac{(z+1)dz}{(z^2+4)z^2} = \oint_{\gamma_1} \frac{\frac{z+1}{(z+2i)z^2}}{z-2i}dz + \oint_{\gamma_2} \frac{\frac{z+1}{z^2+4}}{z^2}dz.$$

$$\oint_{\gamma_1} \frac{\frac{z+1}{(z+2i)z^2}}{z-2i}dz = 2\pi i\cdot\frac{z+1}{(z+2i)z^2}\bigg|_{z=2i} = 2\pi i\cdot\frac{2i+1}{4i\cdot(2i)^2} = \frac{2\pi i}{-16i}(2i+1) = -\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4}i.$$

$$\oint_{\gamma_2} \frac{\frac{z+1}{z^2+4}}{z^2}dz = \frac{2\pi i}{1!}\cdot\left(\frac{z+1}{z^2+4}\right)'\bigg|_{z=0} = 2\pi i\cdot\frac{1\cdot(z^2+4) - 2z\cdot(z+1)}{(z^2+4)^2}\bigg|_{z=0} = 2\pi i\frac{4-0}{16} = \frac{\pi i}{2}.$$

Маємо остаточно:

$$\oint_{\gamma} \frac{(z+1)dz}{(z^2+4)z^2} = -\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4}i + \frac{\pi}{2}i = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}i.$$

7. Ряди Тейлора та Лорана

Доведено, що будь-яка однозначна функція $f(z)$, яка аналітична в області $|z-a|<R$, *єдиним чином* може бути розвинена в цій області у *збіжний ряд Тейлора,* який має вигляд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n, \qquad C_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

***Розвинення основних ФКЗ в ряд Тейлора в околі точки a*=0**

Функція $f(z)$	*Ряд Тейлора*	*Область збіжності*
e^z	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$	$\|z\| < \infty$
$\sin z$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$\|z\| < \infty$
$\cos z$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$	$\|z\| < \infty$
shz	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$\|z\| < \infty$
chz	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$	$\|z\| < \infty$
$\ln z$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{(z-1)^n}{n}$	$\|z-1\| < 1$
$\ln(z+1)$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{z^n}{n}$	$\|z\| < 1$
$\frac{1}{1-az^k}$	$\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{kn}$	$\|z\| < \frac{1}{\sqrt[k]{\|a\|}}$
$\frac{1}{1-z}$	$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$	$\|z\| < 1$
$\frac{1}{1+z}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$	$\|z\| < 1$

Доведено, що будь-яка однозначна функція $f(z)$, яка аналітична в кільці $r < |z-a| < R$, *єдиним чином* може бути представлена в цьому кільці *збіжним рядом Лорана*:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_n (z-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} C_n (z-a)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} C_n (z-a)^n,$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}},$$ де $\gamma = \gamma^+$ — будь-яка замкнена лінія, що знаходиться всередині кільця $r < |z-a| < R$.

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} C_n (z-a)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} C_{-n} (z-a)^{-n}$$ — *головна частина* ряду Лорана;

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n$$ — *правильна частина* ряду Лорана.

Зауважимо, що в області $r < |z| < R$ ряд Лорана аналітичної функції $f(z)$ має вигляд:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_n z^n = \sum_{n=1}^{+\infty} C_{-n} z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} C_n z^n.$$

Приклад. Розвинути в ряд Лорана функцію $f(z) = \dfrac{2z-10}{z(z-2)}$ в околі її «кінцевих» особливих точок $z_1 = 0$ та $z_2 = 2$.

Подамо дріб $\dfrac{2z-10}{z(z-2)}$ у вигляді суми двох елементарних дробів:

$$\frac{2z-10}{z(z-2)} = \frac{5}{z} - \frac{3}{z-2}.$$

1) Розглянемо функцію $f(z) = 5 \cdot z^{-1} - 3 \cdot \dfrac{1}{z-2}$ в області $0 < |z| < 2$.

В цій області дана функція *аналітична* і може бути представлена рядом

Лорана за степенями z .

Перетворимо дріб $\frac{1}{z-2}$:

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} \quad \left(\frac{|z|}{2} < 1 \Leftrightarrow |z| < 2 \right).$$

Використаємо відоме розвинення в ряд за степенями z :

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots, \quad |z| < 1.$$

Одержимо: $\dfrac{1}{z-2} = -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\dfrac{1}{2} \cdot \left(1 + \dfrac{z}{2} + \dfrac{z^2}{2^2} + \dfrac{z^3}{2^3} + \ldots \right).$

Остаточно маємо: $f(z) = 5z^{-1} + \dfrac{3}{2} + \dfrac{3z}{2^2} + \dfrac{3z^2}{2^3} + \dfrac{3z^3}{2^4} \ldots$.

Одержаний ряд збігається до даної функції $f(z)$ в області $0 < |z| < 2$.

2) Розглянемо функцію $f(z) = 5 \cdot \dfrac{1}{z} - 3 \cdot (z-2)^{-1}$ в області $0 < |z-2| < 2$.

В цій області функція $f(z)$ *аналітична* і може бути представлена рядом

Лорана за степенями $(z-2)$.

Перетворимо дріб $\frac{1}{z}$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z-2+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-2}{2}} \quad \left(\frac{|z-2|}{2} < 1 \Leftrightarrow |z-2| < 2 \right).$$

Використовуючи відоме розвинення

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots, \quad |z| < 1,$$

одержимо: $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2} \cdot \left(1 - \dfrac{z-2}{2} + \dfrac{(z-2)^2}{2^2} - \dfrac{(z-2)^3}{2^3} + \ldots \right).$

Остаточно маємо:

$$f(z) = -3(z-2)^{-1} + \frac{5}{2} - \frac{5}{2^2}(z-2) + \frac{5}{2^3}(z-2)^2 - \frac{5}{2^4}(z-2)^3 + \ldots .$$

Ізольовані особливі точки

Якщо областю аналітичності функції $f(z)$ є кільце $0 < |z-a| < R$ (круг з виколотою точкою $z = a$), то точку $z = a$ називають *ізольованою особливою*.

Ізольовані особливі точки поділяються на *полюси, істотно особливі* та *усувні особливі точки.*

Класифікувати ізольовані особливі точки однозначних аналітичних функцій можна двояко: за виглядом головної частини ряду Лорана в кільці $0 < |z-a| < R$ або за поведінкою функції $f(z)$ в околі точки $z = a$.

№	*Тип ізольованої особливої точки $z = a$*	*Вигляд головної частини ряду Лорана в околі точки $z = a$*	*Поведінка функції $f(z)$ в околі точки $z = a$*
1	***Полюс m-го порядку***	Головна частина ряду Лорана містить не більш, ніж m членів, причому, $C_n = 0$ при $n \le -(m+1)$, $C_{-m} \ne 0$.	$\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$
2	***Істотно особлива точка***	Головна частина ряду Лорана містить нескінченну множину членів	$\lim\limits_{z\to a} f(z)$ *не існує*
3	***Усувна особлива точка***	Головна частина ряду Лорана відсутня, тобто не містить жодного члена	$\lim\limits_{z\to a} f(z) = A \ne \infty$

Приклад 1.

Функція $f(z) = \sin\dfrac{1}{z}$ має одну особливу точку $z = 0$.

Це ***істотно особлива точка***, оскільки $\lim\limits_{z\to a} \sin\dfrac{1}{z}$ не існує.

Приклад 2.

Особлива точка $z=0$ функції $f(z)=\frac{1-\cos z}{z^2}$ є ***усувна***,

оскільки $\lim\limits_{z\to o}\frac{1-\cos z}{z^2}=\lim\limits_{z\to o}\frac{\sin z}{2z}=\frac{1}{2}$.

Приклад 3.

Особлива точка $z=0$ функції $f(z)=\frac{2z-10}{z(z-2)}$ є ***полюс 1-го порядку***,

оскільки головна частина ряду Лорана функції $f(z)=\frac{2z-10}{z(z-2)}$ в околі точки $z=0$ містить лише один член, а саме $5z^{-1}$.

<table>
<tr><th colspan="2">Зв'язок між нулями функції $\varphi(z)$
та полюсами функції $f(z)=\frac{g(z)}{\varphi(z)}$</th></tr>
<tr><td colspan="2">Теорема. Коли $z=a$ є нуль m -го порядку аналітичної функції $\varphi(z)$, а функція $g(z)$ аналітична в точці $z=a$, причому $g(a)\neq 0$, то точка $z=a$ є полюс m -го порядку функції $f(z)=\frac{g(z)}{\varphi(z)}$.
Зокрема, коли $f(z)=\frac{1}{\varphi(z)}$ і точка $z=a$ є нуль m -го порядку аналітичної функції $\varphi(z)$, то для функції $f(z)=\frac{1}{\varphi(z)}$ точка $z=a$ є полюс m -го порядку.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Визначення порядку нуля функції комплексної змінної</th></tr>
<tr><td>1. Якщо для функції $\varphi(z)$, аналітичної в точці $z=a$, мають місце:
$\varphi(a)=\varphi'(a)=\ldots=\varphi^{(m-1)}(a)=0,$
$\varphi^{(m)}(a)\neq 0$,
то точка $z=a$ є m-кратний нуль функції $\varphi(z)$, тобто порядок нуля є порядок найменшої відмінної від нуля похідної.</td><td>2. Якщо функція $\varphi(z)$, що аналітична в точці $z=a$, має вигляд $\varphi(z)=(z-a)^m\cdot\varphi_1(z)$, де $\varphi_1(a)\neq 0$ і $\varphi_1(z)$ — аналітична в точці $z=a$, то точка $z=a$ є нуль m -го порядку функції $\varphi(z)$.</td></tr>
</table>

Приклади. Довести, що особливі точки даних функцій є полюси та встановити їх порядок:

а) $f(z)=\dfrac{1}{z-\sin z}$; *б)* $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)^3(z-2)}$; *в)* $f(z)=\dfrac{z^3}{(4-z)^2}$; *г)* $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^5}$.

а) Розглянемо функцію $f(z)=\dfrac{1}{z-\sin z}$. Її особливою точкою є точка $z=0$ — нуль функції $\varphi(z)=z-\sin z$.

Оскільки $\varphi(0)=\varphi'(0)=\varphi''(0)=0,\quad \varphi'''(0)=1\neq 0$, то $z=0$ є нуль 3-го порядку функції $\varphi(z)=z-\sin z$, а для функції $f(z)=\dfrac{1}{z-\sin z}$ точка $z=0$ є ***полюс 3-го порядку***.

б) Нулями знаменника функції $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)^3(z-2)}$ є: $z=-1$ — нуль 3-го порядку та $z=2$ — нуль 1-го порядку (простий нуль). Отже, для даної функції $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)^3(z-2)}$ ці точки є відповідно: $z=-1$ — ***полюс 3-го порядку***, а $z=2$ — ***полюс 1-го порядку*** (***простий полюс***).

в) Розглянемо функцію $f(z)=\dfrac{z^3}{(4-z)^2}$. Точка $z=4$ є нуль 2-го порядку функції $\varphi(z)=(4-z)^2$. Так як функція $g(z)=z^3$ аналітична в точці $z=4$ та $g(4)\neq 0$, то згідно теореми про зв'язок між нулями та полюсами $z=4$ є ***полюс 2-го порядку***.

г) Встановимо характер особливої точки $z=0$ функції $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^5}$:

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z^5}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{z\to 0}\frac{\cos z}{5z^4}=\infty .$$

Маємо: $z=0$ — полюс. Оскільки $\sin 0=0$, тобто не виконується умова $g(a)\neq 0$ для функції $g(z)=\sin z$, то для встановлення порядку полюса $z=0$ представимо дану функцію рядом Лорана в околі точки $z=0$, використавши при цьому відоме розвинення функції $\sin z$.

$$f(z)=\frac{1}{z^5}\sin z=\frac{1}{z^5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{1}{z^4}-\frac{1}{3!\,z^2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n+5)!}.$$

Головна частина ряду Лорана містить скінченну множину від'ємних степенів z, причому $C_{-4}=1$, а $C_n=0$ при $n\leq -5$.

Отже, $z=0$ є ***полюс 4-го порядку***.

Коли функція $f(z)$ *аналітична в області* $|z| > R$, то особливу точку $z = \infty$ цієї функції називають *ізольованою*. Ряд Лорана в околі ізольованої особливої точки $z = \infty$ має вигляд

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n, \quad \text{де}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} z^{-n}$ — *правильна частина* ряду Лорана,

$\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ — *головна частина* ряду Лорана.

Тип ізольованої особливої точки $z = \infty$ залежить від кількості членів головної частини ряду Лорана, а саме:

1) коли *додатні* степені z *відсутні*, то $z = \infty$ — *усувна особлива точка;*
2) коли *додатних* степенів z *скінченна множина*, то $z = \infty$ — *полюс;*
3) коли *додатних* степенів *нескінченна множина*, то $z = \infty$ — *істотно особлива точка.*

Тип ізольованої особливої точки $z = \infty$ функції $f(z)$ можна визначити також за поведінкою функції $f(z)$ в околі цієї точки, а саме:

1) $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = A \neq \infty \Rightarrow z = \infty$ є *усувна особлива точка;*

2) $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = \infty \Rightarrow z = \infty$ є *полюс;*

3) $\lim\limits_{z \to \infty} f(z)$ не існує $\Rightarrow z = \infty$ є *істотно особлива точка.*

Зауваження. Вивчення функції $f(z)$ в околі точки $z=\infty$ можна звести шляхом підстановки $z=\dfrac{1}{\omega}$ до вивчення функції $f\left(\dfrac{1}{\omega}\right)$ в околі точки $\omega=0$. Відомі розвинення функцій e^z, $\sin z$, $\cos z$, shz та chz можна розглядати також як лоранові розвинення в околі точки $z=\infty$. Оскільки усі вони містять нескінченну множину додатних степенів, то в точці $z=\infty$ буде істотна особливість.

Приклад. Розвинути в ряд Лорана функцію $f(z)=\dfrac{2z-10}{z(z-2)}$ в околі точки $z=\infty$, тобто в області $|z|>2$.

$$f(z)=\frac{2z-10}{z(z-2)}=\frac{5}{z}-\frac{3}{z-2}=\frac{5}{z}-3\cdot\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}.$$

Використаємо відоме розвинення функції $\dfrac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\ldots,\ |z|<1$.

Одержимо: $\dfrac{1}{1-\frac{2}{z}}=1+\dfrac{2}{z}+\dfrac{2^2}{z^2}+\dfrac{2^3}{z^3}+\ldots\quad\left(\left|\dfrac{2}{z}\right|<1\Leftrightarrow|z|>2\right)$.

$$\frac{2z-10}{z(z-2)}=\frac{5}{z}-3\cdot\frac{1}{z}\left(1+\frac{2}{z}+\frac{2^2}{z^2}+\frac{2^3}{z^3}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{2}{z}-3\cdot\left(\frac{2}{z^2}+\frac{2^2}{z^3}+\frac{2^3}{z^4}+\ldots\right)=\frac{2}{z}-\frac{3\cdot 2}{z^2}-\frac{3\cdot 2^2}{z^3}-\frac{3\cdot 2^3}{z^4}-\ldots\ .$$

Оскільки одержаний ряд не містить додатних степенів z, то

$z=\infty$ — ***усувна особлива точка.***

8. Лишки

Коли функція $f(z)$ аналітична в області $0<|z-a|<R$, то *лишком* (***вычетом*** на рос.м.) цієї функції в ізольованій особливій точці $z=a$ називають комплексне число, яке позначається символом $res\, f(a)$ або $res(f(z),\, z=a)$ і визначається рівністю

$$res\, f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma^+} f(z)\,dz\,,\quad \text{де } \gamma:\ |z-a|<r,\quad 0<r<R\,.$$

Зауважимо, що коли в формулі для знаходження коефіцієнтів ряду Лорана $C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma^+}\frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}$ взяти $n=-1$, то одержимо

$C_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma^+} f(z)dz$. Отже, $res\, f(a)=C_{-1}$, де C_{-1} — коефіцієнт при першій від'ємній степені двочлена $z-a$ в ряді Лорана

$$f(z)=C_0+C_1(z-a)+C_2(z-a)^2+\ldots+C_{-1}(z-a)^{-1}+C_{-2}(z-a)^{-2}+\ldots$$

Якщо функція $f(z)$ аналітична в області $|z|>R$, то *лишком* цієї функції в ізольованій особливій точці $z=\infty$ називають число $res\, f(\infty)$, яке визначається рівністю $res\, f(\infty)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma^-} f(z)dz$, де $\gamma:\ |z|=r,\ r>R$.

$res f(\infty)=-C_{-1}$, де C_{-1} — коефіцієнт при першій від'ємній степені z в ряді Лорана $f(z)=\ldots+C_{-2}z^{-2}+C_{-1}z^{-1}+C_0+C_1z+C_2z^2+\ldots$

Доведено, що коли функція $f(z)$ аналітична на всій комплексній площині за винятком точок $z_1,\ z_2,\ldots,\ z_{n-1},\ z_n=\infty$, то має місце рівність $\sum_{k=1}^{n} res\, f(z_k)=0$. Звідки одержуємо: $\sum_{k=1}^{n-1} res\, f(z_k)=-res\, f(\infty)$.

Знаходження лишків відносно особливих точок	
Тип особливої точки $z=a$ функції $f(z)$	**Лишок**
$z=a$ — *простий полюс* функції $f(z)$	$res\, f(a)=\lim\limits_{z\to a}\left(f(z)(z-a)\right)$
$z=a$ — *простий полюс* функції $f(z)=\dfrac{F_1(z)}{F_2(z)}$	$res\, f(a)=\dfrac{F_1(a)}{F_2'(a)}$, причому $F_1(a)\neq 0,\ F_2(a)=0,\ F_2'(a)\neq 0$
$z=a$ — *полюс m–го порядку* функції $f(z)$	$res\, f(a)=\dfrac{1}{(m-1)!}\lim\limits_{z\to a}\left(f(z)(z-a)^m\right)^{(m-1)}$
$z=a$ — *усувна особлива точка* функції $f(z)$	$res\, f(a)=0$
$z=a$ — *істотно особлива точка* функції $f(z)$	Записуємо ряд Лорана для функції $f(z)$ і виписуємо коефіцієнт $c_{-1}=res\, f(a)$
Лишки функції $f(z)$ відносно комплексно спряжених особливих точок також комплексно спряжені.	

Приклад 1. Знайти лишки функції $\omega=f(z)$ в її особливих точках:

$$\text{а) } f(z)=\frac{z+1}{(z-1)^2(z+3)};\quad \text{б) } f(z)=\frac{\sin z}{z};\quad \text{в) } f(z)=(z+3)\sin\frac{1}{z}.$$

а) Особливі точки функції $f(z)=\dfrac{z+1}{(z-1)^2(z+3)}$:

$z_1=1$ (полюс 2-гопорядку) і $z_2=-3$ (полюс 1-го порядку).

$$res\ f(1)=\lim_{z\to 1}\left(\frac{(z+1)}{(z+3)}\right)'=\lim_{z\to 1}\frac{z+3-(z+1)}{(z+3)^2}=\frac{2}{16}=\frac{1}{8};$$

$$res\ f(-3)=\lim_{z\to -3}\frac{(z+1)(z+3)}{(z-1)^2(z+3)}=-\frac{2}{16}=-\frac{1}{8}.$$

б) Функція $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ має одну особливу точку $z=0$.

$\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}=1$. Тому $z=0$ є усувна особлива точка.

Отже, $\boldsymbol{res}\left(\dfrac{\sin z}{z},\ z=0\right)=0$.

в) Розвинемо функцію $f(z)=(z+3)\sin\dfrac{1}{z}$ в ряд Лорана в околі особливої точки

$z=0$, використавши відомий ряд $\sin z=z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}-\dfrac{z^7}{7!}+\dots$:

$$f(z)=(z+3)\sin\frac{1}{z}=(z+3)\cdot\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z^3\cdot 3!}+\frac{1}{z^5\cdot 5!}-\dots\right)=$$

$$=1+\frac{3}{z}-\frac{1}{z^2\cdot 3!}-\frac{1}{z^3\cdot 2!}+\frac{1}{z^4\cdot 5!}+\frac{3}{z^5\cdot 5!}-\dots\ .$$

Отже, $\boldsymbol{res}\left((z+3)\sin\dfrac{1}{z},\ z=0\right)=C_{-1}=3$.

Приклад 2. Знайти $\boldsymbol{res}(f(z),\ z=\infty)$, якщо $f(z)=\dfrac{z^{10}}{(z+1)^7}$.

1 спосіб. Розвинемо дану функцію $f(z)$ в ряд Лорана в околі точки $z=0$, використавши біноміальний ряд:

$$(1+z)^{\alpha}=1+\alpha\cdot z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}z^3+\dots\ .$$

$$f(z)=\frac{z^{10}}{(z+1)^7}=\frac{z^{10}}{z^7\left(1+\frac{1}{z}\right)^7}=z^3\left(1+\frac{1}{z}\right)^{-7}=$$

$$=z^3\left(1-7\frac{1}{z}+\frac{(-7)(-8)}{2!}\frac{1}{z^2}+\frac{(-7)(-8)(-9)}{3!}\frac{1}{z^3}+\frac{(-7)(-8)(-9)(-10)}{4!}\frac{1}{z^4}+\dots\right)=$$

$$=z^3-7z^2+28z-84+210\frac{1}{z}-\dots\ .$$

Одержали: $\boldsymbol{res}\, f(\infty)=-C_{-1}=-210.$

2 спосіб. $\boldsymbol{res}\, f(-1)+\boldsymbol{res}\, f(\infty)=0$. Звідки: $\boldsymbol{res}\, f(\infty)=-\boldsymbol{res}\, f(-1)$.

$$\boldsymbol{res}\, f(-1)=\frac{1}{(7-1)!}\lim_{z\to-1}\left(\frac{z^{10}}{(z+1)^7}\cdot(z+1)^7\right)^{(6)}=210\ .$$

Одержали: $\boldsymbol{res}\, f(\infty)=-C_{-1}=-210.$

Застосування теорії лишків для обчислення інтегралів
Теорема 1 (основна теорема про лишки). Якщо функція $f(z)$ аналітична в області $\overline{D}$, що обмежена контуром γ, за виключенням скінченної множини внутрішніх особливих точок $z_1, z_2, ..., z_n$, то $\oint\limits_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{n} res\, f(z_k)$.
Ця теорема використовується при обчисленні $\int\limits_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx$ після попереднього його перетворення за допомогою підстановки $e^{ix} = z$. Звідки: $dx = \frac{dz}{iz}$, $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \frac{z^2+1}{2z}$, $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \frac{z^2-1}{2iz}$. Одержуємо: $\int\limits_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx = \int\limits_{\lvert z\rvert=1} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{dz}{iz}$.

Приклад 1. Обчислити $\oint\limits_{\lvert z\rvert=4} \frac{z^2 dz}{(z-3)(z^2+1)^2}$.

Підінтегральна функція $f(z) = \frac{z^2}{(z-3)(z^2+1)^2}$ має один простий полюс $(z_1 = 3)$ та два полюси 2-го порядку $(z_{2,3} = \pm i)$. Усі особливі точки знаходяться всередині кола $\lvert z\rvert = 4$.

Знаходимо лишки: $res\, f(3) = \lim\limits_{z\to 3}\left(\frac{z^2}{(z-3)(z^2+1)^2}\cdot(z-3)\right) = \frac{9}{100}$,

$$res\, f(i) = \lim_{z\to i}\left(\frac{z^2}{(z-3)(z+i)^2(z-i)^2}\cdot(z-i)^2\right)' = -\frac{9}{200} + \frac{3i}{50},$$

$$res\, f(-i) = \lim_{z\to -i}\left(\frac{z^2}{(z-3)(z+i)^2(z-i)^2}\cdot(z+i)^2\right)' = -\frac{9}{200} - \frac{3i}{50}.$$

За теоремою 1:

$$\oint\limits_{|z|=4}\frac{z^2dz}{(z-3)(z^2+1)^2}=2\pi i\left(res\, f(3)+res\, f(i)+res\, f(-i)\right)=0\,.$$

Приклад 2. Обчислити $\int\limits_0^{2\pi}\frac{2+\cos x}{2-\sin x}dx$.

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{2+\cos x}{2-\sin x}dx=\begin{bmatrix} e^{ix}=z & \cos x=\dfrac{z^2+1}{2z} \\ dx=\dfrac{dz}{iz} & \sin x=\dfrac{z^2-1}{2iz}\end{bmatrix}=\oint\limits_{|z|=1}\frac{2+\dfrac{z^2+1}{2z}}{2-\dfrac{z^2-1}{2iz}}\cdot\frac{dz}{iz}=$$

$$=-\oint\limits_{|z|=1}\frac{(z^2+4z+1)dz}{z(z^2-4iz-1)}\,.$$

Знаходимо особливі точки функції $f(z)=\dfrac{z^2+4z+1}{z(z^2-4iz-1)}$:

$$z(z^2-4iz-1)=0\quad\Rightarrow\quad\left[\begin{array}{l} z=0 \\ z^2-4iz-1=0\end{array}\right.\quad\Rightarrow\quad\left[\begin{array}{l} z_1=0 \\ z_2=(2-\sqrt{3})i \\ z_3=(2+\sqrt{3})i\end{array}\right.\ -\ \begin{array}{c}\text{полюси}\\ 1-\text{го порядку}\end{array}$$

Всередині кола $|z|=1$ знаходяться особливі точки $z_1=0$ та $z_2=(2-\sqrt{3})i$.

$$res\, f(0)=\left.\left(\frac{z^2+4z+1}{z^2-4iz-1}\right)\right|_{z=0}=-1;$$

$$res\, f\left((2-\sqrt{3})i\right)=\left.\left(\frac{z^2+4z+1}{z\left(z-(2+\sqrt{3})i\right)}\right)\right|_{z=(2-\sqrt{3})i}=1+\frac{2}{\sqrt{3}}i;$$

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{2+\cos x}{2-\sin x}dx=-\oint\limits_{|z|=1}\frac{(z^2+4z+1)dz}{z(z^2-4iz-1)}=-2\pi i\left(res\, f(0)+res\, f\left((2-\sqrt{3})i\right)\right)=\frac{4\pi}{\sqrt{3}}.$$

Приклад 3. Обчислити $\oint\limits_{|z|=2}\frac{dz}{1+z^{12}}$.

Підінтегральна функція має 12 особливих точок $z_1, z_2,\ldots, z_{12}$ (полюси 1-го порядку), які є коренями рівняння $z^{12}+1=0$ і усі знаходяться всередині кола $|z|=2$.

$$\oint\limits_{|z|=2}\frac{dz}{1+z^{12}}=2\pi i\sum_{k=1}^{12}res\, f(z_k)=-2\pi i\cdot res\, f(\infty).$$

$$\frac{1}{1+z^{12}}=\frac{1}{z^{12}}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z^{12}}}=\left[|z|>2\;\Rightarrow\;\frac{1}{|z|^{12}}<\frac{1}{2^{12}}\right]=\frac{1}{z^{12}}\cdot\left(1-\frac{1}{z^{12}}+\frac{1}{z^{24}}-\frac{1}{z^{36}}+\ldots\right),$$

$C_{-1}=0$, тобто $res\, f(\infty)=0$. Тоді $\oint\limits_{|z|=2}\frac{dz}{1+z^{12}}=-2\pi i\cdot 0=0$.

Теорема 2. Нехай функція $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ задовольняє таким умовам:

1) аналітична на дійсній осі;
2) аналітична в верхній напівплощині за виключенням скінченної множини особливих точок $z_1, z_2, ..., z_n$;
3) степінь знаменника перевищує степінь чисельника принаймні на дві одиниці.

Тоді: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}res\, f(z_k)$.

Зауваження: $\int\limits_{0}^{+\infty}f(x)dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$, якщо $f(x)$ — парна функція,

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=0$, якщо $f(x)$ — непарна функція.

Приклад. Обчислити $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+4)^2}dx$.

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+4)^2}dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+4)^2}dx .$$

Розглянемо функцію $f(z)=\frac{z^2}{(z^2+4)^2}$, яка має у верхній напівплощині одну особливу точку $z=2i$ (полюс 2-го порядку).

$$res\, f(2i) = \lim_{z\to 2i}\left(\frac{z^2(z-2i)^2}{(z^2+4)^2}\right)' = \lim_{z\to 2i}\left(\frac{z^2}{(z+2i)^2}\right)' =$$

$$= \lim_{z\to 2i}\frac{2z(z+2i)^2-2(z+2i)z^2}{(z+2i)^4} = \lim_{z\to 2i}\frac{4zi}{(z+2i)^3} = -\frac{8}{-64i} = \frac{1}{8i}.$$

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+4)^2}dx = 2\pi i\cdot\frac{1}{8i} = \frac{\pi}{4}$. Отже $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+4)^2}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$.

Теорема 3. Нехай функція $f(z) = F(z)e^{imz}$, $m > 0$ задовольняє таким умовам:

1) аналітична на дійсній осі;
2) аналітична в верхній напівплощині за виключенням можливо скінченної множини особливих точок $z_1, z_2, ..., z_n$;
3) $F(z) \to 0$ при $z \to \infty$ по будь-якому закону, залишаючись при цьому в верхній напівплощині або на дійсній осі.

Тоді: а) $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} F(z)e^{imz}dz = 0$, де C_R — напівколо в верхній напівплощині з центром в точці О та радіусом R ;

б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n} res\, f(z_k)$.

Зауваження. Теорема 3 дозволяє обчислювати інтеграли, які зустрічаються в перетвореннях Фур'є та Лапласа:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos mx\, dx = Re\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(z)e^{imz}dz,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin mx\, dx = Im\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(z)e^{imz}dz,$$

де $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ — правильний раціональний дріб.

Приклад. Обчислити $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x}{x^2 - 2x + 2} dx$.

Розглянемо функцію $f(z) = \frac{e^{3iz}}{z^2 - 2z + 2}$.

Її особливі точки: $z_1 = 1 + i$ та $z_2 = 1 - i$.

В верхній напівплощині знаходиться одна особлива точка $z = 1 + i$.

$$res\, f(1+i) = \left. \frac{e^{3iz}}{2z-2} \right|_{z=1+i} = \frac{e^{3i(1+i)}}{2(1+i)-2} = \frac{e^{-3}\sin 3}{2} - i\frac{e^{-3}\cos 3}{2}.$$

Тоді $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{3iz}}{z^2 - 2z + 2} dz = 2\pi i \cdot res\, f(1+i) = \pi e^{-3}\cos 3 + i \cdot \pi e^{-3}\sin 3$.

Шуканий інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x}{x^2 - 2x + 2} dx = Re \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{3iz}}{z^2 - 2z + 2} dz = \pi e^{-3}\cos 3$.

Зауважимо, що коли в теоремі 4 умову 1) замінити на умову:

1) аналітична на дійсній осі за винятком простих полюсів $x_1, x_2, \ldots, x_s$,

то $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i\left(\sum_{k=1}^{n} res\, f(z_k) + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{s} res\, f(x_m)\right).$$

Приклад. Обчислити $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)} dx$.

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)} dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)} dx = \frac{1}{2} Im \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)} dz .$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)} dz = 2\pi i\left(res\, f(i) + \frac{1}{2} res\, f(0)\right) .$$

Знаходимо лишки:

$$res\, f(i) = \lim_{z \to i} \frac{e^{iz}(z-i)}{z(z-i)(z+i)} = \frac{e^{i^2}}{2i^2} = \frac{e^{-1}}{-2} = -\frac{1}{2e},\; res\, f(0) = \lim_{z \to 0} \frac{e^{iz} z}{z(z^2+1)} = \frac{1}{1} = 1.$$

Одержали: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)} dz = 2\pi i\left(-\frac{1}{2e} + \frac{1}{2}\right) = \pi i\left(1 - \frac{1}{e}\right) = \frac{\pi(e-1)}{e} i.$

Шуканий інтеграл $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)} dx = \frac{1}{2} Im \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)} dz = \frac{1}{2} Im\left(\frac{\pi(e-1)}{e} i\right) = \frac{\pi(e-1)}{2e}.$

9. Розрахунково-графічна робота

Задача 1. а) Виконуючи обчислення в алгебраїчній формі, знайти

$z = \dfrac{z_1 + i^n}{z_2 \cdot \bar{z}_1}$. Указати: $-z,\ \bar{z},\ Re\,z,\ Im\,z$.

б) Виконуючи обчислення в показниковій формі, знайти

$z = \dfrac{z_2^4 \cdot z_3}{z_4^5 \cdot z_5}$. Указати $|z|,\ arg\,z$ та тригонометричну форму комплексного числа.

Задача 2. Знайти всі розв'язки рівняння і зобразити їх у вигляді векторів на комплексній площині.

Задача 3. За допомогою функції $\omega = f(z)$ відобразити лінію γ на комплексну площину (ω).

Задача 4. Обчислити значення ФКЗ.

Задача 5. Перевірити функцію $\omega = f(z)$ на аналітичність. Знайти похідну $f'(z)$, якщо вона існує.

Задача 6. Відновити аналітичну функцію $\omega = f(z)$ за її дійсною (або уявною) частиною.

Задача 7. Обчислити інтеграли $\int\limits_{\gamma} f(z)dz$.

Задача 8. Обчислити інтеграли $\oint\limits_{\gamma} f(z)dz$, використовуючи інтегральні теореми та інтегральні формули Коші.

Задача 9. Для заданої функції $\omega = f(z)$:

а) указати особливі точки;
б) знайти розвинення в ряд Лорана в околі кожної особливої точки;
в) указати тип особливої точки по вигляду головної частини ряду Лорана;
г) знайти лишки функції $\omega = f(z)$ в особливих точках.

Задача 10. Обчислити інтеграли, використовуючи теорію лишків.

Варіант №1

1.1 $n=1,\ z_1=-2+3i,\ z_2=1+i,\ z_3=i,\ z_4=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2},\ z_5=\sqrt{3}-i,$

$z_6=0{,}8+6{,}2i,\ z_7=3{,}6-2i,\ z_8=-2{,}6+4{,}8i,\ z_9=-4{,}2-1{,}6i.$

1.2 $z^3+\dfrac{4}{\sqrt{3}-i}=0$.

1.3 $\omega=\dfrac{1}{z},\ \gamma=\{z:|z|=5\}.$

1.4 $sin(2i-3)$.

1.5 $\omega=z^2-i\,\overline{z}$.

1.6 $u=x^2-y^2+4y,\quad f(0)=i$.

1.7 а) $\int\limits_{\gamma}\overline{z}\,Re\,z\,dz$, де $\gamma=\{z:y=x^2,\ z_1=0,\ z_2=-1+i\}$;

б) $\int\limits_{\gamma^+}\dfrac{z}{\overline{z}}dz$, де $\gamma=\left\{z:|z|=1,\ 0\le arg\,z\le\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

1.8 $\oint\limits_{\gamma}\dfrac{e^z}{(z+1)^2(z-2)}dz$, де а) $\gamma=\{z:|z-i|=1\}$;

б) $\gamma=\{z:|z+1|=2\}$; в) $\gamma=\left\{z:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1\right\}$.

1.9 а) $f(z)=(2z+1)\cdot e^{\frac{1}{z}}$; б) $f(z)=\dfrac{z+3}{z(z-2)}$; в) $f(z)=\dfrac{sin^2 z}{z}$.

1.10 а) $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{dx}{2+\sqrt{3}\,sin\,x}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}dx$; в) $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{x\cdot sin\,3x}{(x^2+4)^2}dx$.

Варіант №2

2.1 $n = 2,\ z_1 = 4 + i,\ z_2 = 1 - i,\ z_3 = 3i,\ z_4 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2},\ z_5 = -\sqrt{3} + i,$
$z_6 = -3{,}6 + 2i,\ z_7 = -0{,}8 - 6{,}2i,\ z_8 = 4{,}2 - 1{,}8i,\ z_9 = 1{,}7 + 2{,}2i.$

2.2 $z^4 - \dfrac{1}{\sqrt{3} - i} = 0$.

2.3 $\omega = z^2,\ \gamma = \{ z : y = 3 \}$.

2.4 $\cos\left(\dfrac{1}{2} i + 2\right)$.

2.5 $\omega = iz^3 - (2 + i)z^2 - 3i$.

2.6 $u = x^2 - y^2 + 5x + y, \quad f(0) = 0$.

2.7 а) $\int\limits_{\gamma} z\, Im\, z\, dz$, де γ – відрізок прямої від $z_1 = 0$ до $z_2 = 2 + i$;

б) $\int\limits_{\gamma^+} z\, \bar{z}\, dz$, де $\gamma = \{ z : |z| = 2,\ Re\, z \ge 0 \}$.

2.8 $\oint\limits_{\gamma} \dfrac{z^2 + 1}{(z+1)(z-2)^2} dz$, де а) $\gamma = \{ z : |z + i| = 1 \}$;

б) $\gamma = \left\{ z : \dfrac{x^2}{3} + y^2 = 1 \right\}$; в) $\gamma = \{ z : |z| = 3 \}$.

2.9 а) $f(z) = (z-3) \cdot e^{\frac{2}{z}}$; б) $f(z) = \dfrac{z+2}{z(z-3)}$; в) $f(z) = \dfrac{1 - \cos z}{z^2}$.

2.10 а) $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dx}{4 + \sqrt{5} \sin x}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{x - 1}{(x^2 + 25)(x^2 + 1)^2} dx$; в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{(x-1) \cdot \sin x}{(x^2 + 9)^2} dx$.

Варіант №3

3.1 $n = 3,\ z_1 = -3 + 2i,\ z_2 = -1 + i,\ z_3 = i\sqrt{3},\ z_4 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2},\ z_5 = -\sqrt{3} - i,$
$z_6 = -1{,}9 + 8i,\ z_7 = 1{,}8 - 5{,}6i,\ z_8 = -3{,}9 - 0{,}7i,\ z_9 = 7{,}8 + 3{,}6i.$

3.2 $z^3 + \dfrac{4}{\sqrt{3} + i} = 0$.

3.3 $\omega = -7z + 2i,\ \gamma = \left\{ z : x^2 + y^2 = 4 \right\}.$

3.4 $1 + sh^2(i \cdot ln 3)$.

3.5 $\omega = 2iz + 3\bar{z}^2$.

3.6 $v = 2xy - x + 5y,\quad f(0) = 0$.

3.7 а) $\int\limits_{\gamma} (1 + 2\bar{z})\, dz$, де $\gamma = \{z : x = y^2,\ z_1 = 0,\ z_2 = 1 - i\}$;

б) $\int\limits_{\gamma^+} z\, Re\, z\, dz$, де $\gamma = \{z : |z| = 1,\ 0 \le arg\, z \le \pi\}$.

3.8 $\oint\limits_{\gamma} \dfrac{e^z}{z(1 - z)^3} dz$, де а) $\gamma = \left\{ z : |z + 1| = \dfrac{1}{2} \right\}$;

б) $\gamma = \left\{ z : |z| = \dfrac{1}{2} \right\}$; в) $\gamma = \{ z : |z| = 2 \}$.

3.9 а) $f(z) = (z + 5) \cdot e^{\frac{3}{z}}$; б) $f(z) = \dfrac{z + 3}{z(z - 4)}$; в) $f(z) = \dfrac{1 - cos\, z}{z}$.

3.10 а) $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dx}{5 + 2\sqrt{6}\, sin\, x}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{x dx}{(x^2 + 4)(x^2 + 9)^2}$; в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{cos\, 2x}{(x^2 + 1)^2} dx$.

Варіант №4

4.1 $\boldsymbol{n}=4,\ z_1=3+2\boldsymbol{i},\ z_2=-1-\boldsymbol{i},\ z_3=\boldsymbol{i}\sqrt{2},\ z_4=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\boldsymbol{i}}{2},\ z_5=\sqrt{3}+\boldsymbol{i},$

$z_6=1{,}2+2{,}9\boldsymbol{i},\ z_7=-1{,}8+4{,}7\boldsymbol{i},\ z_8=-3{,}2-3{,}6\boldsymbol{i},\ z_9=2{,}2-1{,}9\boldsymbol{i}.$

4.2 $z^3-\dfrac{1-\boldsymbol{i}}{1+\boldsymbol{i}}=0$.

4.3 $\omega=2\boldsymbol{i}z+5,\ \gamma=\{z:\boldsymbol{y}=-3\boldsymbol{x}+4\}.$

4.4 $\boldsymbol{ch}\left(1+\dfrac{\pi\boldsymbol{i}}{2}\right).$

4.5 $\omega=\boldsymbol{e}^{(2+\boldsymbol{i})z}$.

4.6 $\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{xy}-\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}+1,\quad \boldsymbol{f}(0)=\boldsymbol{i}$.

4.7 а) $\int\limits_{\gamma}(\boldsymbol{i}-\bar{z})\boldsymbol{d}z$, де γ – відрізок прямої від $z_1=0$ до $z_2=-1-\boldsymbol{i}$;

б) $\int\limits_{\gamma^+}|z|\,\bar{z}\,\boldsymbol{d}z$, де $\gamma=\{z:|z|=4,\ \boldsymbol{Re}\,z\ge 0\}$.

4.8 $\oint\limits_{\gamma}\dfrac{\boldsymbol{sin}\,2z}{(z+\boldsymbol{i})\left(z-\dfrac{\boldsymbol{i}}{2}\right)^2}\boldsymbol{d}z$, де а) $\gamma=\{z:|z-1|=1\}$;

б) $\gamma=\left\{z:\dfrac{\boldsymbol{x}^2}{4}+\dfrac{\boldsymbol{y}^2}{2}=1\right\}$; в) $\gamma=\{z:|z+\boldsymbol{i}|=1\}$.

4.9 а) $\boldsymbol{f}(z)=(3z-1)\cdot\boldsymbol{e}^{\frac{4}{z}}$; б) $\boldsymbol{f}(z)=\dfrac{z-3}{z(z+2)}$; в) $\boldsymbol{f}(z)=\dfrac{\boldsymbol{sin}\,2z^2}{3z^2}$.

4.10 а) $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{\boldsymbol{dx}}{6+\sqrt{35}\,\boldsymbol{sin}\,\boldsymbol{x}}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\boldsymbol{dx}}{(\boldsymbol{x}^2+4)^2(\boldsymbol{x}^2+16)}$; в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\boldsymbol{x}^2\,\boldsymbol{cos}\,\boldsymbol{x}}{(\boldsymbol{x}^2+4)^2}\boldsymbol{dx}$.

Варіант №5

5.1 $n = 5,\ z_1 = -2 + i,\ z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{2},\ z_3 = -2i,\ z_4 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2},\ z_5 = 1 + i\sqrt{3},$
$z_6 = 0{,}9 - 2{,}4i,\ z_7 = 2{,}8 + 5{,}6i,\ z_8 = -1{,}8 + 3{,}2i,\ z_9 = -2{,}6 - 2{,}2i.$

5.2 $z^3 + \dfrac{1-i}{1+i} = 0$.

5.3 $\omega = \dfrac{1}{z},\ \gamma = \{ z : y = 5 \}$.

5.4 $sh(2 + 3i)$.

5.5 $\omega = ch(4iz)$.

5.6 $v = 6x^2 y - 2y^3 + x^3 - 3xy^2,\quad f(0) = 0$.

5.7 а) $\int\limits_{\gamma} (1 + i + \bar{z})dz$, де γ – відрізок прямої від $z_1 = 0$ до $z_2 = -4 - 2i$;

б) $\int\limits_{\gamma^+} z\,\bar{z}\,dz$, де $\gamma = \{ z : |z| = 3,\ Re\,z \ge 0,\ Im\,z \ge 0 \}$.

5.8 $\oint\limits_{\gamma} \dfrac{\cos z}{z^3 - \pi z^2} dz$, де а) $\gamma = \left\{ z : |z - i| = \frac{1}{2} \right\}$;

б) $\gamma = \left\{ z : \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \right\}$; в) $\gamma = \{ z : |z| = 4 \}$.

5.9 а) $f(z) = z^3 \cdot e^{\frac{1}{z^2}}$; б) $f(z) = \dfrac{z-1}{z(z+2)}$; в) $f(z) = \dfrac{1 - \cos\frac{z}{2}}{z}$.

5.10 а) $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dx}{7 + 4\sqrt{3}\sin x}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{(x^2 - x + 1)^2}$; в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{(x+1)\cos x}{x^4 + 5x^2 + 6} dx$.

Варіант №6

6.1 $n=6,\ z_1=1+2i,\ z_2=\sqrt{2}-i\sqrt{2},\ z_3=-i\sqrt{3},\ z_4=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2},\ z_5=-1+i\sqrt{3},$ $z_6=-5{,}7-0{,}9i,\ z_7=1{,}8-4{,}2i,\ z_8=0{,}8+8{,}2i,\ z_9=-9{,}2+6{,}1i.$

6.2 $z^4+4\frac{1+i}{1-i}=0$.

6.3 $\omega=iz+i-2,\ \gamma=\{z: y=x-4\}.$

6.4 $sin\left(\frac{\pi}{6}+i\right)$.

6.5 $\omega=z^3-(2+5i)z+i$.

6.6 $u=2x^3-6xy^2-3x^2y+y^3,\quad f(0)=0$.

6.7 а) $\int\limits_{\gamma} z\,Re\,\bar{z}\,dz$, де $\gamma=\{z: x=y^2,\ z_1=0,\ z_2=1+i\}$;

б) $\int\limits_{\gamma^+}|z|\,dz$, де $\gamma=\left\{z: |z|=\sqrt{2},\ \frac{3\pi}{4}\le arg\,z\le\frac{5\pi}{4}\right\}$.

6.8 $\oint\limits_{\gamma}\frac{e^{iz}}{(z^2-1)(z+3)^2}dz$, де а) $\gamma=\left\{z: |z-1-i|=\frac{1}{2}\right\}$;

б) $\gamma=\left\{z: \frac{x^2}{4}+y^2=1\right\}$; в) $\gamma=\left\{z: \left|z-\frac{3}{2}\right|=1\right\}$.

6.9 а) $f(z)=(z+5)\cdot e^{-\frac{3}{z}}$; б) $f(z)=\frac{z+2}{z(z-4)}$; в) $f(z)=\frac{sin\frac{z}{2}}{z}$.

6.10 а) $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{5-4\,sin\,x}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+10x^2+9}$; в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,sin\frac{x}{2}}{(x^2+1)(x^2+9)}dx$.

Варіант №7

7.1 $n=7,\ z_1=1-2i,\ z_2=-\sqrt{2}+i\sqrt{2},\ z_3=-i\sqrt{2},\ z_4=\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2},\ z_5=-1-i\sqrt{3},$
$z_6=-1{,}1+7{,}3i,\ z_7=-1{,}9-3{,}4i,\ z_8=1{,}7-3{,}9i,\ z_9=4{,}8+3{,}2i.$

7.2 $z^4-\frac{1}{\sqrt{3}+i}=0$.

7.3 $\omega=3iz-4+i,\ \gamma=\left\{z: x^2+y^2=1\right\}.$

7.4 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+i\cdot \ln 3\right).$

7.5 $\omega=z^3-i$.

7.6 $u=x^2-y^2+y-2,\quad f(-1)=3$.

7.7 а) $\int\limits_{\gamma}(1-\bar{z})dz$, де γ – відрізок прямої від $z_1=0$ до $z_2=-2-4i$;

б) $\int\limits_{\gamma^+}|z|\,\bar{z}\,dz$, де $\gamma=\{z: |z|=2,\ Re\, z\le 0\}$.

7.8 $\oint\limits_{\gamma}\frac{e^{iz}}{(z-\pi)^2(z+\pi)}dz$, де а) $\gamma=\left\{z: \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1\right\}$;

б) $\gamma=\{z: |z|=4\}$; в) $\gamma=\{z: |z+3|=1\}$.

7.9 а) $f(z)=z\cdot ch\frac{1}{z}$; б) $f(z)=\frac{z+2}{z(z+5)}$; в) $f(z)=\frac{\cos(2z)-1}{z^2}$.

7.10 а) $\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dx}{5-3\sin x}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)^2}$; в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x^2+3)\cos 2x}{x^4+3x^2+2}dx$.

Варіант №8

8.1 $n = 8,\ z_1 = -1 + 2i,\ z_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2},\ z_3 = -i,\ z_4 = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2},\ z_5 = 1 + i\sqrt{3},$
$z_6 = 9{,}2 + 1{,}2i,\ z_7 = -2{,}8 + 8{,}1i,\ z_8 = -1{,}3 - 8{,}4i,\ z_9 = 1{,}8 - 4{,}2i.$

8.2 $z^4 - 4\frac{1-i}{1+i} = 0$.

8.3 $\omega = \frac{1}{z},\ \gamma = \left\{ z : x^2 + y^2 = 16 \right\}.$

8.4 $sh(1 - 2i)$.

8.5 $\omega = e^{(3-2i)\bar{z}}$.

8.6 $u = x^3 - 3xy^2 + y + 1,\quad f(0) = 1$.

8.7 а) $\int\limits_{\gamma} (1 - i - \bar{z})\, dz$, де $\gamma = \{z : x = y^2,\ z_1 = 0,\ z_2 = 1 + i\}$;

б) $\int\limits_{\gamma^+} z|z|\,dz$, де $\gamma = \{z : |z| = 3,\ Im\, z \le 0\}$.

8.8 $\oint\limits_{\gamma} \frac{e^{iz}}{(z - \pi)\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2} dz$, де а) $\gamma = \{z : |z - i| = 1\}$;

б) $\gamma = \{z : |z + i| = 3\}$; в) $\gamma = \{z : |z| = 4\}$.

8.9 а) $f(z) = (z^2 - 2z + 5) \cdot e^{-\frac{1}{z}}$; б) $f(z) = \frac{z - 5}{z(z + 2)}$; в) $f(z) = \frac{e^{z^2} - 1}{z^2}$.

8.10 а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{8 - 3\sqrt{7}\, sin\, x}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 9)(x^2 + 4)^2}$; в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^3 - 2) cos \frac{x}{2}}{(x^2 + 1)^2} dx$.

Варіант №9

9.1 $n = 9$, $z_1 = -1 - 2i$, $z_2 = \sqrt{3} + i\sqrt{3}$, $z_3 = 5i$, $z_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, $z_5 = 3 - i3\sqrt{3}$,
$z_6 = -1{,}6 - 6{,}4i$, $z_7 = 5{,}1 - 4i$, $z_8 = 2{,}3 + 3{,}3i$, $z_9 = -3{,}7 + 7{,}9i$.

9.2 $z^3 - 2\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} = 0$.

9.3 $\omega = z^2$, $\gamma = \{ z : x = 3 \}$.

9.4 $ch(i + ln 2)$.

9.5 $\omega = sin(5iz)$.

9.6 $v = 3y - 4xy + 1$, $f(0) = i$.

9.7 а) $\int\limits_{\gamma} Re\, z\, dz$, де γ – відрізок прямої від $z_1 = 0$ до $z_2 = 2 + 2i$;

б) $\int\limits_{\gamma^+} (z + \bar{z})dz$, де $\gamma = \left\{ z : |z| = 1,\ \frac{\pi}{2} \le arg\, z \le \frac{3\pi}{2} \right\}$.

9.8 $\oint\limits_{\gamma} \frac{e^{2z}}{(z-1)^2(z+1)} dz$, де а) $\gamma = \left\{ z : |z - 2i| = \frac{3}{2} \right\}$;

б) $\gamma = \{ z : |z + 2| = 2 \}$; в) $\gamma = \left\{ z : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \right\}$.

9.9 а) $f(z) = z \cdot sh\frac{2}{z}$; б) $f(z) = \frac{z+3}{z(z-3)}$; в) $f(z) = \frac{sin(2z) - z}{z}$.

9.10 а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{9 - 4\sqrt{5}\, sin\, x}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+3)^2}$; в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2 - x) sin\, x}{x^4 + 9x^2 + 20} dx$.

Варіант №10

10.1 $n=10,\ z_1=-3-2i,\ z_2=\sqrt{3}-i\sqrt{3},\ z_3=i2\sqrt{2},\ z_4=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2},$

$z_5=-3+i3\sqrt{3},\ z_6=7{,}4-0{,}8i,\ z_7=-2{,}9+4{,}1i,\ z_8=-3{,}2-7{,}8i,\ z_9=3{,}8+7{,}2i.$

10.2 $z^3-2\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}=0.$

10.3 $\omega=\dfrac{1}{z},\ \gamma=\{z : x=2\}.$

10.4 $\cos(3+5i).$

10.5 $\omega=(1-i)\bar{z}^2+iz^2.$

10.6 $v=3x^2y-y^3+x,\quad f(0)=1.$

10.7 а) $\int\limits_{\gamma} Re\,\bar{z}\,dz$, де $\gamma=\{z : y=x^2,\ z_1=0,\ z_2=1+i\};$

б) $\int\limits_{\gamma^+} (2z+1)\bar{z}\,dz$, де $\gamma=\{z : |z|=1,\ 0\le \arg z\le \pi\}.$

10.8 $\oint\limits_{\gamma} \dfrac{e^z}{(z-i)^2\left(z+\dfrac{i}{2}\right)}dz$, де а) $\gamma=\left\{z : \left|z-\dfrac{3}{2}\right|=1\right\};$

б) $\gamma=\left\{z : 4x^2+\dfrac{y^2}{4}=1\right\}$; в) $\gamma=\left\{z : |z+i|=\dfrac{3}{2}\right\}.$

10.9 а) $f(z)=\left(z^2+3z+1\right)\cdot e^{\frac{2}{z}}$; б) $f(z)=\dfrac{z+3}{z(z+4)}$; в) $f(z)=\dfrac{1-\cos(3z)}{2z}.$

10.10 а) $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{dx}{4-\sqrt{7}\sin x}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{\left(x^2+2\right)\left(x^2+3\right)^2}$; в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x\cos x}{x^2-2x+17}dx.$

Варіант №11

11.1 $n = 11$, $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = -\sqrt{3} + i\sqrt{3}$, $z_3 = i3\sqrt{2}$, $z_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, $z_5 = -3 - i3\sqrt{3}$, $z_6 = 4{,}3 + 6{,}7i$, $z_7 = -9{,}3 + 0{,}7i$, $z_8 = -7{,}7 - 3{,}3i$, $z_9 = 8{,}1 - 2{,}9i$.

11.2 $z^4 - \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i} = 0$.

11.3 $\omega = \frac{1}{z}$, $\gamma = \left\{ z : x^2 + y^2 = 4 \right\}$.

11.4 $sh(-2 + 5i)$.

11.5 $\omega = z^3 + (1 - 3i)z - i$.

11.6 $v = 3x^2y - y^3 - 2y - x$, $f(0) = 1$.

11.7 а) $\int\limits_{\gamma} Im\, z\, dz$, де γ – відрізок прямої від $z_1 = 0$ до $z_2 = 1 + 2i$;

б) $\int\limits_{\gamma^+} \left(iz^2 - 2\bar{z}\right) dz$, де $\gamma = \left\{ z : |z| = 2,\ 0 \le arg\, z \le \frac{\pi}{2} \right\}$.

11.8 $\oint\limits_{\gamma} \frac{e^{2z}}{z^3 - iz^2} dz$, де а) $\gamma = \left\{ z : x^2 + \frac{(y+1)^2}{\frac{1}{4}} = 1 \right\}$;

б) $\gamma = \left\{ z : |z - i| = \frac{3}{2} \right\}$; в) $\gamma = \left\{ z : |z| = \frac{1}{2} \right\}$.

11.9 а) $f(z) = z^2 \cdot sh\frac{3}{z}$; б) $f(z) = \frac{z+1}{z(z-4)}$; в) $f(z) = \frac{1 - e^{z^2}}{z}$.

11.10 а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\left(3 + \sqrt{5}\cos x\right)^2}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2 + 9\right)\left(x^2 + 1\right)^2}$; в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin 2x - \sin x}{\left(x^2 + 4\right)^2} dx$.

Варіант №12

12.1 $n = 12,\ z_1 = -2 - 3i,\ z_2 = -\sqrt{3} - i\sqrt{3},\ z_3 = -i2\sqrt{2},\ z_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2},\ z_5 = 3 + i3\sqrt{3},$
$z_6 = -0{,}9 + 6{,}1i,\ z_7 = -6{,}8 - 4{,}2i,\ z_8 = 3{,}2 - 8{,}7i,\ z_9 = 3{,}6 + 2{,}3i.$

12.2 $z^4 - \frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} + i} = 0$.

12.3 $\omega = \frac{1}{z},\ \gamma = \{ z : y = 1 \}$.

12.4 $ch(7 - 3i)$.

12.5 $\omega = 2iz^3 - \bar{z}$.

12.6 $u = 3x - 2x^2 + 2y^2,\quad f(0) = i$.

12.7 а) $\int\limits_{\gamma} Im\,\bar{z}\, dz$, де $\gamma = \{ z : x = y^2,\ z_1 = 0,\ z_2 = 4 - 2i \}$;

б) $\int\limits_{\gamma^+} (\bar{z}^2 - z) dz$, де $\gamma = \{ z : |z| = 1,\ \pi \le arg\, z \le 2\pi \}$.

12.8 $\oint\limits_{\gamma} \frac{e^z}{z^3 + i\frac{\pi}{2} z^2} dz$, де а) $\gamma = \left\{ z : \left| z - \frac{3}{2} \right| = 1 \right\}$;

б) $\gamma = \{ z : |z| = \pi \}$; в) $\gamma = \{ z : |z| = 1 \}$.

12.9 а) $f(z) = (z^2 + 2) \cdot ch\frac{2}{z}$; б) $f(z) = \frac{z + 3}{z(z + 5)}$; в) $f(z) = \frac{sin\frac{z^2}{2}}{2z^2}$.

12.10 а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(3 + 2\sqrt{2}\cos x)^2}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2 + 1)dx}{(x^2 + x + 1)^2}$; в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 5x\ dx}{(x^2 + 1)^2 (x^2 + 4)}$.

Варіант №13

13.1 $n = 13,\ z_1 = 2 + i,\ z_2 = 2 + i2,\ z_3 = 2,\ z_4 = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2},\ z_5 = -\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4},$
$z_6 = 1 + 0{,}8i,\ z_7 = -1{,}1 + 2{,}2i,\ z_8 = 3{,}3 - 2{,}1i,\ z_9 = -5{,}1 - 2{,}2i.$

13.2 $z^3 - \frac{\sqrt{2}}{1+i} = 0$.

13.3 $\omega = (-5 + 3i)z - 2i,\ \gamma = \{z : y = 2x + 1\}.$

13.4 $\cos(4i - 7)$.

13.5 $\omega = \cos 2z$.

13.6 $u = x^2 - y^2 + 2x - y + 1,\quad f(0) = 1$.

13.7 а) $\int\limits_{\gamma} z \operatorname{Re} z\, dz$, де γ – відрізок прямої від $z_1 = 0$ до $z_2 = 1 + i$;

б) $\int\limits_{\gamma^+} |z| \bar{z}\, dz$, де $\gamma = \{z : |z| = 6,\ \operatorname{Re} z \le 0,\ \operatorname{Im} z \ge 0\}$.

13.8 $\oint\limits_{\gamma} \frac{e^{z-i}}{(z^2+1)(z+i)} dz$, де а) $\gamma = \{z : |z - 1| = 1\}$;

б) $\gamma = \{z : |z| = 2\}$; в) $\gamma = \{z : |z + i| = \sqrt{2}\}$.

13.9 а) $f(z) = z^2 \cdot e^{\frac{3}{z}}$; б) $f(z) = \frac{z+1}{z(z-2)}$; в) $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$.

13.10 а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\left(2\sqrt{2} + \sqrt{7} \cos x\right)^2}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2+1)\, dx}{(x^2 + 4x + 13)^2}$; в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$.

Варіант №14

14.1 $n = 14,\ z_1 = -2 + i,\ z_2 = 2 - i2,\ z_3 = 2i,\ z_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2},\ z_5 = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4},$
$z_6 = -1 + 0{,}2i,\ z_7 = 2{,}1 - 4{,}1i,\ z_8 = -3{,}3 - 2i,\ z_9 = 3{,}1 + 2{,}5i.$

14.2 $z^3 - \frac{\sqrt{2}}{1 - i} = 0$.

14.3 $\omega = 2z + 3,\ \gamma = \{z : y = 2x - 1\}.$

14.4 $sin\left(i\frac{\pi}{6} + 1\right).$

14.5 $\omega = z e^z$.

14.6 $v = 2xy - x - 1,\quad f(-1) = 3$.

14.7 а) $\int\limits_{\gamma} \bar{z}\, Im\, z\, dz$, де γ – відрізок прямої від $z_1 = 0$ до $z_2 = 4 + 2i$;

б) $\int\limits_{\gamma^+} Re\frac{\bar{z}}{z} dz$, де $\gamma = \left\{z : |z| = 1,\ 0 \le arg\, z \le \frac{\pi}{2}\right\}$.

14.8 $\oint\limits_{\gamma} \frac{sin\, z}{\left(z - \frac{\pi}{6}\right)(z - \pi)^2} dz$, де а) $\gamma = \left\{z : (x + 1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1\right\}$;

б) $\gamma = \{z : |z + 1| = 2\}$; в) $\gamma = \{z : |z - 2| = 2\}$.

14.9 а) $f(z) = (3z - z^2)\cdot sh\frac{5}{z}$; б) $f(z) = \frac{z + 2}{z(z - 5)}$; в) $f(z) = \frac{e^{2z} - 1}{z}$.

14.10 а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\left(\sqrt{6} + cos\, x\right)^2}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2 + 5)\, dx}{x^4 + 5x^2 + 6}$; в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x + 1) sin\, 2x}{x^2 + 2x + 2} dx$.

Варіант №15

15.1 $n=15,\ z_1=-2-i,\ z_2=-2+i2,\ z_3=-2i,\ z_4=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2},\ z_5=\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4},$
$z_6=0{,}2-2{,}1i,\ z_7=1{,}3+2{,}3i,\ z_8=-4{,}1+2{,}2i,\ z_9=-3{,}7-4{,}2i.$

15.2 $z^4+i=0$.

15.3 $\omega=5iz+i-3,\ \gamma=\left\{z: x^2+y^2=9\right\}.$

15.4 $\cos\left(i\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right).$

15.5 $\omega=-2iz^3-i\,\overline{z}+4$.

15.6 $v=2xy+x+2y,\quad f(0)=1$.

15.7 а) $\int\limits_{\gamma} z\, Im\,\overline{z}\, dz$, де $\gamma=\left\{z: x=y^2,\ z_1=0,\ z_2=4+2i\right\}$;

б) $\int\limits_{\gamma^+} |z|\, Re\left(z^2\right)dz$, де $\gamma=\left\{z: |z|=2,\ Im\,z\ge 0\right\}$.

15.8 $\oint\limits_{\gamma}\frac{\cos z}{\left(z-\frac{\pi}{3}\right)\left(z+\frac{\pi}{2}\right)^2}dz$, де а) $\gamma=\left\{z: \left|z+\frac{i}{2}\right|=\frac{1}{2}\right\}$;

б) $\gamma=\left\{z: |z+\pi|=2\right\}$; в) $\gamma=\left\{z: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1\right\}$.

15.9 а) $f(z)=z\cdot ch\frac{2}{z}$; б) $f(z)=\frac{z+1}{z(z-3)}$; в) $f(z)=\frac{z-\sin z}{z}$.

15.10 а) $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\cos x\right)^2}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2\left(x^2+4\right)}$; в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{\left(x^2+16\right)^2}dx$.

Варіант №16

16.1 $n=16,\ z_1=2-i,\ z_2=-2-i2,\ z_3=3i,\ z_4=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2},\ z_5=-\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4},$
$z_6=-4{,}1-2{,}2i,\ z_7=-2{,}1+1{,}7i,\ z_8=3{,}2+2{,}3i,\ z_9=3{,}5-4{,}3i.$

16.2 $z^5+i=0$.

16.3 $\omega=\frac{1}{z},\ \gamma=\{z:y=2\}$.

16.4 $(-3+4i)^{1-i}$.

16.5 $\omega=sh3z$.

16.6 $v=2xy+3y-x+1,\quad f(0)=i$.

16.7 а) $\int\limits_{\gamma}\bar{z}\,Re\,\bar{z}\,dz$, де γ – відрізок прямої від $z_1=1+i$ до $z_2=2+2i$;

б) $\int\limits_{\gamma^+} z\,Re(z^2)dz$, де $\gamma=\{z:|z|=3,\ Im\,z\ge 0\}$.

16.8 $\oint\limits_{\gamma}\frac{z^4+1}{(z^2+1)(z-i)}dz$, де а) $\gamma=\left\{z:\frac{(x-2)^2}{4}+y^2=1\right\}$;

б) $\gamma=\left\{z:x^2+\frac{y^2}{4}=1\right\}$; в) $\gamma=\{z:|z+2i|=2\}$.

16.9 а) $f(z)=(z+2)\cdot ch\frac{1}{z}$; б) $f(z)=\frac{z-5}{z(z-2)}$; в) $f(z)=\frac{e^{-2z}-1}{3z}$.

16.10 а) $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\cos x\right)^2}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\,dx}{(x^2+5)^2}$; в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^2}dx$.

Варіант №17

17.1 $n=17,\ z_1=1-4i,\ z_2=\sqrt{5}+i\sqrt{5},\ z_3=-3i,\ z_4=\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2},\ z_5=1-i\sqrt{3},$
$z_6=-0{,}7+i,\ z_7=1{,}4-3{,}2i,\ z_8=-4-5{,}1i,\ z_9=6{,}7+5{,}3i.$

17.2 $z^6+i=0$.

17.3 $\omega=z^2,\ \gamma=\{z: x=1\}.$

17.4 $(1+i)^{\frac{1}{i}}$.

17.5 $\omega=e^{(1-i)\bar{z}}$.

17.6 $u=x^2-y^2+5x+y,\quad f(0)=0$.

17.7 а) $\int\limits_{\gamma}\bar{z}\,Im\,\bar{z}\,dz$, де γ – відрізок прямої від $z_1=0$ до $z_2=-1-2i$;

б) $\int\limits_{\gamma^+} z|z|\,dz$, де $\gamma=\{z: |z|=4,\ Re\,z\le 0,\ Im\,z\le 0\}$.

17.8 $\oint\limits_{\gamma}\frac{e^{-z^2}}{(z-2)(z-1)^2}dz$, де а) $\gamma=\{z: |z+2i|=2\}$;

б) $\gamma=\left\{z: |z|=\frac{3}{2}\right\}$; в) $\gamma=\left\{z: \frac{(x-1)^2}{\frac{9}{4}}+y^2=1\right\}$.

17.9 а) $f(z)=\left(z^2-4z+3\right)\cdot e^{\frac{3}{z}}$; б) $f(z)=\frac{z+4}{z(z-4)}$; в) $f(z)=\frac{sin\,3z^2}{z^2}$.

17.10 а) $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{\left(\sqrt{2}+cos\,x\right)^2}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3}$; в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{cos\,x}{\left(x^2+4\right)^3}dx$.

Варіант №18

18.1 $n = 18,\ z_1 = -1 + 4i,\ z_2 = \sqrt{5} - i\sqrt{5},\ z_3 = i\sqrt{3},\ z_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2},\ z_5 = 1 + i\sqrt{3},$
$z_6 = 3{,}2 - 0{,}3i,\ z_7 = -3{,}1 + 2{,}6i,\ z_8 = 2{,}7 + 3{,}5i,\ z_9 = -2{,}6 - 4{,}5i.$

18.2 $z^3 - 27i = 0$.

18.3 $\omega = 3iz + 1,\ \gamma = \{z : |z| = 2\}$.

18.4 $(2 - 2i)^{4i}$.

18.5 $\omega = sh(i + z)$.

18.6 $v = 3x^2y - y^3 - 2y - x,\ f(0) = 1$.

18.7 а) $\int\limits_{\gamma} \bar{z}^2\, dz$, де $\gamma = \{z : y = x^2,\ z_1 = 0,\ z_2 = 1 + i\}$;

б) $\int\limits_{\gamma^+} \left(z^2 + z\bar{z}\right) dz$, де $\gamma = \{z : |z| = 1,\ 0 \le arg\, z \le \pi\}$.

18.8 $\oint\limits_{\gamma} \frac{e^{z^2}}{(z + i)(z - 2i)^2}\, dz$, де а) $\gamma = \left\{z : |z| = \frac{1}{2}\right\}$;

б) $\gamma = \left\{z : x^2 + \frac{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2}{4} = 1\right\}$; в) $\gamma = \left\{z : |z - i| = \frac{3}{2}\right\}$.

18.9 а) $f(z) = (z - 3) \cdot sh\left(\frac{2}{z}\right)$; б) $f(z) = \frac{z - 3}{z(z + 2)}$; в) $f(z) = \frac{1 - cos\left(\frac{z}{3}\right)}{z^2}$.

18.10 а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\left(\sqrt{5} + 2\cos x\right)^2}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(x^2 + 3\right)dx}{\left(x^2 - 10x + 29\right)^3}$; в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{\left(x^2 + 16\right)\left(x^2 + 9\right)} dx$

Варіант №19

19.1 $n = 19,\ z_1 = 1 + 4i,\ z_2 = -\sqrt{5} + i\sqrt{5},\ z_3 = -5,\ z_4 = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2},\ z_5 = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{i}{3},$
$z_6 = 1 + 8{,}8i,\ z_7 = 3{,}7 - 3{,}3i,\ z_8 = -2{,}6 - 9{,}2i,\ z_9 = -6{,}4 + 4{,}6i.$

19.2 $z^4 - 16i = 0$.

19.3 $\omega = \frac{1}{z},\ \gamma = \{z : x = 1\}$.

19.4 $(-1)^i$.

19.5 $\omega = ch(5iz - 4 + 2i)$.

19.6 $u = x^2 - y^2 + x, \quad f(0) = 0$.

19.7 а) $\int\limits_{\gamma} (1 - 2\bar{z})\, dz$, де $\gamma = \{z : y = x^2,\ z_1 = 0,\ z_2 = -2 + 4i\}$;

б) $\int\limits_{\gamma^+} (2 + z\bar{z})\, dz$, де $\gamma = \{z : |z| = 2,\ 0 \le arg\, z \le \pi\}$.

19.8 $\oint\limits_{\gamma} \frac{e^z}{(z+1)^3 (z-2)}\, dz$, де а) $\gamma = \left\{z : |z - 1| = \frac{1}{2}\right\}$;

б) $\gamma = \left\{z : |z| = \frac{3}{2}\right\}$; в) $\gamma = \{z : |z| = 3\}$.

19.9 а) $f(z) = (z - 3z^2) \cdot e^{\frac{3}{z}}$; б) $f(z) = \frac{z + 5}{z(z+2)}$; в) $f(z) = \frac{1 - e^{-z^2}}{2z}$.

19.10 а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(3 + cos\, x)^2}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2 (x^2+5)^2}$; в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cdot sin\, x}{x^2 - 2x + 10}\, dx$.

Варіант №20

20.1 $n = 20,\ z_1 = 4 + i,\ z_2 = -\sqrt{5} - i\sqrt{5},\ z_3 = 8,\ z_4 = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2},\ z_5 = -\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{i}{3},$
$z_6 = 8{,}2 - 3{,}6i,\ z_7 = 2 + 6{,}7i,\ z_8 = -3{,}7 + 5{,}3i,\ z_9 = -8 - 0{,}8i.$

20.2 $z^3 - 27 = 0$.

20.3 $\omega = z^2,\ \gamma = \{z : x = 2\}.$

20.4 $(-3 + 3i)^i$.

20.5 $\omega = \sin(z + 2i - 3)$.

20.6 $u = x^2 - y^2 + 2x,\quad f(i) = 2i - 1$.

20.7 а) $\int\limits_{\gamma} (i + \bar{z})\, dz$, де γ – відрізок прямої від $z_1 = 0$ до $z_2 = -2 - i$;

б) $\int\limits_{\gamma^+} Re\frac{z}{\bar{z}} dz$, де $\gamma = \left\{z : |z| = 1,\ \frac{\pi}{2} \le \arg z \le \pi\right\}$.

20.8 $\oint\limits_{\gamma} \frac{e^{\pi \cdot z}}{(z - i)^2 (z + 2i)} dz$, де а) $\gamma = \left\{z : \frac{(x-1)^2}{4} + y^2 = 1\right\}$;

б) $\gamma = \left\{z : \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\right\}$; в) $\gamma = \left\{z : |z| = \frac{3}{2}\right\}$.

20.9 а) $f(z) = (z^2 + 1) \cdot sh\left(\frac{2}{z}\right)$; б) $f(z) = \frac{z - 1}{z(z + 4)}$; в) $f(z) = \frac{z + \sin z}{z}$.

20.10 а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\left(\sqrt{7} + \sqrt{2}\cos x\right)^2}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 7x^2 + 12}$; в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cdot \cos x}{x^2 - 2x + 10} dx$.

Варіант №21

21.1 $n = 21,\ z_1 = 4 - i,\ z_2 = \sqrt{6} + i\sqrt{6},\ z_3 = 3,\ z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2},\ z_5 = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{i}{4},$
$z_6 = -4{,}3 - 2{,}6i,\ z_7 = 4{,}6 - 0{,}8i,\ z_8 = 2{,}1 + 3{,}9i,\ z_9 = -9{,}4 + 3{,}2i.$

21.2 $z^4 + 16 = 0$.

21.3 $\omega = iz - 2i,\ \gamma = \{z : |z| = 3\}.$

21.4 i^{-1+i} .

21.5 $\omega = \bar{z}^3 + i$.

21.6 $u = x^3 - 3xy^2, \quad f(1+i) = -2$.

21.7 а) $\int\limits_{\gamma} (i + 2\bar{z})\, dz$, де γ – відрізок прямої від $z_1 = 0$ до $z_2 = -2 - 2i$;

б) $\int\limits_{\gamma^+} Im \frac{\bar{z}}{z} dz$, де $\gamma = \left\{ z : |z| = 2,\ \frac{\pi}{4} \le arg\, z \le \frac{\pi}{2} \right\}$.

21.8 $\oint\limits_{\gamma} \frac{e^{\pi \cdot z}}{(z+i)^2 (z-i)} dz$, де а) $\gamma = \left\{ z : |z - 1 - i| = \frac{1}{2} \right\}$;

б) $\gamma = \{z : 9x^2 + 4y^2 = 9\}$; в) $\gamma = \left\{ z : |z - 1 - i| = \frac{3}{2} \right\}$.

21.9 а) $f(z) = (4z+1) \cdot sh\left(\frac{3}{z}\right)$; б) $f(z) = \frac{z+1}{z(z+5)}$; в) $f(z) = \frac{1 - cos\, 2z}{2z^2}$.

21.10 а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{4\sqrt{3}\, sin\, x - 7}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2+4)dx}{(x^2+9)^2}$; в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cdot sin\frac{x}{2}}{x^2+4} dx$.

Варіант №22

22.1 $n = 22,\ z_1 = -4 + i,\ z_2 = \sqrt{6} - i\sqrt{6},\ z_3 = 4,\ z_4 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2},\ z_5 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{i}{4},$
$z_6 = -8{,}8 + 1{,}3i,\ z_7 = -4{,}2 - 1{,}7i,\ z_8 = 2{,}3 - 6{,}8i,\ z_9 = 4{,}8 + 6{,}7i.$

22.2 $z^5 - 32 = 0$.

22.3 $\omega = \frac{1}{z},\ \gamma = \{ z : x = 3 \}.$

22.4 $(1 - i)^i$.

22.5 $\omega = e^{z^2}$.

22.6 $u = 2xy + 3, \quad f(1 - i) = 1$.

22.7 а) $\int\limits_{\gamma} \bar{z}^2\, dz$, де γ – відрізок прямої від $z_1 = 0$ до $z_2 = 1 + i$;

б) $\int\limits_{\gamma^+} \frac{|z|}{\bar{z}^2} dz$, де $\gamma = \left\{ z : |z| = 1,\ \frac{\pi}{6} \le \arg z \le \frac{\pi}{3} \right\}$.

22.8 $\oint\limits_{\gamma} \frac{e^{-\pi z}}{(z+i)(z-i)^2} dz$, де а) $\gamma = \{ z : 4(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \}$;

б) $\gamma = \left\{ z : \left| z - \frac{i}{2} \right| = 2 \right\}$; в) $\gamma = \left\{ z : |z + i| = \frac{3}{2} \right\}$.

22.9 а) $f(z) = z \cdot e^{\frac{2}{z}}$; б) $f(z) = \frac{z - 4}{z(z+2)}$; в) $f(z) = \frac{e^{\frac{z}{2}} - 1}{3z}$.

22.10 а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{4 \sin x + 5}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)^3}$; в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{(x^2 - x + 1)^2} dx$.

Варіант №23

23.1 $n = 23,\ z_1 = -4 - i,\ z_2 = -\sqrt{6} + i\sqrt{6},\ z_3 = \sqrt{5},\ z_4 = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2},\ z_5 = -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{i}{4},$
$z_6 = -2{,}1 - 9{,}7i,\ z_7 = 4 + 5{,}4i,\ z_8 = -4{,}1 + 8{,}6i,\ z_9 = 7{,}9 - 0{,}8i.$

23.2 $z^4 - i = 0$.

23.3 $\omega = z^2,\ \gamma = \{ z : x = 4 \}.$

23.4 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right)^{1-i}$.

23.5 $\omega = (1-i)z + i\,\bar{z}^3$.

23.6 $u = x^2 - y^2 + xy,\quad f(-1-i) = 1$.

23.7 а) $\int\limits_{\gamma} (i - 2\bar{z})\, dz$, де γ – відрізок прямої від $z_1 = 0$ до $z_2 = 2 + 4i$;

б) $\int\limits_{\gamma^+} (z^3 + \sin z) dz$, де $\gamma = \{ z : |z| = 1,\ Re\, z \ge 0 \}$.

23.8 $\oint\limits_{\gamma} \frac{\sin \pi z}{(z-1)^2 \left(z + \frac{1}{2} \right)} dz$, де а) $\gamma = \{ z : |z - i| = 1 \}$;

б) $\gamma = \left\{ z : \frac{(x+1)^2}{9} + y^2 = 1 \right\}$; в) $\gamma = \{ z : |z - 3| = 2{,}5 \}$.

23.9 а) $f(z) = (z+3) \cdot sh\left(\frac{1}{z} \right)$; б) $f(z) = \frac{z+4}{z(z+5)}$; в) $f(z) = \frac{\sin z - z}{z^2}$.

23.10 а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{3\sin x + 5}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+2)^2 (x^2+10)^2}$; в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x - \cos x}{(x^2+1)^2} dx$.

Варіант №24

24.1 $n=24,\ z_1=1-3i,\ z_2=-\sqrt{6}-i\sqrt{6},\ z_3=\sqrt{6},\ z_4=\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2},\ z_5=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{i}{4},$
$z_6=3{,}3+7{,}8i,\ z_7=1{,}4-8{,}4i,\ z_8=-2{,}6-4{,}3i,\ z_9=-5{,}2+4{,}2i.$

24.2 $z^5-i=0$.

24.3 $\omega=3z-i+2,\ \gamma=\{z:\ |z|=1\}.$

24.4 $(1-i)^{2-2i}$.

24.5 $\omega=\cos(z-i)$.

24.6 $v=3yx^2-y^3,\quad f(1)=2+i$.

24.7 а) $\int\limits_{\gamma}\bar{z}^2\,dz$, де $\gamma=\{z:\ y=x^2,\ z_1=0,\ z_2=-1+i\}$;

б) $\int\limits_{\gamma^+} Im\frac{z}{\bar{z}}dz$, де $\gamma=\left\{z:|z|=1,\ 0\le \arg z\le\frac{\pi}{2}\right\}$.

24.8 $\oint\limits_{\gamma}\frac{\cos\pi z}{(z-1)^2(z+1)}dz$, де а) $\gamma=\{z:|z-i|=1\}$;

б) $\gamma=\left\{z:4(x-1)^2+\frac{4(y-1)^2}{9}=1\right\}$; в) $\gamma=\left\{z:\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{y^2}{4}=1\right\}$.

24.9 а) $f(z)=(3z+5)\cdot \text{ñh}\left(\frac{2}{z}\right)$; б) $f(z)=\frac{z+4}{z(z-2)}$; в) $f(z)=\frac{1-\cos z^2}{z^4}$.

24.10 а) $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{3\sqrt{7}\sin x+8}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x^2-1)dx}{(x^2+8x+17)^2}$; в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x^2+x)\cos x}{x^4+13x^2+36}dx$.

Варіант №25

25.1 $n = 25,\ z_1 = -1 + 3i,\ z_2 = \sqrt{7} + i\sqrt{7},\ z_3 = \sqrt{7},\ z_4 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2},\ z_5 = -2 + 2\sqrt{3}i,$
$z_6 = 5{,}8 - 8{,}3i,\ z_7 = 4{,}1 + i,\ z_8 = -2{,}2 + 7{,}2i,\ z_9 = -7{,}8 - 3{,}3i.$

25.2 $z^6 - i = 0$.

25.3 $\omega = \dfrac{1}{z},\ \gamma = \{ z : x = 4 \}.$

25.4 $(-1 + i)^{1 + i\sqrt{3}}$.

25.5 $\omega = (4i + 3)z^2 - 2i\,\bar{z} + i - 3$.

25.6 $u = x^2 - y^2 + 3x + y,\quad f(i) = 2 + \sqrt{3}\,i$.

25.7 а) $\int\limits_{\gamma} (1 + \bar{z})\, dz$, де $\gamma = \{ z : y = x^2,\ z_1 = 0,\ z_2 = 2 + 4i \}$;

б) $\int\limits_{\gamma^+} (\cos iz + 3z^2)\, dz$, де $\gamma = \{ z : |z| = 1,\ Im\, z \le 0,\ Re\, z \ge 0 \}$.

25.8 $\oint\limits_{\gamma} \dfrac{e^{iz} - 1}{z^3 - \pi z^2}\, dz$, де а) $\gamma = \left\{ z : \left| z - \dfrac{3}{2} \right| = 1 \right\}$;

б) $\gamma = \left\{ z : \dfrac{(x-1)^2}{9} + y^2 = 1 \right\}$; в) $\gamma = \left\{ z : |z - 3 - i| = \dfrac{3}{2} \right\}$.

25.9 а) $f(z) = (z + 3) \cdot e^{-\frac{1}{z}}$; б) $f(z) = \dfrac{z + 1}{z(z - 5)}$; в) $f(z) = \dfrac{1 - e^{-z}}{2z}$.

25.10 а) $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dx}{4\sqrt{5}\sin x + 9}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{(x^2 + 10)\, dx}{(x^2 + 4)^2}$; в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{(x^3 + 1)\cos x}{x^4 + 5x^2 + 4}\, dx$.

Варіант №26

26.1 $n = 26,\ z_1 = -1-3i,\ z_2 = \sqrt{7} - i\sqrt{7},\ z_3 = -i\sqrt{7},\ z_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2},\ z_5 = -2-2\sqrt{3}i,$
$z_6 = -4{,}2 + 6{,}6i,\ z_7 = -3{,}4 - 8{,}6i,\ z_8 = 0{,}8 + 9i,\ z_9 = 6{,}3 - 2{,}6i.$

26.2 $z^3 + 27i = 0$.

26.3 $\omega = z^2,\ \gamma = \{ z : y = 1 \}$.

26.4 $\left(\sqrt{3} + i\right)^i$.

26.5 $\omega = 5\bar{z} - i z^2$.

26.6 $u = 3xy + y - x, \quad f(0) = 2i$.

26.7 а) $\int\limits_{\gamma} z\, Re\, z^2\, dz$, де γ – відрізок прямої від $z_1 = 0$ до $z_2 = 1 + 2i$;

б) $\int\limits_{\gamma^+} \frac{\bar{z}^2}{|z|} dz$, де $\gamma = \left\{ z : |z| = 3, -\frac{\pi}{2} \le arg\, z \le \frac{\pi}{2} \right\}$.

26.8 $\oint\limits_{\gamma} \frac{e^{z^2}}{z^2 - 5z} dz$, де а) $\gamma = \{ z : |z - 2| = 1 \}$;

б) $\gamma = \{ z : |z + 1| = 7 \}$; в) $\gamma = \{ z : |z + 1 + i| = 2 \}$.

26.9 а) $f(z) = (5z + 2) \cdot e^{\frac{1}{z}}$; б) $f(z) = \frac{z + 4}{z(z - 3)}$; в) $f(z) = \frac{1 - cos\left(\frac{z}{2}\right)}{2z}$.

26.10 а) $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{7}\, sin\, x + 4}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2 + 5\right)^3}$; в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 \cdot cos\, x}{x^4 + 10x^2 + 9} dx$.

Варіант №27

27.1 $n=27$, $z_1=1-3i$, $z_2=-\sqrt{7}+i\sqrt{7}$, $z_3=i\sqrt{3}$, $z_4=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$, $z_5=2-2\sqrt{3}i$, $z_6=-1{,}8-8{,}4i$, $z_7=8{,}8-2{,}2i$, $z_8=0{,}9+9{,}6i$, $z_9=-4{,}3+7{,}6i$.

27.2 $z^6-64=0$.

27.3 $\omega=zi+2-3i$, $\gamma=\{z:|z|=4\}$.

27.4 $i^{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}}$.

27.5 $\omega=e^{(2+i)z}$.

27.6 $u=y^3-3x^2y+x+2$, $f(-1)=1$.

27.7 а) $\int\limits_{\gamma}(1+i-\bar{z})\,dz$, де $\gamma=\{z: y=x^2,\ z_1=0,\ z_2=1+i\}$;

б) $\int\limits_{\gamma^+}(chz+z)\,dz$, де $\gamma=\{z:|z|=1,\ Im\,z\le 0,\ Re\,z\ge 0\}$.

27.8 $\oint\limits_{\gamma}\frac{ch\,iz}{z^2+4z+3}\,dz$, де а) $\gamma=\{z:(x-2)^2+y^2=4\}$;

б) $\gamma=\{z:|z+1|=3\}$; в) $\gamma=\{z:|z|=2\}$.

27.9 а) $f(z)=(z^2+5z)\cdot e^{\frac{1}{z}}$; б) $f(z)=\frac{z+4}{z(z-5)}$; в) $f(z)=\frac{sin\left(\frac{z}{3}\right)}{2z}$.

27.10 а) $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{\left(\sqrt{3}+cos\,x\right)^2}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+3\right)^2\left(x^2+15\right)^2}$; в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{sin\,2x}{\left(x^2-x+1\right)^2}dx$.

Варіант №28

28.1 $n = 28,\ z_1 = 3 + i,\ z_2 = -\sqrt{7} - i\sqrt{7},\ z_3 = -i\sqrt{3},\ z_4 = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2},\ z_5 = -\frac{\sqrt{3}}{5} + \frac{i}{5},$
$z_6 = 9{,}2 + 0{,}9i,\ z_7 = 4{,}7 - 7{,}3i,\ z_8 = -9{,}1 - 2{,}9i,\ z_9 = -4{,}1 + 6{,}8i.$

28.2 $z^5 + 32i = 0$.

28.3 $\omega = z^2,\ \gamma = \{z : y = 2\}$.

28.4 $(-2i)^{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}}$.

28.5 $\omega = \cos(-i\bar{z} - 3 + 2i)$.

28.6 $v = 2x^2 - 2y^2 - y + 6,\quad f(0) = 6i$.

28.7 а) $\int\limits_{\gamma} (1 - i + \bar{z})\, dz$, де γ – відрізок прямої від $z_1 = 1 + i$ до $z_2 = 2 + 2i$;

б) $\int\limits_{\gamma^+} (\sin iz + \bar{z})\, dz$, де $\gamma = \{z : |z| = 2,\ \operatorname{Re} z \ge 0\}$.

28.8 $\oint\limits_{\gamma} \frac{\sin iz}{z^2 - 4z + 3}\, dz$, де а) $\gamma = \{z : (x+2)^2 + (y-2)^2 = 1\}$;

б) $\gamma = \{z : |z - 2 - i| = 3\}$; в) $\gamma = \{z : |z| = 2\}$.

28.9 а) $f(z) = z \cdot e^{\frac{2}{z}}$; б) $f(z) = \frac{z - 3}{z(z+4)}$; в) $f(z) = \frac{\cos\left(\frac{z}{2}\right) - 1}{z}$.

28.10 а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(2 + \sqrt{3}\cos x)^2}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2 + 2)\, dx}{x^4 + 7x^2 + 12}$; в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^3 + 1) \cdot \sin x}{x^4 + 5x^2 + 4}\, dx$.

Варіант №29

29.1 $n = 29,\ z_1 = 3 - i,\ z_2 = 3 + 3i,\ z_3 = \sqrt{7},\ z_4 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2},\ z_5 = \frac{\sqrt{3}}{5} - \frac{i}{5},$
$z_6 = 1{,}8 + 10{,}3i,\ z_7 = -2{,}8 - 6{,}2i,\ z_8 = -3{,}6 + 7{,}8i,\ z_9 = 5{,}2 - 8{,}7i.$

29.2 $z^6 + i = 0$.

29.3 $\omega = -z + 3 + 2i,\ \gamma = \{ z :\ |z| = 5 \}.$

29.4 $(-3)^{-2i}$.

29.5 $\omega = \sin(z + i)$.

29.6 $u = 5x + 1 + 2xy, \quad f(0) = 2$.

29.7 а) $\int\limits_{\gamma} (2 + \bar{z})\,dz$, де $\gamma = \{ z : x = y^2,\ z_1 = 0,\ z_2 = 4 - 2i \}$;

б) $\int\limits_{\gamma^+} \left(\cos iz + 3z^2 \right) dz$, де $\gamma = \{ z : |z| = 2,\ Im\, z \le 0 \}$.

29.8 $\oint\limits_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz$, де а) $\gamma = \{ z : (x-2)^2 + (y-3)^2 = 1 \}$;

б) $\gamma = \{ z : |z| = 3 \}$; в) $\gamma = \{ z : |z - i| = 1 \}$.

29.9 а) $f(z) = \left(3z^2 - z\right) \cdot e^{\frac{1}{z}}$; б) $f(z) = \frac{z + 1}{z(z+3)}$; в) $f(z) = \frac{e^{z^3} - 1}{z^2}$.

29.10 а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(2 + \cos x)^2}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2 - 10x + 29\right)^2}$; в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(x^2 + x\right) \cdot \sin x}{x^4 + 13x^2 + 36} dx$.

Варіант №30

30.1 $n = 30,\ z_1 = -3 + i,\ z_2 = 3 - 3i,\ z_3 = -\sqrt{3},\ z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2},\ z_5 = \frac{\sqrt{3}}{5} + \frac{i}{5},$
$z_6 = -4{,}6 - 8i,\ z_7 = -4{,}3 + 7{,}7i,\ z_8 = -1{,}1 - 8{,}3i,\ z_9 = 7{,}9 + 9{,}3i.$

30.2 $z^5 - 32i = 0$.

30.3 $\omega = z^2,\ \gamma = \{ z : y = 4 \}.$

30.4 $i^{-\sqrt{3} + i\sqrt{3}}$.

30.5 $\omega = e^{i3\bar{z}}$.

30.6 $v = x^3 - 3x - 3xy^2,\quad f(0) = 8i$.

30.7 а) $\int\limits_{\gamma} z\, Im\, z^2\, dz$, де γ – відрізок прямої від $z_1 = 0$ до $z_2 = 1 + i$;

б) $\int\limits_{\gamma^+} (\sin iz + z)dz$, де $\gamma = \{z : |z| = 2,\ Re\, z \le 0\}$.

30.8 $\oint\limits_{\gamma} \frac{\sin \frac{\pi z}{2}}{z^2 + 2z - 3} dz$, де а) $\gamma = \{z : |z - 2i| = 1\}$;

б) $\gamma = \left\{ z : \frac{(x-1)^2}{16} + y^2 = 1 \right\}$; в) $\gamma = \{z : |z - 1| = 2\}$.

30.9 а) $f(z) = (z + 5) \cdot e^{\frac{3}{z}}$; б) $f(z) = \frac{z + 6}{z(z - 2)}$; в) $f(z) = \frac{\cos 3z - 1}{z^2}$.

30.10 а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(3 + 2\cos x)^2}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\, dx}{(x^2 + 11)^2}$; в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x - \cos 2x}{(x^2 + 1)^2} dx$.

Література

1. Теорія функції комплексної змінної: навч. посіб. для студентівфізичних спеціальностей університетів / С. М. Єжов, М. А. Разумова. — К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2012. — 191 с.
2. Тевяшев А. Д., Литвин О. Г., Кривошеєва Г. М. та ін. Вища математика у прикладах та задача. Ч3. Диференціальні рівняння. Ряди. Функція комплексної змінної. Операційне числення. — Харьків: ХНУРЕ, 2002. — 596.
3. Довідник по спецрозділам вищої математики. Теорія функції комплексної змінної. Операційне числення/ укл. Л. І. Малигіна, Н. В. Крапива. — Одеса:ОДПУ, 2001.— 48 с.

Зміст