

Міністерство освіти і науки України  
Національний університет “Одеська політехніка”

О.Г. Бутенко  
А.В. Карамушко  
С.Ю. Смик  
С.В. Сурков

## **Гідрогазодинаміка**

Навчальний посібник  
для студентів спеціальності  
143 Атомна енергетика

Рекомендовано Вченою Радою  
Національного університету “Одеська політехніка”  
протокол № 1 від 30.08.2021

Одеса  
2021

Бутенко О.Г. **Гідрогазодинаміка:** Навчальний посібник / Укл.: О.Г. Бутенко, А.В. Карамушко, С.Ю. Смик, С.В. Сурков. Одеса: Національний університет «Одеська політехніка», 2021. – 332 с.

Укладачі: Бутенко О.Г., доцент  
Карамушко А.В., ст. викладач  
Смик С.Ю., доцент  
Сурков С.В., доцент

# ЗМІСТ

<b>ВСТУП.....</b>	<b>8</b>
<b>1 ОСНОВНІ ФІЗИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ТА МОДЕЛІ РІДИНИ .....</b>	<b>11</b>
1.1 Поняття рідини. Модель суцільного середовища.....	11
1.2 Основні фізичні властивості рідин.....	13
1.2.1 Густина і питома вага .....	13
1.2.2 Стисливість і температурне розширення .....	14
1.2.3 Капілярність.....	16
1.2.4 Текучість і в'язкість. Закон в'язкого тертя Ньютона .....	17
1.3 Моделі та методи гідромеханіки .....	21
1.4 Приклади задач до розділу 1 .....	23
<b>2 РІВНОВАГА РІДИНИ.....</b>	<b>24</b>
2.1 Класифікація сил, що діють у рідинах .....	24
2.2 Напружений стан рідини. Тензор напружень. Гідростатичний тиск .....	25
2.3 Рівняння руху рідини в напруженнях .....	28
2.4 Система диференціальних рівнянь рівноваги рідини .....	29
2.5 Рівновага рідини у полі земного тяжіння. Гідростатичний закон розподілу тиску.....	32
2.6 Сили тиску рідини на тверду поверхню .....	34
2.7 Відносний спокій рідини .....	41
2.8 Приклади задач до розділу 2.....	45
<b>3 ОСНОВИ КІНЕМАТИКИ РІДИНИ.....</b>	<b>48</b>
3.1 Два методи опису руху рідини .....	48
3.2 Лінія і трубка течії. Траєкторія.....	51
3.3 Рівняння нерозривності .....	53
3.4 Аналіз руху рідкої частинки. Теорема Коші-Гельмгольца.....	55
3.5 Вихровий рух рідини .....	59
3.5.1 Вихрові лінія і трубка. Друга теорема Гельмгольца .....	59
3.5.2 Циркуляція швидкості. Теорема Стокса.....	63
3.6 Потенціальний рух рідини .....	66

3.6.1	Потенціал швидкості. Рівняння Лапласа .....	66
3.6.2	Функція течії для плоского потоку. Гідродинамічна сітка.....	68
3.6.3	Функція комплексної змінної .....	71
3.6.4	Найпростіші потенціальні течії та принцип їх суперпозиції... 72	
3.7	Приклади задач до розділу 3 .....	78
<b>4</b>	<b>ОСНОВИ ГІДРОДИНАМІКИ .....</b>	<b>81</b>
4.1	Гідродинаміка ідеальної рідини.....	81
4.1.1	Система диференціальних рівнянь руху ідеальної рідини. Перетворення Громеки-Лемба.....	81
4.1.2	Інтеграл рівняння Ейлера. Рівняння Бернуллі для елементарної струминки ідеальної рідини та його тлумачення .....	83
4.2	Гідродинаміка в'язкої рідини.....	88
4.2.1	Модель в'язкої рідини .....	88
4.2.2	Диференціальні рівняння Нав'є-Стокса .....	89
4.3	Приклади задач до розділу 4 .....	93
<b>5</b>	<b>ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПОДІБНОСТІ .....</b>	<b>95</b>
5.1	Гідродинамічна подібність.....	95
5.2	Інспекційний аналіз диференціальних рівнянь. Автомодельність ....	99
5.3	Метод аналізу розмірностей .....	103
5.4	Приклади задач до розділу 5 .....	105
<b>6</b>	<b>ОДНОВИМІРНА ТЕЧІЯ В'ЯЗКОЇ РІДИНИ.....</b>	<b>109</b>
6.1	Середня швидкість потоку .....	109
6.2	Слабодеформовані потоки.....	110
6.3	Рівняння Бернуллі для потоку в'язкої рідини .....	112
6.4	Стійкість течії. Число Рейнольдса як критерій стійкості.....	116
6.5	Ламінарна течія в круглих трубах .....	120
6.6	Турбулентна течія в круглих трубах .....	124
6.6.1	Поняття про осереднені параметри. Рівняння Рейнольдса.....	124
6.6.2	Напівемпіричні теорії турбулентності.....	129
6.6.3	Розподіл швидкостей при турбулентній течії в круглій трубі....	131
6.7	Гідравлічні опори .....	139
6.7.1	Втрати напору по довжині. Графіки Нікурадзе .....	140
6.7.2	Місцеві втрати напору. ....	143

6.7.3	Взаємний вплив місцевих опорів. Ділянка гідродинамічної стабілізації .....	147
6.7.4	Кавітація в місцевих опорах .....	149
6.8	Витікання рідини крізь отвори та насадки .....	150
6.8.1	Витікання рідини крізь малі отвори та насадки під дією сталого тиску .....	150
6.8.2	Витікання рідини крізь великі отвори під дією сталого тиску...	153
6.8.3	Витікання крізь малий отвір під дією змінного тиску .....	155
6.9	Гідравлічний розрахунок трубопроводів.....	157
6.9.1	Характеристика простого трубопроводу з насосною подачею..	158
6.9.2	Принципи розрахунку складних гідравлічних мереж.....	160
6.10	Неусталений рух нестисливої рідини .....	164
6.10.1	Рівняння Бернуллі для неусталеного руху .....	164
6.10.2	Гідравлічний удар в трубах.....	167
6.11	Особливості течії в трубах некруглого перерізу .....	172
6.12	Силова взаємодія потоку ідеальної рідини з твердими тілами .....	176
6.12.1	Закон збереження імпульсу .....	176
6.12.2	Внутрішня і зовнішня задачі.....	178
6.13	Приклади задач до розділу 6 .....	180
<b>7</b>	<b>ОБТІКАННЯ ТВЕРДИХ ТІЛ В'ЯЗКОЮ РІДИНОЮ. ОСНОВИ ТЕОРІЙ ПОГРАНИЧНОГО ШАРУ ТА ВІЛЬНИХ ТУРБУЛЕНТНИХ СТРУМИН</b>	<b>186</b>
7.1	Основи теорії пограничного шару.....	186
7.1.1	Поняття пограничного шару. Умовні товщини .....	186
7.1.2	Рівняння руху в плоскому ламінарному пограничному шарі...	189
7.1.3	Інтегральне співвідношення Кармана для пограничного шару .	193
7.1.4	Розрахунок ламінарного пограничного шару на пластині .....	196
7.1.5	Розрахунок турбулентного пограничного шару на пластині ..	199
7.1.6	Відрив пограничного шару .....	203
7.2	Опір тіл, що обтікаються в'язкою рідиною.....	205
7.2.1	Сили, котрі діють на тіло, що обтікається в'язкою рідиною ..	205
7.2.2	Обтікання кругового циліндра ідеальною рідиною. Парадокс Ейлера-д'Аламбера. Формула Жуковського .....	207
7.2.3	Обтікання кругового циліндра в'язкою рідиною. Криза опору ...	215
7.2.4	Формула Жуковського для ґратки профілів. Аеродинамічні характеристики профілів.....	216
7.3	Вільні турбулентні струмини.....	222

7.3.1 Класифікація і загальні властивості турбулентних струмин...	222
7.3.2 Плоскі вільні затоплені струмини .....	226
7.3.3 Вісесиметричні вільні затоплені струмини .....	231
7.4 Приклади задач до розділу 7 .....	234
<b>8 ОСНОВИ ГІДРОДИНАМІЧНОЇ ТЕОРІЇ ЗМАЩУВАННЯ.....</b>	<b>240</b>
8.1 Течія в'язкої рідини між двома співвісними циліндрами, що обертаються .....	240
8.2 Змащування плоских поверхонь.....	245
8.3 Течія в'язкої рідини між ексцентричними циліндрами, що обертаються .....	253
8.4 Приклади задач до розділу 8 .....	260
<b>9 ОСНОВИ ГАЗОВОЇ ДИНАМІКИ.....</b>	<b>262</b>
9.1 Зв'язок між параметрами при адіабатичній течії газу.....	262
9.2 Рівняння Бернуллі для адіабатичної течії стисливого газу.....	263
9.3 Адіабатична швидкість звуку. Число Маха.....	265
9.4 Ізоентропічна течія стисливого газу .....	268
9.4.1 Ізоентропічні співвідношення. Зведена швидкість і газодинамічні функції.....	268
9.4.2 Витікання газу через звужуюче сопло. Формула Сен-Венана-Ванцеля .....	274
9.4.3 Закон обертання дії. Сопло Лавалю .....	277
9.5 Поширення малих збурень в газовому потоці. Косий стрибок згущення .....	280
9.6 Прямий стрибок згущення. Ударна адіабата.....	282
9.7 Приклади задач до розділу 9 .....	287
<b>СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....</b>	<b>290</b>

## ВСТУП

*Працуйте, працуйте –  
а розуміння прийде згодом.*

*Жан Лерон Даламбер*

Людство на всіх етапах свого розвитку свідомо чи ні у власних потребах використовувало рідини. Найпоширенішим представником рідин, з якими мали справу люди з давніх давен, була вода, оскільки без неї неможливе життя як самої людини, так і усього живого, що її оточує. Вода використовувалась не тільки для пиття, а й для зрошування сільськогосподарських угідь. Недарма першими гідравлічними системами, котрі створили і використовували люди, були зрошувальні канали, що будувались біля великих річок – Ніла, Тигра, Євфрата, Хуанхе тощо. Першими водопідйомниками були черпакові механізми, котрі приводились до дії людською силою або силою домашніх тварин. Ще до нашої ери у Римі був побудований, очевидно, перший міський водогін, залишки якого збереглися і досі. Його загальну довжину сучасні фахівці оцінюють приблизно у 400 км.

Іншою сферою взаємин людини і води стало мореплавання. Невипадково міць і добробут багатьох давніх держав та врешті решт і розвиток всієї цивілізації великою мірою залежали від ступеня розвитку кораблебудування і мореплавання.

Таким чином, очевидно, що розвиток давніх культур спонукав до осмислення тодішніми мислителями основ законів руху рідини, плавання тіл, винаходу перших гідравлічних машин. Ще у середині III ст. до н. е. великим давнім вченим Архімедом (287–212 до н. е.) у праці «Про тіла, що плавають» були сформульовані основи силової взаємодії рідини з твердими тілами, що у неї занурені. Справедливість поглядів Архімеда підтвердила вся історія розвитку гідравліки, невинадково закон про плавання тіл носить його ім'я. Архімед винайшов механізм для підйому води – архімедів гвинт. Його праці стали основою для подальшого розвитку у галузі гідравліки.

Інший видатний вчений давнини – Аристотель (384–322 до н. е.) не тільки протягом всього середньовіччя був абсолютним авторитетом у філософії, а й став автором праці «Фізика». У ній він розглянув фізичну природу взаємодії рідини (газу) з твердими тілами, що в ній рухаються, і цілком слушно вважав, що швидкість падіння різних тіл в порожнечі однакова, а середовище, в якому рухається тіло, створює опір пропорціональний густині цього середовища. Аристотель також вважав, що усякий рух тіла потребує прикладення до нього рушійної сили, котра утворюється на поверхні дотикання тіла з рідиною. Таке, хоч і дещо спрощене, але вірне по суті уявлення проіснувало аж до створення ньютонівської механіки.

У середньовіччя, а саме в епоху Відродження, чималий внесок у розвиток механіки в цілому, і гідромеханіки зокрема, зробили Леонардо да Вінчі (1452–1519), який обґрунтував закон суцільності рідини та сталості добутку

швидкості її течії та площі, вивчав закони механіки польоту; Сімон Стевін (1548–1620) – автор правила паралелограма сил та праць в галузі гідростатики; Еванджеліста Торрічеллі (1608–1647), який вивчав закономірності витікання рідини з отворів і довів існування атмосферного тиску; Блез Паскаль (1623–1662), відомий своїми дослідженнями в галузі вивчення законів рівноваги рідини та механізму передачі тиску у рідині; Галілео Галілей (1565–1642), котрий вивчав закони гідростатики, падіння тіл та ввів поняття кількості руху; Отто фон Геріке (1602–1686) – винахідник поршневого насоса та автор класичних дослідів з вакуумом. Приблизно у ці часи були винайдені перші роторні, а згодом і відцентрові насоси, котрі, однак, знайшли широке використання значно пізніше.

Новий етап у розвитку механіки, у т. ч. і механіки рідини, започаткував Ісаак Ньютон (1643–1727). Він не тільки заклав основи класичної механіки твердого тіла, але й сформулював закон про внутрішнє тертя в рідинах, котрий носить його ім'я. Михайло Ломоносов (1711–1765) встановив загальні закони збереження енергії та матерії. Можна вважати, що починаючи приблизно з XVIII ст. гідромеханіка почала формуватися у тому вигляді, який вона має і у наш час. Величезна заслуга у цьому належить математикам Даниїлу Бернуллі (1700–1782) і Леонарду Ейлеру (1707–1783) – великим вченим, які розробили загальні засади теорії гідромеханіки на підставі уявлення про рідину як суцільне ідеальне середовище. З цього приводу Жозеф Луї Лагранж (1736–1813) писав: «Ми зобов'язані Ейлерові першими загальними рівняннями, що описують рух рідин... Дякуючи цьому відкриттю вся механіка рідин звелася до аналізу, і якщо ці рівняння були б інтегрованими, можна було б повністю визначити рух рідин під дією довільних сил в будь-якому конкретному випадку». Але оптимізм Лагранжа був завчасним – теоретичні здобутки цих вчених виявилися практично не придатними для інженерних розрахунків, оскільки не враховували сили внутрішньої взаємодії між молекулами рідини. Системи диференціальних рівнянь, котрі враховують ці взаємодії, запропоновані Луї Марі Анрі Нав'є (1785–1836) і Джорджем Габріелем Стоксом (1819–1903) та Осборном Рейнольдсом (1842–1912) теж не могли задовольнити потреби інженерної гідравліки, оскільки через їх складність не могли бути проінтегрованими для переважної більшості інженерних задач. Недарма ще Галілео Галілей слушно зауважував, що значно легше вивчати рух нескінченно віддалених від нас небесних тіл, ніж рух води у струмку біля наших ніг, а Шевальє де Борда (1733–1799) вважав, що реальні потоки рідини «значно більш складні за своєю природою, ніж характер самої капризної жінки». Леонардо да Вінчі вказував, що кожного разу, коли маєш справу з водою, перш за все треба звертатися до досвіду, а потім вже розмірковувати. Тому наступний етап розвитку науки про рух рідини був головним чином експериментальним. Важливі результати у цей час були отримані Осборном Рейнольдсом, Антуаном Шезі (1718–1798), Анрі Дарсі (1803–1858), Жозе Валентином Буссінеском (1842–1929), Іполитом Громекою (1851–1889), Жаном Луї Марі Пуазейлем (1799–1869), Іваном Нікурадзе (1894–1979), Миколою Петровим (1836–1920),



Миколою Павловським (1884–1937), Теодором Карманом (1881–1963) та ін. У ці роки спостерігався великий розрив між теоретичною гідромеханікою і дослідною гідравлікою, хоч предметом їх вивчення були одні й ті самі закони. Певною мірою відносна самостійність цих напрямів збереглася і до нашого часу. Втім починаючи приблизно з кінця XIX – початку XX ст. завдяки фундаментальним працям перш за все Осборна Рейнольдса, який дослідним шляхом встановив факт існування двох режимів течії рідини, започаткував основи теорії подібності; Миколи Жуковського (1847–1921) – засновника сучасної гідро- і аеродинаміки та теорії гідродудару; Леонарда Прандтля (1875–1953) – автора напівемпіричної теорії турбулентності, теорії пограничного шару, в котрих органічно поєднуються здобутки експерименту і аналітичної гідромеханіки, відбулося зближення теоретичної гідромеханіки та експериментальної гідравліки. Тому, вживаючи надалі термін технічна гідромеханіка (технічна механіка рідини та газу), будемо мати на увазі єдину науку, в якій поєднуються теорія та експеримент, а гідравлікою називатимемо лише окремий розділ, в якому розглядається одновимірна течія нестисливої рідини.

Отже, беручи свій початок від загальної механіки та часто використовуючи її найбільш загальні закони та принципи (перш за все закони збереження), гідромеханіка протягом свого розвитку поступово відокремилася і сформувалася в окрему науку. Цей цілком об'єктивний процес формування гідромеханіки як самостійної науки пов'язаний, головним чином, зі специфічними особливостями законів руху та рівноваги рідких тіл. Зрозуміло, що властивості рідин суттєво впливають на характер цих законів. Головна властивість, що якісно відрізняє рідину від твердих тіл, це слабкий зв'язок між молекулами, а отже, і її велика рухливість. Тому рідкі тіла під час руху легко деформуються, а гази, крім того, ще й можуть легко змінювати свій об'єм. Це суттєво ускладнює математичний опис течії та у більшості випадків, незважаючи на існування загальних математичних моделей у вигляді систем диференціальних рівнянь, що описують цю течію, не дозволяє дістати конкретних інженерних розв'язків. Тому переважна більшість інженерних розрахунків базується як на здобутках теоретичної гідромеханіки, так і на використанні емпіричних співвідношень та констант. Останнім часом, зважаючи на стрімкий розвиток обчислювальної техніки, все більшу роль починають відігравати числові методи розв'язання складних багатомірних задач.

Таким чином, *гідрогазодинаміка (технічна механіка рідини та газу) – наука, котра вивчає рух і рівновагу рідких тіл, а також силову взаємодію між рідинами і твердими тілами*. Поєднуючи в собі теорію і експеримент, вона є одною з наук, що становлять фундамент інженерних знань. Гідрогазодинаміка знаходить застосування у більшості сфер технічної діяльності та для багатьох галузей техніки, зокрема авіа- і кораблебудування, енергетики, машинобудування, металургії, будівництва є одною з базових.

# 1 ОСНОВНІ ФІЗИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ТА МОДЕЛІ РІДИНИ

## 1.1 Поняття рідини. Модель суцільного середовища

*Рідина – фізичне тіло, у якому зв'язок між окремими сусідніми частинками дуже слабкий внаслідок невеликих сил тертя і зчеплення, що діють між ними.* Цим пояснюються властивості великої рухливості рідини, слабого опору розтягуючим і дотичним зусиллям, малої стисливості. Не маючи власної форми, рідина завжди набирає форми тих посудин, у котрих знаходиться.

Термін «рідина» у гідромеханіці вживається, як правило, у широкому розумінні, тобто поєднує в собі як малостисливі (*краплинні*) рідини, так і стисливі (гази).

Якщо з точки зору фізики краплинна рідина і газ суттєво відрізняються між собою, то з позиції гідромеханіки різниця між ними не така вже й велика. Досить часто закони, справедливі для краплинної рідини, можуть бути з успіхом застосовані й до газів (у тих випадках, коли стисливістю останніх можна знехтувати).

У зв'язку з відсутністю спеціального терміна, який позначав би рідину в широкому розумінні слова, крім терміна «рідина», вживатимемо його, маючи на увазі й краплинні рідини, і газ. Тільки у тих випадках, коли це важливо, будемо акцентувати увагу на тому, про яку саме рідину йдеться.

І краплинні рідини, і гази досить легко змінюють свою форму. Однак якщо для зміни об'єму першої треба докласти досить великих зусиль, то газ змінює його порівняно легко, тобто якщо об'єм краплинної рідини менший за об'єм посудини, в якій вона знаходиться, то ця рідина займає нижню частину останнього, при цьому з'являється границя між рідиною і газом (наприклад повітрям), котру називають *вільною поверхнею*. Газ за цих умов легко збільшиться в об'ємі й займе всю посудину.

Зрозуміло, що навіть дуже невеликий об'єм рідини складається з досить великої кількості молекул (так, відомо, що в  $10^{-6}$  м<sup>3</sup> повітря міститься приблизно  $2,7 \cdot 10^{19}$  молекул). Для опису таких середовищ у фізиці широко використовують два підходи: феноменологічний (континуальні моделі) та статистичний (корпускулярні моделі). Оскільки гідромеханіка розглядає макроскопічний рух рідини, то розміри її об'ємів незмірно більші за розміри окремих молекул і міжмолекулярних відстаней (для краплинних рідин вони мають порядок  $10^{-9} \dots 10^{-10}$  м). Це дозволяє розглядати рідину як таку, що складається з достатньо малих частинок, які неперервно заповнюють простір, і яка може ділитися до нескінченності. Іншими словами, рідина – це *суцільне середовище*, маса і фізичні властивості котрого розподіляються у просторі безперервно.

Такий підхід отримав назву *гіпотези суцільного середовища*, яка хоч і є ідеалізацією реальної рідини, але дає змогу використовувати добре

розроблений математичний апарат обчислювання нескінченно малих і неперервних функцій. Усі закони гідромеханіки будуть отримані далі в межах цієї гіпотези. Тому вони справедливі, поки справедлива гіпотеза. Кількісно це можна оцінити за *критерієм Кнудсена*, що являє собою відношення довжини вільного пробігу молекул  $l$  до характерного розміру потоку  $L$

$$\text{Kn} = \frac{l}{L}. \quad (1.1)$$

Гіпотеза суцільності справедлива, якщо  $\text{Kn} < 0,01$ . Зауважимо, що правомірність її використання у досить широкому діапазоні параметрів рідини (окрім розряджених газів) підтверджується.

Надалі будемо оперувати поняттям «*рідка частинка*», під якою розуміють *малий об'єм суцільного середовища, котрий під час руху може деформуватися, але маса якого не змішується з навколишньою масою*. Рідка частинка має кінцеві розміри, які незмірно менші за розміри усього рідкого тіла. Але в об'ємі рідкої частинки настільки багато молекул, що її властивості та параметри є сталими відносно до всієї рідини. При вивченні рівноваги чи руху рідини рідку частинку розглядають як матеріальний об'єкт, до якого можуть бути застосовані усі закони механіки. Рідину при цьому розглядають як сукупність неперервно розподілених по об'єму рідких частинок.

Оскільки властивості та параметри рідини відповідно до гіпотези суцільного середовища розподіляються неперервно, то в гідромеханіці досить часто використовують поняття *поля фізичної величини*.

*Полем фізичної величини є простір, у кожній точці котрого ця величина цілком визначена*. Якщо величина скалярна (густина, температура тощо), тобто характеризується лише числом, то таке поле називають скалярним. Векторним є поле, яке характеризується в кожній точці простору величиною і напрямом (прискорення, швидкість тощо). Крім того, векторні величини повинні складатися за правилом паралелограма.

У теорії поля розглядаються 3 так звані операції першого порядку, які дозволяють, виконавши деякі математичні операції, перетворити скалярну величину на векторну (*градієнт*); векторну – на скалярну (*дивергенція*); векторну – на іншу векторну (*ротор* або *вихор*).

Градiєнтом деякої скалярної функції  $\varphi(x, y, z)$  є вектор, який утворюється в результаті виконання таких дій:

$$\text{grad } \varphi = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (1.2)$$

Фізично градієнт – це вектор, у напрямку якого функція у даній точці поля змінюється з максимальною швидкістю. Дивергенцією вектора  $\vec{u}$  називають скаляр

$$\text{div } \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (1.3)$$

Отже, будь-яке векторне поле може дати деяке скалярне, а саме – поле своєї дивергенції. Якщо  $\operatorname{div} \vec{u} = 0$ , то таке поле є *соленоїдальним*.

Вихор поля (ротор) – це вектор, що утворюється при виконанні операції

$$\operatorname{rot} \vec{u} = \vec{i} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right). \quad (1.4)$$

Якщо  $\operatorname{rot} \vec{u} = 0$ , то поле називають *безвихровим*.

Кожна з трьох операцій має гідродинамічну інтерпретацію, яка наводиться у відповідних розділах курсу.

## 1.2 Основні фізичні властивості рідин

Фізичні властивості рідини впливають на характер багатьох законів гідромеханіки і виявляються в особливостях поведінки рідини за тих чи інших умов. Цей вплив на різні явища і процеси неоднаковий: за одних умов властивість може визначати хід процесу, а за інших – взагалі не впливати на нього.

З фізичної точки зору, рідина має велику різноманітність властивостей. Але далеко не всі з них впливають на закони руху та рівноваги. Тому зупинимось лише на тих, які є важливими з точки зору гідромеханіки.

### 1.2.1 Густина і питома вага

*Густина* – це основна гідродинамічна характеристика рідини, під якою розуміють масу, що приходить на одиницю об'єму.

Згідно з гіпотезою суцільного середовища густина розподіляється у всьому об'ємі рідини неперервно і у загальному випадку нерівномірно. У довільній точці  $A$  густина визначається співвідношенням

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta V}, \quad (1.5)$$

де  $\Delta M$  – маса рідкої частинки об'ємом  $\Delta V$ , що містить у собі точку  $A$ .

Для однорідної рідини, густина якої по об'єму розподілена рівномірно,

$$\rho = \frac{M}{V}, \quad (1.6)$$

де  $M$  і  $V$  – маса і об'єм рідини.

В одиницях міжнародної системи вимірювань густина виражається в кілограмах на кубічний метр ( $\text{кг}/\text{м}^3$ ).

Вага одиниці об'єму рідини називається *питомою вагою* ( $\text{Н}/\text{м}^3$ )

$$\gamma = \frac{G}{V}, \quad (1.7)$$

де  $G$  – вага об'єму рідини, Н.

Оскільки вага тіла

$$G = Mg, \quad (1.8)$$

де  $g$  – прискорення вільного падіння ( $\text{м/с}^2$ ), то

$$\gamma = \rho g. \quad (1.9)$$

Точно кажучи, питома вага, на відміну від густини, не є фізичною властивістю тієї чи іншої рідини, тому що залежить від географічної широти та висоти над рівнем моря. Однак враховуючи, що прискорення вільного падіння змінюється на земній кулі лише в межах приблизно 0,5 %, а прийнятна точність інженерних розрахунків становить 3–5 %, то значення  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$  вважають сталим і фактом мінливості цієї величини нехтують.

Густина і питома вага газів залежать як від тиску, так і від температури, а для краплинних рідин – практично тільки від температури. Як приклад у таблиці 1.1 наведені густина і питома вага води при різних температурах.

Таблиця 1.1 – Густина і питома вага води при різних температурах

$t, \text{ }^\circ\text{C}$	0	4	20	50	100
$\rho, \text{ кг/м}^3$	999,9	1000	998,2	988,1	959
$\gamma, \text{ Н/м}^3$	9809	9810	9792	9694	9407

Для досконалого (ідеального) газу густина може бути розрахована за рівнянням Клайперона

$$\rho = \frac{P}{RT}, \quad (1.10)$$

де  $P$  – абсолютний тиск, Па;

$T$  – абсолютна температура, К;

$R$  – газова стала, Дж/(кг·К).

Під час деяких розрахунків зручно використовувати так звану *відносну питому вагу* (густину)  $\delta$ , під якою розуміють відношення питомої ваги (густини) даної рідини до питомої ваги (густини) води при  $4 \text{ }^\circ\text{C}$

$$\delta = \frac{\gamma}{\gamma_{e4}} = \frac{\rho}{\rho_{e4}}. \quad (1.11)$$

На відміну від  $\gamma$  і  $\rho$  відносна питома вага (густина) є безрозмірною величиною, числове значення якої не залежить від одиниць системи вимірювання. Зрозуміло, що для води при  $t = 4 \text{ }^\circ\text{C}$   $\delta_{e4} = 1$ .

### 1.2.2 Стисливість і температурне розширення

Стисливість – здатність до зворотної зміни об'єму рідини під дією всесбічного тиску.

Краплинна рідина при стисненні поводить себе як пружне тіло, тобто підпорядковується закону Гука

$$-\frac{dV}{V} = \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dP}{E}, \quad (1.12)$$

де  $dV$  – зменшення первісного об'єму рідини  $V$  при зростанні тиску на  $dP$ ;

$E$  – модуль об'ємної пружності, Па.

Величину, обернену модулю об'ємної пружності, називають коефіцієнтом об'ємного стиснення,  $\text{Па}^{-1}$ ,

$$\beta_P = \frac{1}{E} = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dP}. \quad (1.13)$$

Він чисельно дорівнює відносній зміні об'єму рідини при зміні тиску на одиницю. Знак мінус вказує на те, що додатному приросту тиску  $dP$  відповідає від'ємний приріст об'єму  $dV$ , тобто об'єм зменшується.

Коефіцієнт  $\beta_P$  мало змінюється при зміні тиску і температури. Для води у середньому можна приймати  $\beta_P = 0,5 \cdot 10^{-9} \text{ Па}^{-1}$ , а  $E = 2 \cdot 10^9 \text{ Па}$ .

Температурне розширення – здатність рідини змінювати свій об'єм при зміні температури – характеризується коефіцієнтом температурного розширення  $\beta_t$  ( $\text{К}^{-1}$ ), який вказує на відносне зростання об'єму рідини при зростанні температури на один градус, тобто

$$\beta_t = \frac{1}{V} \frac{dV}{dT}. \quad (1.14)$$

Для краплинних рідин він незначний і залежить від температури та тиску. Так, у воді при  $t = 10 \dots 20 \text{ }^\circ\text{C}$  і тиску  $P = 100 \text{ кПа}$   $\beta_t = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ К}^{-1}$ .

При розв'язуванні багатьох інженерних задач гідродинаміки стисливістю і температурним розширенням краплинних рідин можна нехтувати.

На відміну від краплинних рідин газу характеризуються значною стисливістю і високим значенням коефіцієнта температурного розширення. Для ідеального газу (взаємодію молекул якого можна не враховувати) густину, а отже, і об'єм можна визначити за формулою (1.10).

Поведінка реальних газів лише незначною мірою відрізняється від поведінки ідеального газу, і тому для них у широких межах можна користуватися співвідношенням Клайперона. Так, для повітря у стандартних умовах (атмосферному тиску і температурі  $t = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ )

$$\rho_n = \frac{P_a}{RT} = \frac{101325}{287(273 + 20)} = 1,20 \text{ кг/м}^3. \quad (1.15)$$

Міцність на розрив краплинних рідин у деяких умовах, а саме – коли на неї діє рівномірне і всебічне розтягуюче зусилля, при якому не виникає дотичних напружень, – може сягати досить великих значень. Але реально навіть незначна кількість твердих частинок або розчиненого газу в них зводить цю величину до нуля. Тому при розв’язанні інженерних задач майже завжди вважається, що рідина не здатна чинити опір розтягуючим зусиллям.

### 1.2.3 Капілярність

Молекули рідини, які розташовані біля поверхні контакту з іншою рідиною, газом чи твердим тілом, знаходяться в умовах, відмінних від умов всередині. Всередині об’єму молекули оточені з усіх боків такими самими молекулами, а поблизу границь (поверхні) – лише з одного боку. Тому енергія молекул на поверхні відрізняється від енергії внутрішніх молекул на деяку величину, що називають *поверхневою енергією*. Ця енергія пропорційна площі поверхні  $A$

$$E_n = \sigma A, \quad (1.16)$$

де  $\sigma$  – *коефіцієнт поверхневого натягу* (Дж/м<sup>2</sup>), який залежить від природи середовищ, котрі стикаються (для границі «вода – повітря» при  $t = 20$  °С  $\sigma \approx 0,075$  Дж/м<sup>2</sup>, а для границі «ртуть – повітря»  $\sigma \approx 0,52$  Дж/м<sup>2</sup>).

Поверхневий натяг рідини чутливий до її чистоти та температури. Рідина, яким властива значна зміна сили поверхневого натягу, називають *поверхнево-активними речовинами*. Підвищення температури веде до зниження поверхневого натягу.

На поверхні поділу трьох фаз, наприклад твердої стінки 1, краплинної рідини 2 і газу 3 (рисунок 1.1), виникає так званий *краєвий кут*  $\theta$ , його величина залежить від природи речовин, що стикаються і не залежить від форми посудини та дії сил тяжіння. Рідина є *змочувальною*, якщо краєвий кут гострий, і *незмочувальною*, якщо  $\theta > 90^\circ$ .

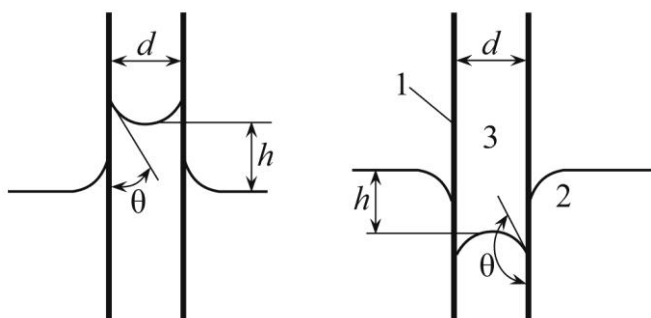


Рисунок 1.1 – Прояв капілярності рідини

Від явища змочування залежить поведінка рідини в тонких капілярних трубках. Якщо рідина змочує стінки, то вона піднімається над рівнем вільної поверхні та навпаки.

*Висоту капілярного підняття* (опускання) можна знайти за формулою

$$\Delta h = \frac{4\sigma}{\gamma d} \cos\theta, \quad (1.17)$$

де  $d$  – діаметр трубки.

Отже, *капілярність* – це явище підняття або опускання краплинної рідини в тонких трубках (в дрібнопористому твердому тілі, наприклад ґрунті) на деяку висоту з утворенням випуклого або увігнутого меніску. Саме завдяки властивості капілярності, тобто властивості створювати краплини, звичайні рідини називають краплинними. Цю властивість слід враховувати при відліку показань у вимірювальних приладах, в яких використовуються скляні трубки з рідиною типу скляних дифманометрів. Найчастіше в них використовується вода, для якої при  $t = 20\text{ }^\circ\text{C}$

$$h_g = \frac{30}{d}, \quad (1.18)$$

чи спирт

$$h_c = \frac{10}{d} \quad (1.19)$$

( $h$  і  $d$  в міліметрах).

#### 1.2.4 Текучість і в'язкість. Закон в'язкого тертя Ньютона

Оскільки молекули рідини не так жорстко пов'язані між собою, як у твердих речовинах, то рідина має таку властивість, як *текучість* – здатність необмежено деформуватися під впливом дуже незначних зусиль. З іншого боку, навіть невеликий відносний рух сусідніх шарів рідини породжує ефект опору цьому відносному руху. Властивість рідини чинити опір зсуваючим зусиллям називають *в'язкістю*.

Існування сили опору зсуваючим зусиллям можливо виявити дослідним шляхом. На нерухомій нижній поверхні (рисунок 1.2) знаходиться шар рідини завтовшки  $y_0$ , на вільній поверхні якого невагома пластина, площа котрої  $A$ . Якщо до пластини прикласти силу  $F$ , то вона почне переміщуватися і після деякого інтервалу часу встановиться її рівномірний рух з деякою швидкістю  $u_0$  відносно нижньої поверхні. Це озна-

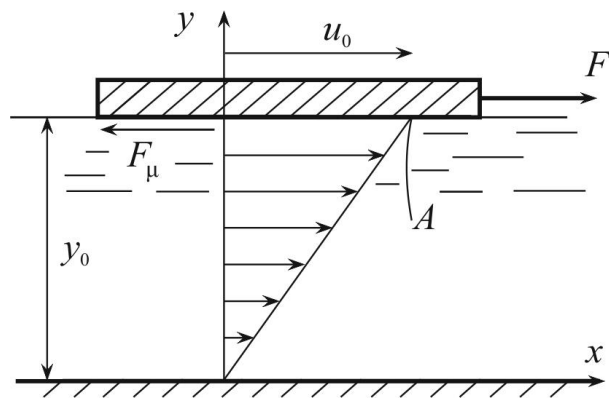


Рисунок 1.2 – Прояв сил в'язкості

час, що за час розгону виникла деяка сила  $F_\mu = -F$ . Вона може бути тільки силою опору рідини (опір повітря малий і до уваги не береться).

Механізм виникнення  $F_\mu$  можна пояснити таким чином. Шар рідини, що безпосередньо контактує з рухомою пластиною, рухається разом з нею зі



швидкістю  $u_0$  (ефект прилипання). Внаслідок молекулярних зв'язків цей шар «тягне» за собою наступний і так далі. Оскільки нижній шар рідини контактує з нерухомою поверхнею, то його швидкість дорівнює нулю. Отже, між поверхнями виникає рух рідини з деяким розподілом швидкостей  $u = f(y)$ . У нашому випадку він лінійний. Внаслідок дії міжмолекулярних зв'язків між шарами рідини, що рухаються один відносно одного, виникає *сила в'язкості*, або *сила в'язкого* (внутрішнього) *тертя*  $F_\mu$ . Першим вказав на ті параметри, від яких вона залежить, І. Ньютон<sup>1</sup>. Пізніше М. П. Петров<sup>2</sup>, здійснивши досліди, схожі на описаний вище, підтвердив гіпотезу Ньютона.

Для випадку рівномірного розподілу швидкостей

$$F_\mu = -\mu A \frac{u_0}{y_0}, \quad (1.20)$$

а у загальному випадку

$$F_\mu = \pm \mu A \frac{du}{dy}, \quad (1.21)$$

де  $\frac{du}{dy}$  – *градієнт швидкості*, який характеризує інтенсивність зміни швидкості

по нормалі до напрямку руху;

$\mu$  – *динамічний коефіцієнт в'язкості*, Па·с.

Якщо формулу (1.21) розділити на площу, то отримуємо вираз для *дотичних напружень*, який має назву *закону в'язкого тертя Ньютона*

$$\tau_\mu = \pm \mu \frac{du}{dy}. \quad (1.22)$$

Відповідно до правил механіки прийнято вважати дотичні напруження завжди додатною величиною. Тому у правій частині беруть знак плюс, якщо градієнт додатний, і мінус, якщо від'ємний.

---

<sup>1</sup> Ньютон Ісаак (1643–1727) – видатний англійський математик, фізик, астроном, автор фундаментальної наукової праці «Математичні основи натуральної філософії» (1686), в якій були вперше визначені базові поняття механіки, сформульовані три закони механіки. Паралельно з Г. Лейбніцом розробив основи диференціального та інтегрального обчислення. З 1703 р. президент Лондонської королівської спілки. Окрім видатних робіт у галузі математики («Універсальна арифметика», 1707), класичної механіки і оптики («Оптика», 1704), встановив закон внутрішнього тертя рідини, вивчав витікання рідини з отворів, а також припливно-відливні явища. На честь Ньютона названа одиниця вимірювання сили.

<sup>2</sup> Петров Микола Павлович (1836–1920) – видатний російський механік та інженер, інженер-генерал, професор, почесний член Петербурзької академії наук, голова Російського технічного товариства. У своїх наукових працях «Тертя в машинах і вплив на нього змащувальних масел» (1883), «Опис і результати дослідів над тертям рідин і машин» (1886) і «Тертя в машинах і вплив на нього змащувальної рідини. Практичні результати дослідів» (1887), «Тертя в машинах» (1900) заснував гідродинамічну теорію змащування.

Окрім динамічного коефіцієнта в'язкості, часто використовують *кінематичний коефіцієнт в'язкості*  $\nu$ , який може бути визначений із співвідношення

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}. \quad (1.23)$$

Одиниця вимірювання кінематичного коефіцієнта в'язкості –  $\text{м}^2/\text{с}$ .

Слід мати на увазі, що в'язкість як фізичну властивість рідини краще характеризує динамічний коефіцієнт  $\mu$ . Так, при  $t = 20^\circ\text{C}$  для повітря  $\nu_n = 1,51 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ ,

а для води  $\nu_v = 1,01 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ . Але зрозуміло, що в'язкість води більша, ніж у повітря, і це видно з величин коефіцієнтів динамічної в'язкості:  $\mu_n = 1,82 \cdot 10^{-5} \text{ Па}\cdot\text{с}$ ,  $\mu_v = 1,01 \cdot 10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с}$ .

На величину в'язкості тиск впливає мало, а температура – досить суттєво. Причому зростання температури знижує в'язкість краплинних рідин і підвищує в'язкість газів (рисунок 1.3). Причина цього полягає у фізичній природі в'язкості.

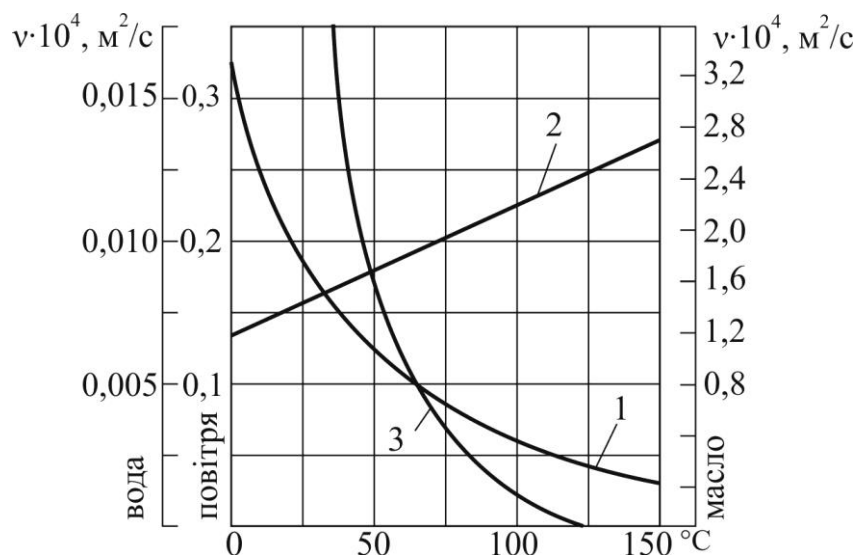


Рисунок 1.3 – Залежність кінематичного коефіцієнта в'язкості від температури:

1 – машинне масло; 2 – повітря; 3 – вода

У краплинних рідин в'язкість – це прояв сил внутрішнього зчеплення між молекулами. Зростання температури приводить до збільшення кінетичної енергії молекул і таким чином до послаблення зчеплення та зниження в'язкості.

У газах в'язкість обумовлена хаотичним рухом молекул, завдяки якому здійснюється обмін кількістю руху. При відносному зсуві шарів цей обмін створює тенденцію до вирівнювання швидкості, тобто породжує силу внутрішнього тертя, а отже, і в'язкість. Зростання температури підвищує кінетичну енергію молекул, а отже, їх рухливість. В'язкість газів зростає.

Динамічну в'язкість води можна визначити за формулою Пуазейля<sup>3</sup>

$$\mu_e = \frac{\mu_0}{(1 + 0,0337t - 0,000221t^2)}, \quad (1.24)$$

де  $\mu_0 = 17,9 \cdot 10^{-4}$  Па·с – коефіцієнт динамічної в'язкості води при  $t = 0$  °С;  
повітря – за формулою Сазерленда

$$\mu_n = \mu_0 \frac{C + T_0}{C + T} \left( \frac{T}{T_0} \right)^{1,5}, \quad (1.25)$$

де  $\mu_0 = 18,27 \cdot \text{мкПа} \cdot \text{с}$  – коефіцієнт динамічної в'язкості повітря при  $T_0$ ;

$T_0$  – контрольна температура (для повітря  $T_0 = 291,15$  К);

$C$  – стала Сазерленда (для повітря  $C = 120$  К)

Властивості деяких рідин при  $t = 20$  °С наведені у таблиці 1.2.

Таблиця 1.2 – Властивості деяких рідин

Найменування рідини	$\mu \cdot 10^5$ , Па·с	$\nu \cdot 10^8$ , м <sup>2</sup> /с	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>
Вода прісна	101	101	998
Гліцерин безводний	51200	41000	1250
Масло касторове	97200	100200	960
Ртуть	155	11,4	13547
Спирт етиловий безводний	119	154	789

Рідини, що задовольняють закон в'язкого тертя Ньютона, називають ньютонівськими. До них належать як краплинні рідини (вода, керосин, спирт тощо), так і гази (повітря, метан, природний газ тощо).

До рідин, які не задовольняють формулу (1.22) і називаються *неньютонівськими* (аномальними), належать колоїди, глинистий розчин, нафтопродукти при температурі, близькій до температури застигання, та деякі інші.

Дослідами встановлено, що рух неньютонівських рідин починається, тільки після того як дотичні напруження набудуть деякого критичного значення (так зване *початкове напруження зсуву*); при менших напруженнях вони не течуть, а тільки відчують пружні деформації (рисунок 1.4).

Для аномальних рідин застосовують формулу Бінгема

$$\tau = \tau_{zp} + \mu \frac{du}{dy}, \quad (1.26)$$

де  $\tau_{zp}$  – граничне напруження зсуву, Па.

<sup>3</sup> Пуазейль Жан Луї Марі (1799–1869) – французький лікар і фізик, котрий, зокрема, вивчав в'язкість рідин і процеси циркуляції крові. Автор трактату «Рух рідин в трубах малого діаметра». З 1842 р. член Французької медичної академії.

Вважають, що перші експериментальні дослідження аномальних рідин здійснив Ф. М. Шведов у 1889 р., який визначив  $\tau_{ep}$  для розчину желатину в воді.

Детальне вивчення закономірностей руху аномальних рідин виходить за межі даного курсу. Тому далі розглядатимемо тільки ньютонівські рідини.

Розглянемо рух довільної рідкої частинки ньютонівської рідини (рисунок 1.5) завтовшки  $dy$ . Оскільки розподіл швидкостей у в'язких рідинах завжди нерівномірний, то грань  $BC$  буде рухатись зі швидкістю, більшою за швидкість грані  $AD$ , на величину  $du$ . Внаслідок цього рідка частинка зазнаватиме деформації та за час  $dt$  перетвориться на паралелепіпед  $AB'C'D$ .

Відрізок  $dl$  характеризує величину деформації рідкої частинки за час  $dt$ , тобто  $dl = du dt$ . З цього випливає, що  $du/dy = dl/(dt dy)$ , але  $dl/dy = \text{tg}\varphi$ . Тоді  $du/dy = \text{tg}\varphi/dt$ . Таким чином, поперечний градієнт швидкості являє собою швидкість відносної деформації зсуву. Тому дотичні напруження в рідині лінійно залежать від швидкості відносної деформації. У цьому полягає одна з принципів відмінностей рідких тіл від твердих, напруження яких залежать не від швидкості деформації, а від її величини.

І ще одне важливе зауваження: у ньютонівських рідинах, які знаходяться у нерухомому стані, дотичні напруження відсутні та в'язкість не виявляється. Це пояснюється тим, що рідкі частинки не рухаються одна відносно одної та  $du/dy=0$ .

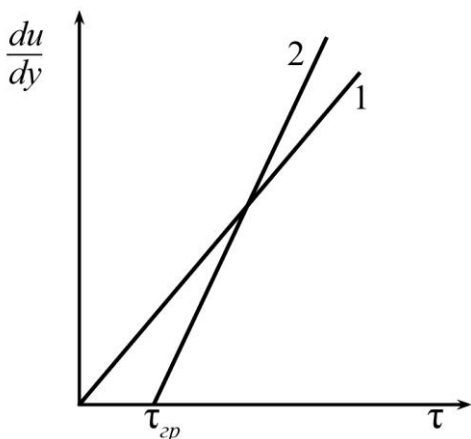


Рисунок 1.4 – Залежності для ньютонівської рідини (1) і неньютонівської рідини (2)

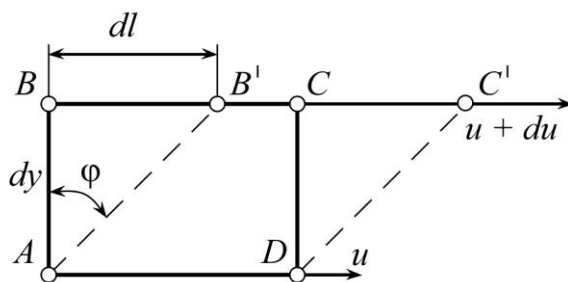


Рисунок 1.5 – Деформація рідкої частинки

### 1.3 МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ ГІДРОМЕХАНІКИ

Математичний опис руху рідини, як буде показано далі, базується на системах диференціальних рівнянь. Навіть якщо обмежитися властивостями текучості, в'язкості та стисливості, то і тоді ці рівняння можуть бути розв'язаними для дуже обмеженого кола задач. У більшості ж випадків через поки що нездолані математичні труднощі вони не можуть бути проінтегрованими. Тому в гідромеханіці пішли шляхом застосування моделей рідини, які враховують не всі її властивості, а лише деякі – ті, що важливі для конкретного класу задач. Іншими властивостями, котрі не мають суттєвого впливу на характер процесу, нехтують.

Першою такою моделлю можна вважати *модель суцільного середовища*, яку вже розглядали. У даному випадку знехтували молекулярною будовою рідини. У рамках моделі суцільного середовища діють ще деякі інші моделі.

Найбільшому ступеню ідеалізації відповідає так звана *ідеальна (нев'язка) рідина*. Під моделлю ідеальної рідини розуміють *гіпотетичне суцільне середовище, яке має властивість текучості, але позбавлене в'язкості та абсолютно нестисливе*. Така досить груба ідеалізація суттєво спрощує математичне розв'язання багатьох задач. Отримані розв'язання у деяких випадках добре відповідають дослідним даним для реальної рідини не тільки якісно, а й кількісно. Але нехтування в'язкістю в більшості випадків призводить до суттєвих помилок, а інколи і результатів, які цілком спростовуються дослідями. У цих випадках слід застосовувати модель *нестисливої в'язкої рідини*. Теорія такої рідини лише у деяких випадках дозволяє отримати точні математичні розв'язання, частіше вона має справу з приблизними розв'язаннями.

*Модель в'язкої нестисливої рідини* можна вважати найбільш продуктивною для гідромеханіки, тому що на її базі отримані найважливіші результати, які добре співвідносяться з дослідними даними. І це зрозуміло, оскільки у краплинних рідинах стисливість дається взнаки дуже рідко (винятком є хіба що гідроудар). Гази значно більш стисливіші, але в багатьох випадках ця властивість не виявляється (під час руху повітря в умовах, близьких до стандартних, зі швидкістю, меншою за 68 м/с). Тому ця модель ефективна і для газових середовищ. Необхідність врахування стисливості газів значно ускладнює задачу. Такі задачі розглядає окремий розділ гідромеханіки – *газова динаміка*.

Існують й інші моделі рідини, але вони не розглядатимуться.

Основними методами, які досить часто застосовуватимуться впродовж вивчення даного курсу, є *аналітичний* і *експериментальний*.

Аналітичний метод полягає у розгляді тієї чи іншої задачі в межах тієї чи іншої моделі з отриманням і розв'язанням диференціальних чи інтегральних рівнянь. Це потребує застосування відповідного математичного апарату. Але важливу, а інколи і вирішальну роль тут відіграє правильний вибір системи координат, що разом з аналізом досліджуваного процесу дозволяє визначити граничні та початкові умови. Це, в свою чергу, може значно спростити пошук правильного розв'язання. Інколи від вміння вірно обрати систему координат і сформулювати початкові та граничні умови залежить те, чи буде розв'язана отримана аналітичним шляхом система рівнянь.

Складність явищ і процесів, що вивчає гідромеханіка, не завжди дозволяє отримати точне теоретичне розв'язання. У цих випадках єдиною можливістю розв'язати поставлену задачу є експеримент. Сучасний гідравлічний експеримент базується на так званій *теорії подібності*. Ця теорія встановлює ті

умови і правила, які дозволяють результати, отримані на окремому дослідному макеті, поширювати на натурні об'єкти.

Поєднання аналітичних і експериментальних методів у деяких випадках дозволяє будувати досить ефективні (з точки зору простоти і адекватності реальним процесам) напівемпіричні теорії. Саме ці методи залежно від їх ефективності застосовуватимемо при вивченні того чи іншого розділу курсу.

#### 1.4 ПРИКЛАДИ ЗАДАЧ ДО РОЗДІЛУ 1

1. Визначити, на скільки відсотків густина морської води на глибині  $H = 10$  км більша за густину на поверхні, якщо густина на поверхні  $\rho_0 = 1030$  кг/м<sup>3</sup>.

Якщо на поверхні густина води дорівнює  $\rho_0$ , то на глибині  $dh$  внаслідок збільшення тиску  $\rho = \rho_0 + d\rho$ . Як буде показано у наступному розділі, тиск у точці, що занурена на глибину  $dh$ ,  $dP = \rho_0 g dh$  (для спрощення у цій формулі вважатимемо густину незмінною, що, природньо, призведе до невеличкої похибки). Тоді, відповідно до формули (1.12), густина на глибині  $H$

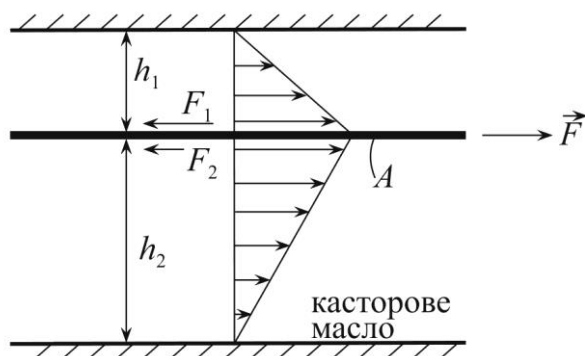
$$\rho_H = \rho_0 + \int_0^H d\rho = \rho_0 + \int_0^H \rho_0 \frac{dP}{E} = \rho_0 + \int_0^H \rho_0 \frac{\rho_0 g dh}{E} = \rho_0 + \rho_0^2 \frac{g}{E} H,$$

і

$$\frac{\rho_H}{\rho_0} = 1 + \frac{\rho_0 g H}{E} = 1 + \frac{1030 \cdot 9,81 \cdot 10^4}{2 \cdot 10^9} = 1,051.$$

Отже, густина морської води на глибині 10 км більша за густину на поверхні на 5,1 %.

2. Між двох нерухомих поверхонь під дією сили  $F$  з незмінною швидкістю  $u = 1,5$  м/с рухається тонка пластинка, площа поверхні якої  $A = 0,5$  м<sup>2</sup>. Між нерухомими поверхнями знаходиться касторове масло з температурою  $t = 20$  °С. Відстані між пластинкою і поверхнями (рисунок 1.6)  $h_1 = 2$  мм,  $h_2 = 4$  мм. Нехтуючи товщиною пластинки та вважаючи розподіл швидкостей лінійним, визначити силу  $F$ .



З боку касторового масла, динамічна в'язкість якого при  $t = 20$  °С  $\mu = 97,2 \cdot 10^{-2}$  Па·с, на обидва боки пластини діють сили в'язкого тертя

$$F_1 = \mu A \frac{du}{dy} = \mu A \frac{u}{h_1},$$

$$F_2 = \mu A \frac{du}{dy} = \mu A \frac{u}{h_2}.$$

Сумарна сила опору, яку необхідно подолати,

Рисунок 1.6 – До задачі 2

$$F = F_{on} = \mu A \left( \frac{u}{h_1} + \frac{u}{h_2} \right) = 97,2 \cdot 10^{-2} \cdot 0,5 \left( \frac{1,5}{0,002} + \frac{1,5}{0,004} \right) = 546,8 \text{ Н.}$$

Отже, необхідно прикласти силу  $F = 546,8$  Н.

## 2 РІВНОВАГА РІДИНИ

*Розділ гідромеханіки, який вивчає закони рівноваги рідини та її силової взаємодії у цьому стані з твердими тілами, називається гідростатикою.*

Коли в рідині відсутнє переміщення одних рідких частинок відносно інших, то такий стан називають *відносним спокоєм*, а якщо, крім цього, посудина з рідиною не рухається відносно Землі, – то *абсолютним спокоєм*.

Основна задача гідростатики – вивчення розподілу тиску в нерухомій рідині та на основі цього визначення сил та моментів сил, що діють з боку рідин на тверді тіла.

### 2.1 КЛАСИФІКАЦІЯ СИЛ, ЩО ДІЮТЬ У РІДИНАХ

Як і в механіці твердого тіла, в гідромеханіці діючі сили класифікують за різними ознаками: внутрішні та зовнішні, *зосереджені* та *розподілені*, масові та поверхневі. На відміну від класичної механіки сили, що діють на рідке тіло, практично завжди розподілені. Причому оскільки рідина не здатна чинити опір розтягуючим зусиллям, ці розподілені сили мають бути спрямованими від інших фізичних тіл та полів у бік рідини. Зосереджені сили можуть розглядатися лише як крайній випадок розподілених, коли площа, на яку вони діють, наближається до нуля.

*Зовнішніми* називають сили, які прикладені до рідких частинок з боку інших тіл або фізичних полів. *Внутрішні* – це сили взаємодії між собою рідких частинок, котрі знаходяться в межах одного рідкого тіла. Переведення внутрішніх сил у категорію зовнішніх може бути здійснене *методом перерізів* або «заморожування». Його суть полягає у тому, що в рідкому середовищі виділяється («заморожується») замкнений об'єм (рідка частинка), зовнішнє середовище уявно відкидається, а його дія замінюється дією розподілених сил, які з рангу внутрішніх відносно виділеного об'єму переходять у ранг зовнішніх. Цей метод часто використовують, оскільки він є досить показовим і ефективним.

*Масовими* є сили, величина котрих пропорційна масі рідкого тіла. Ці сили діють на всі рідкі частинки об'єму і підпорядковуються другому закону Ньютона. До них належать, наприклад, сили тяжіння та інерції. Проекції масових сил на осі декартової системи координат  $F_x = ma_x$ ,  $F_y = ma_y$ ,  $F_z = ma_z$ . У гідромеханіці замість проекцій прискорень  $a_x$ ,  $a_y$  і  $a_z$  використовують позначення  $X$ ,  $Y$  і  $Z$ . Тоді  $X = F_x/m$ ,  $Y = F_y/m$  і  $Z = F_z/m$ .  $X$ ,  $Y$  і  $Z$  є проекціями *одиничних масових сил* на відповідні осі координат.

*Поверхневими* називають такі *розподілені сили*, які діють з боку інших тіл тільки на ті рідкі частинки, котрі знаходяться на поверхні рідкого об'єму. Величина цих сил пропорційна площі поверхні дії. Для якісної та кількісної характеристик поверхневих сил застосовуються поняття про напруження та тензор напруження.

## 2.2 НАПРУЖЕНИЙ СТАН РІДИНИ. ТЕНЗОР НАПРУЖЕНЬ. ГІДРОСТАТИЧНИЙ ТИСК

У рідкому тілі об'ємом  $V$ , яке рухається або знаходиться у стані спокою, проведемо довільну поверхню  $A$  і уявно відкинемо праву частину. Для того щоб рух або спокій частини рідини, що залишилась, зберігався, накладемо на поверхню  $A$  розподілену силу, яка еквівалентна дії відкинutoї частини рідини (рисунок 2.1). Якщо на елементарну площу  $\Delta A$ , орієнтацію в просторі якої задає нормаль  $\vec{n}$ , діє сила  $\Delta\vec{F}$ , то величина

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{F}}{\Delta A} = \vec{P}_n \quad (2.1)$$

називається *напруженням поверхні*.

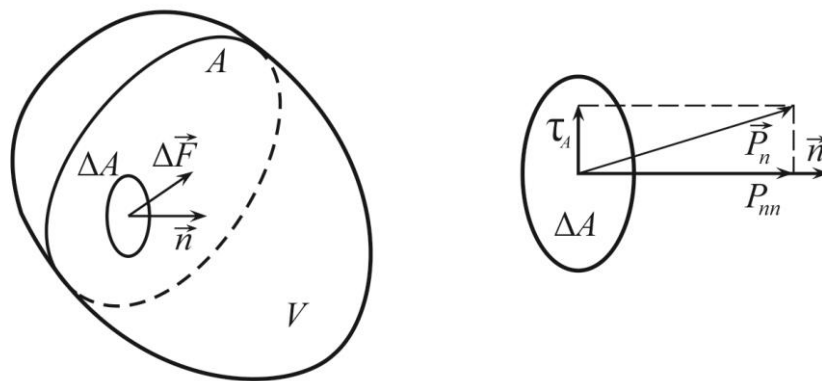


Рисунок 2.1 – До поняття про напруження поверхні

Таким чином, під впливом зовнішніх сил у рідині виникають напруження.  $\vec{P}_n$  не є звичайним вектором. Його величина залежить від орієнтації площадки  $A$  у просторі. Це означає, що коли через дану точку провести однакові за величиною, але різно орієнтовані площадки, то і діючі на них напруження будуть різними. Індекс  $n$  означає не проекцію напруження на нормаль, а орієнтацію площадки, якій відповідає  $\vec{P}_n$ . Оскільки напруження  $\vec{P}_n$  у загальному випадку за відношенням до площадки може бути орієнтованим як завгодно, то воно має *нормальну*  $P_{nn}$  і *дотичну*  $\tau_A$  складові (рисунок 2.1).

Виділимо у рідкому тілі, що рухається, частинку в формі тетраедра об'ємом  $dV$  (рисунок 2.2). Нехай  $\vec{n}$  – зовнішня нормаль до грані  $ABC$ , площа якої  $dA$ . Площі інших граней  $dA_x$ ,  $dA_y$ ,  $dA_z$  (індекс вказує, до якої осі перпендикулярна кожна грань). Їх можна розглядати як проекції грані  $ABC$  на координатні осі. Тобто  $dA_x = dA \cos(\vec{n}; x) = dA n_x$ ,  $dA_y = dA \cos(\vec{n}; y) = dA n_y$  і  $dA_z = dA \cos(\vec{n}; z) = dA n_z$  (величини  $n_x$ ,  $n_y$  і  $n_z$  означають напрямні косинуси).

Масова сила, яка діє на тетраедр, дорівнює  $\rho \vec{F}' dV$  (де  $\vec{F}'$  – одинична масова сила). Сила інерції тетраедра  $\rho \vec{a} dV$  (де  $\vec{a}$  – прискорення рідкої частинки). З урахуванням знаків на кожну грань діють поверхневі сили: на  $ABC$



$\vec{P}_n dA$ ; на інші три  $-\vec{P}_x n_x dA$ ;  $-\vec{P}_y n_y dA$ ;  $-\vec{P}_z n_z dA$ . Таким чином, відповідно до загальних законів механіки

$$\rho \vec{a} dV = \rho \vec{F}' dV + \vec{P}_n dA - \vec{P}_x n_x dA - \vec{P}_y n_y dA - \vec{P}_z n_z dA. \quad (2.2)$$

Складовими  $\rho \vec{a} dV$  і  $\rho \vec{F}' dV$  можна знехтувати, оскільки вони є величинами третього порядку малості, у той час як інші – другого. Таким чином, рівняння (2.2) перетворюється у співвідношення Коші<sup>4</sup>

$$\vec{P}_n = n_x \vec{P}_x + n_y \vec{P}_y + n_z \vec{P}_z. \quad (2.3)$$

Фізична величина, яка характеризується у даній точці вектором  $\vec{P}_n$ , що набуває нескінченної кількості значень залежно від орієнтації площадки, є тензором напружень. Рівняння (2.3) вказує на те, що  $\vec{P}_n$  при вільній орієнтації нормалі  $\vec{n}$  може бути визначене, якщо відомі напруження у тій самій точці для площадок, зовнішні нормалі яких паралельні осям  $ox$ ,  $oy$ ,  $oz$ . У проєкціях на осі координат формула (2.3) набирає вигляду

$$\begin{aligned} P_{nx} &= n_x P_{xx} + n_y \tau_{xy} + n_z \tau_{xz}; \\ P_{ny} &= n_x \tau_{yx} + n_y P_{yy} + n_z \tau_{yz}; \\ P_{nz} &= n_x \tau_{zx} + n_y \tau_{zy} + n_z P_{zz}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Перший індекс вказує на вісь, яка перпендикулярна до площадки дії напруження; другий – вісь, на яку спроектоване це напруження (рисунок 2.3). Сукупність дев'яти складових створює тензор напружень, який у матричній формі має вигляд

$$\begin{pmatrix} P_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & P_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & P_{zz} \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

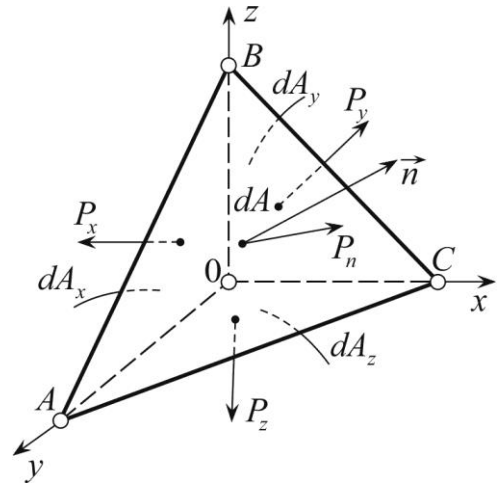
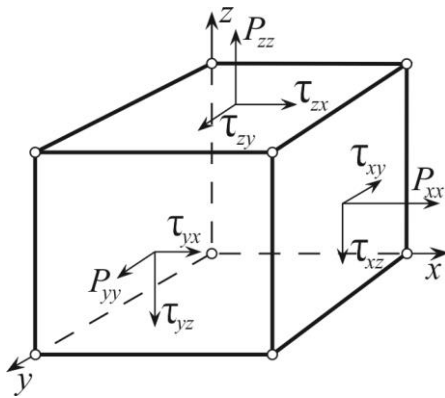


Рисунок 2.2 – До виводу співвідношення Коші

<sup>4</sup> Коші Огюстен Луї (1789–1857) – видатний французький математик і механік, член Паризької та Петербурзької академій наук, Лондонської королівської спілки. Автор понад 800 наукових праць з арифметики та теорії чисел, математичного аналізу, диференціального обчислення, математичної фізики, зокрема сформував математичний апарат механіки суцільного середовища. Найбільш значущі праці: «Курс аналізу» (1821), «Резюме лекцій обчислення нескінченно малих» (1823).

У рідині, яка знаходиться у стані рівноваги, дотичні напруження  $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \dots = \tau_{zy} = 0$ . Отже, тензор напружень для гідростатики набирає вигляду



$$\begin{vmatrix} P_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & P_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & P_{zz} \end{vmatrix}. \quad (2.6)$$

Рисунок 2.3 – Напруження на поверхні рідкої частинки

Оскільки, як зазначалося раніше, рідина не здатна чинити опір розтягуючим зусиллям, то очевидно, що нормальні напруження можуть бути тільки стискаючими.

У тензорному аналізі доведено, що, по-перше, тензор напружень (2.5) є симетричним. Це означає, що величини, розташовані симетрично головній діагоналі, дорівнюють одна одній ( $\tau_{yx} = \tau_{xy}$  тощо). Тому у загальному випадку для визначення тензора напружень достатньо не дев'ять, а шість складових.

По-друге, за відсутності дотичних напружень нормальні напруження у точці рідини не залежать від орієнтації площадки дії. Тобто

$$P_{xx} = P_{yy} = P_{zz} = -P, \quad (2.7)$$

де  $P$  – гідростатичний тиск, Па.

З формули (2.7) випливають важливі властивості гідростатичного тиску:

- будучи скалярною величиною (як компонент тензора), він не залежить від орієнтації площадки, на яку діє;
- гідростатичний тиск вважають позитивним при стискаючій дії нормального напруження. Іншими словами, гідростатичний тиск спрямований по внутрішній нормалі до площадки, на яку діє.

Хоча мова і йде про напрям дії гідростатичного тиску (далі – просто тиску), він є величиною скалярною. Його перша властивість втрачається у випадку появи в рідині дотичних напружень. Крім того, у переважній більшості випадків тиск є неперервною функцією координат  $P = f(x; y; z)$ , а інколи і часу. Таким чином, у рідкому середовищі тиск створює скалярне поле. Сила, що виникає внаслідок дії тиску, наприклад на елементарну площадку  $dA$ , є величиною векторною

$$d\vec{F} = -P\vec{n}dA, \quad (2.8)$$

де  $\vec{n}$  – зовнішня нормаль до площадки  $dA$ .

Так склалося, що у техніці для характеристики напруженого стану рідини використовують не поняття напруження, а поняття тиску.

Використовуються дві системи відліку тиску: від так званого абсолютного нуля – *абсолютний тиск*  $P_{абс}$  і від деякого постійного значення тиску, за який приймають *атмосферний*  $P_a$  (рисунок 2.4).

Якщо деякий тиск  $P_1$  більший за атмосферний, то різниця  $(P_{абс1} - P_a)$  є *надлишковим тиском*  $P_n$ . У випадку коли тиск  $P_2$  менший за атмосферний, то

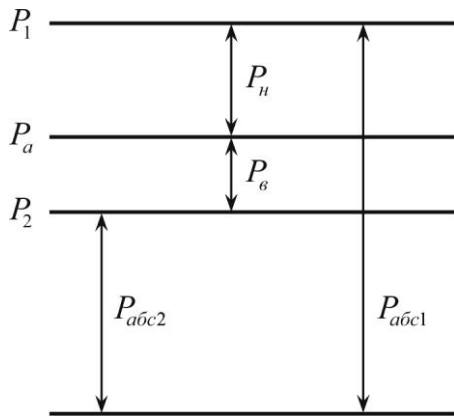


Рисунок 2.4 – Системи відліку тиску

$(P_a - P_{абс2})$  зветься *вакуумметричним тиском*  $P_v$ , тобто надлишковий вказує, наскільки даний тиск більший за атмосферний, а вакуумметричний – на нестачу до атмосферного.

Існує чимало одиниць виміру тиску. У міжнародній системі вимірювань – це Па = Н/м<sup>2</sup>. Зв'язок між іншими такий: фізична атмосфера = 760 мм ртутного стовпа = 1,033 кгс/см<sup>2</sup> (технічна атмосфера) = 1,013 бар = 1,01 10<sup>5</sup> Па ≈ 10 м водяного стовпа.

### 2.3 РІВНЯННЯ РУХУ РІДИНИ В НАПРУЖЕННЯХ

Розглянемо рідке тіло об'ємом  $V$ , площа поверхні якого  $A$ . Для рідкої частинки масою  $\rho dV$  і площею поверхні  $dA$ , котра міститься у цьому рідкому тілі і рухається зі швидкістю  $\vec{u}$ , аналогічно тому, як це було зроблено у попередньому розділі, можна записати рівняння руху у такому вигляді:

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} dV = \rho \vec{F}' dV + \vec{P}_n dA. \quad (2.9)$$

Для усього рідкого тіла

$$\iiint_V \rho \frac{d\vec{u}}{dt} dV = \iiint_V \rho \vec{F}' dV + \iint_A \vec{P}_n dA, \quad (2.10)$$

або з урахуванням співвідношення Коші

$$\iiint_V \rho \frac{d\vec{u}}{dt} dV = \iiint_V \rho \vec{F}' dV + \iint_A (n_x \vec{P}_x + n_y \vec{P}_y + n_z \vec{P}_z) dA. \quad (2.11)$$

Скориставшись формулою Гауса-Остроградського, маємо

$$\iiint_V \rho \frac{d\vec{u}}{dt} dV = \iiint_V \rho \vec{F}' dV + \iiint_V \left( \frac{\partial \vec{P}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{P}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{P}_z}{\partial z} \right) dV, \quad (2.12)$$

або

$$\iiint_V \left[ \rho \frac{d\vec{u}}{dt} - \rho \vec{F}' - \left( \frac{\partial \vec{P}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{P}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{P}_z}{\partial z} \right) \right] dV = 0. \quad (2.13)$$

Оскільки це рівняння повинно бути справедливим для будь-якого довільного об'єму  $V$ , то рівність нулю інтеграла приводить до рівності нулю підінтегральної функції. Отже, дістаємо *рівняння руху рідини в напруженнях* (векторна форма запису)

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F}' + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \vec{P}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{P}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{P}_z}{\partial z} \right). \quad (2.14)$$

У проекціях на осі декартової системи координат

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_x}{dt} &= X + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \\ \frac{du_y}{dt} &= Y + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \\ \frac{du_z}{dt} &= Z + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zz}}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\}. \quad (2.15)$$

У загальному випадку система (2.15) для нестисливої рідини містить дев'ять шуканих величин: три проекції швидкості  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$  і шість складових тензора напружень  $P_{xx}$ ,  $P_{yy}$ ,  $P_{zz}$ ,  $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ ,  $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$  (проекції масових сил  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  практично завжди відомі з умов задачі). Для стисливої рідини шуканою величиною є ще й густина  $\rho$ , що вимагає завдання додаткових рівнянь, котрі встановлювали б зв'язок між густиною та іншими величинами з формули (2.15). Тому для багатьох задач гідромеханіки ця система залишається незамкнутою. Найбільш просто рівняння руху рідини в напруженнях може бути замкнутим і проінтегрованим для випадку нерухомої рідини.

## 2.4 СИСТЕМА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ РІВНОВАГИ РІДИНИ

*Систему диференціальних рівнянь рівноваги рідини* досить легко отримати з рівняння руху рідини в напруженнях, якщо пригадати, що в нерухомій рідині ( $u_x = u_y = u_z = 0$ ) згідно до закону в'язкого тертя Ньютона дотичні напруження не виникають ( $\tau_{yx} = \tau_{xy} = \tau_{zx} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$ ) і справедливе рівняння (2.7). Тому система (2.15) для нерухомої рідини набирає вигляду

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} &= 0 \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} &= 0 \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (2.16)$$

яка і є *основним дифривнянням гідростатики*. Оскільки вперше система (2.16) була виведена Леонардом Ейлером<sup>5</sup>, то вона носить його ім'я.

$X$ ,  $Y$  і  $Z$  є проєкціями одиничної масової сили  $\vec{F}'$  на відповідні осі.

Тому

$$\vec{F}' = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}. \quad (2.17)$$

Крім того,

$$\text{grad}P = \frac{\partial P}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{k}. \quad (2.18)$$

Таким чином, система дифривнянь Ейлера (2.16) може бути подана у векторній формі

$$\vec{F}' - \frac{1}{\rho} \text{grad}P = 0. \quad (2.19)$$

Якщо кожне з рівнянь системи (2.16) відповідно помножити на  $dx$ ,  $dy$  і  $dz$ , а потім їх скласти, то дістанемо

$$\rho( Xdx + Ydy + Zdz ) = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz. \quad (2.20)$$

Права частина формули (2.20) є повним диференціалом тиску

$$\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz = dP. \quad (2.21)$$

Тому

$$\rho( Xdx + Ydy + Zdz ) = dP. \quad (2.22)$$

---

<sup>5</sup> Ейлер Леонард (1707–1783) – видатний швейцарський математик та фізик, який більшу частину життя працював у Німеччині та Росії, член Петербурзької, Берлінської, Туринської, Лісабонської, Базельської та Паризької академій наук, автор більш ніж 850 наукових робіт, зокрема «Вступ до аналізу нескінченно малих» (1748), «Диференціальне обчислення» (1755), «Інтегральне обчислення» (три томи, 1668–1770), «Дослідження кривизни поверхонь» (1760), «Механіка, або наука про рух, у аналітичному викладенні» (1726) та ін. У роботі «Загальні принципи руху рідини» (1755) Ейлер застосував свої рівняння динаміки елементарного матеріального об'єму до ідеальної рідини, отримавши рівняння руху і нерозривності. У праці «Загальні принципи стану рівноваги рідини» (1757) він вивів рівняння рівноваги рідини.

Отже, і ліва частина формули (2.22) повинна бути повним диференціалом деякої функції. При умові  $\rho = \text{const}$

$$Xdx + Ydy + Zdz = d\Phi. \quad (2.23)$$

З цього випливає, що масові сили, під впливом яких рідина може знаходитися у стані рівноваги (земного тяжіння, інерції), можна виразити так:

$$X = \partial\Phi/\partial x, \quad Y = \partial\Phi/\partial y, \quad Z = \partial\Phi/\partial z. \quad (2.24)$$

Таким чином, рідина може перебувати у стані рівноваги тільки у тому випадку, якщо масові сили, що діють у ній, мають потенціал, тобто проєкції одиничної масової сили задовольняють рівняння (2.24) (функція  $\Phi$  називається *силовою*, або *потенціальною*).

Враховуючи формули (2.17) і (2.24), одиничну масову силу можна представити так:

$$\vec{F}' = \text{grad}\Phi. \quad (2.25)$$

Таким чином, рівняння (2.19) набуває вигляду

$$\frac{1}{\rho} \text{grad}P = \text{grad}\Phi. \quad (2.26)$$

Воно справедливе як для краплинних рідин, так і для газів.

У випадку коли рідина нестислива ( $\rho = \text{const}$ )

$$\text{grad} \left( -\Phi + \frac{P}{\rho} \right) = 0. \quad (2.27)$$

Рівність нулю градієнта означає рівність нулю усіх його проєкцій

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -\Phi + \frac{P}{\rho} \right) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( -\Phi + \frac{P}{\rho} \right) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial z} \left( -\Phi + \frac{P}{\rho} \right) = 0. \quad (2.28)$$

Тому

$$-\Phi + \frac{P}{\rho} = \text{const}. \quad (2.29)$$

Вираз (2.29) є загальним інтегралом дифрівнянь Ейлера для нестисливих рідин.

Поверхня, в кожній точці якої  $\Phi = \text{const}$ , тобто

$$Xdx + Ydy + Zdz = d\Phi = 0, \quad (2.30)$$

є *еквіпотенціальною*, або *поверхнею рівня*. З формули (2.29) випливає, що у кожній точці поверхні рівня  $P = \text{const}$ . Фізично поверхню рівня можна уявити

як вільну поверхню рідини, що знаходиться у посудині чи резервуарі. Хвильова поверхня водоймища також може вважатися екіпотенціальною (рухомою поверхнею рівня).

Поверхня рівня має дві властивості:

- екіпотенціальні поверхні не перетинаються між собою;
- зовнішні масові сили до них завжди спрямовані нормально.

## 2.5 РІВНОВАГА РІДИНИ У ПОЛІ СИЛ ЗЕМНОГО ТЯЖІННЯ. ГІДРОСТАТИЧНИЙ ЗАКОН РОЗПОДІЛУ ТИСКУ

Розглянемо нестисливу рідину, яка знаходиться у стані абсолютного спокою в полі сил земного тяжіння. Осі координат спрямуємо так, щоб  $oz$  була вертикальною, а  $ox$  і  $oy$  лежали у горизонтальній площині. Оскільки з масових сил діє тільки сила тяжіння, то  $X = Y = 0$ ,  $Z = -g$ . Інтегрування формули (2.23) дає

$$\Phi = -gz + C', \quad (2.31)$$

де  $C'$  – стала інтегрування.

З урахуванням цього загальний інтеграл диференціальних рівнянь Ейлера (2.29) набирає вигляду

$$\rho gz + P = C. \quad (2.32)$$

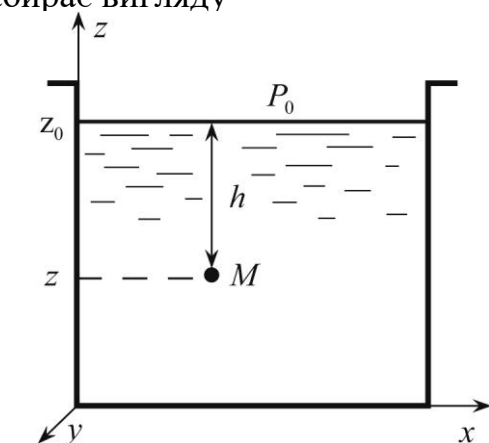


Рисунок 2.5 – До визначення граничних умов

Ця формула виражає *гідростатичний закон розподілу тиску*, який встановлює, що у нестисливій рідині у полі земного тяжіння тиск лінійно залежить від вертикальної координати. Для визначення  $C$  використовуємо таку *граничну умову* (рисунки 2.5) при  $z = z_0$   $P = P_0$ .

Тоді

$$C = P_0 + \rho gz_0. \quad (2.33)$$

Після підстановки до формули (2.32)

$$P + \rho gz = P_0 + \rho gz_0, \quad (2.34)$$

або тиск у довільній точці  $M$  з координатою  $z$

$$P = P_0 + \rho g(z_0 - z). \quad (2.35)$$

З рисунка 2.5 видно, що  $(z - z_0)$  є глибиною занурення точки  $M$ , тому дістаємо результат, який називають *основним рівнянням гідростатики*

$$P = P_0 + \rho gh. \quad (2.36)$$

Легко пересвідчитись, що складова  $\rho gh$  має розмірність тиску (Па), і оскільки вона залежить від питомої ваги рідини, то називається *ваговим тиском*.

Таким чином, *тиск у будь-якій точці рідини, що знаходиться у стані спокою, дорівнює сумі зовнішнього тиску  $P_0$  і вагового тиску  $\rho gh$* . Гідростатичний закон у такому формулюванні справедливий як для стисливої, так і нестисливої рідини. Крім того, формула (2.36) підтверджує *закон Паскаля*<sup>6</sup>, згідно з яким *зовнішній тиск (тобто тиск на вільній поверхні рідини) передається однаково у всі точки рідини*.

Якщо складові рівняння (2.34) розділити на питому вагу, то всі його члени

$$\frac{P}{\rho g} + z = \frac{P_0}{\rho g} + z_0 \quad (2.37)$$

мають розмірність довжини (м) і називаються *напорами*.

На рисунку 2.6 зображена посудина з рідиною, зовнішній тиск для якої  $P_H$ . Запишемо (2.37) для двох довільних точок  $A$  і  $B$

$$\frac{P_A}{\rho g} + z_A = \frac{P_B}{\rho g} + z_B. \quad (2.38)$$

Величини  $z_A$  і  $z_B$  характеризують положення точок  $A$  і  $B$  над довільною горизонтальною площею відліку  $0 - 0$  і називаються *геометричними напорами (висотами)*.

$P_A/\rho g$  і  $P_B/\rho g$  характеризують висоти стовпа рідини, які урівноважують тиск у відповідних точках і є *п'езометричними напорами (висотами)*. Сума  $(z + P/\rho g)$  – *гідростатичний напір*, котрий, як випливає з формули (2.38), для всіх точок даного рідкого об'єму є

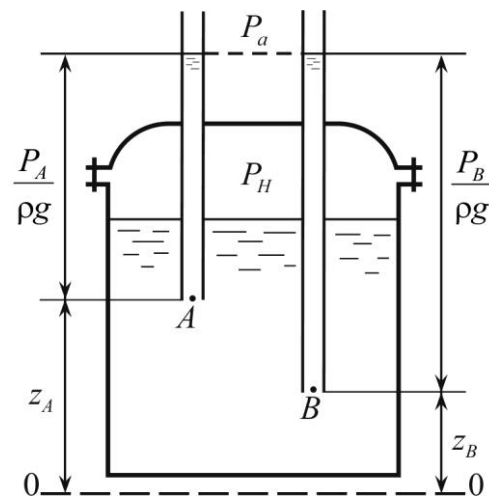


Рисунок 2.6 – Гідростатичні напори в різних точках рідини

<sup>6</sup> Паскаль Блез (1623–1662) – видатний французький математик, фізик, філософ, письменник, автор праць у галузі математичного аналізу, гідравліки. Автор, можливо, першої механічної лічильної машини. 1647 року надрукував наукову працю «Нові досліді, що стосуються порожнечі», в якій сформулював основний закон гідростатики. На честь Паскаля названа одиниця вимірювання [тиску](#).



величиною незмінною. Тому рівні у обох п'єзометричних трубках, підведених до точок  $A$  і  $B$ , однакові.

Таким чином, кожному тиску  $P$  відповідає лінійна величина  $P/\rho g$ , яка називається напором і є висотою стовпа рідини, що врівноважує цей тиск.

У тому випадку, коли деякий об'єм рідини знаходиться під вакуумметричним тиском  $P_e$  (рисунок 2.7), величина  $P_e/\rho g$  називається *вакуумметричним напором* (висотою)  $h_e$ .

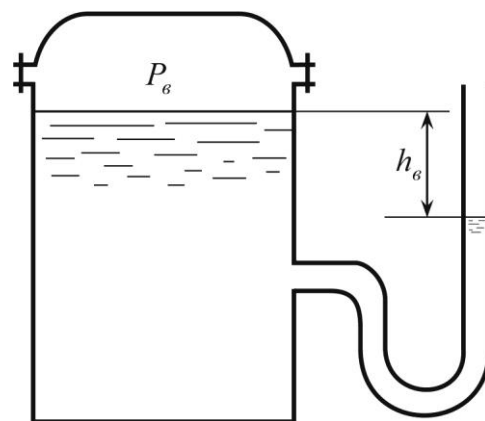


Рисунок 2.7 – Вакуумметрична висота

## 2.6 СИЛИ ТИСКУ РІДИНИ НА ТВЕРДУ ПОВЕРХНЮ

У загальному випадку *сила тиску*, з якою рідина діє на тверду поверхню площею  $A$ , дорівнює сумі елементарних сил  $d\vec{F}$ , діючих на елементарні площадки  $dA$ , що складають цю поверхню,

$$\vec{F} = \iint_A P \vec{n} dA, \quad (2.39)$$

де  $\vec{n}$  – внутрішня нормаль до елементарної площадки  $dA$ .

Розглянемо такі випадки.

1. Рівномірний тиск на плоску стінку ( $P = \text{const}$ ,  $\vec{n} = \text{const}$ ).

У цьому випадку вектори  $d\vec{F}$  складають систему паралельних сил, яка легко зводиться до рівнодіючої  $\vec{F}$

$$F = PA. \quad (2.40)$$

Лінія дії  $\vec{F}$  проходить через центр мас площі  $A$ .

У техніці рівномірний тиск може виникати у закритих резервуарах, в яких знаходиться газ з надлишковим тиском  $P_n$ . Оскільки ваговим тиском газу через його невелику густину у багатьох випадках можна знехтувати, то вважається, що тиск однаковий у всіх точках. *Графік зображення закону розподілу тиску називають епюрою тиску*.

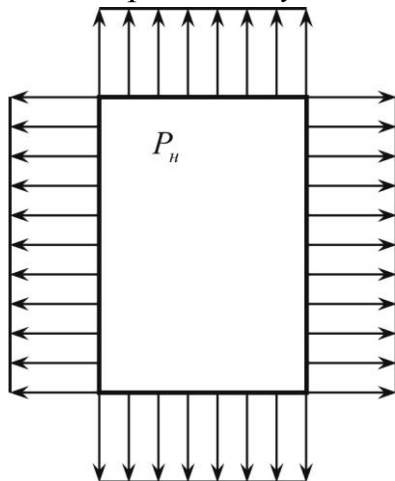


Рисунок 2.8 – Епюра рівномірного тиску

На рисунку 2.8 зображені епюри для випадку, що розглядаємо. Довжина стрілок пропорційна величині тиску у даній точці та розраховується за (2.36); напрям завжди нормальний до поверхні у даній точці. Рівно-мірний тиск може виникати і під дією краплинних рідин, наприклад на плоскі горизонтальні стінки у випадку абсолютного спокою або руху з прискоренням угору чи вниз.

Оскільки тиск на дні кожної посудини різної форми, але рівної площі дна  $A$  (рисунок 2.9) однаковий  $P = P_0 + \rho gh$ , то і сила, що діє на днища цих посудин

$F = PA$ , однакова. Таким чином, сила тиску на дно не залежить від форми посудини, а залежить від глибини  $h$ , густини рідини  $\rho$  і площі  $A$ . Так, у посудині, що розширюється (рисунок 2.9,а),  $F$  менша за вагу рідини, у циліндричній (рисунок 2.9,б) – дорівнює вазі рідини, а у посудині, що звужується (рисунок 2.9,в), – більша за неї. Це парадоксальне з точки зору життєвих уявлень явище має назву *гідростатичного парадокса*.

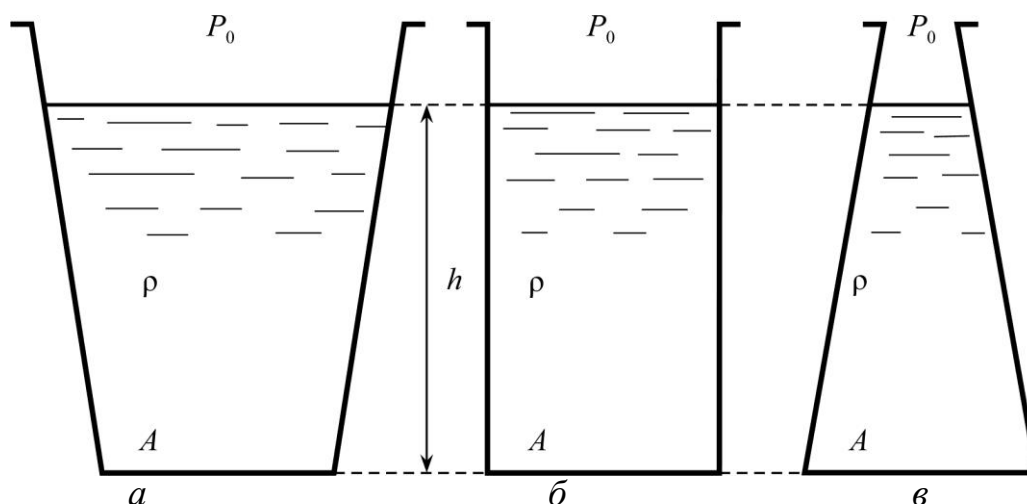


Рисунок 2.9 – До пояснення гідростатичного парадокса

## 2. Рівномірний тиск на криволінійну стінку ( $P = \text{const}$ , $\vec{n} \neq \text{const}$ ).

У цьому випадку рівнодіючу  $\vec{F}$  доцільно розрахувати через проєкції на координатні осі. Будемо вважати, що криволінійна поверхня  $ON$  має циліндричну форму та її твірна паралельна  $ou$  (рисунок 2.10).

Оскільки

$$dF_x = PdAn_x = P\cos(n;x)dA = PdA_x, \quad (2.41)$$

то

$$F_x = \iint_A PdA_x = PA_x, \quad (2.42)$$

де  $A_x$  – проєкція криволінійної поверхні  $ON$  на площину, перпендикулярну до  $ox$ .

Аналогічно

$$F_z = PA_z. \quad (2.43)$$

Лінії дії  $F_x$  і  $F_z$  проходять через центри мас  $A_x$  і  $A_z$  відповідно.

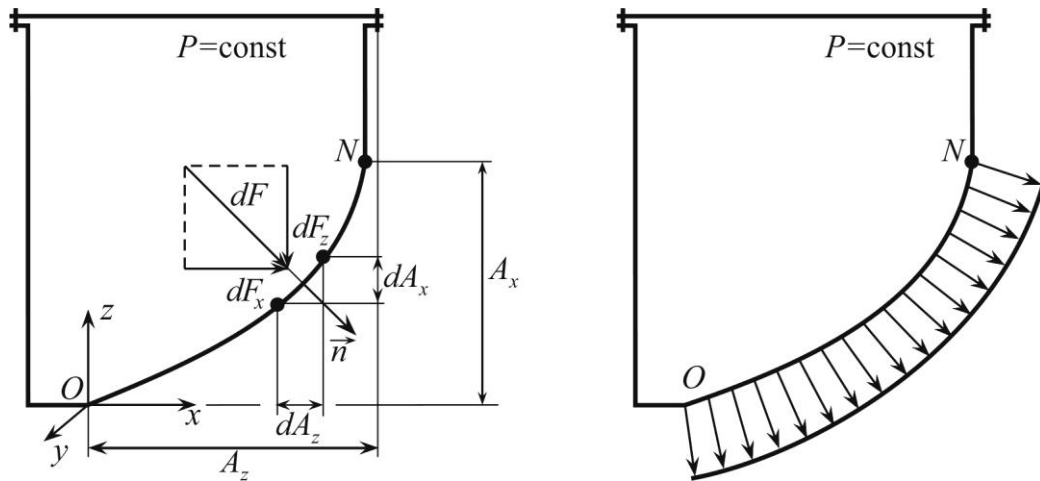


Рисунок 2.10 – Рівномірний тиск на криволінійну стінку

Окремим випадком такої задачі є визначення напружень, що виникають у матеріалі круглої напірної труби. Зауважимо, що труба є напірною, якщо тиск у ній відрізняється від атмосферного. У переважній більшості таких труб надлишковий тиск значно більший за ваговий. Тому останнім при розв'язанні подібних задач нехтують.

Уявно розділимо трубу, в якій підтримується тиск  $P_n$ , діаметральною площиною 1-1 (рисунок 2.11), визначимо силу дії рідини на праву половину труби з довжиною  $l$ . Згідно з формулою (2.42)

$$F = P_n D l. \quad (2.44)$$

Ця сила врівноважується двома силами

$$F_p = G \delta l, \quad (2.45)$$

де  $G$  – розтягуюче напруження, що виникає у матеріалі труби, Па.

Таким чином,

$$F = 2 F_p, \quad (2.46)$$

а отже,

$$P_n D l = 2 G \delta l \quad (2.47)$$

і нарешті

$$G = \frac{P_n D}{2 \delta}. \quad (2.48)$$

Ця формула при заданій величині допустимих напружень  $G_{\text{дон}}$  дозволяє розрахувати необхідну товщину стінок труби

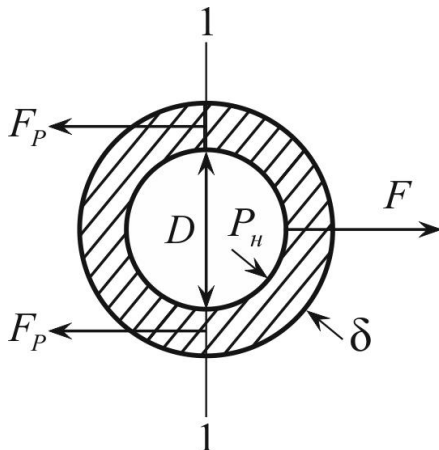


Рисунок 2.11 – Сили тиску, що діють в круглій трубі

$$\delta = \frac{P_n D}{2G_{\text{дон}}}, \quad (2.49)$$

або для даної труби, коли  $D$  і  $\delta$  задані, допустимий надлишковий тиск, який здатна витримати ця труба,

$$P_n = \frac{2G_{\text{дон}}\delta}{D}. \quad (2.50)$$

### 3. Нерівномірний тиск на плоску стінку ( $P \neq \text{const}$ , $\vec{n} = \text{const}$ ).

Розглянемо посудину, бокова стінка якої плоска і нахилена до обрїю під кутом  $\alpha$ . У межах стінки виділимо плоску фігуру довільної форми площею  $A$  і визначимо силу тиску на неї з боку рідини. Для наочності розвернемо плоску фігуру навколо осі  $ou$  на  $90^\circ$  і сумістимо її з площиною рисунка (рисунок 2.12).

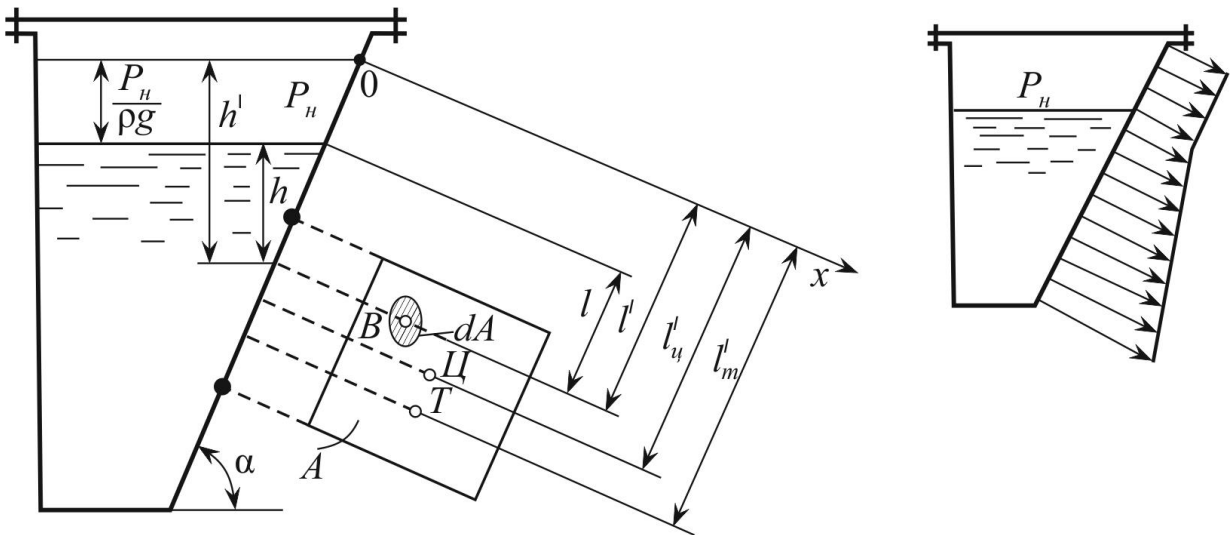


Рисунок 2.12 – Нерівномірний тиск на плоску стінку

На елементарну площадку  $dA$  діє сила  $dF = PdA$ .

Відповідно до гідростатичного закону розподілу тиску  $P = P_n + \rho gh$ .

У загальному випадку сила, що діє на плоску фігуру, складається з сили, обумовленої зовнішнім (надлишковим) тиском  $P_n$  і ваговим  $\rho gh$ . Але якщо дію надлишкового тиску замінити дією еквівалентного умовного шару рідини завтовшки  $P_n/\rho g$ , то можна вважати, що на плоску фігуру діє лише ваговий тиск  $\rho gh'$ .

На всю фігуру діє сила

$$F = \iint_A \rho gh' dA = \iint_A \rho gl' \sin \alpha dA = \rho g \sin \alpha \iint_A l' dA. \quad (2.51)$$

З теоретичної механіки відомо, що  $\iint_A l' dA$  – це *статичний момент* плоскої фігури відносно осі  $ox$  і

$$\iint_A l' dA = l'_y A = h'_y A / \sin \alpha, \quad (2.52)$$

де  $l'_y$  – відстань від зануреного центра ваги до осі  $ox$ ;

$h'_y$  – умовна глибина його занурення (якщо  $P_n = 0$ , то  $h'_y = h_y$ ).

Таким чином, сила тиску рідини на занурену в неї плоску фігуру дорівнює добутку її площі  $A$  на тиск у центрі її ваги  $\rho g h'_y$

$$F = \rho g h'_y A = (\rho g h + P_n) A. \quad (2.53)$$

Точка прикладення рівнодіючої сили називається центром тиску. Визначимо його координату  $l'_m$ .

Елементарний момент відносно осі  $ox$

$$dM = dF l' = \rho g l'^2 dA \sin \alpha. \quad (2.54)$$

Сумарний момент, що діє на плоску фігуру,

$$M = \iint_A \rho g l'^2 \sin \alpha dA = \rho g \sin \alpha \iint_A l'^2 dA. \quad (2.55)$$

Відомо, що

$$\iint_A l'^2 dA = I_x, \quad (2.56)$$

є моментом інерції плоскої фігури відносно осі  $ox$ .

З іншого боку,

$$M = F l'_m. \quad (2.57)$$

Таким чином, порівнюючи формули (2.55) і (2.57), з урахуванням рівняння (2.53) і (2.56) маємо

$$\rho g \sin \alpha I_x = \rho g l'_y \sin \alpha A l'_m \quad (2.58)$$

і

$$l'_m = I_x / (l'_y A). \quad (2.59)$$

Відповідно до теореми Штейнера

$$I_x = I_y + l'^2_y A, \quad (2.60)$$

де  $I_y$  – момент інерції плоскої фігури відносно горизонтальної осі, яка проходить через центр ваги фігури.

Підставляючи формулу (2.60) до (2.59), дістаємо

$$l'_m = l'_y + I_y / (l'_y A). \quad (2.61)$$

Таким чином, центр тиску лежить нижче від центра ваги плоскої фігури на величину  $I_y / (l'_y A)$ .

Центр ваги і центр тиску можуть збігатися у випадку горизонтальної фігури (тоді  $I_y = 0$ ) і коли ваговий тиск дорівнює нулю (рівномірний тиск на плоску стінку).

Зауважимо, що для квадрата зі стороною  $a$

$$I_y = a^4/12; \quad (2.62)$$

для прямокутника з шириною  $b$  і висотою  $H$

$$I_y = bH^3/12; \quad (2.63)$$

для круга з діаметром  $d$

$$I_y = \pi d^4/64. \quad (2.64)$$

#### 4. Нерівномірний тиск на криволінійну стінку ( $P \neq \text{const}$ , $\vec{n} \neq \text{const}$ ).

Розглянемо циліндричну криволінійну поверхню  $BO$  площею  $A$ , яка знаходиться під дією вагового тиску  $\rho gh$  і надлишкового тиску  $P_n$ . Задачу визначення рівнодіючої цих тисків можна звести до визначення тільки сили вагового тиску, замінивши надлишковий тиск дією еквівалентного шару рідини завтовшки  $P_n/\rho g$  (рисунок 2.13).

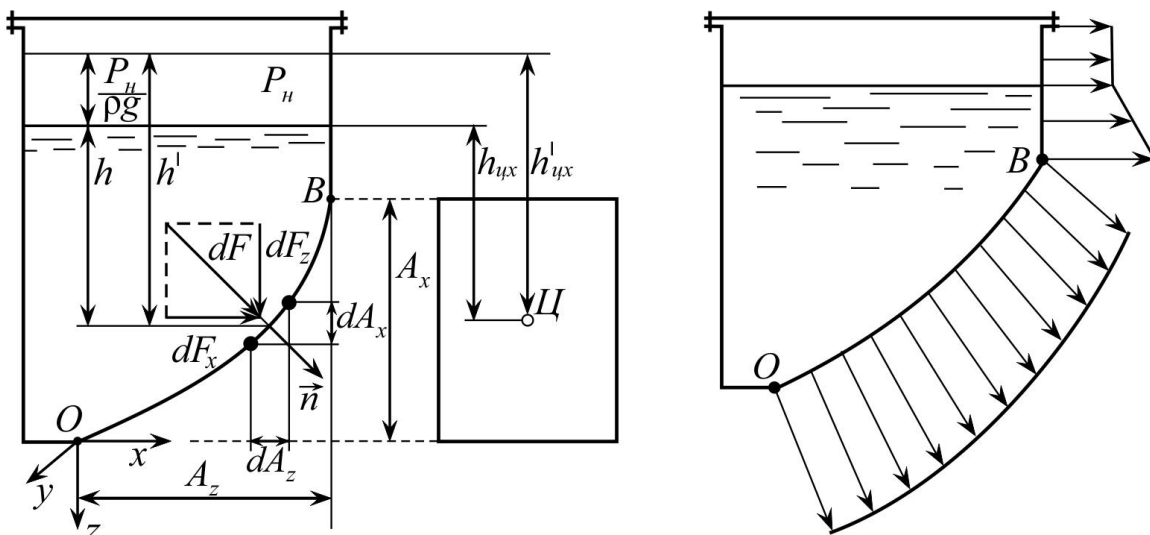


Рисунок 2.13 – Нерівномірний тиск на криволінійну стінку

Горизонтальна проекція рівнодіючої

$$F_x = \iint_A P \cos(n; x) dA = \iint_A \rho gh' dA_x = \rho g \iint_A h' dA_x. \quad (2.65)$$

Останній інтеграл – статичний момент площі  $A_x$ . Тобто

$$F_x = \rho gh'_{cx} A_x, \quad (2.66)$$

де  $h'_{cx}$  – глибина занурення (з урахуванням еквівалентного шару рідини  $P_n/\rho g$ ) центра мас вертикальної проекції криволінійної стінки  $A_x$ .

Таким чином, для того щоб визначити горизонтальну складову сили тиску на криволінійну поверхню, слід площу її вертикальної проекції помножити на тиск у центрі мас цієї проекції

$$F_x = (\rho g h_{cx} + P_n) A_x. \quad (2.67)$$

Проекція рівнодіючої на вертикальну вісь

$$F_z = \iint_A P \cos(n; z) dA = \iint_A \rho g h' dA_z = \rho g \iint_A h' dA_z. \quad (2.68)$$

Останній інтеграл являє собою об'єм  $V_m$  тіла, що називається тілом тиску. *Тіло тиску – це об'єм, утворений криволінійною стінкою, її проекцією на н'езометричну поверхню або вільну поверхню рідини (чи її продовження), якщо зовнішній тиск  $P_n = 0$ , і вертикальними проекційними площинами.*

Отже, вертикальна складову сили тиску на криволінійну стінку дорівнює вазі рідини в об'ємі тіла тиску

$$F_z = \rho g V_m. \quad (2.69)$$

Можливі два випадки взаємного розташування криволінійної поверхні та рідини: а) рідина знаходиться над поверхнею, тіло тиску заповнене рідиною, його умовно називають позитивним (дійсним).  $F_z$  у цьому випадку спрямована вниз (рисунок 2.14, а); б) тіло тиску не заповнене рідиною і є негативним (фіктивним), а  $F_z$  спрямована угору (рисунок 2.14, б).

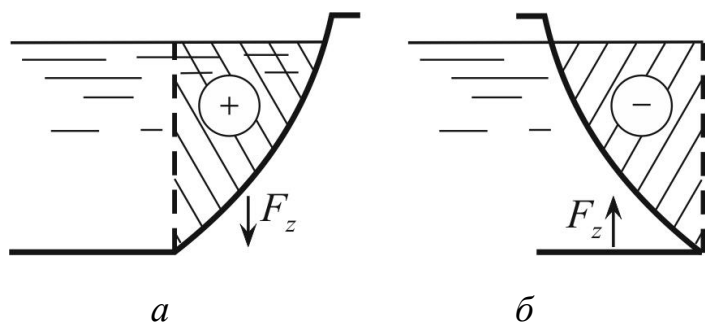


Рисунок 2.14 – Дійсне (а) і фіктивне (б) тіла тиску

Лінія дії  $F_z$  проходить через центр об'єму тіла тиску. Лінію дії  $F_x$  можна визначити за допомогою формули (2.61). Крім того, з формули (2.66) впливає важлива особливість горизонтальної складової: її величина не залежить ні від форми, ні від загальних розмірів криволінійної стінки, а залежить від величини її вертикальної проекції.

Розглянемо довільну замкнуту криволінійну поверхню, яка повністю занурена в рідину (рисунок 2.15). Нехай площина  $DKCMD$  нормальна до осі  $ox$ , а сили  $F_{x1}$  і  $F_{x2}$  – проекції горизонтальної складової рівнодіючої на цю вісь. Оскільки вертикальні проекції криволінійних поверхонь, на які вони діють, однакові, то  $F_{x1}$  і  $F_{x2}$  взаємокомпенсуються, а отже,  $F_x = 0$ . Аналогічно  $F_y = 0$ .

Таким чином, на занурене тіло діє тільки вертикальна сила  $F_z = F_{z1} - F_{z2}$ . Для того щоб її визначити, спроектуємо поверхню тіла на вільну поверхню рідини. Проектуючі вертикалі відмітять на поверхні тіла лінію  $AKBM$ , яка ділить поверхню на нижчу, що сприймає силу  $F_{z2}$ , і верхню, що сприймає  $F_{z1}$ .

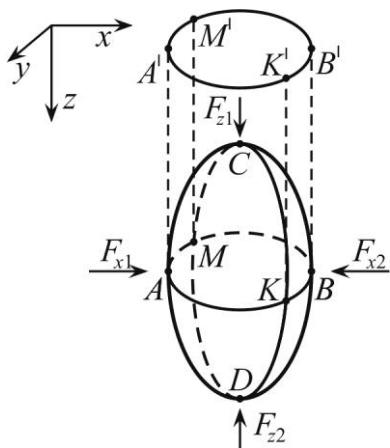


Рисунок 2.15 – Тіло, занурене в рідину

Згідно з формулою (2.69)  $F_{z1} = \rho g V_{m1}$  і  $F_z = \rho g V_{m2}$ .

Об'єм тіла тиску  $V_{m1}$ , яке є позитивним, дорівнює об'єму фігури  $AMBKCA'M'B'K'$ .  $V_{m2}$  – негативне тіло тиску, якому відповідає об'єм фігури  $AMBKDA'M'B'K'$ .

$$F_z = \rho g (V_{m1} - V_{m2}). \quad (2.70)$$

Очевидно, що  $(V_{m1} - V_{m2})$  є об'ємом зануреного тіла  $V$ . Тому

$$F_z = \rho g V. \quad (2.71)$$

Отже, сила дії нерухомої рідини на занурене в неї тіло спрямована вертикально угору і дорівнює вазі рідини у об'ємі тіла. Цей результат є законом Архімеда<sup>7</sup>, а сила  $F_z$  – архімедовою. Плавучість тіла визначається співвідношенням архімедової сили і ваги тіла  $\rho_m g V$ . При  $\rho_m g V > F_z$  тіло тоне, при  $\rho_m g V < F_z$  – спливає, а при  $\rho_m g V = F_z$  плаває у так званому стані байдужої рівноваги.

## 2.7 ВІДНОСНИЙ СПОКІЙ РІДИНИ

Стан рідини, при якому вона не переміщується відносно стінок резервуара, що рухається з постійним прискоренням, називають *відносним спокоєм*. У координатній системі, яка жорстко пов'язана з резервуаром, рідина буде нерухомою.

Оскільки з визначення відносного спокою випливає, що рідкі частинки не переміщуються одна відносно одної (тобто рідина рухається як тверде тіло), то дотичні напруження не виникають і для таких випадків можуть застосовуватися рівняння Ейлера для гідростатики (2.16).

Розглянемо декілька найбільш цікавих випадків відносного спокою рідини.

<sup>7</sup> Архімед (287 до н. е. – 212 до н. е.) – видатний давньогрецький математик, фізик, астроном і винахідник. Його наукові праці стосувалися практично всіх галузей математики того часу, зокрема геометрії, арифметики, математичного аналізу. Архімед – автор закону про плавання тіл, котрий носить його ім'я.



1. Нехай відкритий резервуар з рідиною рухається у вертикальному напрямі згори вниз з деяким постійним прискоренням  $\vec{a}$ , меншим або рівним прискоренню вільного падіння  $\vec{g}$  (рисунок 2.16). Визначимо вигляд поверхні рівня і закон розподілу тиску.

Згідно з *принципом Даламбера*<sup>8</sup> будь-яку систему, що рухається, можна розглядати як статичну, якщо до усіх діючих сил додати сили інерції  $\vec{j}$ . Вони спрямовані у бік, протилежний напрямку руху ( $\vec{a} = -\vec{j}$ ).

Для сформульованої вище задачі проєкції одиничної масової сили у формулі (2.30) дорівнюють  $X = Y = 0$ ,  $Z = j - g = -g(1 - j/g)$ . Таким чином, рівняння поверхні рівня набирає вигляду

$$-g \left( 1 - \frac{j}{g} \right) dz = 0. \quad (2.72)$$

Якщо  $\vec{a} \neq \vec{g}$ , то  $dz = 0$ , тобто екіпотенціальна поверхня є горизонтальною площиною  $z = \text{const}$ .

У випадку, коли  $\vec{a} = \vec{g}$ ,  $j/g = 1$ . Тому  $dz$  може і не дорівнювати нулю, а поверхня рівня може бути довільною.

Визначимо тепер закон розподілу тиску. Для нашої задачі рівняння (2.22) набирає вигляду

$$dP = \rho(j - g)dz = -\rho g \left( 1 - \frac{j}{g} \right) dz, \quad (2.73)$$

або враховуючи, що  $\rho g = \gamma$ ,

$$\frac{dP}{\gamma \left( 1 - \frac{j}{g} \right)} + dz = 0. \quad (2.74)$$

Позначивши  $\gamma' = \gamma(1 - j/g)$  і проінтегрувавши рівняння (2.74), маємо

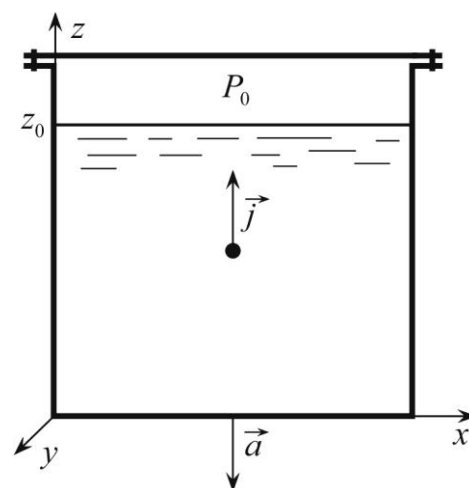


Рисунок 2.16 – Резервуар з рідиною, що рухається вертикально вниз

<sup>8</sup> Даламбер Жан Лерон (1717–1773) – французький вчений-енциклопедист, математик, фізик і філософ. Основні праці у галузі математики стосувалися теорії рядів, диференціальних рівнянь. Даламбер розв’язав диференціальні рівняння еліптичного типу, що описувало обтікання рідиною твердого тіла (пізніше отриманий результат був названий парадоксом Даламбера). У філософській праці «Походження і розвиток наук» (1751) дав класифікацію наук. Є автором терміну «гуманітарні науки».

$$\frac{P}{\gamma'} + z = C. \quad (2.75)$$

При  $z = z_0$   $P = P_0$ , тоді  $C = z_0 + P_0/\gamma'$ . Звідки

$$\frac{P}{\gamma'} + z = \frac{P_0}{\gamma'} + z_0, \quad (2.76)$$

або

$$P = P_0 + \gamma' h = P_0 + (g - j)h. \quad (2.77)$$

Оскільки величина  $(1 - j/g)$  є безрозмірною, то  $\gamma'$  має розмірність питомої ваги. Таким чином,  $\gamma'$  в умовах вертикального руху рідини з прискоренням  $\vec{a} = \text{const} < \vec{g}$  є її питомою вагою.

Отже, в цих умовах закон розподілу тиску буде таким, як і в полі сил земного тяжіння, але з іншою питомою вагою. При  $\vec{a} = \vec{g}$ , тобто при вільному падінні  $\gamma' = 0$  і рідина стає «невагомою». Цим можна пояснити довільність поверхні рівня при  $\vec{a} = \vec{g}$ .

Розрахунок силової взаємодії рідини зі стінками посудини слід робити за правилами, наведеними у попередньому підрозділі, пам'ятаючи, що замість  $g$  у формулі слід підставляти  $(g - j)$ .

2. Розглянемо циліндричну посудину з рідиною, яка обертається з постійною кутовою швидкістю  $\vec{\omega}$  навколо власної осі, що збігається з віссю  $oz$  (рисунок 2.17).

Рух стінок посудини приведе до того, що завдяки силам в'язкості почне рухатися вся рідина. Через певний час усі рідкі частинки будуть обертатися з

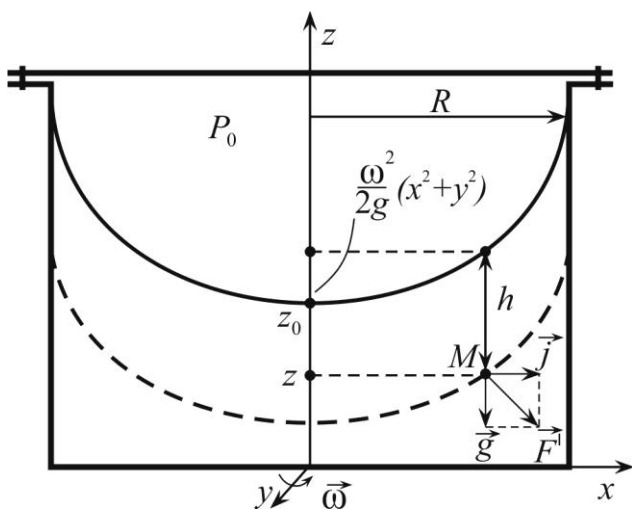


Рисунок 2.17 – Обертання круглого резервуару навколо своєї осі

рівною кутовою швидкістю. При такому становищі сили в'язкості не будуть діяти і до рідини можуть бути застосовані закони гідростатики.

Як і в попередній задачі, питомими масовими силами тут будуть сили земного тяжіння  $\vec{g}$  та інерції  $\vec{j}$ . Остання являє собою одиничну відцентрову силу, що лежить в площині осей  $ox$  і  $oy$ . Таким чином,  $X = \omega^2 x$ ,  $Y = \omega^2 y$ ,  $Z = -g$ , а рівняння (2.22) після інтегрування набирає вигляду

$$P = \frac{\rho\omega^2}{2}(x^2 + y^2) - \rho gz + C. \quad (2.78)$$

Сталу інтегрування визначимо з умови, що при  $z = z_0$   $x = y = 0$   $P = P_0$ . Тому  $C = P_0 + \rho gz_0$ . Абсолютний гідростатичний тиск у довільній точці  $M$  з координатами  $(x; y; z)$

$$P = P_0 + \rho g(z_0 - z) + \frac{\rho\omega^2}{2}(x^2 + y^2), \quad (2.79)$$

або

$$P = P_0 + \rho gh. \quad (2.80)$$

Отже, розподіл тиску вздовж вертикальної координати під порядковується лінійному закону (глибину  $h$  при цьому відліковують від криволінійної вільної поверхні), а по радіусу, як видно з формули (2.79), – за параболічним законом ( $x^2 + y^2 = r^2$ ).

Рівняння екіпотенціальних поверхонь

$$z - z_0 = -\frac{P - P_0}{\rho g} + \frac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2), \quad (2.81)$$

тобто вони мають вигляд конгруентних парабол з віссю обертання  $oz$ . Одним з таких параболоїдів є вільна поверхня, для якої  $P = P_0$  і

$$z_0 - z_0 = +\frac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2). \quad (2.82)$$

Сила, що діє на дно резервуара,

$$F_z = \iint_A (P_0 + \rho gh) dA = P_0 A + \iint_A \rho gh dA. \quad (2.83)$$

Зважаючи, що  $h = \omega^2 \frac{r^2}{2g} + z_0$  і для кола  $\iint_A dA = 2\pi \int_0^R r dr$ , маємо

$$F_z = P_0 A + 2\pi \rho g \int_0^R \left( \omega^2 \frac{r^2}{2g} + z_0 \right) r dr = P_0 A + 2\pi \rho g \left( \frac{\omega^2 R^4}{2g \cdot 4} + z_0 \frac{R^2}{2} \right) = \left[ P_0 + \rho g \left( \frac{\omega^2 R^2}{4g} + z_0 \right) \right] A. \quad (2.84)$$

3. Розглянемо рівновагу рідини у посудині, що рухається з постійним прискоренням  $\vec{a}$  вздовж прямої  $MN$ , яка знаходиться під кутом  $\alpha$  до обрію (рисунок 2.18).

Разом з силою тяжіння діє сила інерції ( $\vec{a} = -\vec{j}$ ). Для обраної системи координат  $X = j - g \sin \alpha$ ,  $Y = 0$ ,  $Z = -g \cos \alpha$ . Таким чином, інтегруючи рівняння (2.22), дістаємо

$$P = \rho(j - g \sin \alpha)x - \rho g z \cos \alpha + C. \quad (2.85)$$

При  $x = 0$  і  $z = z_0$   $P = P_0$ , а отже,  $C = P_0 + \rho g z_0 \cos \alpha$ . Тому закон розподілу тиску

$$P = P_0 + \rho(j - g \sin \alpha)x + \rho g(z_0 - z) \cos \alpha. \quad (2.86)$$

Еквіпотенціальними будуть поверхні, що розраховуються за співвідношенням

$$z - z_0 = -\frac{P - P_0}{\rho g \cos \alpha} + \frac{j - g \sin \alpha}{g \cos \alpha} x. \quad (2.87)$$

Для вільної поверхні рівня  $P = P_0$ , тому

$$z_0 - z_0 = \frac{j - g \sin \alpha}{g \cos \alpha} x, \quad (2.88)$$

а кут

$$\theta = \arctg \frac{j - g \sin \alpha}{g \cos \alpha}. \quad (2.89)$$

Як видно з формули (2.86), тиск лінійно залежить від координат  $x$  і  $z$ . Сила, з якою рідина діє на дно резервуара, ширина котрого  $b$ , а довжина  $l$ ,

$$\begin{aligned} F_z &= \iint_A P dA = b \int_0^l P dx = b \int_0^l [P_0 + \rho(j - g \sin \alpha)x + \rho g(z_0 - z) \cos \alpha] dx = \\ &= b \left[ P_0 l + \rho \frac{l^2}{2} (j - g \sin \alpha) + l \rho g (z_0 - z) \cos \alpha \right] = \\ &= A \left[ P_0 + \rho \frac{l}{2} (j - g \sin \alpha) + \rho g (z_0 - z) \cos \alpha \right]. \end{aligned} \quad (2.90)$$

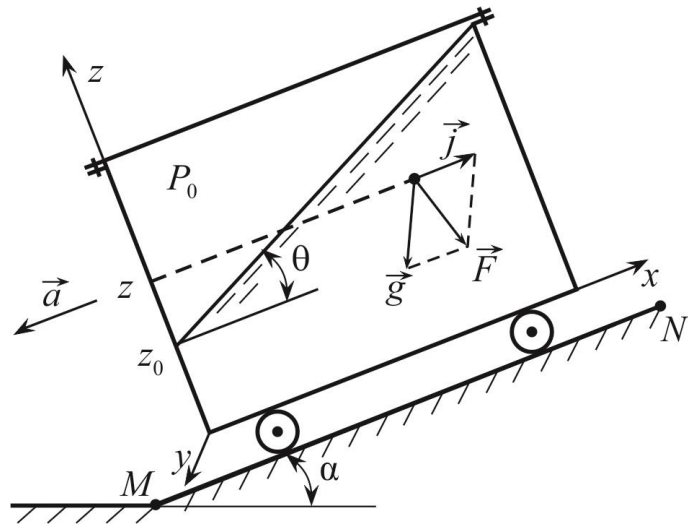


Рисунок 2.18 – Рух резервуара під кутом до обрію

Сили, що діють на стінки резервуара, можна розрахувати за співвідношеннями попереднього підрозділу ( $P \neq \text{const}$ ,  $\bar{n} = \text{const}$ ).

## 2.8 ПРИКЛАДИ ЗАДАЧ ДО РОЗДІЛУ 2

1. Запобіжний клапан налаштований на тиск відкриття  $P = 3 \text{ МПа}$ . Визначити попередній натяг пружини  $x$ , якщо її жорсткість  $C = 8 \text{ Н/мм}$ , а діаметри  $d_1 = 22 \text{ мм}$  і  $d_2 = 20 \text{ мм}$ .

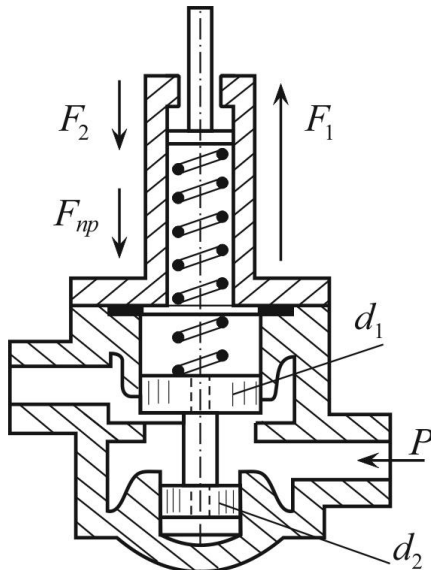


Рисунок 2.19 – До задачі 1

На рухомий елемент клапана діють відкриваюча сила  $F_1 = P \frac{\pi}{4} (d_1^2 - d_{um}^2)$  та сили, що утримують рухомий елемент у закритому стані  $F_2 = P \frac{\pi}{4} (d_2^2 - d_{um}^2)$  і  $F_{np} = Cx$ .

Умовою відкриття клапана є рівність

$$F_{np} + F_2 = F_1,$$

або

$$P \frac{\pi}{4} (d_1^2 - d_{um}^2) = P \frac{\pi}{4} (d_2^2 - d_{um}^2) + Cx.$$

Звідки

$$x = \frac{P \frac{\pi}{4} (d_1^2 - d_2^2)}{C} = \frac{3 \cdot 10^6 \cdot 0,785 (0,022^2 - 0,02^2)}{8 \cdot 10^3} = 0,0247 \text{ м}.$$

Отже, попередній натяг пружини становить 24,7 мм.

2. Призматичний резервуар з шириною  $b = 1,5 \text{ м}$ , довжиною  $l = 4 \text{ м}$  і висотою  $H = 2 \text{ м}$  заповнений водою до рівня  $h = 1,2 \text{ м}$ . Визначити, яке граничне горизонтальне прискорення  $\bar{a}$  можна надати резервуару, щоб вода не перелилася через край, та сили, котрі при цьому прискоренні діють на передню та задню стінки.

У випадку прискореного руху резервуару на рідину, окрім сил земного тяжіння, діє сила інерції. Зважаючи, що резервуар горизонтальний, формула (2.88) скорочується до вигляду

$$z_g - z_0 = \frac{j}{g} x,$$

де  $z_g - z_0 = H - h$ , а  $x = l/2$ .

Таким чином,

$$H - h = \frac{j}{g} \frac{l}{2}.$$

Звідки граничне значення прискорення ( $\vec{a} = -\vec{j}$ )

$$a = \frac{H - h}{l} 2g = \frac{2 - 1,2}{4} 2 \cdot 9,81 = 3,92 \text{ м/с}^2.$$

Оскільки тиск по висоті передньої та задньої стінок резервуара розподіляються за лінійним законом, то сили можна визначити як добуток тиску в центрах ваги занурених поверхонь на площі цих поверхонь

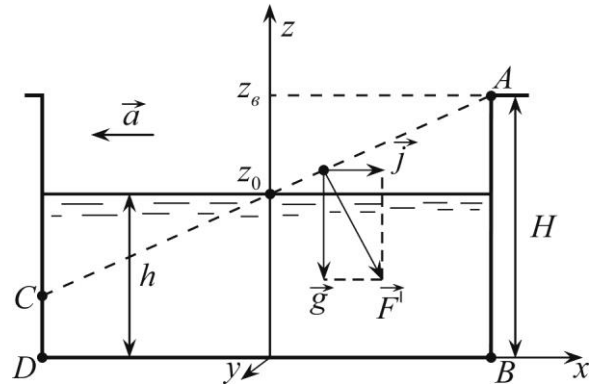


Рисунок 2.20 – До задачі 2

$$F_{AB} = \rho g H^2 \frac{b}{2} = 10^3 \cdot 9,81 \cdot 2^2 \frac{1,5}{2} = 29,4 \text{ кН},$$

$$F_{CD} = \rho g [h - (H - h)]^2 \frac{b}{2} = 10^3 \cdot 9,81 [1,2 - (2 - 1,2)]^2 \frac{1,5}{2} = 1,18 \frac{1}{2} \text{ кН}.$$

Такий результат можна дістати дещо іншим шляхом, скориставшись формулою (2.86).

3. Циліндрична посудина діаметром  $d = 0,4 \text{ м}$  з нижньою напівсферичною кришкою, до нижньої точки котрої підключено вакуумметр, заповнена водою до рівня  $h = 0,5 \text{ м}$ . Визначити силу, з якою діє вода на нижню кришку при русі посудини вгору з прискоренням  $\vec{a} = -2\vec{g}$ , якщо до початку руху вакуумметр показував  $P_6 = 5 \text{ кПа}$ .

Тиск над вільною поверхнею рідини є вакуумметричним. Його величина може бути розрахованою за допомогою гідростатичного закону розподілу тиску

$$P_0 = P_6 + \rho g \left( h + \frac{d}{2} \right) = 5 \cdot 10^3 + 10^3 \cdot 9,81 \left( 0,5 + \frac{0,4}{2} \right) = 11,9 \text{ кПа}.$$

Нижня кришка сприймає ваговий тиск рідини і зовнішній вакуумметричний тиск. Тому сила, яка на неї діє,

$$\begin{aligned} F_z &= V\rho(g + a) - P_0\pi \frac{d^2}{4} = \left[ \pi \frac{d^2}{4} h + \frac{4}{3} \pi \left( \frac{d}{2} \right)^3 \right] \rho(g + a) - P_0\pi \frac{d^2}{4} = \\ &= \left[ 3,14 \frac{0,4^2}{4} 0,5 + \frac{4}{3} \frac{3,14}{2} \left( \frac{0,4}{2} \right)^3 \right] 10^3 \cdot 3 \cdot 9,81 - 11,9 \cdot 10^3 \cdot 3,14 \frac{0,4^2}{4} = 850 \text{ Н}. \end{aligned}$$

Отже, сила, з якою вода діє на нижню кришку, дорівнює 850 Н.

4. Визначити початкове прискорення і напрям руху металевої кульки з густиною  $\rho_k = 5000 \text{ кг/м}^3$  відносно води, якщо її звільнити при кутовій швидкості обертання резервуара навколо своєї осі  $\vec{\omega} = 10 \text{ рад/с}$ . Початкові координати кульки  $x = 0,1 \text{ м}$ ,  $y = 0$ .

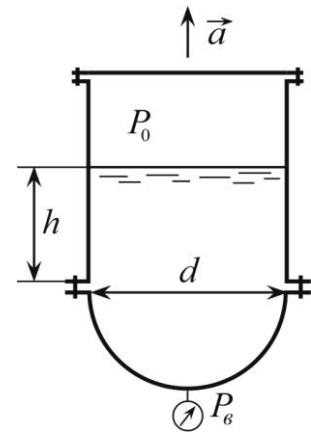


Рисунок 2.21 – До задачі 3

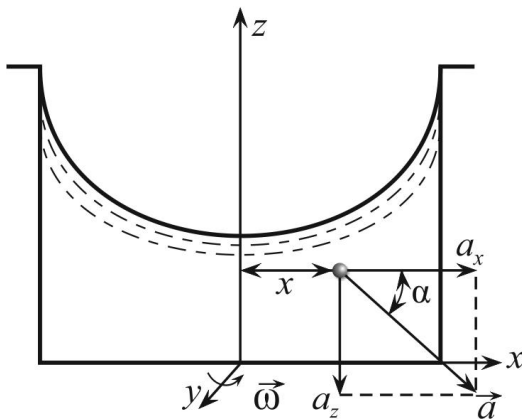


Рисунок 2.22 – До задачі 4

Згідно з другим законом Ньютона

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{G} + \vec{J},$$

де  $m = \rho_k V$  – маса кульки ( $V$  – об’єм кульки);

$\vec{F}$  – архімедова сила;

$\vec{G}$  – вага кульки;

$\vec{J}$  – переносна сила інерції кульки.

Проекція цих сил на вісь  $oz$

$$F_z = \rho_g g V, \quad G_z = -\rho_k g V, \quad J_z = 0.$$

Отже,

$$\rho_k V a_z = \rho_g g V - \rho_k g V,$$

або

$$a_z = g \left( \frac{\rho_g}{\rho_k} - 1 \right) = 9,81 \left( \frac{1000}{5000} - 1 \right) = -7,85 \text{ м/с}^2.$$

Проекції сил на вісь  $ox$ :  $F_x = G_x = 0$ ,  $J_x = \omega^2 x \rho_k V - \omega^2 x \rho_g V$ . Звідки

$$a_x \rho_k V = \omega^2 x \rho_k V - \omega^2 x \rho_g V,$$

або

$$a_x = \omega^2 x \left( 1 - \frac{\rho_g}{\rho_k} \right) = 10^2 \cdot 0,1 \left( 1 - \frac{1000}{5000} \right) = 8 \text{ м/с}^2.$$

Оскільки  $y = 0$ , то

$$a_y = \omega^2 y \left( 1 - \frac{\rho_g}{\rho_k} \right) = 0.$$

Таким чином, прискорення кульки

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_z^2} = \sqrt{7,85^2 + 8^2} = 11,2 \text{ м/с}^2.$$

Напрямок руху кульки визначає кут

$$\alpha = \arctg \frac{a_z}{a_x} = \arctg \frac{7,85}{8} = 44^\circ.$$

Таким чином, початкове прискорення металевої кульки дорівнює  $11,2 \text{ м/с}^2$ , а напрям її руху визначається кутом  $\alpha = 44^\circ$ .

## 3 ОСНОВИ КІНЕМАТИКИ РІДИНИ

Кінематикою називається розділ гідромеханіки, в якому рух рідини вивчається без розгляду причин, що його спричинили. За образним висловом М. Є. Жуковського<sup>9</sup>, кінематика вивчає «геометрію руху».

### 3.1 ДВА МЕТОДИ ОПИСУ РУХУ РІДИНИ

Завдяки текучості загальний характер руху рідини є більш складним, ніж твердих тіл. Оскільки рідкі частинки у загальному випадку рухаються з різними швидкостями, то вживається термін «швидкість рідкої частинки». Але з визначення рідкої частинки (підрозділ 1.1) випливає, що вона являє собою сукупність матеріальних точок і тому такий термін не є достатньо конкретним. У зв'язку з цим умовимось, що під швидкістю рідкої частинки будемо розуміти швидкість деякої її точки, що обрана умовно і називається полюсом.

Існує два методи вивчення руху рідини. Перший – *метод Лагранжа*<sup>10</sup> – полягає у спостереженні за рухом окремих рідких частинок, тобто якщо у момент часу  $t_0$  положення частинки характеризувалось координатами  $x_0, y_0, z_0$  і для будь-якого іншого моменту часу  $t$  можна визначити координати цієї рідкої частинки

$$\begin{aligned}x &= f_1(t; x_0; y_0; z_0); \\y &= f_2(t; x_0; y_0; z_0); \\z &= f_3(t; x_0; y_0; z_0),\end{aligned}\tag{3.1}$$

то вважається, що рух описано. Параметри  $x_0, y_0, z_0$  є змінними *Лагранжа*.

Користуючись методом Лагранжа, можна простежити за будь-якою рідкою частинкою і цим визначити траєкторію її руху.

Незважаючи на досить повну інформацію про рух рідини, котру дає цей метод, він не отримав широкого використання. Це пов'язане з тим, що рівняння руху, складені на основі методу Лагранжа, складні та їх важко розв'язувати.

У даному курсі метод Лагранжа не застосовується, а все вивчення побудоване за *методом Ейлера*. Він полягає у визначенні швидкості у кожній точці простору, який зайнятий рідиною, що рухається, тобто поля швидкостей. Головне поняття методу Ейлера – *місцева швидкість*, під якою розуміють

---

<sup>9</sup> Жуковський Микола Єгорович (1847–1921) – видатний російський механік, член – кореспондент Імператорської академії наук. Став засновником сучасної аеродинаміки, зокрема встановив закон, за яким розраховують підйомну силу крила. Встановив фізичну природу гідравлічного удару.

<sup>10</sup> Лагранж Жозеф Луї (1736–1813) – видатний французький математик, механік і астроном, член Паризької академії наук. Зробив величезний внесок у розвиток теорії чисел, теорії ймовірності, числові методи. Самою видатною працею Лагранжа стала «Аналітична механіка» (1788), яку пізніше Уільям Роуен Гамільтон назвав «науковою поемою».



швид-кість рідкої частинки, що знаходиться у даній точці у даний момент часу. Рух рідини вважають описаним, якщо задане поле місцевих швидкостей

$$\begin{aligned} u_x &= f_1(t; x; y; z); \\ u_y &= f_2(t; x; y; z); \\ u_z &= f_3(t; x; y; z), \end{aligned} \quad (3.2)$$

де  $x, y, z$  – змінні Ейлера.

Таким чином, спостерігають не за переміщенням рідких частинок, а за зміною параметрів у фіксованих точках простору. Це досить повно характеризує течію рідини. Крім того, при застосуванні методу Ейлера може широко використовуватися теорія поля, що визначає його перевагу над методом Лагранжа.

Якщо функції у формулах (3.2) відомі, то можна не тільки скласти уявлення про характер руху рідкої маси, а й визначити кінематичні характеристики, необхідні для складення динамічних рівнянь руху. Основною кінематичною характеристикою, яка використовується в законах механіки, є *прискорення*

$$a = \frac{du}{dt}. \quad (3.3)$$

Для його представлення в змінних Ейлера врахуємо, що координати рідкої частинки, яка рухається, є функціями часу:  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ . Отже, проекції швидкості  $u_x, u_y, u_z$  є складними функціями часу. За правилом диференціювання складних функцій для проекцій *повного прискорення* маємо

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{dz}{dt}; \\ a_y &= \frac{du_y}{dt} = \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \frac{dz}{dt}; \\ a_z &= \frac{du_z}{dt} = \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{dz}{dt}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Оскільки  $dx/dt = u_x$ ,  $dy/dt = u_y$ ,  $dz/dt = u_z$ , то

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} u_z; \\ a_y &= \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_y}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_y}{\partial z} u_z; \\ a_z &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial u_z}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_z}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_z}{\partial z} u_z. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Для представлення прискорення

$$\vec{a} = \frac{du}{dt} = \frac{du_x}{dt} \vec{i} + \frac{du_y}{dt} \vec{j} + \frac{du_z}{dt} \vec{k} \quad (3.6)$$

у компактному вигляді застосовують оператор Гамільтона<sup>11</sup>

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}. \quad (3.7)$$

Розглядаючи величину  $\nabla$  формально як вектор з проєкціями  $\partial/\partial x$ ,  $\partial/\partial y$ ,  $\partial/\partial z$ , представимо систему (3.5) у вигляді

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + \left( \frac{\partial}{\partial x} u_x + \frac{\partial}{\partial y} u_y + \frac{\partial}{\partial z} u_z \right) u_x; \\ a_y &= \frac{\partial u_y}{\partial t} + \left( \frac{\partial}{\partial x} u_x + \frac{\partial}{\partial y} u_y + \frac{\partial}{\partial z} u_z \right) u_y; \\ a_z &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + \left( \frac{\partial}{\partial x} u_x + \frac{\partial}{\partial y} u_y + \frac{\partial}{\partial z} u_z \right) u_z. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Враховуючи, що вирази у дужках мають структуру скалярного добутку  $u\nabla$  і представляючи прискорення  $a = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ , дістаємо

$$a = \frac{\partial u}{\partial t} + (u\nabla)u. \quad (3.9)$$

Таким чином, прискорення складається з двох частин. Перша  $\partial u/\partial t$  є локальною складовою і відображає зміну в часі вектора швидкості у фіксованій точці. Друга частина  $(u\nabla)u$  називається конвективною складовою і характеризує зміну швидкості рідкої частинки при її переміщенні у просторі.

*Якщо поле швидкостей є незмінним у часі, тобто у кожній фіксованій точці простору швидкість є величиною незмінною, то такий рух рідини називають стаціонарним, або усталеним. Якщо місцева швидкість змінюється у часі, то такий рух є нестаціонарним, або неусталеним.*

Зрозуміло, що локальна складова прискорення для усталеного руху завжди дорівнює нулю. При нестаціонарній течії вона може перетворюватися у нуль лише тоді, коли швидкість у точці сягає максимального або мінімального значення у часі.

<sup>11</sup> Гамільтон Уільям Роуен (1805–1865) – видатний ірландський математик, механік, член Ірландської королівської академії, Національної академії США, Королівський астроном Ірландії. У науковій роботі «Теорія алгебраїчних пар» (1835) вперше точно обґрунтував теорії комплексних чисел і дав їй геометричну інтерпретацію. Довгий час працював над теорією кватерніонів (система гіперкомплексних чисел). Основні результати цієї праці викладені в монографіях «Лекції про кватерніони» та «Елементи кватерніонів». У даний час ця теорія використовується у комп'ютерній графіці, програмуванні ігор, обчислювальній механіці, теорії управління. У двох статтях «Про загальний метод динаміки» (1834–1835) Гамільтон сформулював принцип стаціонарної дії, який носить його ім'я. Роботи Гамільтона у галузі механіки на багато років визначили напрямок розвитку цієї науки.

### 3.2 ЛІНІЯ І ТРУБКА ТЕЧІЇ. ТРАЄКТОРІЯ

Поля фізичних величин важко спостерігати безпосередньо. Тому при розгляді полів скалярних величин будують так звані поверхні рівня (наприклад для температури – це ізотерми, для тиску – екіпотенціальні поверхні тощо). У векторних полях розглядають векторні лінії, у кожній точці яких вектор спрямований по дотичній. Таким чином, наочне уявлення про поле швидкостей рідини, що рухається, можна отримати, якщо побудувати векторні лінії цього поля, які в гідромеханіці називають лініями течії. Отже, *лінія течії – це крива, у кожній точці якої вектор швидкості у даний момент часу спрямований по дотичній*. Під час усталеного руху лінії течії з часом не змінюються, а при неусталеному у різні моменти часу вони мають різну форму (за деяким виключенням).

Якщо за елементарний проміжок часу рідка частинка у напрямі лінії течії пройде шлях  $dS$ , проекції якого на осі координат  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  (рисунок 3.1,а), то компоненти швидкості

$$u_x = \frac{dx}{dt}, \quad u_y = \frac{dy}{dt}, \quad u_z = \frac{dz}{dt}. \quad (3.10)$$

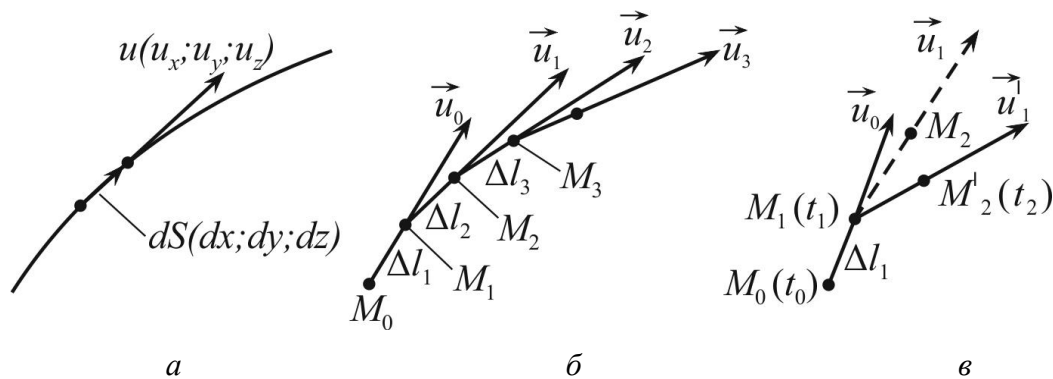


Рисунок 3.1 – Лінії течії

Звідки

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z}. \quad (3.11)$$

Рівність (3.11) є диференціальним рівнянням лінії течії. Її можна отримати і з інших міркувань. Відповідно до визначення лінії течії вектор  $\vec{u}$  і напрямлений відрізок  $d\vec{S}$  колінеарні, а оскільки однойменні проекції колінеарних векторів пропорційні, то для них справедливе рівняння (3.11).

Через одну точку простору у даний момент часу не можуть проходити дві або більше ліній течії. Дійсно, якби дві лінії течії перетинались у одній точці, то це означало б, що частинка, яка вміщує в собі цю точку, у один і той самий момент часу мала б дві різні швидкості. Фізично це неможливо. Виключенням є так звані *особливі точки – точки, через які проходять декілька або навіть нескінченно багато ліній течії*. Такі точки спостерігатимемо далі, у пункті 3.6.4, коли розглядатимемо найпростіші потенціальні течії.

Спробуємо визначити взаємозв'язок лінії течії та траєкторії. Для цього припустимо, що у деякій момент часу  $t_0$  швидкість у точці  $M_0$  дорівнює  $\vec{u}_0$ . Відкладемо на векторі  $\vec{u}_0$  невеличкий відрізок  $\Delta l_1$  (рисунок 3.1,б) і в точці  $M_1$  намалюємо відповідний їй вектор швидкості  $\vec{u}_1$ . Потім на цьому векторі відкладемо відрізок  $\Delta l_2$  і аналогічно побудуємо вектор  $\vec{u}_2$ . Якщо таким чином діяти і надалі, то отримаємо «криву», яка задовольняє визначення лінії течії. Зауважимо, що усі побудови здійснюються для одного фіксованого моменту часу  $t_0$ . Тому не має значення, рух рідини усталений чи ні. Зрозуміло також, що отримана «крива» буде тим більше відповідати лінії течії, чим меншими будуть відрізки  $\Delta l$ .

Спробуємо тепер аналогічним чином побудувати траєкторію тієї самої рідкої частинки (рисунок 3.1,в). Нехай за невеличкий проміжок часу  $\Delta t_1$  вона пройде шлях від точки  $M_0(t_0)$  до  $M_1(t_1)$ . У лінійному наближенні цей шлях можна вважати збіжним з напрямом  $\vec{u}_0$ . Якщо рух усталений, то швидкість у точці  $M_1$  буде такою, як і в момент часу  $t_0$ . У цьому випадку частинка пересуватиметься у напрямі вектора  $\vec{u}_1$  до точки  $M_2$  тощо, тобто траєкторія збігатиметься з лінією течії. Якщо рух неусталений, то за час  $\Delta t_1$  вектор  $\vec{u}_1$  зміниться до моменту переміщення частинки у точку  $M_1$ ; її швидкість буде  $\vec{u}'_1$ . Отже, із точки  $M_1$  частинка буде спрямована вздовж вектора  $\vec{u}'_1$  і не потрапить у точку  $M_2$ . Тому траєкторія і лінія течії не збігатимуться.

Таким чином, лінія течії та траєкторія збігаються тільки під час усталеного руху. Тому траєкторію рідкої частинки при усталеному русі можна розраховувати за рівнянням (3.11), а при неусталеному, зважаючи, що у цьому випадку час  $t$  стає такою самою незалежною змінною, як і координати, за співвідношенням

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z} = dt. \quad (3.12)$$

Виберемо у рідині елементарний замкнутий контур  $dl$  площею  $dA$  і проведемо через кожну його точку лінію течії (рисунок 3.2). Отримана *трубчаста*

*поверхня називається елементарною трубкою течії. Рідина, яка протікає у*

*середині елементарної трубки течії, є елементарною струминкою. Оскільки вона має невеликі розміри, то нерівномірністю розподілу швидкостей в ній можна знехтувати.*

Отже, вважають, що в межах елементарної струминки швидкості розподілені рівномірно (перша властивість елементарної струминки). Оскільки у кожній точці трубки течії у даний момент часу вектор швидкості рідкої

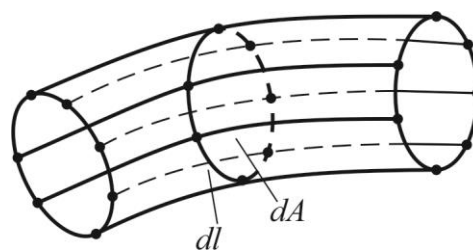


Рисунок 3.2 – Елементарна трубка течії

частинки збігається з дотичною, то зрозуміло, що жодна частинка не може проникнути в елементарну струминку ззовні та жодна частинка не може вийти через її бокову поверхню (друга властивість).

Уявлення, згідно з яким потік рідини кінцевих розмірів розглядають як сукупність елементарних струминок, називається струминною моделлю потоку.

### 3.3 РІВНЯННЯ НЕРОЗРИВНОСТІ

Рівняння нерозривності (суцільності) відображає один з фундаментальних законів природи – закон збереження маси стосовно рідкого середовища. Розглянемо рідину об'ємом  $V$ , який обмежує поверхня  $A$ . Виділимо на ній елементарну поверхню  $dA$  із зовнішньою нормаллю  $\vec{n}$  (рисунок 3.3). Добуток  $\rho u_n dA$  є масою рідини, яка втікає або витікає з об'єму (залежно від напрямку швидкості  $\vec{u}$ ) за одиницю часу. Оскільки  $\vec{n}$  – нормаль зовнішня, то  $u_n > 0$  відповідає витіканню рідини, а  $u_n < 0$  – втіканню. Тоді інтеграл  $\iint_A \rho u_n dA$  – різниця між масою рідки-

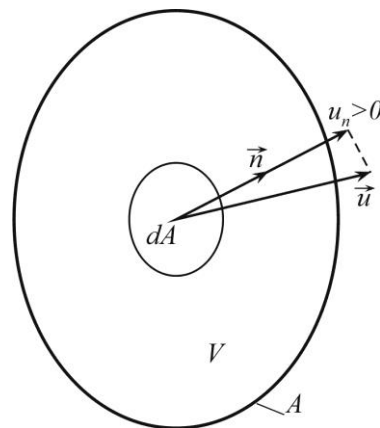


Рисунок 3.3 – До виведення рівняння нерозривності

ни, що витікла та надійшла в об'єм. Якщо об'єм, що розглядається, незмінний, то зміна маси у ньому може відбуватися лише за рахунок зміни густини зі швидкістю  $\partial\rho/\partial t$ . Тоді зміна маси у об'ємі  $V$  дорівнює інтегралу  $\iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t} dV$ .

Очевидно, що зміна маси всередині рідкого тіла повинна дорівнювати масі, яка в нього надійшла,

$$\iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t} dV = - \iint_A \rho u_n dA. \quad (3.13)$$

Таким чином, додатному прирощенню густини відповідає  $u_n < 0$ , тобто втікання маси та навпаки.

Згідно з формулою Гауса<sup>12</sup>-Остроградського<sup>13</sup>

<sup>12</sup> Гаусс Йоганн Карл Фридріх (1777–1855) – видатний німецький математик, фізик, астроном, член Шведської та Петербурзької академій наук та Лондонської королівської спілки. Праці Гаусса мали великий вплив на розвиток алгебри, теорії чисел, диференціальної геометрії, класичної теорії електрики і магнетизму, геодезії, теоретичної астрономії.

<sup>13</sup> Остроградський Михайло Васильович (1801–1862) – видатний український математик (виходець з роду козацьких старшин). Працював у Франції та Росії. Автор численних праць з математичного аналізу, математичної фізики, теоретичної механіки, теорії чисел, алгебри. Автор формули перетворення об'ємного інтегралу в інтеграл по поверхні.

$$\iint_A \rho u_n dA = \iiint_V \left( \frac{\partial \rho u_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho u_z}{\partial z} \right) dV, \quad (3.14)$$

а враховуючи рівняння (1.3),

$$\iint_A \rho u_n dA = \iiint_V \operatorname{div}(\rho \vec{u}) dV. \quad (3.15)$$

Тоді формула (3.13) набуває вигляду

$$\iiint_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) \right) dV = 0, \quad (3.16)$$

або

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0. \quad (3.17)$$

Отриманий результат є *рівнянням нерозривності в диференціальній формі*. Оскільки при його виводі ніяких обмежень не робилось, то воно розповсюджується як на краплинні рідини, так і на гази під час як усталеного, так і неусталеного руху.

Якщо рух усталений, то  $\partial \rho / \partial t = 0$  і з формули (3.17) дістаємо

$$\operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0, \quad (3.18)$$

а якщо, крім того, рідина нестислива ( $\rho = \text{const}$ ), то

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (3.19)$$

Оскільки кожна складова формули (3.19) характеризує швидкість відносного подовження (укорочення) рідкої частинки, то ясно, що, подовжуючись, наприклад, у напрямі осей  $ox$  і  $oy$ , нестислива рідка частинка повинна укорочуватись у напрямі осі  $oz$ , тобто не може бути, щоб усі три складові були одного знака.

Розглянемо елементарну струминку стисливої рідини (рисунок 3.4). Її сумарна поверхня  $dA = dA_1 + dA_2 + dA_6$  (де  $dA_6$  – площа бічної поверхні). Якщо рух вважати усталеним, то згідно з формулою (3.13)

$$\rho u_n dA = \rho_1 u_{n1} dA_1 + \rho_2 u_{n2} dA_2 + \rho_3 u_{n6} dA_6 = 0. \quad (3.20)$$

Відповідно до другої властивості елементарної струминки  $\rho_3 u_{n6} dA_6 = 0$  і

$$\rho_1 u_{n1} dA_1 = -\rho_2 u_{n2} dA_2. \quad (3.21)$$

Беручи до уваги, що  $\vec{n}_1$  і  $\vec{n}_2$  – нормалі зовнішні та  $u_n = -u_{-n}$ , де  $u_{-n}$  – проекція швидкості на внутрішню нормаль, запишемо

$$\rho_1 u_{-n1} dA_1 = \rho_2 u_{n2} dA_2. \quad (3.22)$$

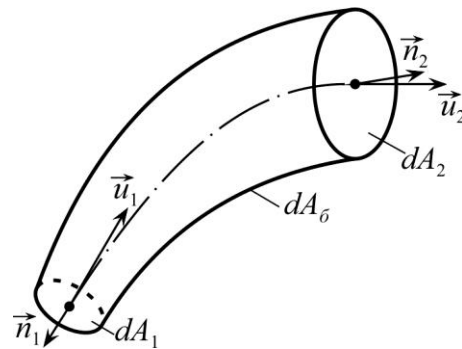


Рисунок 3.4 – Елементарна струминка

Якщо елементарні площі  $dA_1$  і  $dA_2$  нормальні до напрямку течії, то  $u_{n1} = u_1$  і  $u_{n2} = u_2$ . Тобто

$$\rho_1 u_1 dA_1 = \rho_2 u_2 dA_2. \quad (3.23)$$

Отриманий результат є *рівнянням нерозривності для елементарної струминки*. Він вказує на рівність секундних мас, що проходять крізь довільно обрані перерізи елементарної струминки. Для нестисливої рідини  $\rho_1 = \rho_2$  і

$$u_1 dA_1 = u_2 dA_2. \quad (3.24)$$

Дамо декілька визначень. *Масовою витратою називають масу рідини, яка протікає через деякий переріз за одиницю часу:  $Q_m = \rho u A$  (вимірюється у кг/с). Об'ємною витратою називають об'єм рідини, який протікає через деякий переріз за одиницю часу:  $Q = u A$  (вимірюється у м<sup>3</sup>/с). Таким чином, рівняння (3.23) і (3.24) можуть бути записані у такому вигляді:*

$$dQ_{m1} = dQ_{m2} \quad (3.25)$$

і

$$dQ_1 = dQ_2. \quad (3.26)$$

Отже, *масова витрата вздовж елементарної струминки є величиною незмінною*. Цей висновок добре узгоджується з другою властивістю елементарної струминки (дійсно, як маса вздовж струминки може змінюватися, якщо нормальна складова швидкості на стінці дорівнює нулю, тобто її стінки непроникні?). Якщо рідина нестислива, то замість незмінності масової витрати достатньо казати про незмінність її об'ємної витрати.

У технічних розрахунках важливе значення має рівняння нерозривності для потоку кінцевих розмірів. Згідно зі *струминною моделлю* рівняння (3.23) і (3.24) для потоку мають вигляд

$$\iint_{A_1} \rho_1 u_1 dA_1 = \iint_{A_2} \rho_2 u_2 dA_2. \quad (3.27)$$

і

$$\iint_{A_1} u_1 dA_1 = \iint_{A_2} u_2 dA_2. \quad (3.28)$$

### 3.4 АНАЛІЗ РУХУ РІДКОЇ ЧАСТИНКИ. ТЕОРЕМА КОШІ-ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Відомо, що рух твердого тіла у загальному випадку може бути розкладений на поступальну і обертальну складові. Характерною особливістю рідини є її легка деформованість. Тому під час течії рідке тіло може деформуватися, що, природньо, значно ускладнює математичний опис такого руху.

Виділимо в рідині, що рухається, рідку частинку у формі паралелепіпеда зі сторонами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  (рисунок 3.5). Якщо у точці  $A$  швидкість дорівнює  $u$ , то у точці  $C_1$  вона буде складати  $u + du$ . Тоді для проєкцій швидкості у точці  $C_1$  можна записати

$$\begin{aligned}
u_{x1} &= u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz; \\
u_{y1} &= u_y + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy + \frac{\partial u_y}{\partial z} dz; \\
u_{z1} &= u_z + \frac{\partial u_z}{\partial x} dx + \frac{\partial u_z}{\partial y} dy + \frac{\partial u_z}{\partial z} dz.
\end{aligned}
\tag{3.29}$$

Перетворимо перше рівняння (3.29) з урахуванням того, що

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_x}{\partial y} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \\
\frac{\partial u_x}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right).
\end{aligned}
\tag{3.30}$$

$$\begin{aligned}
u_{x1} &= u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) dy + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) dz - \\
&\quad - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) dy + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) dz.
\end{aligned}
\tag{3.31}$$

Якщо ліва грань паралелепіпеда в напрямку осі  $ox$  перемістилась за одиницю часу на  $u_x$ , то права – на величину  $u_x + (\partial u_x / \partial x) dx$  (рисунок 3.6). Тому  $(\partial u_x / \partial x) dx$  являє собою швидкість лінійної деформації рідкої частинки. Коли процес йде одночасно вздовж усіх осей, то це повинно приводити до об'ємного розширення або стиснення частинки і початковий об'єм  $dV = dx dy dz$  змінюється на величину  $\delta V = \delta V_x + \delta V_y + \delta V_z$  за рахунок розтягнення або стиснення граней. При цьому  $\delta V_x = (DD' - AA') dy dz = (\partial u_x / \partial x) dx dy dz dt = (\partial u_x / \partial x) dV dt$ . Аналогічно  $\delta V_y = (\partial u_y / \partial y) dV dt$  і  $\delta V_z = (\partial u_z / \partial z) dV dt$ .

Таким чином,

$$\delta V = \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) dV dt = \text{div} \vec{u} dV dt.
\tag{3.32}$$

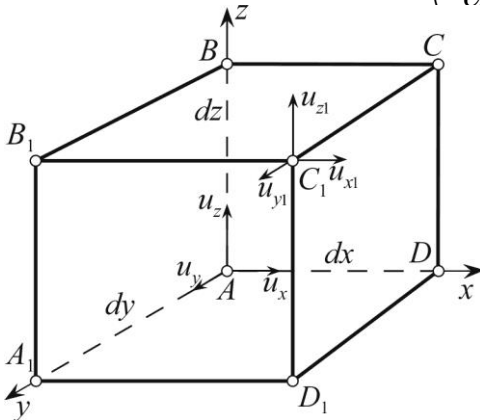


Рисунок 3.5 –  
Рідка частинка

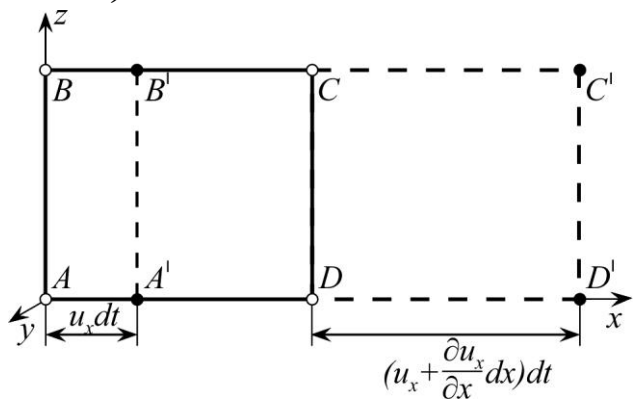


Рисунок 3.6 –  
Лінійна деформація рідкої частинки



Для нестисливої рідини  $div \vec{v} = 0$ . Тому деформація рідкої нестисливої частинки відбувається без зміни її об'єму ( $\delta V = 0$ ). У цьому полягає гідромеханічний зміст рівності нулю дивергенції.

Оскільки у точках  $A$  і  $B$  швидкості різні (рисунок 3.7), то переміщення точки  $B$  вздовж осі  $ox$  буде відрізнятися від переміщення точки  $A$  на величину  $(\partial u_x / \partial z) dz dt$ . Тому грань  $AB$  повернеться на кут  $d\alpha$ , який через його малість

$$d\alpha \approx \operatorname{tg} d\alpha = \frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{dz}{dz} dt = \frac{\partial u_x}{\partial z} dt. \quad (3.33)$$

За аналогією кут повороту грані  $AD$

$$d\beta \approx \frac{\partial u_z}{\partial x} dt. \quad (3.34)$$

Таким чином, кутові швидкості граней  $AB$  і  $AD$  становитимуть  $d\alpha/dt = \partial u_x / \partial z$  і  $d\beta/dt = \partial u_z / \partial x$ , а сумарна швидкість кутової деформації частинки в площині  $xz$  дорівнює  $(\partial u_x / \partial z + \partial u_z / \partial x)$ . Оскільки деформація відбувається внаслідок повороту відразу двох граней та їх швидкості у загальному випадку неоднакові, то в гідромеханіці як міру швидкості кутової деформації приймають середнє арифметичне, тобто вважають, що на кожну грань припадає половина її величини

$$\gamma_y = \frac{d\theta_y}{dt} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right). \quad (3.35)$$

Аналогічно

$$\gamma_x = \frac{d\theta_x}{dt} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right). \quad (3.36)$$

$$\gamma_z = \frac{d\theta_z}{dt} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right). \quad (3.37)$$

Отже, друга і третя складові рівнянь (3.31) характеризують кутову деформацію рідкої частинки.

У загальному випадку діагоналі  $AC$  і  $AC'$  не збігаються, тобто частинка обертається навколо осі  $oy$  з кутовою швидкістю  $\omega_y$ .

Оскільки  $(\partial u_x / \partial z) dz dt = \omega_y dz dt$  і  $(\partial u_z / \partial x) dx dt = -\omega_y dx dt$ , то для  $\omega_y$ , а за аналогією і для двох інших проєкцій кутової швидкості рідкої частинки можна записати

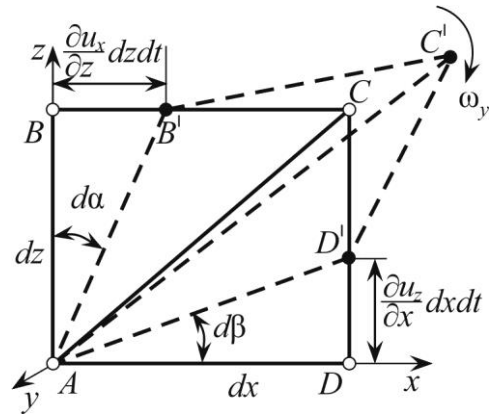


Рисунок 3.7 – Кутова деформація рідкої частинки

$$\begin{aligned}\omega_x &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right); \\ \omega_y &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right); \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right).\end{aligned}\tag{3.38}$$

Обертання вважається позитивним, якщо воно відбувається у напрямі від осі  $oz$  до  $ox$ , від  $oy$  до  $oz$  і від  $ox$  до  $oy$ .

Таким чином, рівняння (3.29) з урахуванням отриманих вище результатів можна записати у такому вигляді:

$$\begin{aligned}u_{x1} &= u_x + \left[ \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \gamma_z dy + \gamma_y dz \right] + (\omega_y dz - \omega_z dy); \\ u_{y1} &= u_y + \left[ \frac{\partial u_y}{\partial y} dy + \gamma_z dx + \gamma_x dz \right] + (\omega_z dx - \omega_x dz); \\ u_{z1} &= u_z + \left[ \frac{\partial u_z}{\partial z} dz + \gamma_x dy + \gamma_y dx \right] + (\omega_x dy - \omega_y dx).\end{aligned}\tag{3.39}$$

У цій системі складові  $u_x$ ,  $u_y$  і  $u_z$  є компонентами поступальної швидкості; складові у квадратних дужках – компонентами деформаційної швидкості, а складові у круглих дужках – компоненти кутової (вихрової) швидкості.

Отже, у загальному випадку рух рідкого тіла можна розкласти на поступальний разом з деяким полюсом, обертальний навколо миттєвої осі, що проходить через цей полюс, і деформаційний, який складається з лінійних та кутових деформацій. Це положення становить теорему Коші-Гельмгольца<sup>14</sup> про рух рідких тіл (інколи її називають першою теоремою Гельмгольца).

Слід зауважити, що ця теорема вказує лише на один з можливих способів розкладання складного руху рідкого тіла на прості складові. Проте перевагами цього способу є те, що він найбільш фізично обґрунтований, оскільки визначає основні характерні особливості руху рідини та чітко встановлює різницю у її русі від руху твердого тіла. Ця різниця полягає в існуванні деформаційної складової, що є наслідком відмінності у фізичних властивостях рідкого і

---

<sup>14</sup> Гельмгольц Герман Людвіг Фердинанд (1821–1894) – німецький фізик, фізіолог, психолог. У праці «Про збереження сили» (1847) дав найточніше для свого часу формулювання закону збереження енергії. Встановив закономірності поведінки вихорів в ідеальній рідині, розробив теорію акустичного резонансу. В праці «Вчення про слухові відчуття як фізіологічна основа для теорії музики» (1863) вивчив натуральний звукоряд і розробив резонансну теорію слуха. Нагороджений найвищою нагородою Франції – зіркою ордена Почесного легіона.

твердого тіла, а саме у тому, що через слабкість міжмолекулярних зв'язків під час руху рідина, як правило, не здатна зберігати свою форму незмінною.

У векторній формі для кутової швидкості можна записати

$$\vec{\omega} = \vec{i}\omega_x + \vec{j}\omega_y + \vec{k}\omega_z, \quad (3.40)$$

а з урахуванням формули (3.38)

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \left[ \vec{i} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right]. \quad (3.41)$$

Беручи до уваги формулу для вихору (1.4),

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{u}, \quad (3.42)$$

або

$$2\vec{\omega} = \text{rot} \vec{u}. \quad (3.43)$$

Отже, якщо розподілення швидкості  $\vec{u}$  є полем швидкостей рідини, то  $\text{rot} \vec{u}$  є полем подвоєних кутових швидкостей частинок рідини. У цьому полягає гідромеханічний зміст вихору (ротора).

*Рух рідини, при якому відсутня обертальна складова, називається потенціальним, або безвихровим. Якщо  $\vec{\omega} \neq 0$ , рух називається вихровим. У переважній більшості випадків течія в природі та техніці є вихровою.*

### 3.5 ВИХРОВИЙ РУХ РІДИНИ

#### 3.5.1 Вихрові лінії і трубка. Друга теорема Гельмгольца

В основу кінематики вихрового руху покладене уявлення про вихрову лінію і вихрову трубку. Ці поняття аналогічні лінії течії та трубці течії. *Вихровою називається лінія, у кожній точці якої у даний момент часу вектор вихору швидкості збігається з дотичною (рисунки 3.8). Іншими словами, вихрова лінія – це миттєва вісь обертання частинок рідини, які в даний момент часу розташовані на ній.*

*Диференціальне рівняння вихрової лінії можна отримати з умови колінеарності вектора кутової швидкості  $\vec{\omega}$  ( $\omega_x$ ;  $\omega_y$ ;  $\omega_z$ ) і елементарного напрямленого відрізка  $d\vec{S}$  ( $dx$ ;  $dy$ ;  $dz$ ) вихрової лінії*

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}. \quad (3.44)$$

Знаючи функції  $\omega_x(x; y; z)$ ,  $\omega_y(x; y; z)$ ,  $\omega_z(x; y; z)$ , з формули (3.44) можна знайти конфігурацію вихрових ліній, як це буде зроблено у підрозділі 6.5.

*Якщо через усі точки замкнутого малого контура  $d\Gamma$  провести вихрові лінії, то отриману елементарну трубчасту поверхню називають*

елементарною вихровою трубкою, а сукупність обмежених нею рідких частинок – вихровим шнуром (рисунок 3.9). У випадку, коли площа  $dA$  поперечного перерізу вихрового шнура досить мала, то можна вважати, що в його межах вектор  $\vec{\omega}$  має незмінне значення.

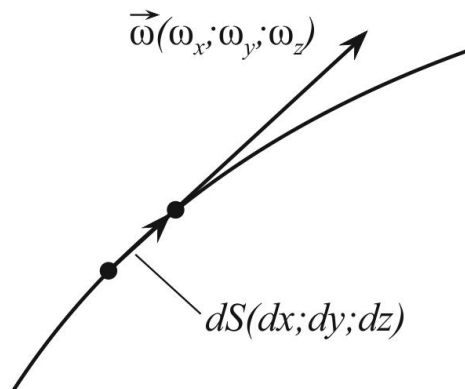


Рисунок 3.8 – Вихрова лінія

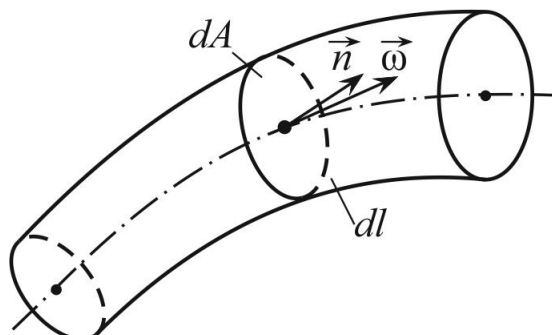


Рисунок 3.9 – Вихровий шнур

Інтеграл вигляду  $\iint_A \text{rot} \vec{u} \vec{n} dA$  називають *потоком вектора вихору*. Він характеризує вихрову трубку і його ще називають *інтенсивністю вихору*

$$i = \iint_A \text{rot} \vec{u} \vec{n} dA. \quad (3.45)$$

Враховуючи формулу (3.43),

$$i = 2 \iint_A \vec{\omega} \vec{n} dA = 2 \iint_A \omega_n dA. \quad (3.46)$$

Виділимо об'єм  $V$ , обмежений бічною поверхнею вихрової трубки  $dA_\sigma$  і двома поперечними перерізами  $dA_1$  і  $dA_2$  (рисунок 3.10). Потік вихору через поверхню  $dA = dA_\sigma + dA_1 + dA_2$  можна подати у вигляді

$$2 \iint_A \omega_n dA = 2 \iint_{A_\sigma} \omega_{n_\sigma} dA_\sigma + 2 \iint_{A_1} \omega_{n_1} dA_1 + 2 \iint_{A_2} \omega_{n_2} dA_2. \quad (3.47)$$

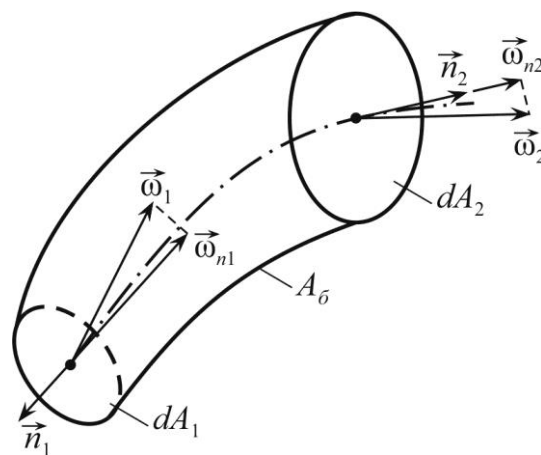


Рисунок 3.10 – До виводу другої теореми Гельмгольца

Оскільки вектор кутової швидкості спрямований по дотичній у кожній точці бічної поверхні, то

$$\iint_A \omega_{n\vec{o}} dA_{\vec{o}} = 0. \quad (3.48)$$

Використовуючи теорему Гауса – Остроградського, можемо записати

$$2 \iint_A \omega_n dA = 2 \iiint_V \operatorname{div} \vec{\omega} dV. \quad (3.49)$$

Розкриємо другий інтеграл

$$\begin{aligned} 2 \iiint_V \operatorname{div} \vec{\omega} dV &= 2 \iiint_V \left( \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} \right) dV = \\ &= \iiint_V \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right] dV = \\ &= \iiint_V \left[ \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 u_x}{\partial z \partial y} \right] dV. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Оскільки вираз у квадратних дужках дорівнює нулю, то і

$$\iint_A \omega_n dA = 0. \quad (3.51)$$

Таким чином,

$$\iint_{A_1} \omega_{n1} dA_1 + \iint_{A_2} \omega_{n2} dA_2 = 0, \quad (3.52)$$

або

$$\iint_{A_1} \omega_{-n1} dA_1 = \iint_{A_2} \omega_{n2} dA_2. \quad (3.53)$$

Якщо вихрова трубка елементарна, то  $\omega_n = \text{const}$  і

$$\omega_{-n1} dA_1 = \omega_{n2} dA_2 = \text{const}. \quad (3.54)$$

Отже, доведена друга теорема Гельмгольца: потік вихорів через поперечний переріз вихрової трубки у даний момент часу є незмінним по її довжині (інтенсивність вихрового шнура у даний момент часу по всій його довжині є незмінною).

Рівняння (3.54) є своєрідним «рівнянням нерозривності» для вихрового шнура. З теореми Гельмгольца випливають важливі властивості вихрової трубки:

– оскільки  $\omega A$  – величина незмінна, то зменшення площі веде до збільшення  $\omega$ ;

– при  $A = 0$   $\omega = \infty$ , що фізично неможливо, тому вихор не може зароджуватися або закінчуватися всередині рідини.

Вихрові трубки повинні або бути замкнутими, створюючи вихрове кільце (рисунок 3.11,а), або замикатися на тверду поверхню чи вільну поверхню рідини (рисунок 3.11,б).

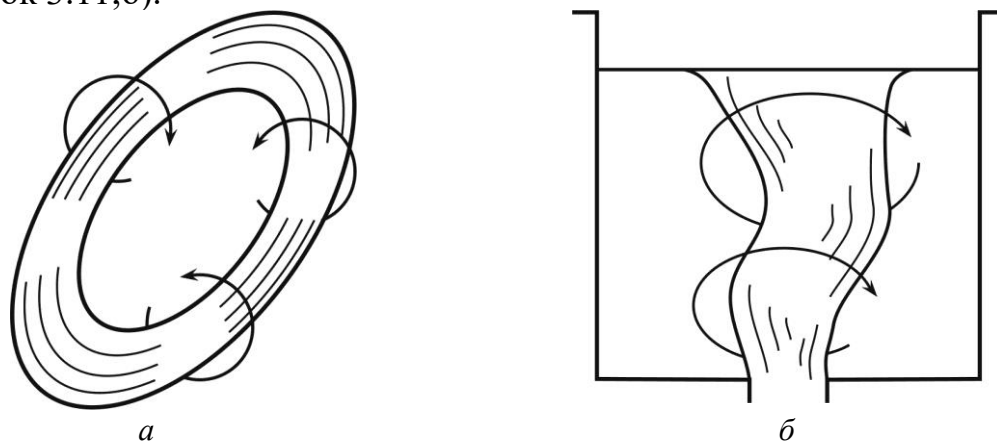


Рисунок 3.11 – Приклади вихрових трубок

Структура вихрової течії реальних рідин різноманітна. У деяких випадках крупні вихори можна спостерігати візуально, наприклад атмосферні смерчі. Але вихровий рух далеко не завжди супроводжується виникненням крупних вихрових шнурів, які можна бачити візуально. Наприклад, при прямолінійному переміщенні в'язкої рідини між двома нерухомими плоскими паралельними стінками (рисунок 3.12). Для такої течії можна вважати, що  $u_y = u_z = 0$ , а оскільки діє ефект прилипання, то  $u_x = f(y)$ . Таким чином, користуючись формулою (3.38), легко показати, що  $\omega_x = \omega_y = 0$ ,  $\omega_z = -1/2 \partial u_x / \partial y$ . Отже, вектор  $\vec{\omega}$ , абсолютна величина котрого

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}, \quad (3.55)$$

у всіх точках паралельний осі  $oz$ , а вихрові лінії є прямими нормальними лініями течії.

Тому такий рух рідини є вихровим, хоч візуально вихорів не спостерігаємо. Течія такого типу може бути потенційною лише за умов рівномірного розподілення швидкостей ( $u_x = \text{const}$ , тобто не залежить від координати  $y$ ). Але в реальних умовах завдяки дії сил в'язкості швидкості розподіляються нерівномірно, тому течія в'язких рідин біля твердих поверхонь завжди вихрова.

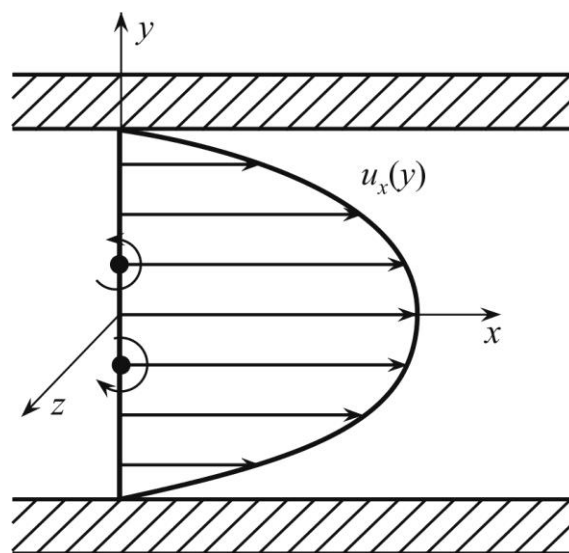


Рисунок 3.12 – Вихрова течія між плоскими стінками

### 3.5.2 Циркуляція швидкості. Теорема Стокса

Інтенсивність вихору є досить важливою характеристикою вихрової течії, але і дуже незручною, оскільки не може бути визначена експериментально. Спроби розповсюдити її на вихори кінцевих розмірів призвели б до необхідності введення поняття про середню кутову швидкість, що пов'язано з труднощами суто математичного характеру. Крім того, у деяких розрахунках зручніше оперувати такою мірою вихрового руху, яка виражалась би через поступальну швидкість і величину якої було б можливо визначити експериментально. Таким вимогам відповідає поняття *циркуляції швидкості*  $\Gamma$  (грецька літера гамма).

Уявлення про фізичну сутність циркуляції отримаємо, використавши методику введення цього поняття М. Я. Фабриканта. Відомо, що на криловий профіль, що знаходиться в потоці, діє підйомна сила  $F$ . Фізично її виникнення можна пояснити тільки тим, що тиск під профілем  $P_1$  більший, а тиск над профілем  $P_2$  менший за тиск на деякій відстані від нього  $P_\infty$  (рисунок 3.13). Тому навколо профіля виникає так званий потік збудження, який є своєрідною реакцією потоку на внесення в нього стороннього тіла. Напрямок цього циркуляційного потоку збудження показано на рисунку 3.13. Кількісно його характеризує циркуляція швидкості по замкнутому контуру  $L$  (рисунок 3.14).

Формально циркуляцією  $\Gamma$  вектора швидкості  $\vec{u}$  по деякому контуру  $L$  є криволінійний інтеграл скалярного добутку цієї швидкості на елементарний напрямлений відрізок контура  $d\vec{l}$

$$\Gamma = \oint_L \vec{u} d\vec{l}, \quad (3.56)$$

де  $d\vec{l}$  ( $dx; dy; dz$ ) – напрямлений елемент дуги контура.

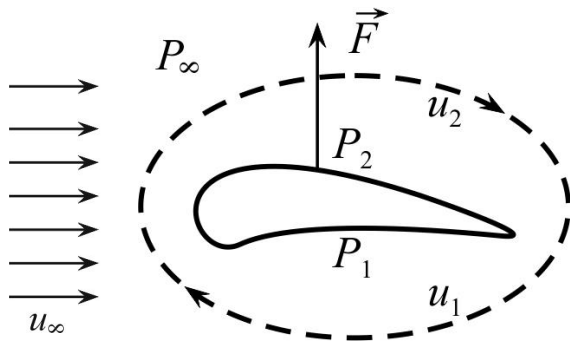


Рисунок 3.13 – Циркуляційне обтікання крилового профілю

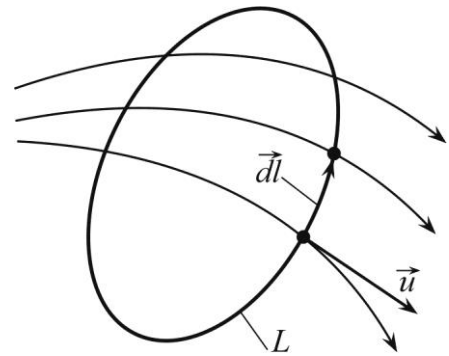


Рисунок 3.14 – До введення поняття циркуляції

Циркуляцію можна представити в іншому вигляді

$$\Gamma = \oint_L \vec{u} \cos(l; u) dl, \quad (3.57)$$

або

$$\Gamma = \oint_L (u_x dx + u_y dy + u_z dz). \quad (3.58)$$

З визначення циркуляції як криволінійного інтеграла випливає її дві властивості:

– циркуляція швидкості по усьому контуру дорівнює сумі циркуляцій по її окремих ділянках;

– при зміні напрямку обходу контуру знак циркуляції змінюється на обернений (як правило, циркуляцію вважають позитивною, якщо контур обходять так, щоб обмежена ним область залишалася ліворуч).

Розглянемо плоский контур  $L$ , який знаходиться в рідині, що рухається (рисунок 3.15). Виділимо в ньому довільний елементарний прямокутний контур  $OABC$  зі сторонами  $dx$  і  $dy$  (рисунок 3.16). Якщо в точці  $O$  проєкції швидкості дорівнюють  $u_x$  і  $u_y$ , то в точці  $A$

$$u_{xA} = u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy, \quad (3.59)$$

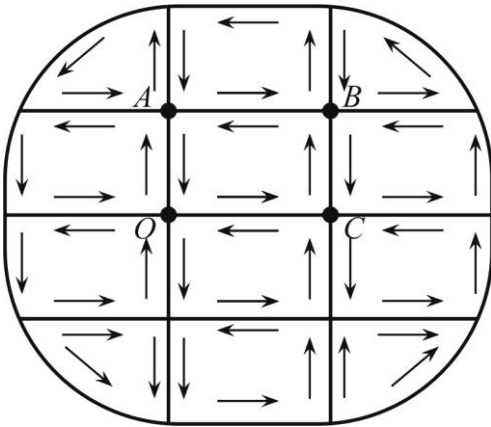


Рисунок 3.15 – Плоский контур

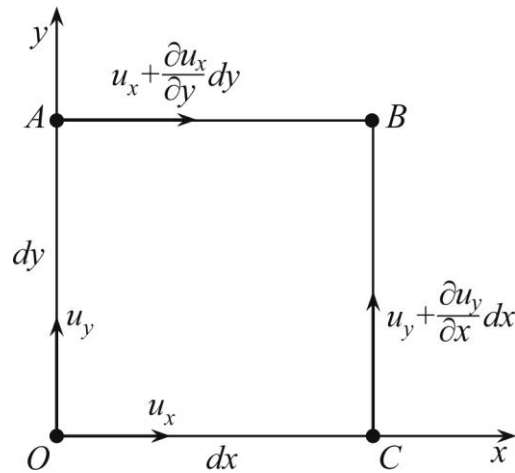


Рисунок 3.16 – Елементарний прямокутний контур

а в точці  $C$

$$u_{yC} = u_y + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx. \quad (3.60)$$

Тоді циркуляція швидкості по елементарному контуру

$$\begin{aligned} d\Gamma &= -u_y dy - \left( u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy \right) dx + \left( u_y + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx \right) dy + u_x dx = \\ &= -\frac{\partial u_x}{\partial y} dy dx + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx dy = 2\omega_z dA, \end{aligned} \quad (3.61)$$

або для довільно орієнтованого у просторі контуру

$$d\Gamma = 2\omega_n dA. \quad (3.62)$$



Якщо контур  $L$  розбити на елементарні контури, як це показано на рисунку 3.15, і скласти циркуляції, зберігаючи незмінним напрям обходу, то

$$\Sigma d\Gamma = 2\Sigma\omega_n dA. \quad (3.63)$$

Однак, як видно з рисунка, циркуляції по всім внутрішнім лініям взаємокомпенсуються і загальна циркуляція дорівнює сумі циркуляцій по зовнішній лінії контуру

$$\Gamma = 2\Sigma\omega_n dA \quad (3.64)$$

або, збільшуючи число контурів  $k$  до нескінченності,

$$\Gamma = 2\iint_A \omega_n dA = \iint_A \text{rot} \vec{u} \vec{n} dA = i. \quad (3.65)$$

Таким чином, циркуляція швидкості по довільному замкнутому контуру дорівнює потоку вектора вихору, що пронизує цей контур. У цьому полягає теорема Стокса<sup>15</sup>. Цю теорему легко довести, скориставшись відомою з векторного аналізу формулою Стокса

$$\iint_A \left[ \left( \frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z} \right) \cos(n; x) + \left( \frac{\partial c}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial x} \right) \cos(n; y) + \left( \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial c}{\partial y} \right) \cos(n; z) \right] dA = \oint_L (cdx + bdy + adz), \quad (3.66)$$

якщо замість довільних неперервних деференційованих функцій  $a$ ,  $b$ ,  $c$  підставити проекції швидкості.

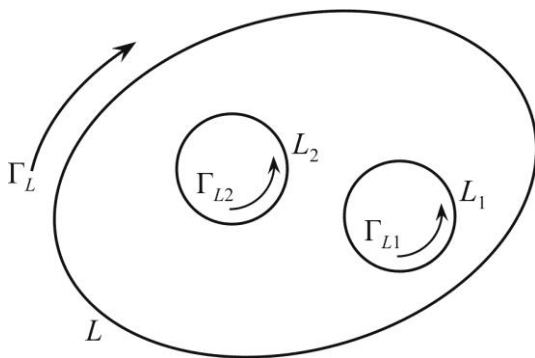


Рисунок 3.17 – Багатозв'язна область

У наведеному вище формулюванні теорема стосується *однотв'язної області*. Однотв'язною називають область, в котрій будь-який замкнутий контур може бути неперервним чином стягнутий у точку. Якщо в області можна виділити контури, котрі неможливо неперервним чином стягнути у точку, то така область є багатозв'язною.

**асті (рисунок 3.17) її можна розбити на це зроблено раніше 3 ОСНОВИ**

## ТИКИ РІДИНИ

<sup>15</sup> Стокс Джордж Габріель (1819–1903) – видатний британський математик і фізик. Був секретарем, а пізніше президентом Лондонської королівської спілки. Має значні наукові здобутки у галузі гідродинаміки, теоретичної механіки, математичного аналізу і математичної фізики. У роботі «Про теорію внутрішнього тертя у рухомих рідинах та про рівновагу і рух пружних твердих тіл» (1849) вивів диференціальне рівняння течії в'язких рідин, зараз це рівняння має назву рівняння Нав'є-Стокса.

Кінематикою називається розділ гідромеханіки, в якому рух рідини вивчається без розгляду причин, що його спричинили. За образним висловом М. Є. Жуковського<sup>16</sup>, кінематика вивчає «геометрію руху».

### 3.1 ДВА МЕТОДИ ОПИСУ РУХУ РІДИНИ

Завдяки текучості загальний характер руху рідини є більш складним, ніж твердих тіл. Оскільки рідкі частинки у загальному випадку рухаються з різними швидкостями, то вживається термін «швидкість рідкої частинки». Але з визначення рідкої частинки (підрозділ 1.1) випливає, що вона являє собою сукупність матеріальних точок і тому такий термін не є достатньо конкретним. У зв'язку з цим умовимось, що під швидкістю рідкої частинки будемо розуміти швидкість деякої її точки, що обрана умовно і називається полюсом.

Існує два методи вивчення руху рідини. Перший – *метод Лагранжа*<sup>17</sup> – полягає у спостереженні за рухом окремих рідких частинок, тобто якщо у момент часу  $t_0$  положення частинки характеризувалось координатами  $x_0, y_0, z_0$  і для будь-якого іншого моменту часу  $t$  можна визначити координати цієї рідкої частинки

$$\begin{aligned}x &= f_1(t; x_0; y_0; z_0); \\y &= f_2(t; x_0; y_0; z_0); \\z &= f_3(t; x_0; y_0; z_0),\end{aligned}\tag{3.1}$$

то вважається, що рух описано. Параметри  $x_0, y_0, z_0$  є змінними *Лагранжа*.

Користуючись методом Лагранжа, можна простежити за будь-якою рідкою частинкою і цим визначити траєкторію її руху.

Незважаючи на досить повну інформацію про рух рідини, котру дає цей метод, він не отримав широкого використання. Це пов'язане з тим, що рівняння руху, складені на основі методу Лагранжа, складні та їх важко розв'язувати.

У даному курсі метод Лагранжа не застосовується, а все вивчення побудоване за *методом Ейлера*. Він полягає у визначенні швидкості у кожній точці простору, який зайнятий рідиною, що рухається, тобто поля швидкостей. Головне поняття методу Ейлера – *місцева швидкість*, під якою розуміють швидкість рідкої частинки, що знаходиться у даній точці у даний момент часу. Рух рідини вважають описаним, якщо задане поле місцевих швидкостей

---

<sup>16</sup> Жуковський Микола Єгорович (1847–1921) – видатний російський механік, член – кореспондент Імператорської академії наук. Став засновником сучасної аеродинаміки, зокрема встановив закон, за яким розраховують підйомну силу крила. Встановив фізичну природу гідравлічного удару.

<sup>17</sup> Лагранж Жозеф Луї (1736–1813) – видатний французький математик, механік і астроном, член Паризької академії наук. Зробив величезний внесок у розвиток теорії чисел, теорії ймовірності, числові методи. Самою видатною працею Лагранжа стала «Аналітична механіка» (1788), яку пізніше Уільям Роуен Гамільтон назвав «науковою поемою».

$$\begin{aligned}
u_x &= f_1(t; x; y; z); \\
u_y &= f_2(t; x; y; z); \\
u_z &= f_3(t; x; y; z),
\end{aligned}
\tag{3.2}$$

де  $x, y, z$  – змінні Ейлера.

Таким чином, спостерігають не за переміщенням рідких частинок, а за зміною параметрів у фіксованих точках простору. Це досить повно характеризує течію рідини. Крім того, при застосуванні методу Ейлера може широко використовуватися теорія поля, що визначає його перевагу над методом Лагранжа.

Якщо функції у формулах (3.2) відомі, то можна не тільки скласти уявлення про характер руху рідкої маси, а й визначити кінематичні характеристики, необхідні для складення динамічних рівнянь руху. Основною кінематичною характеристикою, яка використовується в законах механіки, є *прискорення*

$$a = \frac{du}{dt}.\tag{3.3}$$

Для його представлення в змінних Ейлера врахуємо, що координати рідкої частинки, яка рухається, є функціями часу:  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ . Отже, проекції швидкості  $u_x, u_y, u_z$  є складними функціями часу. За правилом диференціювання складних функцій для проекцій *повного прискорення* маємо

$$\begin{aligned}
a_x &= \frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{dz}{dt}; \\
a_y &= \frac{du_y}{dt} = \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \frac{dz}{dt}; \\
a_z &= \frac{du_z}{dt} = \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{dz}{dt}.
\end{aligned}
\tag{3.4}$$

Оскільки  $dx/dt = u_x$ ,  $dy/dt = u_y$ ,  $dz/dt = u_z$ , то

$$\begin{aligned}
a_x &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} u_z; \\
a_y &= \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_y}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_y}{\partial z} u_z; \\
a_z &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial u_z}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_z}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_z}{\partial z} u_z.
\end{aligned}
\tag{3.5}$$

Для представлення прискорення

$$\vec{a} = \frac{du}{dt} = \frac{du_x}{dt} \vec{i} + \frac{du_y}{dt} \vec{j} + \frac{du_z}{dt} \vec{k}\tag{3.6}$$

у компактному вигляді застосовують оператор Гамільтона<sup>18</sup>

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}. \quad (3.7)$$

Розглядаючи величину  $\nabla$  формально як вектор з проєкціями  $\partial/\partial x$ ,  $\partial/\partial y$ ,  $\partial/\partial z$ , представимо систему (3.5) у вигляді

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + \left( \frac{\partial}{\partial x} u_x + \frac{\partial}{\partial y} u_y + \frac{\partial}{\partial z} u_z \right) u_x; \\ a_y &= \frac{\partial u_y}{\partial t} + \left( \frac{\partial}{\partial x} u_x + \frac{\partial}{\partial y} u_y + \frac{\partial}{\partial z} u_z \right) u_y; \\ a_z &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + \left( \frac{\partial}{\partial x} u_x + \frac{\partial}{\partial y} u_y + \frac{\partial}{\partial z} u_z \right) u_z. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Враховуючи, що вирази у дужках мають структуру скалярного добутку  $u\nabla$  і представляючи прискорення  $a = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ , дістаємо

$$a = \frac{\partial u}{\partial t} + (u\nabla)u. \quad (3.9)$$

Таким чином, прискорення складається з двох частин. Перша  $\partial u/\partial t$  є локальною складовою і відображає зміну в часі вектора швидкості у фіксованій точці. Друга частина  $(u\nabla)u$  називається конвективною складовою і характеризує зміну швидкості рідкої частинки при її переміщенні у просторі.

*Якщо поле швидкостей є незмінним у часі, тобто у кожній фіксованій точці простору швидкість є величиною незмінною, то такий рух рідини називають стаціонарним, або усталеним. Якщо місцева швидкість змінюється у часі, то такий рух є нестаціонарним, або неусталеним.*

Зрозуміло, що локальна складова прискорення для усталеного руху завжди дорівнює нулю. При нестаціонарній течії вона може перетворюватися у нуль лише тоді, коли швидкість у точці сягає максимального або мінімального значення у часі.

---

<sup>18</sup> Гамільтон Уільям Роуен (1805–1865) – видатний ірландський математик, механік, член Ірландської королівської академії, Національної академії США, Королівський астроном Ірландії. У науковій роботі «Теорія алгебраїчних пар» (1835) вперше точно обґрунтував теорії комплексних чисел і дав їй геометричну інтерпретацію. Довгий час працював над теорією кватерніонів (система гіперкомплексних чисел). Основні результати цієї праці викладені в монографіях «Лекції про кватерніони» та «Елементи кватерніонів». У даний час ця теорія використовується у комп'ютерній графіці, програмуванні ігор, обчислювальній механіці, теорії управління. У двох статтях «Про загальний метод динаміки» (1834–1835) Гамільтон сформулював принцип стаціонарної дії, який носить його ім'я. Роботи Гамільтона у галузі механіки на багато років визначили напрямок розвитку цієї науки.

### 3.2 ЛІНІЯ І ТРУБКА ТЕЧІЇ. ТРАЄКТОРІЯ

Поля фізичних величин важко спостерігати безпосередньо. Тому при розгляді полів скалярних величин будують так звані поверхні рівня (наприклад для температури – це ізотерми, для тиску – екіпотенціальні поверхні тощо). У векторних полях розглядають векторні лінії, у кожній точці яких вектор спрямований по дотичній. Таким чином, наочне уявлення про поле швидкостей рідини, що рухається, можна отримати, якщо побудувати векторні лінії цього поля, які в гідромеханіці називають лініями течії. Отже, *лінія течії – це крива, у кожній точці якої вектор швидкості у даний момент часу спрямований по дотичній*. Під час усталеного руху лінії течії з часом не змінюються, а при неусталеному у різні моменти часу вони мають різну форму (за деяким виключенням).

Якщо за елементарний проміжок часу рідка частинка у напрямі лінії течії пройде шлях  $dS$ , проекції якого на осі координат  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  (рисунок 3.1,а), то компоненти швидкості

$$u_x = \frac{dx}{dt}, \quad u_y = \frac{dy}{dt}, \quad u_z = \frac{dz}{dt}. \quad (3.10)$$

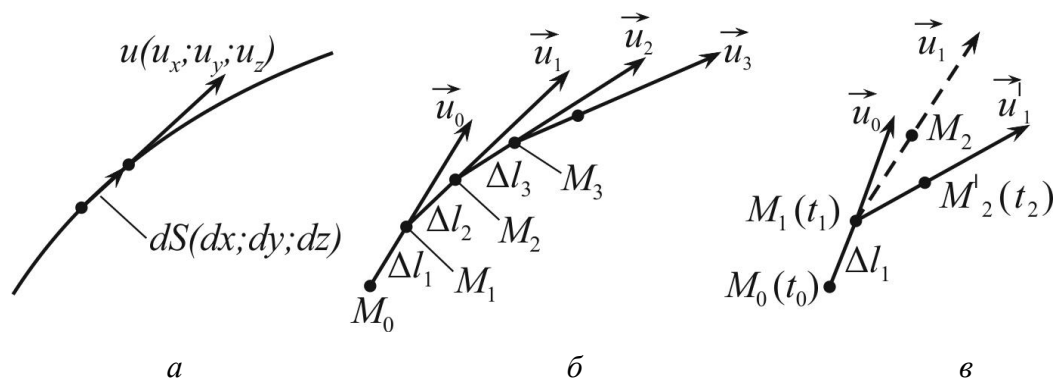


Рисунок 3.1 – Лінії течії

Звідки

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z}. \quad (3.11)$$

Рівність (3.11) є диференціальним рівнянням лінії течії. Її можна отримати і з інших міркувань. Відповідно до визначення лінії течії вектор  $\vec{u}$  і напрямлений відрізок  $d\vec{S}$  колінеарні, а оскільки однойменні проекції колінеарних векторів пропорційні, то для них справедливе рівняння (3.11).

Через одну точку простору у даний момент часу не можуть проходити дві або більше ліній течії. Дійсно, якби дві лінії течії перетинались у одній точці, то це означало б, що частинка, яка вміщує в собі цю точку, у один і той самий момент часу мала б дві різні швидкості. Фізично це неможливо. Виключенням є так звані *особливі точки – точки, через які проходять декілька або навіть нескінченно багато ліній течії*. Такі точки спостерігатимемо далі, у пункті 3.6.4, коли розглядатимемо найпростіші потенціальні течії.

Спробуємо визначити взаємозв'язок лінії течії та траєкторії. Для цього припустимо, що у деякій момент часу  $t_0$  швидкість у точці  $M_0$  дорівнює  $\vec{u}_0$ . Відкладемо на векторі  $\vec{u}_0$  невеличкий відрізок  $\Delta l_1$  (рисунок 3.1,б) і в точці  $M_1$  намалюємо відповідний їй вектор швидкості  $\vec{u}_1$ . Потім на цьому векторі відкладемо відрізок  $\Delta l_2$  і аналогічно побудуємо вектор  $\vec{u}_2$ . Якщо таким чином діяти і надалі, то отримаємо «криву», яка задовольняє визначення лінії течії. Зауважимо, що усі побудови здійснюються для одного фіксованого моменту часу  $t_0$ . Тому не має значення, рух рідини усталений чи ні. Зрозуміло також, що отримана «крива» буде тим більше відповідати лінії течії, чим меншими будуть відрізки  $\Delta l$ .

Спробуємо тепер аналогічним чином побудувати траєкторію тієї самої рідкої частинки (рисунок 3.1,в). Нехай за невеличкий проміжок часу  $\Delta t_1$  вона пройде шлях від точки  $M_0(t_0)$  до  $M_1(t_1)$ . У лінійному наближенні цей шлях можна вважати збіжним з напрямом  $\vec{u}_0$ . Якщо рух усталений, то швидкість у точці  $M_1$  буде такою, як і в момент часу  $t_0$ . У цьому випадку частинка пересуватиметься у напрямі вектора  $\vec{u}_1$  до точки  $M_2$  тощо, тобто траєкторія збігатиметься з лінією течії. Якщо рух неусталений, то за час  $\Delta t_1$  вектор  $\vec{u}_1$  зміниться до моменту переміщення частинки у точку  $M_1$ ; її швидкість буде  $\vec{u}'_1$ . Отже, із точки  $M_1$  частинка буде спрямована вздовж вектора  $\vec{u}'_1$  і не потрапить у точку  $M_2$ . Тому траєкторія і лінія течії не збігатимуться.

Таким чином, лінія течії та траєкторія збігаються тільки під час усталеного руху. Тому траєкторію рідкої частинки при усталеному русі можна розраховувати за рівнянням (3.11), а при неусталеному, зважаючи, що у цьому випадку час  $t$  стає такою самою незалежною змінною, як і координати, за співвідношенням

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z} = dt. \quad (3.12)$$

Виберемо у рідині елементарний замкнутий контур  $dl$  площею  $dA$  і проведемо через кожну його точку лінію течії (рисунок 3.2). Отримана *трубчаста*

*поверхня називається елементарною трубкою течії. Рідина, яка протікає у*

*середині елементарної трубки течії, є елементарною струминкою. Оскільки вона має невеликі розміри, то нерівномірністю розподілу швидкостей в ній можна знехтувати.*

Отже, вважають, що *в межах елементарної струминки швидкості розподілені рівномірно* (перша властивість елементарної струминки). Оскільки у кожній точці трубки течії у даний момент часу вектор швидкості рідкої

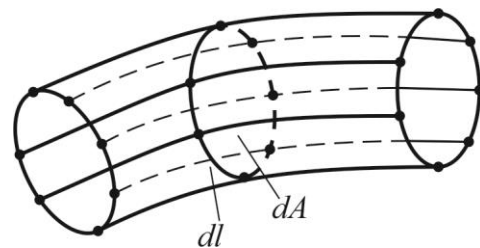


Рисунок 3.2 – Елементарна трубка течії

частинки збігається з дотичною, то зрозуміло, що жодна частинка не може проникнути в елементарну струминку ззовні та жодна частинка не може вийти через її бокову поверхню (друга властивість).

Уявлення, згідно з яким потік рідини кінцевих розмірів розглядають як сукупність елементарних струминок, називається струминною моделлю потоку.

### 3.3 РІВНЯННЯ НЕРОЗРИВНОСТІ

Рівняння нерозривності (суцільності) відображає один з фундаментальних законів природи – закон збереження маси стосовно рідкого середовища. Розглянемо рідину об'ємом  $V$ , який обмежує поверхня  $A$ . Виділимо на ній елементарну поверхню  $dA$  із зовнішньою нормаллю  $\vec{n}$  (рисунок 3.3). Добуток  $\rho u_n dA$  є масою рідини, яка втікає або витікає з об'єму (залежно від напрямку швидкості  $\vec{u}$ ) за одиницю часу. Оскільки  $\vec{n}$  – нормаль зовнішня, то  $u_n > 0$  відповідає витіканню рідини, а  $u_n < 0$  – втіканню. Тоді інтеграл  $\iint_A \rho u_n dA$  – різниця між масою рідки-

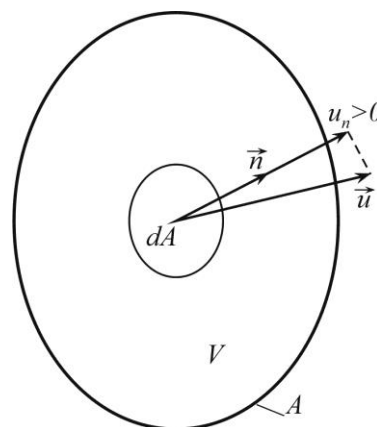


Рисунок 3.3 – До виведення рівняння

ни, що витікла та надійшла в об'єм. Якщо об'єм, що розглядається, незмінний, то зміна маси у ньому може відбуватися лише за рахунок зміни густини зі швидкістю  $\partial\rho/\partial t$ . Тоді зміна маси у об'ємі  $V$  дорівнює інтегралу  $\iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t} dV$ .

Очевидно, що зміна маси всередині рідкого тіла повинна дорівнювати масі, яка в нього надійшла,

$$\iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t} dV = - \iint_A \rho u_n dA. \quad (3.13)$$

Таким чином, додатному прирощенню густини відповідає  $u_n < 0$ , тобто втікання маси та навпаки.

Згідно з формулою Гауса<sup>19</sup>-Остроградського<sup>20</sup>

<sup>19</sup> Гаусс Йоганн Карл Фридріх (1777–1855) – видатний німецький математик, фізик, астроном, член Шведської та Петербурзької академій наук та Лондонської королівської спілки. Праці Гаусса мали великий вплив на розвиток алгебри, теорії чисел, диференціальної геометрії, класичної теорії електрики і магнетизму, геодезії, теоретичної астрономії.

<sup>20</sup> Остроградський Михайло Васильович (1801–1862) – видатний український математик (виходець з роду козацьких старшин). Працював у Франції та Росії. Автор численних праць з математичного аналізу, математичної фізики, теоретичної механіки, теорії чисел, алгебри. Автор формули перетворення об'ємного інтегралу в інтеграл по поверхні.

$$\iint_A \rho u_n dA = \iiint_V \left( \frac{\partial \rho u_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho u_z}{\partial z} \right) dV, \quad (3.14)$$

а враховуючи рівняння (1.3),

$$\iint_A \rho u_n dA = \iiint_V \operatorname{div}(\rho \vec{u}) dV. \quad (3.15)$$

Тоді формула (3.13) набирає вигляду

$$\iiint_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) \right) dV = 0, \quad (3.16)$$

або

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0. \quad (3.17)$$

Отриманий результат є *рівнянням нерозривності в диференціальній формі*. Оскільки при його виводі ніяких обмежень не робилось, то воно розповсюджується як на краплинні рідини, так і на гази під час як усталеного, так і неусталеного руху.

Якщо рух усталений, то  $\partial \rho / \partial t = 0$  і з формули (3.17) дістаємо

$$\operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0, \quad (3.18)$$

а якщо, крім того, рідина нестислива ( $\rho = \text{const}$ ), то

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (3.19)$$

Оскільки кожна складова формули (3.19) характеризує швидкість відносного подовження (укорочення) рідкої частинки, то ясно, що, подовжуючись, наприклад, у напрямі осей  $ox$  і  $oy$ , нестислива рідка частинка повинна укорочуватись у напрямі осі  $oz$ , тобто не може бути, щоб усі три складові були одного знака.

Розглянемо елементарну струминку стисливої рідини (рисунок 3.4). Її сумарна поверхня  $dA = dA_1 + dA_2 + dA_6$  (де  $dA_6$  – площа бічної поверхні). Якщо рух вважати усталеним, то згідно з формулою (3.13)

$$\rho u_n dA = \rho_1 u_{n1} dA_1 + \rho_2 u_{n2} dA_2 + \rho_3 u_{n6} dA_6 = 0. \quad (3.20)$$

Відповідно до другої властивості елементарної струминки  $\rho_3 u_{n6} dA_6 = 0$  і

$$\rho_1 u_{n1} dA_1 = - \rho_2 u_{n2} dA_2. \quad (3.21)$$

Беручи до уваги, що  $\vec{n}_1$  і  $\vec{n}_2$  – нормалі зовнішні та  $u_n = - u_{-n}$ , де  $u_{-n}$  –

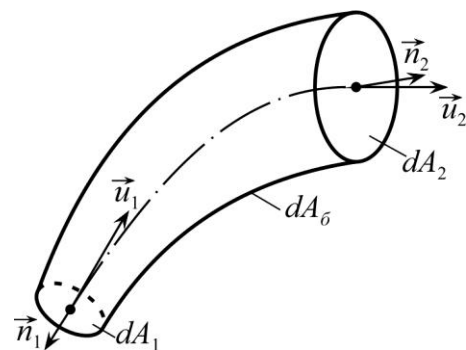


Рисунок 3.4 – Елементарна струминка



проекція швидкості на внутрішню нормаль, запишемо

$$\rho_1 u_{n1} dA_1 = \rho_2 u_{n2} dA_2. \quad (3.22)$$

Якщо елементарні площі  $dA_1$  і  $dA_2$  нормальні до напрямку течії, то  $u_{n1} = u_1$  і  $u_{n2} = u_2$ . Тобто

$$\rho_1 u_1 dA_1 = \rho_2 u_2 dA_2. \quad (3.23)$$

Отриманий результат є рівнянням нерозривності для елементарної струминки. Він вказує на рівність секундних мас, що проходять крізь довільно обрані перерізи елементарної струминки. Для нестисливої рідини  $\rho_1 = \rho_2$  і

$$u_1 dA_1 = u_2 dA_2. \quad (3.24)$$

Дамо декілька визначень. *Масовою витратою називають масу рідини, яка протікає через деякий переріз за одиницю часу:  $Q_m = \rho u A$  (вимірюється у кг/с). Об'ємною витратою називають об'єм рідини, який протікає через деякий переріз за одиницю часу:  $Q = u A$  (вимірюється у м<sup>3</sup>/с). Таким чином, рівняння (3.23) і (3.24) можуть бути записані у такому вигляді:*

$$dQ_{m1} = dQ_{m2} \quad (3.25)$$

і

$$dQ_1 = dQ_2. \quad (3.26)$$

Отже, *масова витрата вздовж елементарної струминки є величиною незмінною. Цей висновок добре узгоджується з другою властивістю елементарної струминки (дійсно, як маса вздовж струминки може змінюватися, якщо нормальна складова швидкості на стінці дорівнює нулю, тобто її стінки непроникні?). Якщо рідина нестислива, то замість незмінності масової витрати достатньо казати про незмінність її об'ємної витрати.*

У технічних розрахунках важливе значення має рівняння нерозривності для потоку кінцевих розмірів. Згідно зі *струминною моделлю* рівняння (3.23) і (3.24) для потоку мають вигляд

$$\iint_{A_1} \rho_1 u_1 dA_1 = \iint_{A_2} \rho_2 u_2 dA_2. \quad (3.27)$$

і

$$\iint_{A_1} u_1 dA_1 = \iint_{A_2} u_2 dA_2. \quad (3.28)$$

### 3.4 АНАЛІЗ РУХУ РІДКОЇ ЧАСТИНКИ. ТЕОРЕМА КОШІ-ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Відомо, що рух твердого тіла у загальному випадку може бути розкладений на поступальну і обертальну складові. Характерною особливістю рідини є її легка деформованість. Тому під час течії рідке тіло може

деформуватися, що, природньо, значно ускладнює математичний опис такого руху.

Виділимо в рідині, що рухається, рідку частинку у формі паралелепіпеда зі сторонами  $dx, dy, dz$  (рисунок 3.5). Якщо у точці  $A$  швидкість дорівнює  $u$ , то у точці  $C_1$  вона буде складати  $u + du$ . Тоді для проєкцій швидкості у точці  $C_1$  можна записати

$$\begin{aligned} u_{x1} &= u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz; \\ u_{y1} &= u_y + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy + \frac{\partial u_y}{\partial z} dz; \\ u_{z1} &= u_z + \frac{\partial u_z}{\partial x} dx + \frac{\partial u_z}{\partial y} dy + \frac{\partial u_z}{\partial z} dz. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Перетворимо перше рівняння (3.29) з урахуванням того, що

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial y} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right). \end{aligned} \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned} u_{x1} &= u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) dy + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) dz - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) dy + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) dz. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Якщо ліва грань паралелепіпеда в напрямку осі  $ox$  перемістилась за одиницю часу на  $u_x$ , то права – на величину  $u_x + (\partial u_x / \partial x) dx$  (рисунок 3.6). Тому  $(\partial u_x / \partial x) dx$  являє собою швидкість лінійної деформації рідкої частинки. Коли процес йде одночасно вздовж усіх осей, то це повинно приводити до об’ємного розширення або стиснення частинки і початковий об’єм  $dV = dx dy dz$  змінюється на величину  $\delta V = \delta V_x + \delta V_y + \delta V_z$  за рахунок розтягнення або стиснення граней. При цьому  $\delta V_x = (DD' - AA') dy dz = (\partial u_x / \partial x) dx dy dz dt = (\partial u_x / \partial x) dV dt$ . Аналогічно  $\delta V_y = (\partial u_y / \partial y) dV dt$  і  $\delta V_z = (\partial u_z / \partial z) dV dt$ .

Таким чином,

$$\delta V = \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) dV dt = \text{div } \vec{u} dV dt. \tag{3.32}$$

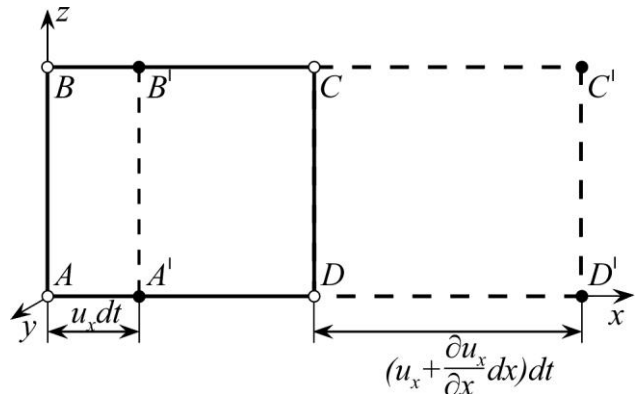
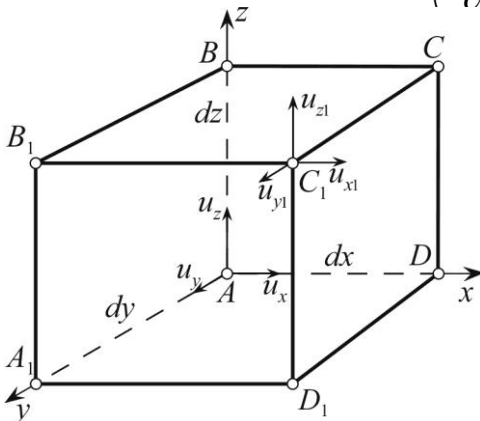


Рисунок 3.5 –  
Рідка частинка

Для нестисливої рідини  $\text{div} \vec{v} = 0$ .  
Тому деформація рідкої нестисливої частинки відбувається без зміни її об'єму ( $\delta V = 0$ ). У цьому полягає гідромеханічний зміст рівності нулю дивергенції.

Оскільки у точках  $A$  і  $B$  швидкості різні (рисунок 3.7), то переміщення точки  $B$  вздовж осі  $ox$  буде відрізнятися від переміщення точки  $A$  на величину  $(\partial u_x / \partial z) dz dt$ . Тому грань  $AB$  повернеться на кут  $d\alpha$ , який через його малість

$$d\alpha \approx \text{tg } d\alpha = \frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{dz}{dz} dt = \frac{\partial u_x}{\partial z} dt. \quad (3.33)$$

За аналогією кут повороту грані  $AD$

$$d\beta \approx \frac{\partial u_z}{\partial x} dt. \quad (3.34)$$

Таким чином, кутові швидкості граней  $AB$  і  $AD$  становитимуть  $d\alpha/dt = \partial u_x / \partial z$  і  $d\beta/dt = \partial u_z / \partial x$ , а сумарна швидкість кутової деформації частинки в площині  $xz$  дорівнює  $(\partial u_x / \partial z + \partial u_z / \partial x)$ . Оскільки деформація відбувається внаслідок повороту відразу двох граней та їх швидкості у загальному випадку неоднакові, то в гідромеханіці як міру швидкості кутової деформації приймають середнє арифметичне, тобто вважають, що на кожну грань припадає половина її величини

$$\gamma_y = \frac{d\theta_y}{dt} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right). \quad (3.35)$$

Аналогічно

$$\gamma_x = \frac{d\theta_x}{dt} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right). \quad (3.36)$$

$$\gamma_z = \frac{d\theta_z}{dt} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right). \quad (3.37)$$

Отже, друга і третя складові рівнянь (3.31) характеризують кутову деформацію рідкої частинки.

Рисунок 3.6 –  
Лінійна деформація рідкої частинки

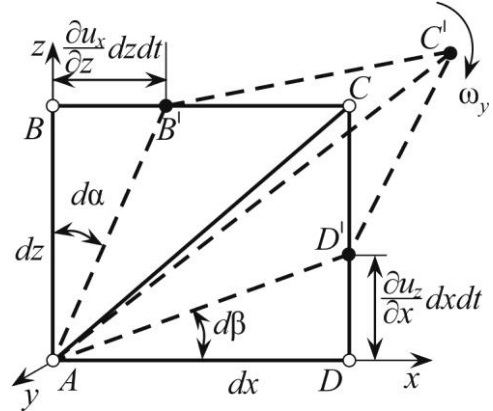


Рисунок 3.7 – Кутова  
деформація рідкої частинки

У загальному випадку діагоналі  $AC$  і  $AC'$  не збігаються, тобто частинка обертається навколо осі  $ou$  з кутовою швидкістю  $\omega_y$ .

Оскільки  $(\partial u_x / \partial z) dz dt = \omega_y dz dt$  і  $(\partial u_z / \partial x) dx dt = -\omega_y dx dt$ , то для  $\omega_y$ , а за аналогією і для двох інших проєкцій *кутової швидкості* рідкої частинки можна записати

$$\begin{aligned}\omega_x &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right); \\ \omega_y &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right); \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right).\end{aligned}\tag{3.38}$$

Обертання вважається позитивним, якщо воно відбувається у напрямі від осі  $oz$  до  $ox$ , від  $ou$  до  $oz$  і від  $ox$  до  $ou$ .

Таким чином, рівняння (3.29) з урахуванням отриманих вище результатів можна записати у такому вигляді:

$$\begin{aligned}u_{x1} &= u_x + \left[ \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \gamma_z dy + \gamma_y dz \right] + (\omega_y dz - \omega_z dy); \\ u_{y1} &= u_y + \left[ \frac{\partial u_y}{\partial y} dy + \gamma_z dx + \gamma_x dz \right] + (\omega_z dx - \omega_x dz); \\ u_{z1} &= u_z + \left[ \frac{\partial u_z}{\partial z} dz + \gamma_x dy + \gamma_y dx \right] + (\omega_x dy - \omega_y dx).\end{aligned}\tag{3.39}$$

У цій системі складові  $u_x$ ,  $u_y$  і  $u_z$  є компонентами поступальної швидкості; складові у квадратних дужках – компонентами деформаційної швидкості, а складові у круглих дужках – компоненти кутової (вихрової) швидкості.

Отже, у загальному випадку рух рідкого тіла можна розкласти на поступальний разом з деяким полюсом, обертальний навколо миттєвої осі, що проходить через цей полюс, і деформаційний, який складається з лінійних та кутових деформацій. Це положення становить *теорему Коші-Гельмгольца*<sup>21</sup> про рух рідких тіл (інколи її називають першою теоремою Гельмгольца).

Слід зауважити, що ця теорема вказує лише на один з можливих способів розкладання складного руху рідкого тіла на прості складові. Проте перевагами

---

<sup>21</sup> Гельмгольц Герман Людвіг Фердинанд (1821–1894) – німецький фізик, фізіолог, психолог. У праці «Про збереження сили» (1847) дав найточніше для свого часу формулювання закону збереження енергії. Встановив закономірності поведінки вихорів в ідеальній рідині, розробив теорію акустичного резонансу. В праці «Вчення про слухові відчуття як фізіологічна основа для теорії музики» (1863) вивчив натуральний звукоряд і розробив резонансну теорію слуха. Нагороджений найвищою нагородою Франції – зіркою ордена Почесного легіона.

цього способу є те, що він найбільш фізично обґрунтований, оскільки визначає основні характерні особливості руху рідини та чітко встановлює різницю у її русі від руху твердого тіла. Ця різниця полягає в існуванні деформаційної складової, що є наслідком відмінності у фізичних властивостях рідкого і твердого тіл, а саме у тому, що через слабкість міжмолекулярних зв'язків під час руху рідини, як правило, не здатна зберігати свою форму незмінною.

У векторній формі для кутової швидкості можна записати

$$\vec{\omega} = \vec{i}\omega_x + \vec{j}\omega_y + \vec{k}\omega_z, \quad (3.40)$$

а з урахуванням формули (3.38)

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \left[ \vec{i} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right]. \quad (3.41)$$

Беручи до уваги формулу для вихору (1.4),

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{u}, \quad (3.42)$$

або

$$2\vec{\omega} = \text{rot} \vec{u}. \quad (3.43)$$

Отже, якщо розподілення швидкості  $\vec{u}$  є полем швидкостей рідини, то  $\text{rot} \vec{u}$  є полем подвоєних кутових швидкостей частинок рідини. У цьому полягає гідромеханічний зміст вихору (ротора).

*Рух рідини, при якому відсутня обертальна складова, називається потенціальним, або безвихровим. Якщо  $\vec{\omega} \neq 0$ , рух називається вихровим. У переважній більшості випадків течія в природі та техніці є вихровою.*

### 3.5 ВИХРОВИЙ РУХ РІДИНИ

#### 3.5.1 Вихрові лінія і трубка. Друга теорема Гельмгольца

В основу кінематики вихрового руху покладене уявлення про вихрову лінію і вихрову трубку. Ці поняття аналогічні лінії течії та трубці течії. *Вихровою називається лінія, у кожній точці якої у даний момент часу вектор вихору швидкості збігається з дотичною* (рисунок 3.8). Іншими словами, *вихрова лінія – це миттєва вісь обертання частинок рідини, які в даний момент часу розташовані на ній.*

Диференціальне рівняння вихрової лінії можна отримати з умови колінеарності вектора кутової швидкості  $\vec{\omega}$  ( $\omega_x$ ;  $\omega_y$ ;  $\omega_z$ ) і елементарного напрямленого відрізка  $d\vec{S}$  ( $dx$ ;  $dy$ ;  $dz$ ) вихрової лінії

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}. \quad (3.44)$$

Знаючи функції  $\omega_x(x; y; z)$ ,  $\omega_y(x; y; z)$ ,  $\omega_z(x; y; z)$ , з формули (3.44) можна знайти конфігурацію вихрових ліній, як це буде зроблено у підрозділі 6.5.

Якщо через усі точки замкнутого малого контура  $dl$  провести вихрові лінії, то отриману елементарну трубчасту поверхню називають елементарною вихровою трубкою, а сукупність обмежених нею рідких частинок – вихровим шнуром (рисунок 3.9). У випадку, коли площа  $dA$  поперечного перерізу вихрового шнура досить мала, то можна вважати, що в його межах вектор  $\vec{\omega}$  має незмінне значення.

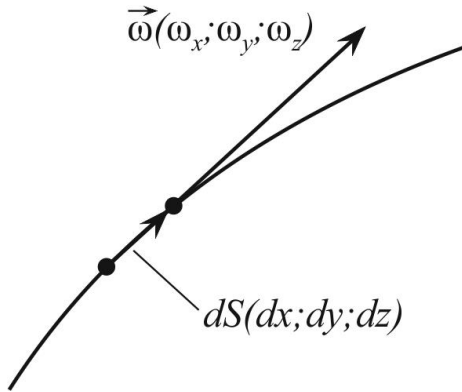


Рисунок 3.8 – Вихрова лінія

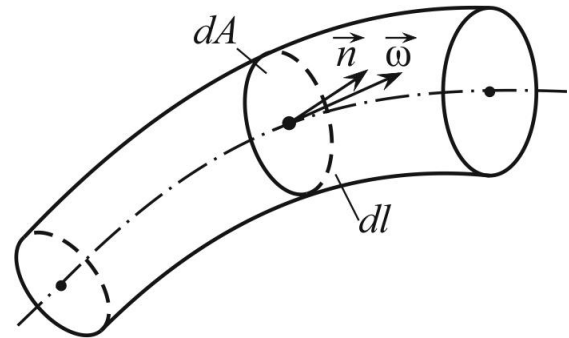


Рисунок 3.9 – Вихровий шнур

Інтеграл вигляду  $\iint_A \text{rot} \vec{u} \vec{n} dA$  називають потоком вектора вихору. Він характеризує вихрову трубку і його ще називають інтенсивністю вихору

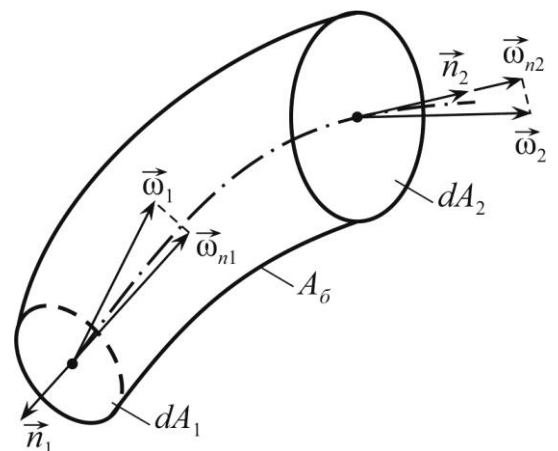
$$i = \iint_A \text{rot} \vec{u} \vec{n} dA. \quad (3.45)$$

Враховуючи формулу (3.43),

$$i = 2 \iint_A \vec{\omega} \vec{n} dA = 2 \iint_A \omega_n dA. \quad (3.46)$$

Виділимо об'єм  $V$ , обмежений бічною поверхнею вихрової трубки  $dA_6$  і двома поперечними перерізами  $dA_1$  і  $dA_2$  (рисунок 3.10). Потік вихору через поверхню  $dA = dA_6 + dA_1 + dA_2$  можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} 2 \iint_A \omega_n dA &= 2 \iint_{A_6} \omega_{n_6} dA_6 + \\ &+ 2 \iint_{A_1} \omega_{n_1} dA_1 + 2 \iint_{A_2} \omega_{n_2} dA_2. \end{aligned} \quad (3.47)$$



Оскільки вектор кутової швидкості спрямований по дотичній у кожній точці бічної поверхні, то

Рисунок 3.10 – До виводу другої теореми Гельмгольца

$$\iint_A \omega_{n\vec{o}} dA_{\vec{o}} = 0. \quad (3.48)$$

Використовуючи теорему Гауса – Остроградського, можемо записати

$$2 \iint_A \omega_n dA = 2 \iiint_V \operatorname{div} \vec{\omega} dV. \quad (3.49)$$

Розкриємо другий інтеграл

$$\begin{aligned} 2 \iiint_V \operatorname{div} \vec{\omega} dV &= 2 \iiint_V \left( \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} \right) dV = \\ &= \iiint_V \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right] dV = \\ &= \iiint_V \left[ \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 u_x}{\partial z \partial y} \right] dV. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Оскільки вираз у квадратних дужках дорівнює нулю, то і

$$\iint_A \omega_n dA = 0. \quad (3.51)$$

Таким чином,

$$\iint_{A_1} \omega_{n1} dA_1 + \iint_{A_2} \omega_{n2} dA_2 = 0, \quad (3.52)$$

або

$$\iint_{A_1} \omega_{-n1} dA_1 = \iint_{A_2} \omega_{n2} dA_2. \quad (3.53)$$

Якщо вихрова трубка елементарна, то  $\omega_n = \text{const}$  і

$$\omega_{-n1} dA_1 = \omega_{n2} dA_2 = \text{const}. \quad (3.54)$$

Отже, доведена друга теорема Гельмгольца: потік вихорів через поперечний переріз вихрової трубки у даний момент часу є незмінним по її довжині (інтенсивність вихрового шнура у даний момент часу по всій його довжині є незмінною).

Рівняння (3.54) є своєрідним «рівнянням нерозривності» для вихрового шнура.

З теореми Гельмгольца випливають важливі властивості вихрової трубки:

– оскільки  $\omega A$  – величина незмінна, то зменшення площі веде до збільшення  $\omega$ ;

– при  $A = 0$   $\omega = \infty$ , що фізично неможливо, тому вихор не може зароджуватися або закінчуватися всередині рідини.



Вихрові трубки повинні або бути замкнутими, створюючи вихрове кільце (рисунок 3.11,а), або замикатися на тверду поверхню чи вільну поверхню рідини (рисунок 3.11,б).

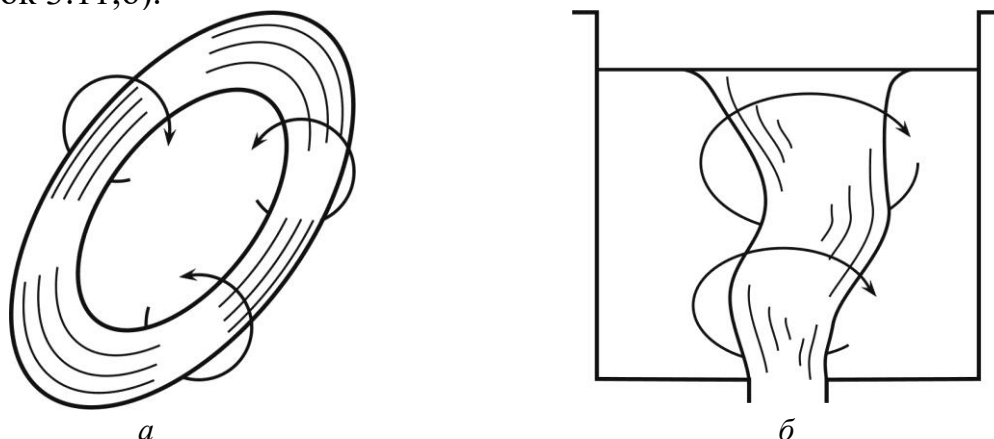


Рисунок 3.11 – Приклади вихрових трубок

Структура вихрової течії реальних рідин різноманітна. У деяких випадках крупні вихори можна спостерігати візуально, наприклад атмосферні смерчі. Але вихровий рух далеко не завжди супроводжується виникненням крупних вихрових шнурів, які можна бачити візуально. Наприклад, при прямолінійному переміщенні в'язкої рідини між двома нерухомими плоскими паралельними стінками (рисунок 3.12). Для такої течії можна вважати, що  $u_y = u_z = 0$ , а оскільки діє ефект прилипання, то  $u_x = f(y)$ . Таким чином, користуючись формулою (3.38), легко показати, що  $\omega_x = \omega_y = 0$ ,  $\omega_z = -1/2 \partial u_x / \partial y$ . Отже, вектор  $\vec{\omega}$ , абсолютна величина котрого

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}, \quad (3.55)$$

у всіх точках паралельній осі  $oz$ , а вихрові лінії є прямими нормальними лініями течії.

Тому такий рух рідини є вихровим, хоч візуально вихорів не спостерігаємо. Течія такого типу може бути потен-ційною лише за умов рівномірного розподілення швидкостей ( $u_x = \text{const}$ , тобто не залежить від координати  $y$ ). Але в реальних умовах завдяки дії сил в'язкості швидкості розподіляються нерівномірно, тому течія в'язких рідин біля твердих поверхонь завжди вихрова.

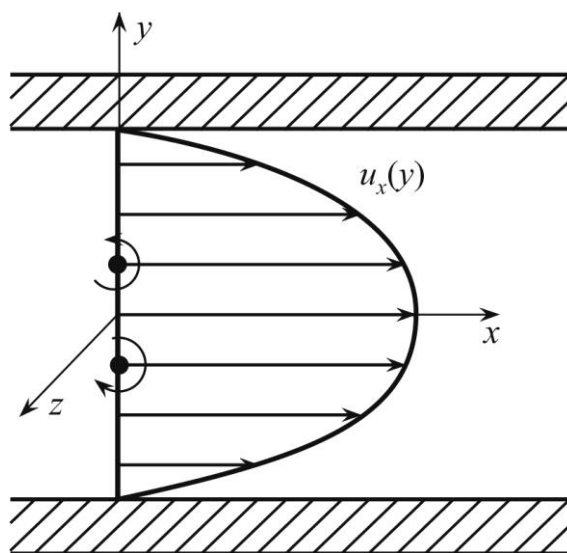


Рисунок 3.12 – Вихрова течія між плоскими стінками

### 3.5.2 Циркуляція швидкості. Теорема Стокса

Інтенсивність вихору є досить важливою характеристикою вихрової течії, але і дуже незручною, оскільки не може бути визначена експериментально. Спроби

розповсюдити її на вихори кінцевих розмірів призвели б до необхідності введення поняття про середню кутову швидкість, що пов'язано з труднощами суто математичного характеру. Крім того, у деяких розрахунках зручніше оперувати такою мірою вихрового руху, яка виражалась би через поступальну швидкість і величину якої було б можливо визначити експериментально. Таким вимогам відповідає поняття *циркуляції швидкості*  $\Gamma$  (грецька літера гамма).

Уявлення про фізичну сутність циркуляції отримаємо, використавши методику введення цього поняття М. Я. Фабриканта. Відомо, що на криловий профіль, що знаходиться в потоці, діє підйомна сила  $F$ . Фізично її виникнення можна пояснити тільки тим, що тиск під профілем  $P_1$  більший, а тиск над профілем  $P_2$  менший за тиск на деякій відстані від нього  $P_\infty$  (рисунок 3.13). Тому навколо профіля виникає так званий потік збудження, який є своєрідною реакцією потоку на внесення в нього стороннього тіла. Напрямок цього циркуляційного потоку збудження показано на рисунку 3.13. Кількісно його характеризує циркуляція швидкості по замкнутому контуру  $L$  (рисунок 3.14).

Формально циркуляцією  $\Gamma$  вектора швидкості  $\vec{u}$  по деякому контуру  $L$  є криволінійний інтеграл скалярного добутку цієї швидкості на елементарний напрямлений відрізок контура  $d\vec{l}$

$$\Gamma = \oint_L \vec{u} d\vec{l}, \quad (3.56)$$

де  $d\vec{l}$  ( $dx; dy; dz$ ) – напрямлений елемент дуги контура.

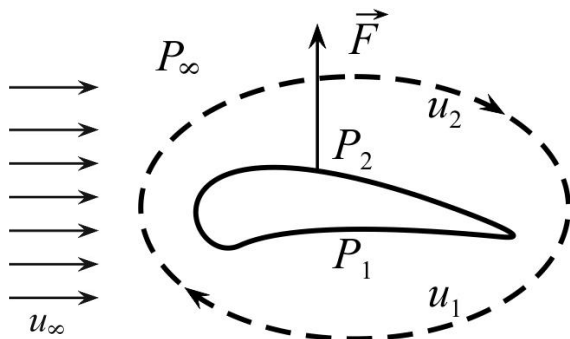


Рисунок 3.13 – Циркуляційне обтікання крилового профілю

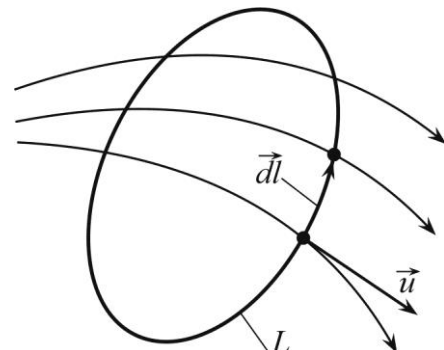


Рисунок 3.14 – До введення поняття циркуляції

Циркуляцію можна представити в іншому вигляді

$$\Gamma = \oint_L \vec{u} \cos(l; u) dl, \quad (3.57)$$

або

$$\Gamma = \oint_L (u_x dx + u_y dy + u_z dz). \quad (3.58)$$

З визначення циркуляції як криволінійного інтеграла випливає її дві властивості:

– циркуляція швидкості по усьому контуру дорівнює сумі циркуляцій по її окремих ділянках;

– при зміні напрямку обходу контуру знак циркуляції змінюється на обернений (як правило, циркуляцію вважають позитивною, якщо контур обходять так, щоб обмежена ним область залишалася ліворуч).

Розглянемо плоский контур  $L$ , який знаходиться в рідині, що рухається (рисунок 3.15). Виділимо в ньому довільний елементарний прямокутний контур  $OABC$  зі сторонами  $dx$  і  $dy$  (рисунок 3.16). Якщо в точці  $O$  проекції швидкості дорівнюють  $u_x$  і  $u_y$ , то в точці  $A$

$$u_{xA} = u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy, \tag{3.59}$$

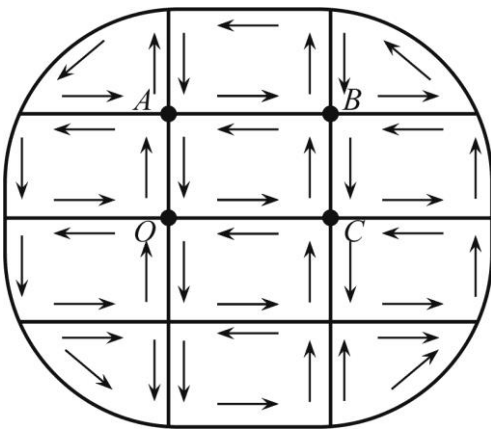


Рисунок 3.15 – Плоский контур

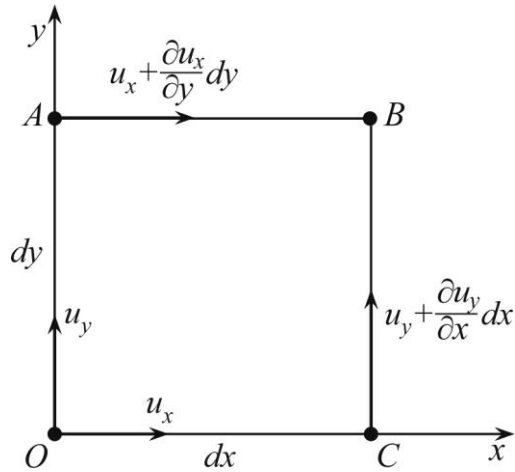


Рисунок 3.16 – Елементарний прямокутний контур

а в точці  $C$

$$u_{yC} = u_y + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx. \tag{3.60}$$

Тоді циркуляція швидкості по елементарному контуру

$$\begin{aligned} d\Gamma &= -u_y dy - \left( u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy \right) dx + \left( u_y + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx \right) dy + u_x dx = \\ &= -\frac{\partial u_x}{\partial y} dy dx + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx dy = 2\omega_z dA, \end{aligned} \tag{3.61}$$

або для довільно орієнтованого у просторі контуру

$$d\Gamma = 2\omega_n dA. \tag{3.62}$$

Якщо контур  $L$  розбити на елементарні контури, як це показано на рисунку 3.15, і скласти

циркуляції, зберігаючи незмінним напрям обходу, то

$$\Sigma d\Gamma = 2\Sigma\omega_n dA. \quad (3.63)$$

Однак, як видно з рисунка, циркуляції по всім внутрішнім лініям взаємокомпенсуються і загальна циркуляція дорівнює сумі циркуляцій по зовнішній лінії контуру

$$\Gamma = 2\Sigma\omega_n dA \quad (3.64)$$

або, збільшуючи число контурів  $k$  до нескінченності,

$$\Gamma = 2\iint_A \omega_n dA = \iint_A \text{rot}\vec{u}\vec{n}dA = i. \quad (3.65)$$

Таким чином, циркуляція швидкості по довільному замкнутому контуру дорівнює потоку вектора вихору, що пронизує цей контур. У цьому полягає теорема Стокса<sup>22</sup>. Цю теорему легко довести, скориставшись відомою з векторного аналізу формулою Стокса

$$\iint_A \left[ \left( \frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z} \right) \cos(n; x) + \left( \frac{\partial c}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial x} \right) \cos(n; y) + \left( \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial c}{\partial y} \right) \cos(n; z) \right] dA = \oint_L (cdx + bdy + adz), \quad (3.66)$$

якщо замість довільних неперервних деференційованих функцій  $a$ ,  $b$ ,  $c$  підставити проекції швидкості.

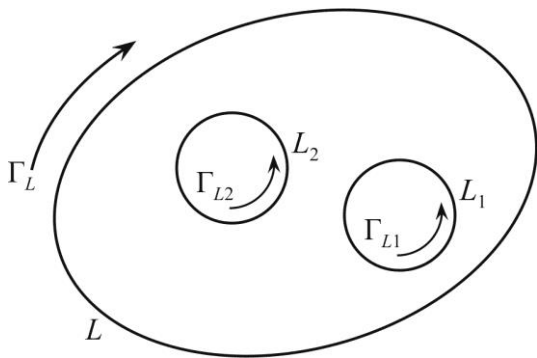


Рисунок 3.17 – Багатозв'язна область

У наведеному вище формулюванні теорема стосується *однотв'язної області*. Однотв'язною називають область, в котрій будь-який замкнутий контур може бути неперервним чином стягнутий у точку. Якщо в області можна виділити контури, котрі неможливо неперервним чином стягнути у точку, то така область є багатозв'язною.

При розгляді багатозв'язної області (рисунок 3.17) її можна розбити на

<sup>22</sup> Стокс Джордж Габріель (1819–1903) – видатний британський математик і фізик. Був секретарем, а пізніше президентом Лондонської королівської спілки. Має значні наукові здобутки у галузі гідродинаміки, теоретичної механіки, математичного аналізу і математичної фізики. У роботі «Про теорію внутрішнього тертя у рухомих рідинах та про рівновагу і рух пружних твердих тіл» (1849) вивів диференціальне рівняння течії в'язких рідин, зараз це рівняння має назву рівняння Нав'є-Стокса.

елементарні контури, як це зроблено раніше для однозв'язної області. Розмірковуючи аналогічно, легко дійти висновку, що *потік вектора вихору крізь багатозв'язну область дорівнює різниці між циркуляцією по зовнішньому контуру і сумою циркуляцій по внутрішнім контурам*

$$\Gamma = \Gamma_L - \sum_{k=1}^n \Gamma_{Lk} = 2 \iint_A \omega_n dA = \iint_A \text{rot} \vec{u} \vec{n} dA = i. \quad (3.67)$$

Поняття циркуляції відіграє виключно важливу роль при розрахунках обтікання в'язким потоком твердих тіл.

### 3.6 ПОТЕНЦІАЛЬНИЙ РУХ РІДИНИ

#### 3.6.1 Потенціал швидкості. Рівняння Лапласа

Згідно з визначенням для потенціального (безвихрового) руху  $\text{rot} \vec{u} = 0$ , або  $\vec{\omega} = 0$ . Цю умову можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = 0; \\ \omega_y &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = 0; \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = 0, \end{aligned} \quad (3.68)$$

що рівнозначно системі

$$\frac{\partial u_z}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial z}; \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial y}. \quad (3.69)$$

Рівність навхрест взятих похідних є умовою того, що тричлен  $u_x dx + u_y dy + u_z dz$  являє собою повний диференціал деякої функції трьох змінних, яку називають *потенціалом швидкості*,

$$d\varphi = u_x dx + u_y dy + u_z dz. \quad (3.70)$$

З іншого боку, повний диференціал виражається формулою

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz. \quad (3.71)$$

Тому

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (3.72)$$

$$\vec{u} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}, \quad (3.73)$$

або

$$\vec{u} = \text{grad}\varphi. \quad (3.74)$$

Таким чином, кожному руху рідини, який відбувається без обертання рідких частинок, тобто є потенціальним, відповідає свій потенціал швидкості. Справедливе і зворотне твердження: якщо існує потенціал швидкості, то рух потенціальний.

Розглянемо потенціальний потік і виділимо в ньому замкнутий контур  $L$ . Оскільки потік у всіх точках безвихровий, то циркуляція  $\Gamma = 0$ . Враховуючи формули (3.58) і (3.72), маємо

$$\Gamma = \oint_L (u_x dx + u_y dy + u_z dz) = \oint_L \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} dz \right) = \oint_L d\varphi = \varphi_{A'} - \varphi_A, \quad (3.75)$$

де  $\varphi_A$  і  $\varphi_{A'}$  – значення потенціалу швидкості у точці  $A$  до і після обходу контуру.

Оскільки  $\varphi_{A'} = \varphi_A$ , то після обходу контуру значення потенціалу швидкості не змінилось. Тому якщо потік всередині деякої замкнутої області потенціальний, то його потенціал швидкості є функцією однозначною.

Якщо навіть в одній точці замкнутого контуру потік вихровий, то згідно з теоремою Стокса циркуляція не буде дорівнювати нулю і тоді

$$\varphi_{A'} = \varphi_A + \Gamma. \quad (3.76)$$

У цьому випадку потенціал змінюється після кожного обходу контуру на величину циркуляції, а отже, є функцією багатозначною.

Доцільність введення поняття потенціалу швидкості полягає у тому, що згідно з формулою (3.72) при заданому  $\varphi$  можна визначити проекції швидкості у будь-якій точці рідини, яка потенціально рухається. У свою чергу, розрахунок поля швидкостей є важливою передумовою розв'язання багатьох прикладних задач гідромеханіки.

Слід зауважити, що у разі коли неусталений рух рідини не може бути приведений до усталеного введенням рухливої системи координат, то за винятком деяких випадків виразити зміну  $\varphi$  в просторі та часі виявляється виключно складно. Тому подальший розгляд потенціальних потоків стосуватиметься лише стаціонарного руху.

Для стаціонарного руху нестисливої рідини справедливе рівняння нерозривності у вигляді формули (3.19). З урахуванням рівнянь (3.72) воно набирає вигляду

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (3.77)$$

Отриманий результат називається *рівнянням Лапласа*<sup>23</sup>. Воно використовується для визначення потенціалу швидкості. Як і кожне диференціальне рівняння, рівняння Лапласа має нескінченну множину розв'язків. Тому для однозначного визначення  $\phi$  необхідно знати граничні умови течії, яка розглядається. Під *граничними умовами* розуміють задані значення, яких повинна набувати шукана функція в точках граничних поверхонь. Докладно граничні умови будуть розглянуті далі.

### 3.6.2 Функція течії для плоского потоку. Гідродинамічна сітка

У загальному випадку рух рідини є тривимірним, тобто параметри потоку (швидкість, тиск тощо) залежать одразу від трьох координат. Але у деяких випадках, наприклад обтікання потоком довгих крил або циліндрів (рисунок 3.18), залежністю параметрів від однієї координати можна знехтувати (за винятком областей течії біля кінців крила або циліндра).

Рух рідини, параметри якого залежать тільки від двох координат, називають *двовимірним, або плоским*. Такий рух має дві властивості:

– *конфігурація ліній течії у всіх площинах, які перпендикулярні до одної з координатних осей* (на рисунку 3.18 це вісь  $oz$ ), *однакова*;

– *усі лінії течії є плоскими кривими, що знаходяться у цих площинах*.

З наведеного вище випливає, що проекції швидкості на вісь  $oz$  у всіх точках плоского потоку дорівнюють нулю. Хоч у природі, строго кажучи, плоских течій не існує, розв'язки багатьох задач гідромеханіки можуть бути отримані шляхом розгляду саме такого руху рідини. Вивчення плоских течій суттєво по-

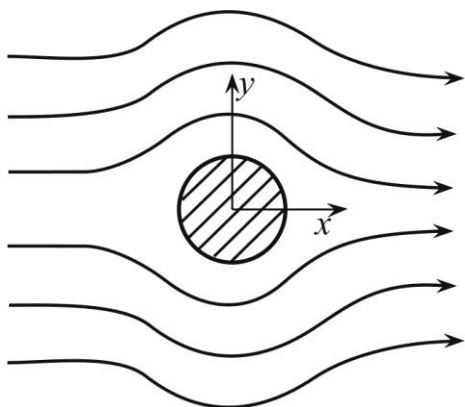


Рисунок 3.18 – Приклад плоскої течії

легшене тим, що рівняння, які їх описують, значно простіші та, крім того, достатньо отримати результати лише для одної площини, щоб скласти уявлення про весь потік.

Розглянувши формули (3.38), легко пересвідчитись, що оскільки  $\frac{\partial u_z}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial z} = \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0$ , то в плоскому потоці може бути тільки один компонент кутової швидкості  $\omega_z$ . Тому для плоского потоку умова існування потенціалу швидкості має вигляд

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (3.78)$$

<sup>23</sup> Лаплас П'єр Сімон (1749–1827) – французький математик і астроном, член Французької географічної спілки. У своїх працях розробив методи математичної фізики, які застосовуються і нині, систематизував математичний апарат теорії ймовірності, довів стійкість Сонячної системи, опублікував низку праць з теорії капілярності.



та

$$d\varphi = u_x dx + u_y dy. \quad (3.79)$$

Рівняння нерозривності плоского потоку нестисливої рідини має вигляд

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0, \quad (3.80)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{\partial u_y}{\partial y}. \quad (3.81)$$

Останнє рівняння є умовою того, що двочлен  $u_x dy - u_y dx$  є повним диференціалом деякої функції двох змінних  $\psi(x;y)$ , яку називають *функцією течії*

$$d\psi = u_x dy - u_y dx. \quad (3.82)$$

З іншого боку,

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy. \quad (3.83)$$

Тому

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (3.84)$$

Отже, якщо функція течії відома, то можна визначити компоненти швидкості у будь-якій точці потоку.

Підставляючи формулу (3.84) до виразу (3.78), маємо

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \quad (3.85)$$

тобто функція течії, як і потенціал швидкості, задовольняє рівняння Лапласа. Але якщо  $\psi$  існує тільки для потенціального потоку, то функція течії цією умовою не обмежена. Це пояснюється тим, що рівняння нерозривності справедливе як для потенціального, так і для вихрового рухів рідини.

Рівняння лінії течії (3.11) для плоского потоку має вигляд

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y}, \quad (3.86)$$

або

$$u_x dy - u_y dx = 0. \quad (3.87)$$

Порівнюючи формули (3.87) і (3.82), можемо пересвідчитися, що вздовж лінії течії  $d\psi = 0$ , тобто функція  $\psi$  зберігає вздовж будь-якої лінії течії незмінне значення, яке, однак, відмінне для різних ліній течії.

Для встановлення фізичного змісту  $\psi$  проведемо дві лінії течії, які досить близько розташовані одна від одної (рисунок 3.19). Визначимо об'ємну витрату рідини, що протікає між ними. Для цього розкладемо швидкість  $\vec{u}$  на складові  $u_x$  і  $u_y$ . Це дозволяє представити елементарну витрату  $dQ = dQ_x + dQ_y$ , при цьому  $dQ_x = u_x dy$ ,  $dQ_y = -u_y dx$ . Тому

$$dQ = u_x dy - u_y dx = d\psi. \quad (3.88)$$

$$Q = \int_A^B (u_x dy - u_y dx) = \int_A^B d\psi = \psi_B - \psi_A. \quad (3.89)$$

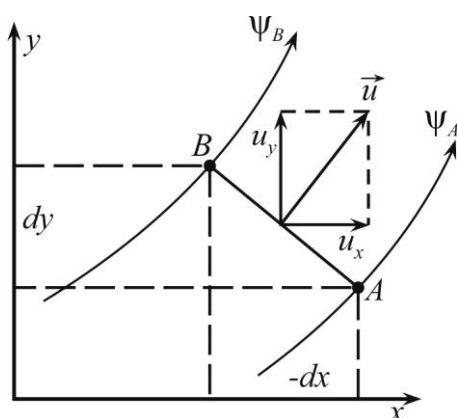


Рисунок 3.19 – Дві суміжні лінії течії

З формули (3.89) видно, що різниця функції течії двох суміжних ліній течії дорівнює об'ємній витраті між ними.

Для плоского потенціального потоку шляхом зіставлення виразів (3.72) і (3.84) можна встановити зв'язок між потенціалом швидкості та функцією течії

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (3.90)$$

Ці співвідношення називаються *співвідношеннями Коші – Рімана*<sup>24</sup>. Якщо їх між собою перемножити, то отриманий результат

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3.91)$$

свідчить про взаємну ортогональність *лінії течії* ( $\psi = \text{const}$ ) і *еквіпотенціальних ліній* ( $\phi = \text{const}$ ).

Таким чином, плоский потенціальний потік нестисливої рідини характеризується двома ортогональними сім'ями кривих, які створюють *гідродинамічну сітку* руху. На рисунку 3.20 наведений приклад гідродинамічної сітки, яка накреслена для випадку плоского витікання рідини під тиском вздовж горизонтальної площини.

Гідродинамічна сітка має такі властивості:

<sup>24</sup> Ріман Георг Фрідріх Бернхард (1826–1866) – видатний німецький математик і фізик. У доповіді «Про гіпотези, що становлять основу геометрії» він визначив загальне поняття  $n$  – вимір-ного різноманіття, чим, за словами Ейнштейна, передбачив загальну теорію відносності. Ріманом запропонований метод розв'язання нелінійного рівняння одновимірної течії стислої рідини. На підставі вивчення рівнянь руху встановив факт існування у стисливих рідинах ударних хвиль.

- сітка ортогональна;
- однойменні лінії не перетинаються ніде, крім точок з нульовою або нескінченною швидкістю (для ліній течії це доведено у підрозділі 3.2, а для еквіпотенціальних ліній це справедливо, оскільки вони ортогональні лініям течії);
- сітка в малому квадратична, тобто  $\Delta\varphi \approx \Delta\psi$  (де  $\Delta\varphi$  і  $\Delta\psi$  – приріст потенціалу швидкості та функції течії між двома суміжними лініями).

Наведені властивості дозволяють використовувати гідродинамічну сітку для визначення параметрів плоских потенціальних потоків.

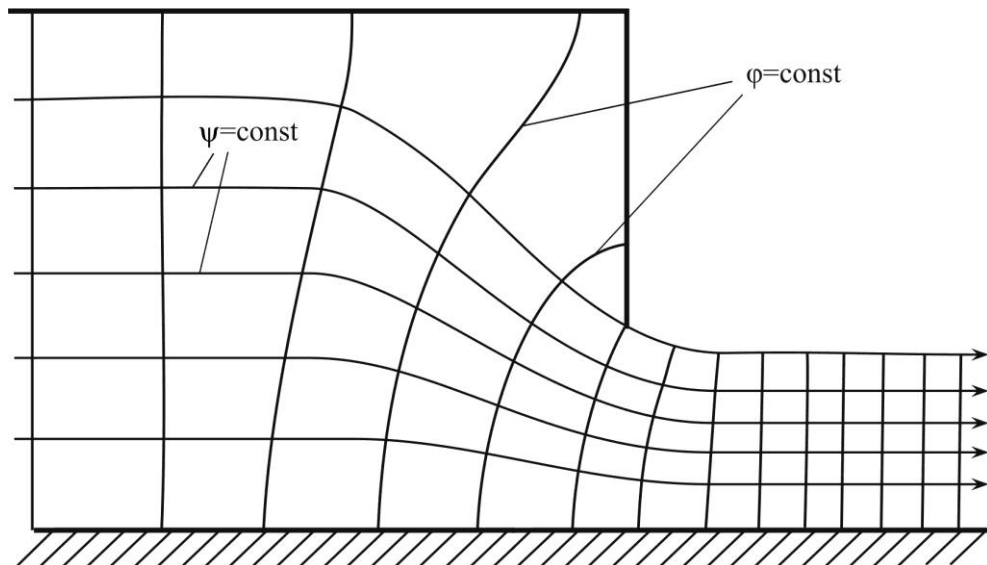


Рисунок 3.20 – Гідродинамічна сітка для плоского витікання під тиском вздовж горизонтальної площини

### 3.6.3 Функція комплексної змінної

Оскільки для функцій  $\varphi$  і  $\psi$  виконується умова Коші-Рімана, то вони на комплексній площині можуть бути представлені у вигляді залежності тільки однієї комплексної змінної (рисунок 3.21) (не плутати з координатою декартової системи координат)

$$z = x+iy = re^{i\theta}, \quad (3.92)$$

де  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  – модуль числа  $z$ ;

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} \text{ – аргумент числа } z.$$

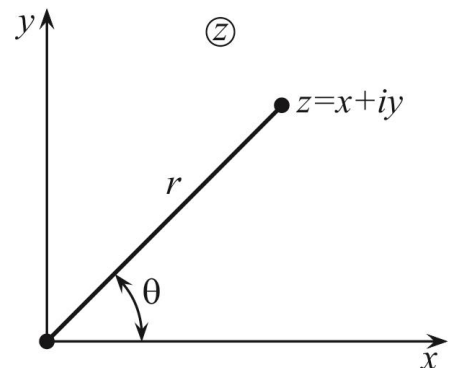


Рисунок 3.21 – Комплексна площина

Цю функцію називають *комплексним потенціалом* або інколи характеристичною функцією течії  $W(z)$ , головна властивість котрої полягає у тому, що її дійсна частина дорівнює потенціалу швидкості, а уявна – функції течії

$$W(z) = \varphi(x; y) + i\psi(x; y). \quad (3.93)$$

Оскільки  $W(z)$  є аналітичною функцією від числа  $z$ , то її похідна не залежить від напрямку диференціювання і цілком визначається положенням точки, яке задане координатою  $z$ .

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = -i\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad (3.94)$$

або

$$\frac{dW}{dz} = u_x - iu_y = \bar{u}. \quad (3.95)$$

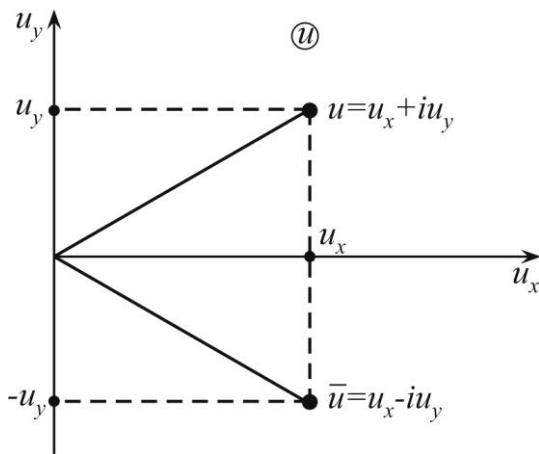


Рисунок 3.22 – Спряжена швидкість

Похідна комплексного потенціалу є так звану *спряжену швидкість*  $\bar{u}$ , дійсна частина якої дорівнює проекції  $u_x$ , а уявна – взятій зі зворотним знаком проекції  $u_y$ . Оскільки в теорії комплексної змінної величини  $z = x + iy$  і  $\bar{z} = x - iy$  називають спряженими, то в комплексній площині  $u_x, u_y$  число  $\bar{u}$  є спряженим з числом  $u = u_x + iu_y$ , яке зветься *комплексною швидкістю* (рисунок 3.22). Площини  $u_x, u_y$  називають *площиною годографа швидкості*.

Інтеграл по довільному замкнутому контуру  $L$ , враховуючи формулу (3.95),

$$\oint_L \frac{dW}{dz} dz = \oint_L \bar{u} dz = \oint_L (u_x - iu_y)(dx + idy) = \oint_L [(u_x dx + u_y dy) + i(u_x dy - u_y dx)]. \quad (3.96)$$

Але ж, як було показано раніше,  $\oint_L (u_x dy - u_y dx) = \oint_L d\psi = Q$ , а  $\oint_L (u_x dx + u_y dy) = \Gamma$ , тому очевидно, що дійсна частина інтеграла дорівнює циркуляції швидкості по замкнутому контуру, а уявна – об'ємній витраті рідини через цей контур.

Якщо комплексний потенціал помножити на уявну одиницю, то отримаємо нову течію, в якій потенціал швидкості дорівнюватиме функції течії попереднього потоку, а функція течії – потенціалу швидкості.

Таким чином, *функція комплексної змінної* може широко використовуватися при вивченні плоских потенціальних потоків. Причому залежно від постановки задачі метою може бути як визначення поля швидкостей по відомій функції  $W(z)$ , так і визначення вигляду цієї функції за вже відомим полем швидкостей.

### 3.6.4 Найпростіші потенціальні течії та принцип їх суперпозиції

Розглядаючи безвихрові потоки, слід мати на увазі, що течії рідини, яка б точно відповідала умовам потенціальності, в природі та техніці не існує. Це пов'язане з тим, що рух реальної (в'язкої) рідини або в межах каналу, або при обтіканні твердого тіла супроводжується нерівномірним розподілом швидкостей. Аналіз руху рідкої частинки і отримані рівняння (3.38) свідчать, що за таких умов течія може бути тільки вихровою. Отже, вважати потік потенціальним можна лише в межах моделі ідеальної рідини. І все ж така ідеалізація має не тільки теоретичне, а й практичне значення. Воно обумовлене тим, що у деяких випадках завихреність потоку настільки невелика, що нехтування нею не приводить до суттєвих розбіжностей результатів розрахунків з дослідами. Крім того, вважаючи потік потенціальним, значно спрощуємо задачу, для якої розроблені досить ефективні методи.

Якщо потік нестисливої рідини потенціальний, то задача опису поля швидкостей зводиться до визначення потенціалу швидкості  $\phi$ , який би задовольняв рівняння Лапласа. Для його розв'язання встановлюють граничні умови. *Граничною умовою* на твердій непроникній стінці є рівність нулю нормальної до неї складової швидкості

$$u_n^{cm} = \frac{\partial \phi^{cm}}{\partial n} = 0. \quad (3.97)$$

Якщо потік не тільки потенціальний, а й плоский, то, крім потенціалу швидкості, він має функцію течії, яку можна визначити з формули (3.85). Оскільки в ідеальній рідині ефект прилипання діяти не може, то кожна тверда поверхня є поверхнею течії та тому граничною умовою для функції течії на твердій стінці є рівність  $\psi = \text{const}$ .

Оскільки рівняння для  $\phi$  і  $\psi$  є лінійними, то можна стверджувати, що при існуванні двох плоских потенціальних течій з комплексними потенціалами  $W_1(z) = \phi_1 + i\psi_1$  та  $W_2(z) = \phi_2 + i\psi_2$  існує і деяка третя течія, котра утворюється шляхом накладання перших двох. Для неї

$$W_3(z) = W_1(z) + W_2(z) = (\phi_1 + \phi_2) + i(\psi_1 + \psi_2), \quad (3.98)$$

$$u_{x3} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = u_{x1} + u_{x2};$$

$$u_{y3} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = u_{y1} + u_{y2}.$$
(3.99)

З отриманого результату випливає принцип суперпозиції (накладання) потенціальних потоків: потенціальні потоки нестисливої рідини можна складати; потенціал швидкості та функція течії отриманого нового потоку визначаються як алгебраїчні суми потенціалів швидкості та функцій течії первинних (вихідних) потоків, а вектори швидкості – як геометричні суми векторів швидкості первинних потоків у відповідних точках.

Задача визначення нової течії може бути розв'язана як графічним, так і аналітичним шляхом.

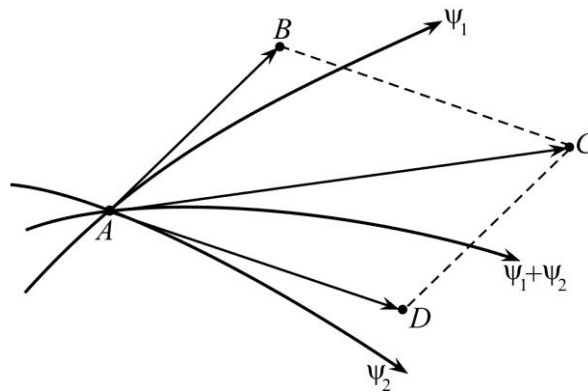


Рисунок 3.23 – Графічний метод побудови нового потоку

Розглянемо спочатку графічний метод. Для цього намалюємо лінії течії двох потоків в одному масштабі (рисунок 3.23). При їх достатній щільності, перетинаючись, вони створюють фігури, близькі до паралелограмів. Відрізки  $AB$  і  $AD$  у деякому масштабі являють собою швидкості течії кожного потоку у точці  $A$ , а діагональ  $AC$  – швидкість підсумкового потоку. При цьому треба дотримуватися умови рівності витрат між сусідніми лініями течії обох потоків.

Для розв'язання задачі аналітичним шляхом повинні бути відомими  $\psi$  і  $\varphi$  вихідних потоків. Такий приклад буде розглянуто далі.

Застосуємо функції комплексної змінної для розгляду деяких найпростіших потенціальних потоків.

### 1. Плоскопаралельний потік.

Розглянемо комплексний потенціал у вигляді лінійної функції

$$W(z) = az = (a_1 + ia_2)(x + iy) = (a_1x + a_2y) + i(a_1y + a_2x),$$
(3.100)

де  $a_1$  і  $a_2$  – довільні сталі величини.

З урахуванням формули (3.93) стає очевидним, що у даному випадку

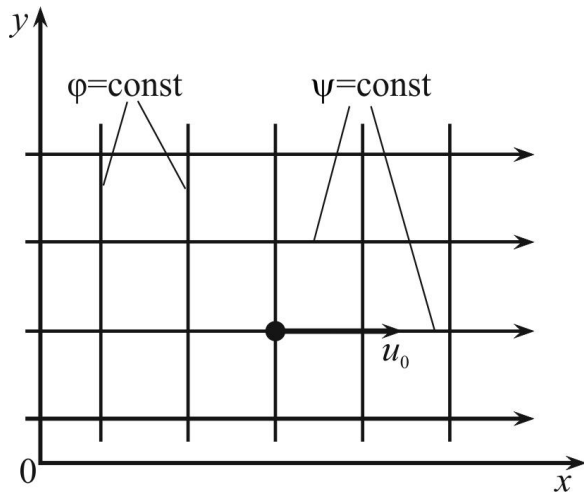


Рисунок 3.24 – Плоскопаралельна течія

$$\varphi = a_1x + a_2y, \quad (3.101)$$

$$\psi = a_1y + a_2x. \quad (3.102)$$

Тобто екіпотенціальні лінії та лінії течії мають вигляд  $a_1x + a_2y = \text{const}$  і  $a_1y + a_2x = \text{const}$ . Разом вони утворюють гідродинамічну сітку плоскопаралельної течії (рисунок 3.24), яка відбувається під кутом до осі  $ox$   $\theta = \arctg(u_y/u_x)$ .

Легко помітити, що при  $a_2 = 0$   $W(z) = a_1\varphi + ia_1\psi$

$$\varphi = a_1x = u_0x, \quad (3.103)$$

$$\psi = a_1y = u_0y, \quad (3.104)$$

тобто екіпотенціальні лінії перпендикулярні до осі  $ox$ , а лінії течії – до осі  $oy$ . Течія відбуватиметься вздовж осі  $ox$ .

## 2. Джерело і стік.

Нехай

$$W(z) = a \ln z = a \ln r + ia\theta. \quad (3.105)$$

Очевидно, що для такої течії

$$\varphi = a \ln r \quad (3.106)$$

$$\psi = a\theta, \quad (3.107)$$

а екіпотенціальні лінії та лінії течії мають вигляд  $a \ln r = \text{const}$  і  $a\theta = \text{const}$ . Перші – кола з центром у початку координат, другі – прямі, що проходять через початок координат. Якщо  $a > 0$ , то  $u_r = \partial\varphi/\partial r > 0$  і течія відбувається від центра, а якщо  $a < 0$ , то  $u_r = \partial\varphi/\partial r < 0$  – до центра. У першому випадку течію називають джерелом, у другому – стоком (рисунок 3.25).

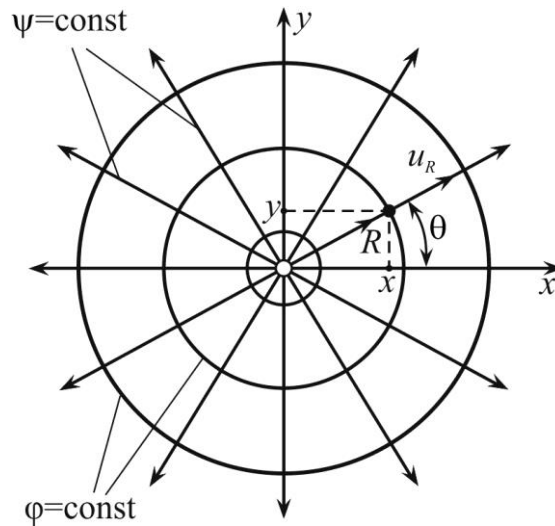


Рисунок 3.25 – Джерело

За відомого поля швидкостей можна визначити витрату даної плоскої течії

$$Q = \int_0^{2\pi} u_r r d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial r} r d\theta = 2\pi a. \quad (3.108)$$

Звідки комплексний потенціал джерела

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln z = \frac{Q}{2\pi} \ln r + i \frac{Q}{2\pi} \theta, \quad (3.109)$$

а його потенціал швидкості та функція течії

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln r = \frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (3.110)$$

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \theta = \frac{Q}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \quad (3.111)$$

Для стоку в правих частинах формул (3.110) і (3.111) з'являється знак мінус.

Очевидно, що через початок координат проходить нескінченно багато ліній течії та

$$u_r = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r=0} = \infty, \quad (3.112)$$

тому ця точка є особливою.

Таким чином, джерелом (стоком) називають особливу точку в просторі, а для плоскої задачі – на площині, з якої (в яку) рівномірно витікає (втікає) витрата  $Q$ .

### 3. Плоский вихор.

Якщо в комплексному потенціалі (3.105) величина  $a$  є мнімою, тобто

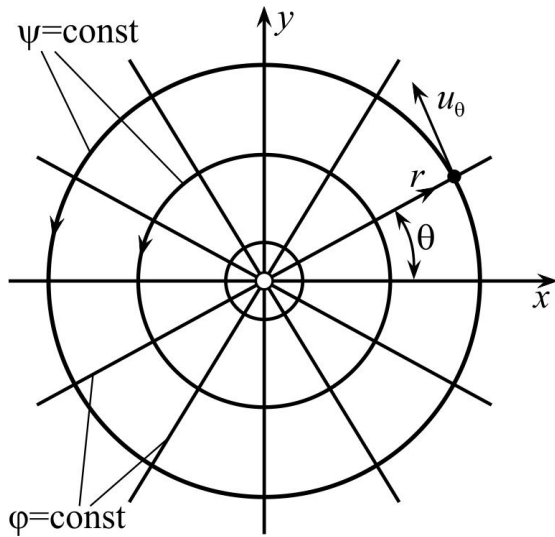


$$W(z) = ia \ln z = ia \ln r - a\theta, \quad (3.113)$$

то

$$\varphi = -a\theta, \quad (3.114)$$

$$\psi = a \ln r, \quad (3.115)$$



Еквіпотенціальні лінії  $-a\theta = \text{const}$  – прямі, що проходять через початок координат, а лінії течії  $a \ln r = \text{const}$  – кола з центром у початку координат (рисунок 3.26).

За визначенням циркуляції швидкості для довільного замкнутого контуру, що містить початок координат,

$$\Gamma = 2\pi r u_\theta = 2\pi r \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -2\pi a. \quad (3.116)$$

Рисунок 3.26 – Плоский вихор

Таким чином, для плоского вихору

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta = \frac{\Gamma}{2\pi} \arctg \frac{y}{x}, \quad (3.117)$$

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (3.118)$$

Зауважимо, що хоч в назві цієї течії вживається термін «вихор», течія не є вихровою, оскільки будь-яка рідка частинка не обертається навколо осі, що через неї проходить.

#### 4. Диполь.

Розглянемо течію, яка утворюється внаслідок поєднання джерела, що знаходиться на осі  $ox$  у точці  $x = -m$  і стоку, що теж знаходиться на осі  $ox$  у точці

$x = m$  (рисунок 3.27). Нехай витрата  $Q$  цих потоків буде однаковою.

Розглядаючи довільну точку  $K(x; y)$ , можна помітити, що для джерела комплексна змінна дорівнюватиме  $(z + m)$ , а для стоку  $(z - m)$ .

Тоді комплексний потенціал сумарної течії

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z + m) - \frac{Q}{2\pi} \ln(z - m). \quad (3.119)$$

Течія, що отримується внаслідок наближення джерела і стоку ( $2m \rightarrow 0$ ), називається диполем. Очевидно, що у граничному випадку, коли  $m = 0$ , комплексний потенціал диполя має бути тотожним нулю, тобто течії як такої не буде. Втім, якщо разом з наближенням джерела і стоку ( $2m \rightarrow 0$ ) так збільшувати витрату, щоб величина  $M = 2mQ = \text{const}$  (її називають *моментом диполя*), то

$$W(z) = \frac{M}{2\pi} \lim_{2m \rightarrow 0} \frac{\ln(z+m) - \ln(z-m)}{2m}. \quad (3.120)$$

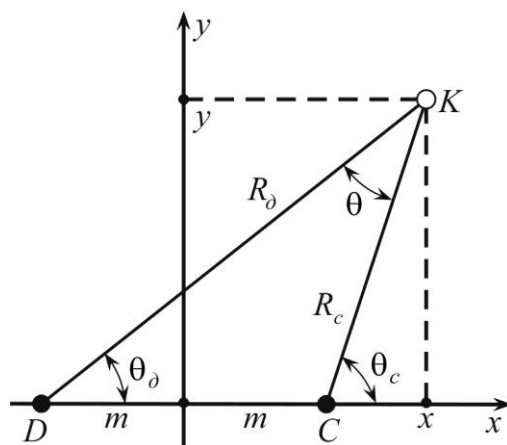


Рисунок 3.27 – Джерело і стік

Знаменник дробу під знаком границі можна розглядати як приріст незалежної змінної, а чисельник – як відповідний приріст функції цієї змінної. Така границя є похідною функції. Тобто

$$W(z) = \frac{M}{2\pi} \frac{d}{dz} \ln z = \frac{M}{2\pi z}. \quad (3.121)$$

Для визначення вигляду потенціалу швидкості та функції течії (3.121) перепишемо так:

$$W(z) = \frac{M}{2\pi z} = \frac{M\bar{z}}{2\pi z\bar{z}} = \frac{M}{2\pi} \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{M}{2\pi} \frac{x-iy}{x^2+y^2}. \quad (3.122)$$

Звідки

$$\varphi = \frac{M}{2\pi} \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{M}{2\pi} \frac{x}{r} \quad (3.123)$$

і

$$\psi = -\frac{M}{2\pi} \frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{M}{2\pi} \frac{y}{r}. \quad (3.124)$$

Отже, екіпотенціальні лінії  $x^2 + y^2 = Cx$  – кола з центрами на осі  $ox$ , які дотикаються до осі  $oy$  у центрі координат, а лінії течії  $x^2 + y^2 = Cy$  – кола з центрами на осі  $oy$ , які дотикаються у центрі координат до осі  $ox$  (рисунок 3.28). Початок координат при цьому є особливою точкою.

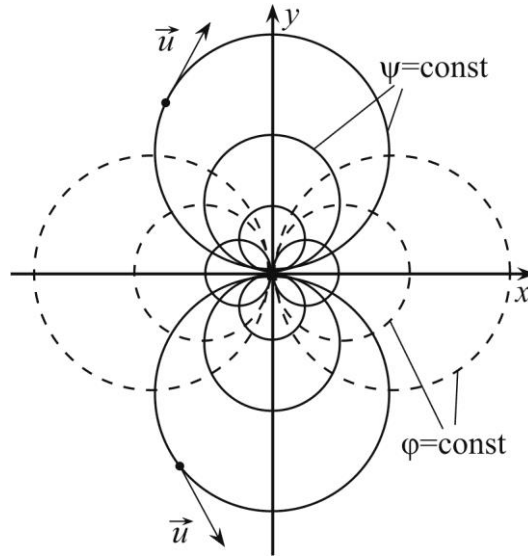


Рисунок 3.28 – Диполь

### 3.6 ПОТЕНЦІАЛЬНИЙ РУХ РІДИНИ

#### 3.6.1 Потенціал швидкості. Рівняння Лапласа

Згідно з визначенням для потенціального (безвихрового) руху  $rot \vec{u} = 0$ , або  $\vec{\omega} = 0$ . Цю умову можна записати у вигляді

$$\begin{aligned}\omega_x &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = 0; \\ \omega_y &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = 0; \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = 0,\end{aligned}\tag{3.68}$$

що рівнозначно системі

$$\frac{\partial u_z}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial z}; \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial y}.\tag{3.69}$$

Рівність навхрест взятих похідних є умовою того, що тричлен  $u_x dx + u_y dy + u_z dz$  являє собою повний диференціал деякої функції трьох змінних, яку називають *потенціалом швидкості*,

$$d\phi = u_x dx + u_y dy + u_z dz.\tag{3.70}$$

З іншого боку, повний диференціал виражається формулою

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} dz. \quad (3.71)$$

Тому

$$u_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}; \quad u_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}; \quad u_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \quad (3.72)$$

$$\vec{u} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \vec{k}, \quad (3.73)$$

або

$$\vec{u} = \text{grad}\varphi. \quad (3.74)$$

Таким чином, кожному руху рідини, який відбувається без обертання рідких частинок, тобто є потенціальним, відповідає свій потенціал швидкості. Справедливе і зворотне твердження: якщо існує потенціал швидкості, то рух потенціальний.

Розглянемо потенціальний потік і виділимо в ньому замкнутий контур  $L$ . Оскільки потік у всіх точках безвихровий, то циркуляція  $\Gamma = 0$ . Враховуючи формули (3.58) і (3.72), маємо

$$\Gamma = \oint_L (u_x dx + u_y dy + u_z dz) = \oint_L \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} dz \right) = \oint_L d\varphi = \varphi_{A'} - \varphi_A, \quad (3.75)$$

де  $\varphi_A$  і  $\varphi_{A'}$  – значення потенціалу швидкості у точці  $A$  до і після обходу контуру.

Оскільки  $\varphi_{A'} = \varphi_A$ , то після обходу контуру значення потенціалу швидкості не змінилось. Тому якщо потік всередині деякої замкнутої області потенціальний, то його потенціал швидкості є функцією однозначною.

Якщо навіть в одній точці замкнутого контуру потік вихровий, то згідно з теоремою Стокса циркуляція не буде дорівнювати нулю і тоді

$$\varphi_{A'} = \varphi_A + \Gamma. \quad (3.76)$$

У цьому випадку потенціал змінюється після кожного обходу контуру на величину циркуляції, а отже, є функцією багатозначною.

Доцільність введення поняття потенціалу швидкості полягає у тому, що згідно з формулою (3.72) при заданому  $\varphi$  можна визначити проекції швидкості у будь-якій точці рідини, яка потенціально рухається. У свою чергу, розрахунок поля швидкостей є важливою передумовою розв'язання багатьох прикладних задач гідромеханіки.

Слід зауважити, що у разі коли неусталений рух рідини не може бути приведений до усталеного введенням рухливої системи координат, то за винятком деяких випадків виразити зміну  $\varphi$  в просторі та часі виявляється виключно складно. Тому подальший розгляд потенціальних потоків стосуватиметься лише стаціонарного руху.

Для стаціонарного руху нестисливої рідини справедливе рівняння нерозривності у вигляді формули (3.19). З урахуванням рівнянь (3.72) воно набирає вигляду

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (3.77)$$

Отриманий результат називається *рівнянням Лапласа*<sup>25</sup>. Воно використовується для визначення потенціалу швидкості. Як і кожне диференціальне рівняння, рівняння Лапласа має нескінченну множину розв'язків. Тому для однозначного визначення  $\varphi$  необхідно знати граничні умови течії, яка розглядається. Під *граничними умовами* розуміють задані значення, яких повинна набувати шукана функція в точках граничних поверхонь. Докладно граничні умови будуть розглянуті далі.

### 3.6.2 Функція течії для плоского потоку. Гідродинамічна сітка

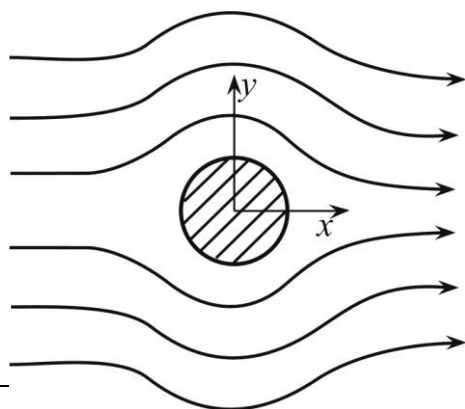
У загальному випадку рух рідини є тривимірним, тобто параметри потоку (швидкість, тиск тощо) залежать одразу від трьох координат. Але у деяких випадках, наприклад обтікання потоком довгих крил або циліндрів (рисунок 3.18), залежністю параметрів від однієї координати можна знехтувати (за винятком областей течії біля кінців крила або циліндра).

Рух рідини, параметри якого залежать тільки від двох координат, називають *двовимірним, або плоским*. Такий рух має дві властивості:

– *конфігурація ліній течії у всіх площинах, які перпендикулярні до одної з координатних осей* (на рисунку 3.18 це вісь  $oz$ ), *однакова*;

– *усі лінії течії є плоскими кривими, що знаходяться у цих площинах*.

З наведеного вище випливає, що проекції швидкості на вісь  $oz$  у всіх точках плоского потоку дорівнюють нулю. Хоч у природі, строго кажучи, плоских течій не існує, розв'язки багатьох задач гідромеханіки можуть бути отримані шляхом розгляду саме такого руху рідини. Вивчення плоских течій суттєво по-



легшене тим, що рівняння, які їх описують, значно простіші та, крім того, достатньо отримати результати лише для одної площини, щоб скласти уявлення про весь потік.

Розглянувши формули (3.38), легко пересвідчитись, що оскільки  $\partial u_z / \partial y = \partial u_y / \partial z = \partial u_x / \partial z = \partial u_z / \partial x = 0$ , то в плоскому потоці може бути тільки один

<sup>25</sup> Лаплас П'єр Сімон (1749–1827) – [французький математик](#) і [астроном](#), член Французької академії наук, розробив методи математичної фізики, які з'явилися в математиці, довіряв математичний апарат теорії ймовірності, довіряв низку праць з теорії [капілярності](#).

Рисунок 3.18 – Приклад плоскої течії

компонент кутової швидкості  $\omega_z$ . Тому для плоского потоку умова існування потенціалу швидкості має вигляд

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (3.78)$$

та

$$d\varphi = u_x dx + u_y dy. \quad (3.79)$$

Рівняння нерозривності плоского потоку нестисливої рідини має вигляд

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0, \quad (3.80)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{\partial u_y}{\partial y}. \quad (3.81)$$

Останнє рівняння є умовою того, що двочлен  $u_x dy - u_y dx$  є повним диференціалом деякої функції двох змінних  $\psi(x;y)$ , яку називають *функцією течії*

$$d\psi = u_x dy - u_y dx. \quad (3.82)$$

З іншого боку,

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy. \quad (3.83)$$

Тому

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (3.84)$$

Отже, якщо функція течії відома, то можна визначити компоненти швидкості у будь-якій точці потоку.

Підставляючи формулу (3.84) до виразу (3.78), маємо

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \quad (3.85)$$

тобто функція течії, як і потенціал швидкості, задовольняє рівняння Лапласа. Але якщо  $\varphi$  існує тільки для потенціального потоку, то функція течії цією умовою не обмежена. Це пояснюється тим, що рівняння нерозривності справедливе як для потенціального, так і для вихрового рухів рідини.

Рівняння лінії течії (3.11) для плоского потоку має вигляд

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y}, \quad (3.86)$$

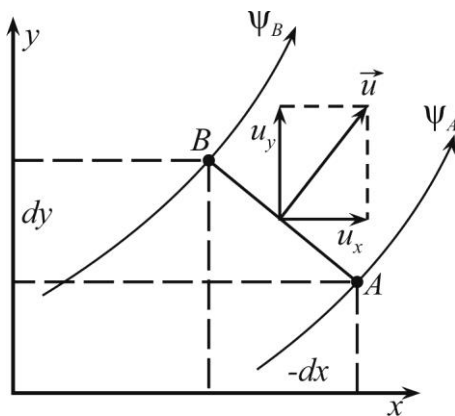
або

$$u_x dy - u_y dx = 0. \quad (3.87)$$

Порівнюючи формули (3.87) і (3.82), можемо пересвідчитися, що вздовж лінії течії  $d\psi = 0$ , тобто функція  $\psi$  зберігає вздовж будь-якої лінії течії незмінне значення, яке, однак, відмінне для різних ліній течії.

Для встановлення фізичного змісту  $\psi$  проведемо дві лінії течії, які досить близько розташовані одна від одної (рисунок 3.19). Визначимо об'ємну витрату рідини, що протікає між ними. Для цього розкладемо швидкість  $\vec{u}$  на складові  $u_x$  і  $u_y$ . Це дозволяє представити елементарну витрату  $dQ = dQ_x + dQ_y$ , при цьому  $dQ_x = u_x dy$ ,  $dQ_y = -u_y dx$ . Тому

$$dQ = u_x dy - u_y dx = d\psi. \quad (3.88)$$



$$Q = \int_A^B (u_x dy - u_y dx) = \int_A^B d\psi = \psi_B - \psi_A. \quad (3.89)$$

З формули (3.89) видно, що різниця функції течії двох суміжних ліній течії дорівнює об'ємній витраті між ними.

Для плоского потенціального потоку шляхом зіставлення виразів (3.72) і (3.84) можна встановити зв'язок між потенціалом швидкості та функцією течії

Рисунок 3.19 – Дві суміжні лінії течії

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (3.90)$$

Ці співвідношення називаються *співвідношеннями Коші – Рімана*<sup>26</sup>. Якщо їх між собою перемножити, то отриманий результат

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3.91)$$

свідчить про взаємну ортогональність *ліній течії* ( $\psi = \text{const}$ ) і *еквіпотенціальних ліній* ( $\phi = \text{const}$ ).

<sup>26</sup> Ріман Георг Фрідріх Бернхард (1826–1866) – видатний німецький математик і фізик. У доповіді «Про гіпотези, що становлять основу геометрії» він визначив загальне поняття  $n$  – вимір-ного різноманіття, чим, за словами Ейнштейна, передбачив загальну теорію відносності. Ріманом запропонований метод розв'язання нелінійного рівняння одновимірної течії стисливої рідини. На підставі вивчення рівнянь руху встановив факт існування у стисливих рідинах ударних хвиль.

Таким чином, плоский потенціальний потік нестисливої рідини характеризується двома ортогональними сім'ями кривих, які створюють *гідродинамічну сітку* руху. На рисунку 3.20 наведений приклад гідродинамічної сітки, яка накреслена для випадку плоского витікання рідини під тиском вздовж горизонтальної площини.

Гідродинамічна сітка має такі властивості:

- *сітка ортогональна;*
- *однойменні лінії не перетинаються ніде, крім точок з нульовою або нескінченною швидкістю* (для ліній течії це доведено у підрозділі 3.2, а для еквіпотенціальних ліній це справедливо, оскільки вони ортогональні лініям течії);
- *сітка в малому квадратична, тобто  $\Delta\varphi \approx \Delta\psi$*  (де  $\Delta\varphi$  і  $\Delta\psi$  – приріст потенціалу швидкості та функції течії між двома суміжними лініями).

Наведені властивості дозволяють використовувати гідродинамічну сітку для визначення параметрів плоских потенціальних потоків.



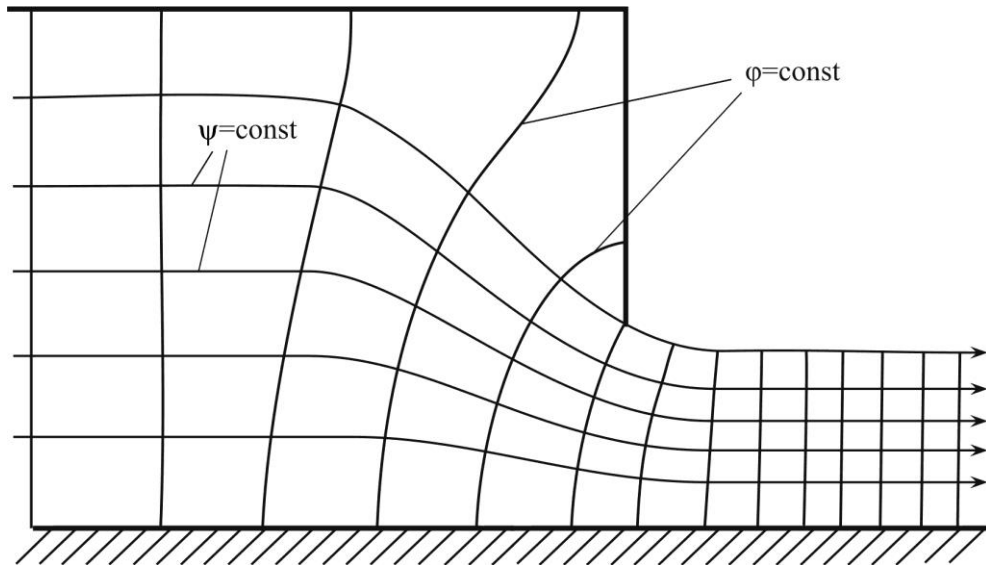


Рисунок 3.20 – Гідродинамічна сітка для плоского витікання під тиском вздовж горизонтальної площини

### 3.6.3 Функція комплексної змінної

Оскільки для функцій  $\varphi$  і  $\psi$  виконується умова Коші-Рімана, то вони на комплексній площині можуть бути представлені у вигляді залежності тільки однієї комплексної змінної (рисунок 3.21) (не плутати з координатою декартової системи координат)

$$z = x + iy = re^{i\theta}, \quad (3.92)$$

де  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  – модуль числа  $z$ ;

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} \text{ – аргумент числа } z.$$

Цю функцію називають *комплексним потенціалом* або інколи характеристичною функцією течії  $W(z)$ , головна властивість котрої полягає у тому, що її дійсна частина дорівнює потенціалу швидкості, а уявна – функції течії

$$W(z) = \varphi(x; y) + i\psi(x; y). \quad (3.93)$$

Оскільки  $W(z)$  є аналітичною функцією від числа  $z$ , то її похідна не залежить від напрямку диференціювання і цілком визначається положенням точки, яке задане координатою  $z$ .

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = -i\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad (3.94)$$

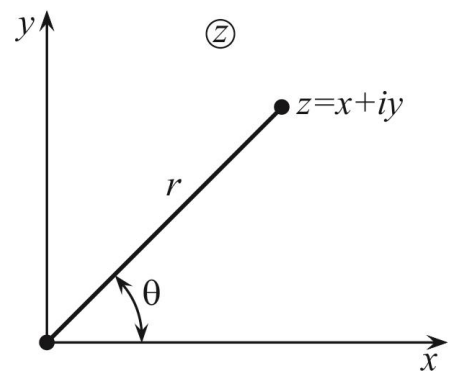
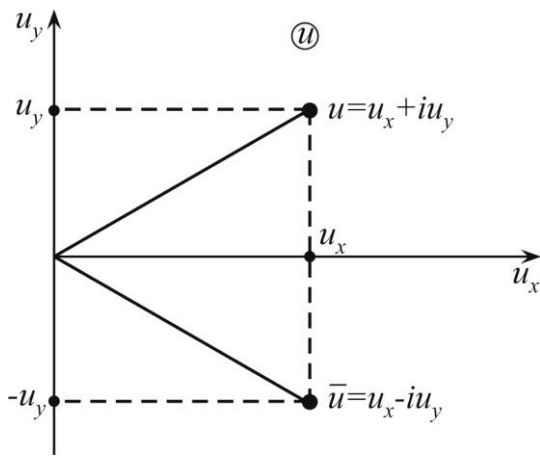


Рисунок 3.21 – Комплексна площина

або

$$\frac{dW}{dz} = u_x - iu_y = \bar{u}. \quad (3.95)$$



**Рисунок 3.22 – Спряжена швидкість**

Похідна комплексного потенціалу є так званою *спряженою швидкістю*  $\bar{u}$ , дійсна частина якої дорівнює проекції  $u_x$ , а уявна – взятій зі зворотним знаком проекції  $u_y$ . Оскільки в теорії комплексної змінної величини  $z = x + iy$  і  $\bar{z} = x - iy$  називають спряженими, то в комплексній площині  $u_x, u_y$  число  $\bar{u}$  є спряженим з числом  $u = u_x + iu_y$ , яке зветься *комплексною швидкістю* (рисунок 3.22). Площину  $u_x, u_y$  називають *площиною годографа швидкості*.

Інтеграл по довільному замкнутому контуру  $L$ , враховуючи формулу (3.95),

$$\oint_L \frac{dW}{dz} dz = \oint_L \bar{u} dz = \oint_L (u_x - iu_y)(dx + idy) = \oint_L [(u_x dx + u_y dy) + i(u_x dy - u_y dx)]. \quad (3.96)$$

Але ж, як було показано раніше,  $\oint_L (u_x dy - u_y dx) = \oint_L d\psi = Q$ , а  $\oint_L (u_x dx + u_y dy) = \Gamma$ , тому очевидно, що дійсна частина інтеграла дорівнює циркуляції швидкості по замкнутому контуру, а уявна – об'ємній витраті рідини через цей контур.

Якщо комплексний потенціал помножити на уявну одиницю, то отримаємо нову течію, в якій потенціал швидкості дорівнюватиме функції течії попереднього потоку, а функція течії – потенціалу швидкості.

Таким чином, *функція комплексної змінної* може широко використовуватися при вивченні плоских потенціальних потоків. Причому залежно від постановки задачі метою може бути як визначення поля швидкостей по відомій функції  $W(z)$ , так і визначення вигляду цієї функції за вже відомим полем швидкостей.

### 3.6.4 Найпростіші потенціальні течії та принцип їх суперпозиції

Розглядаючи безвихрові потоки, слід мати на увазі, що течії рідини, яка б точно відповідала умовам потенціальності, в природі та техніці не існує. Це пов'язане з тим, що рух реальної (в'язкої) рідини або в межах каналу, або при обтіканні твердого тіла супроводжується нерівномірним розподілом

швидкостей. Аналіз руху рідкої частинки і отримані рівняння (3.38) свідчать, що за таких умов течія може бути тільки вихровою. Отже, вважати потік потенціальним можна лише в межах моделі ідеальної рідини. І все ж така ідеалізація має не тільки теоретичне, а й практичне значення. Воно обумовлене тим, що у деяких випадках завихреність потоку настільки невелика, що нехтування нею не приводить до суттєвих розбіжностей результатів розрахунків з дослідами. Крім того, вважаючи потік потенціальним, значно спрощуємо задачу, для якої розроблені досить ефективні методи.

Якщо потік нестисливої рідини потенціальний, то задача опису поля швидкостей зводиться до визначення потенціалу швидкості  $\varphi$ , який би задовольняв рівняння Лапласа. Для його розв'язання встановлюють граничні умови. *Граничною умовою* на твердій непроникній стінці є рівність нулю нормальної до неї складової швидкості

$$u_n^{cm} = \frac{\partial \varphi^{cm}}{\partial n} = 0. \quad (3.97)$$

Якщо потік не тільки потенціальний, а й плоский, то, крім потенціалу швидкості, він має функцію течії, яку можна визначити з формули (3.85). Оскільки в ідеальній рідині ефект прилипання діяти не може, то кожна тверда поверхня є поверхнею течії та тому граничною умовою для функції течії на твердій стінці є рівність  $\psi = \text{const}$ .

Оскільки рівняння для  $\varphi$  і  $\psi$  є лінійними, то можна стверджувати, що при існуванні двох плоских потенціальних течій з комплексними потенціалами  $W_1(z) = \varphi_1 + i\psi_1$  та  $W_2(z) = \varphi_2 + i\psi_2$  існує і деяка третя течія, котра утворюється шляхом накладання перших двох. Для неї

$$W_3(z) = W_1(z) + W_2(z) = (\varphi_1 + \varphi_2) + i(\psi_1 + \psi_2), \quad (3.98)$$

$$\begin{aligned} u_{x3} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = u_{x1} + u_{x2}; \\ u_{y3} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = u_{y1} + u_{y2}. \end{aligned} \quad (3.99)$$

З отриманого результату випливає *принцип суперпозиції (накладання) потенціальних потоків: потенціальні потоки нестисливої рідини можна складати; потенціал швидкості та функція течії отриманого нового потоку визначаються як алгебраїчні суми потенціалів швидкості та функцій течії первинних (вихідних) потоків, а вектори швидкості – як геометричні суми векторів швидкості первинних потоків у відповідних точках.*

Задача визначення нової течії може бути розв'язана як графічним, так і аналітичним шляхом.

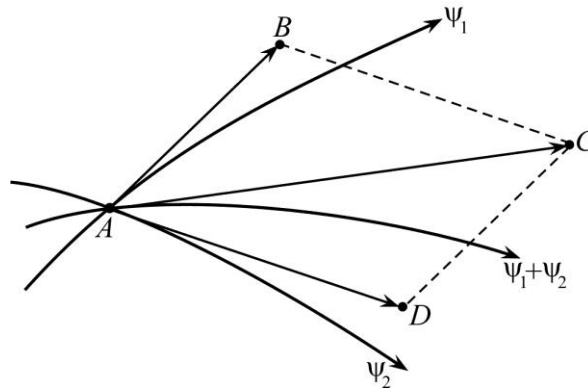


Рисунок 3.23 – Графічний метод побудови нового потоку

Розглянемо спочатку графічний метод. Для цього накреслимо лінії течії двох потоків в одному масштабі (рисунок 3.23). При їх достатній щільності, перетинаючись, вони створюють фігури, близькі до паралелограмів. Відрізки  $AB$  і  $AD$  у деякому масштабі являють собою швидкості течії кожного потоку у точці  $A$ , а діагональ  $AC$  – швидкість підсумкового потоку. При цьому треба дотримуватися умови рівності витрат між сусідніми лініями течії обох потоків.

Для розв’язання задачі аналітичним шляхом повинні бути відомими  $\psi$  і  $\phi$  вихідних потоків. Такий приклад буде розглянуто далі.

Застосуємо функції комплексної змінної для розгляду деяких найпростіших потенціальних потоків.

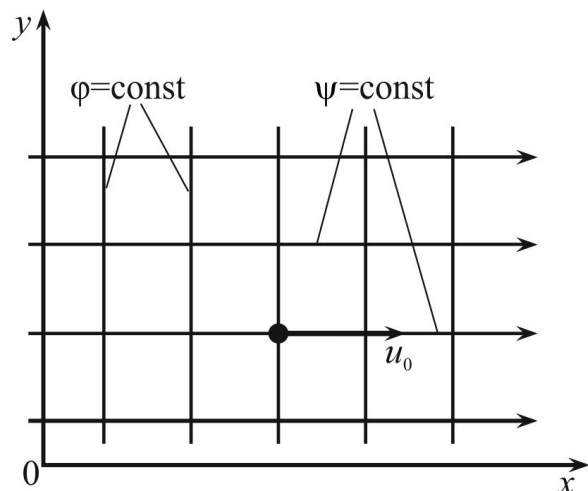
### 3. Плоскопаралельний потік.

Розглянемо комплексний потенціал у вигляді лінійної функції

$$W(z) = az = (a_1 + ia_2)(x + iy) = (a_1x + a_2y) + i(a_1y + a_2x), \quad (3.100)$$

де  $a_1$  і  $a_2$  – довільні сталі величини.

З урахуванням формули (3.93) стає очевидним, що у даному випадку



$$\phi = a_1x + a_2y, \quad (3.101)$$

$$\psi = a_1y + a_2x. \quad (3.102)$$

Тобто екіпотенціальні лінії та лінії течії мають вигляд  $a_1x + a_2y = \text{const}$  і  $a_1y + a_2x = \text{const}$ . Разом вони утворюють гідродинамічну сітку плоскопаралельної течії (рисунок 3.24), яка відбувається під кутом до осі  $ox$   $\theta = \arctg(u_y/u_x)$ .

Легко помітити, що при  $a_2 = 0$   $W(z) = a_1\phi + ia_1\psi$

Рисунок 3.24 – Плоскопаралельна течія

$$\varphi = a_1 x = u_0 x, \quad (3.103)$$

$$\psi = a_1 y = u_0 y, \quad (3.104)$$

тобто еквіпотенціальні лінії перпендикулярні до осі  $ox$ , а лінії течії – до осі  $oy$ . Течія відбуватиметься вздовж осі  $ox$ .

#### 4. Джерело і стік.

Нехай

$$W(z) = a \ln z = a \ln r + ia\theta. \quad (3.105)$$

Очевидно, що для такої течії

$$\varphi = a \ln r \quad (3.106)$$

$$\psi = a\theta, \quad (3.107)$$

а еквіпотенціальні лінії та лінії течії мають вигляд  $a \ln r = \text{const}$  і  $a\theta = \text{const}$ . Перші – кола з центром у початку координат, другі – прямі, що проходять через початок координат. Якщо  $a > 0$ , то  $u_r = \partial\varphi/\partial r > 0$  і течія відбувається від центра, а якщо  $a < 0$ , то  $u_r = \partial\varphi/\partial r < 0$  – до центра. У першому випадку течію називають джерелом, у другому – стоком (рисунок 3.25).

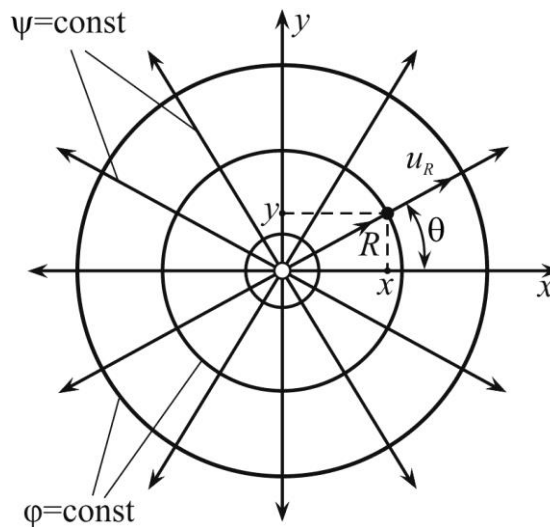


Рисунок 3.25 – Джерело

За відомого поля швидкостей можна визначити витрату даної плоскої течії

$$Q = \int_0^{2\pi} u_r r d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\partial\varphi}{\partial r} r d\theta = 2\pi a. \quad (3.108)$$

Звідки комплексний потенціал джерела

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln z = \frac{Q}{2\pi} \ln r + i \frac{Q}{2\pi} \theta, \quad (3.109)$$

а його потенціал швидкості та функція течії

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln r = \frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (3.110)$$

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \theta = \frac{Q}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \quad (3.111)$$

Для стоку в правих частинах формул (3.110) і (3.111) з'являється знак мінус.

Очевидно, що через початок координат проходить нескінченно багато ліній течії та

$$u_r = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r=0} = \infty, \quad (3.112)$$

тому ця точка є особливою.

Таким чином, джерелом (стоком) називають особливу точку в просторі, а для плоскої задачі – на площині, з якої (в яку) рівномірно витікає (втікає) витрата  $Q$ .

### 3. Плоский вихор.

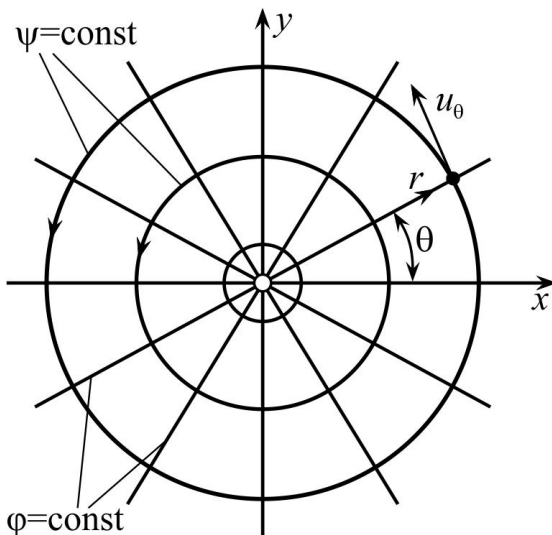
Якщо в комплексному потенціалі (3.105) величина  $a$  є мнімою, тобто

$$W(z) = ia \ln z = ia \ln r - a\theta, \quad (3.113)$$

то

$$\varphi = -a\theta, \quad (3.114)$$

$$\psi = a \ln r, \quad (3.115)$$



Еквіпотенціальні лінії  $-a\theta = \text{const}$  – прямі, що проходять через початок координат, а лінії течії  $a \ln r = \text{const}$  – кола з центром у початку координат (рисунок 3.26).

За визначенням циркуляції швидкості для довільного замкнутого контуру, що містить початок координат,

$$\Gamma = 2\pi r u_\theta = 2\pi r \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -2\pi a. \quad (3.116)$$

Рисунок 3.26 – Плоский вихор

Таким чином, для плоского вихору

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta = \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad (3.117)$$

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (3.118)$$

Зауважимо, що хоч в назві цієї течії вживається термін «вихор», течія не є вихровою, оскільки будь-яка рідка частинка не обертається навколо осі, що через неї проходить.

#### 4. Диполь.

Розглянемо течію, яка утворюється внаслідок поєднання джерела, що знаходиться на осі  $ox$  у точці  $x = -m$  і стоку, що теж знаходиться на осі  $ox$  у точці

$x = m$  (рисунок 3.27). Нехай витрата  $Q$  цих потоків буде однаковою.

Розглядаючи довільну точку  $K(x; y)$ , можна помітити, що для джерела комплексна змінна дорівнюватиме  $(z + m)$ , а для стоку  $(z - m)$ .

Тоді комплексний потенціал сумарної течії

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z + m) - \frac{Q}{2\pi} \ln(z - m). \quad (3.119)$$

Течія, що отримується внаслідок наближення джерела і стоку ( $2m \rightarrow 0$ ), називається диполем. Очевидно, що у граничному випадку, коли  $m = 0$ , комплексний потенціал диполя має бути тотожним нулю, тобто течії як такої не буде. Втім, якщо разом з наближенням джерела і стоку ( $2m \rightarrow 0$ ) так збільшувати витрату, щоб величина  $M = 2mQ = \text{const}$  (її називають *моментом диполя*), то

$$W(z) = \frac{M}{2\pi} \lim_{2m \rightarrow 0} \frac{\ln(z + m) - \ln(z - m)}{2m}. \quad (3.120)$$

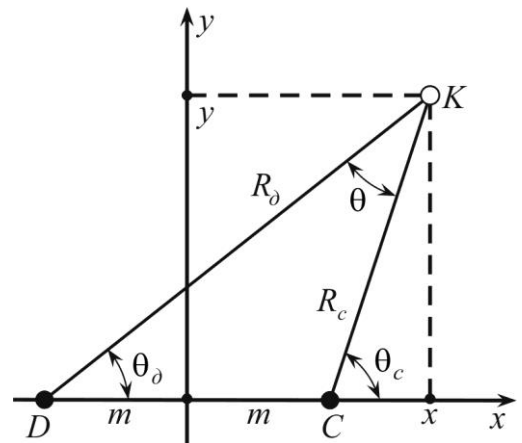


Рисунок 3.27 – Джерело і стік

Знаменник дробу під знаком границі можна розглядати як приріст незалежної змінної, а чисельник – як відповідний приріст функції цієї змінної. Така границя є похідною функції. Тобто

$$W(z) = \frac{M}{2\pi} \frac{d}{dz} \ln z = \frac{M}{2\pi z}. \quad (3.121)$$

Для визначення вигляду потенціалу швидкості та функції течії (3.121) перепишемо так:

$$W(z) = \frac{M}{2\pi z} = \frac{M\bar{z}}{2\pi z\bar{z}} = \frac{M}{2\pi} \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{M}{2\pi} \frac{x-iy}{x^2+y^2}. \quad (3.122)$$

Звідки

$$\varphi = \frac{M}{2\pi} \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{M}{2\pi} \frac{x}{r} \quad (3.123)$$

і

$$\psi = -\frac{M}{2\pi} \frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{M}{2\pi} \frac{y}{r}. \quad (3.124)$$

Отже, екіпотенціальні лінії  $x^2+y^2=Cx$  – кола з центрами на осі  $ox$ , які дотикаються до осі  $oy$  у центрі координат, а лінії течії  $x^2+y^2=Cy$  – кола з центрами на осі  $oy$ , які дотикаються у центрі координат до осі  $ox$  (рисунок 3.28). Початок координат при цьому є особливою точкою.

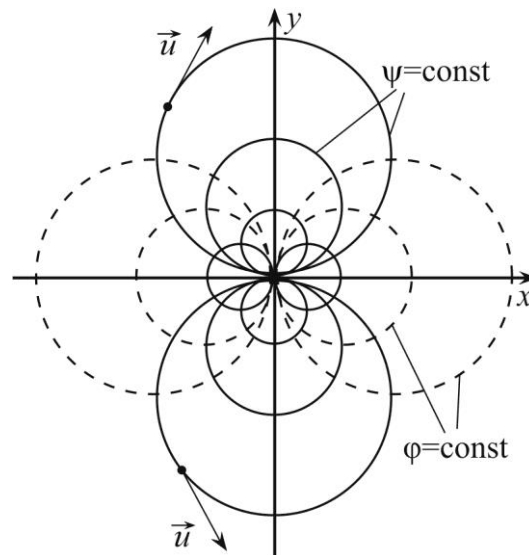


Рисунок 3.28 – Диполь

### 3.7 ПРИКЛАДИ ЗАДАЧ ДО РОЗДІЛУ 3

1. Доведіть, що плоский вихор є течією потенціальною.

Оскільки течія плоска, то  $u_z = 0$  і  $\partial u_x / \partial z = \partial u_y / \partial z = 0$ . Тому

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = 0, \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = 0.$$

Третя проекція кутової швидкості

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial(\partial\varphi/\partial y)}{\partial x} - \frac{\partial(\partial\varphi/\partial x)}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} \right),$$



а оскільки результат не залежить від послідовності диференціювання, то  $\omega_z = 0$ .

Отже, дана течія дійсно є потенціальною.

2. На площині, де відбувається течія з комплексним потенціалом  $W(z) = a \ln r + ia\theta$  ( $a$  – дійсна стала позитивна величина), порівняти витрати через відрізки  $AB$  і  $CD$ , якщо  $A(1;2)$ ,  $B(2;1)$ ,  $C(2;4)$  і  $D(4;2)$ .

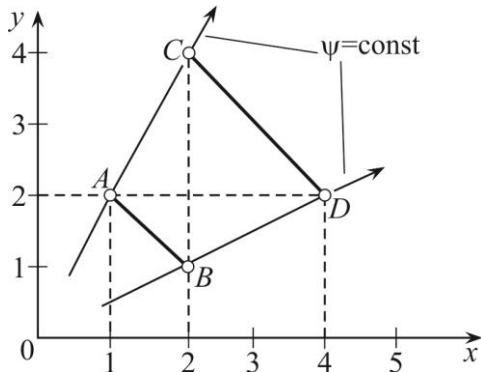


Рисунок 3.29 – До задачі

Якщо  $a$  – дійсна стала позитивна величина, то заданий комплексний потенціал відповідає джерелу (3.105) (рисунок 3.29).

Згідно з формулою (3.89) та з урахуванням формули (3.107) витрати через відрізок  $AB$

$$Q_{AB} = \psi_A - \psi_B = a \left( \operatorname{arctg} \frac{y_A}{x_A} - \operatorname{arctg} \frac{y_B}{x_B} \right) = a \left( \operatorname{arctg} \frac{2}{1} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right),$$

а через відрізок  $CD$

$$Q_{CD} = \psi_C - \psi_D = a \left( \operatorname{arctg} \frac{y_C}{x_C} - \operatorname{arctg} \frac{y_D}{x_D} \right) = a \left( \operatorname{arctg} \frac{4}{2} - \operatorname{arctg} \frac{2}{4} \right).$$

Звідки  $Q_{AB} = Q_{CD}$ , тобто витрати через задані відрізки однакові. Такого висновку можна дійти, звернувши увагу на те, що точки  $A$  і  $C$  та  $B$  і  $D$  належать до одних і тих самих ліній течії.

3. Визначити вид течії, компоненти швидкості якої задані рівняннями  $u_x = \frac{ax}{r^3}$ ,  $u_y = \frac{ay}{r^3}$ ,  $u_z = \frac{az}{r^3}$  ( $a$  – довільна стала величина).

Для умов задачі диференціальні лінії течії (3.11) записується у вигляді

$$\frac{r^3 dx}{a x} = \frac{r^3 dy}{a y} = \frac{r^3 dz}{a z},$$

або

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

Після інтегрування

$$y = C_1 x, \quad x = C_2 z, \quad z = C_3 y.$$

Отже, лінії течії – прямі, що проходять у просторі та перетинаються у одній (особливій) точці – початку координат. При  $a > 0$  проекції швидкості позитивні (течія відбувається від початку координат у простір), що відповідає джерелу у просторі, при  $a < 0$  проекції швидкості від'ємні, що відповідає стоку в просторі.

4. Визначити вид плоскої потенціальної течії, що відбувається в першій чверті координат ( $x > 0, y > 0$ ), та місце розташування точок, де  $|u_x| = |u_y|$ , якщо ця течія задана комплексним потенціалом  $W(z) = az^2$  ( $a$  – дійсна стала позитивна величина).

Комплексний потенціал

$$W(z) = az^2 = a(x + iy)^2 = a(x^2 - y^2) + i2axy.$$

Звідки потенціал швидкості

$$\varphi = a(x^2 - y^2),$$

і функція течії

$$\psi = 2axy.$$

Лінії течії  $2axy = \text{const}$ , або  $y = \frac{C_1}{2ax} = \frac{C_2}{x}$  – гіперболи.

Еквіпотенціальні лінії  $a(x^2 - y^2) = \text{const}$ , або  $y = \sqrt{-\frac{C_3}{a} + x^2} = \sqrt{x^2 - C_4}$  – параболи.

Оскільки при  $x \rightarrow 0$  або  $y \rightarrow 0$  лінії течії асимптотично наближаються до осей координат, то можна дійти висновку, що дана течія відповідає обтіканню ідеальною рідиною прямого кута (рисунок 3.30).

Проекція швидкості

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = a \frac{\partial (x^2 - y^2)}{\partial x} = 2ax$$

у першій чверті є позитивною величиною, а

$$u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = a \frac{\partial (x^2 - y^2)}{\partial y} = -2ay$$

є від'ємною величиною.

З останніх формул випливає, що місцем розташування точок, де  $|u_x| = |u_y|$ , є бісектриса кута  $x = y$ .

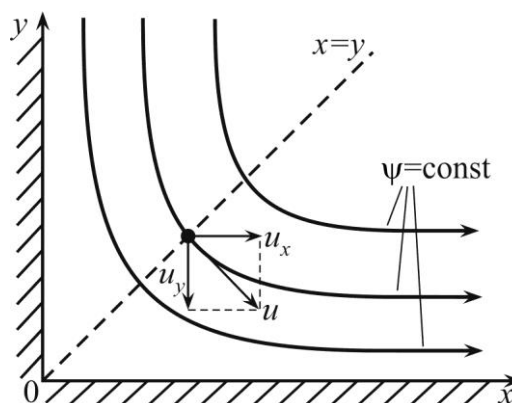


Рисунок 3.30 – До задачі 4

## 4 ОСНОВИ ГІДРОДИНАМІКИ

*Гідродинаміка – розділ гідромеханіки, у якому встановлюються залежності між кінематичними та динамічними характеристиками потоку, тобто вивчаються як власне рух рідини, так і причини, котрі до нього приводять.* Зрозуміло, що рідина може рухатися тільки під дією деяких сил. Враховуючи, що сила може розглядатися як добуток тиску на площу, логічно вважати причиною руху рідини різницю (перепад) тиску. Таким чином, для розрахунку течії необхідно мати рівняння, які пов'язують тиск у точці зі швидкістю рідкої частинки.

### 4.1 ГІДРОДИНАМІКА ІДЕАЛЬНОЇ РІДИНИ

Модель ідеальної рідини передбачає відсутність в'язкості та як наслідок – відсутність дотичних напружень. При цьому взаємодія між шарами рідини зводиться лише до дії нормальних поверхневих сил.

#### 4.1.1 Система диференціальних рівнянь руху ідеальної рідини.

##### *Перетворення Громеки-Лемба*

Систему диференціальних рівнянь руху ідеальної рідини можна отримати, скориставшись рівняннями руху рідини у напруженнях (2.15). Для цього достатньо пригадати, що в ідеальній рідині дотичні напруження не виникають ( $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_{zx} = \tau_{xz} = \tau_{zy} = \tau_{yz} = 0$ ) і тому справедлива рівність (2.7). Таким чином, система (2.15) для течії ідеальної рідини набуває вигляду

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{du_x}{dt} \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{du_y}{dt} \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{du_z}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

у проєкціях на осі координат і

$$\vec{F}' - \frac{1}{\rho} \text{grad}P = \vec{a} \quad (4.2)$$

у векторній формі.

Ці рівняння вперше були отримані Леонардом Ейлером, і тому їх називають диференціальними рівняннями Ейлера для течії ідеальної рідини. З урахуванням рівняння (3.5) система (4.1) має вигляд

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} u_z \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_y}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_y}{\partial z} u_z \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial u_z}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_z}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_z}{\partial z} u_z \end{aligned} \right\}. \quad (4.3)$$

Отримані у такому вигляді диференціальні рівняння започаткували практичне вивчення руху рідини. Оскільки для визначення чотирьох невідомих  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$  і  $P$  трьох рівнянь недостатньо, то для нестисливої рідини додають рівняння нерозривності, а для стисливих – ще й відповідні термодинамічні співвідношення, які дозволяють визначити густину. Однак, пряме інтегрування системи (4.3) можливе лише для деяких найпростіших течій.

Система диференціальних Ейлера справедлива як для потенціального, так і для вихрового рухів рідини. Однак у вигляді (4.2) або (4.3) вона не містить складових, які б явно вказували на непотенціальність течії. Тому доцільно провести перетворення, котрі дозволили б ввести компоненти вихору.

Розглянемо перше рівняння системи (4.3). Додамо і віднімемо від його правої частини

$$u_y \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial x}.$$

Завдяки цьому вона набирає вигляду

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + \left( u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \left[ u_z \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) - u_y \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right]. \quad (4.4)$$

Сума в перших дужках

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u_x^2}{2} + \frac{u_y^2}{2} + \frac{u_z^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right). \quad (4.5)$$

Згідно з формулами (3.38)

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} = 2\omega_y, \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = 2\omega_z. \quad (4.6)$$

Таким чином, проекція прискорення

$$a_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} + 2(u_z \omega_y - u_y \omega_z). \quad (4.7)$$

Діючи аналогічно, можна отримати відповідного вигляду вирази для  $a_y$  і  $a_z$ . Підстановка їх до системи (4.3) дає систему диференціальних рівнянь руху ідеальної рідини Ейлера у формі Громеки<sup>27</sup>-Лемба<sup>28</sup>

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right) + 2(u_z \omega_y - u_y \omega_z) \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u^2}{2} \right) + 2(u_x \omega_z - u_z \omega_x) \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{u^2}{2} \right) + 2(u_y \omega_x - u_x \omega_y) \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

у проекціях на осі координат і

$$\vec{F}' - \frac{1}{\rho} \text{grad} P = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \text{grad} \frac{u^2}{2} + 2\vec{\omega} \times \vec{u}. \quad (4.9)$$

у векторній формі.

#### 4.1.2 Інтеграл рівняння Ейлера. Рівняння Бернуллі для елементарної струминки ідеальної рідини і його тлумачення

Перепишемо систему (4.8) для усталеної течії ( $\partial u_x / \partial t = \partial u_y / \partial t = \partial u_z / \partial t = 0$ ) з урахуванням того, що масові сили мають потенціал (справедливі рівняння (2.24), у вигляді

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= -2(u_z \omega_y - u_y \omega_z) \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u^2}{2} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= -2(u_x \omega_z - u_z \omega_x) \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{u^2}{2} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= -2(u_y \omega_x - u_x \omega_y) \end{aligned} \right\}. \quad (4.10)$$

Помножимо перше рівняння на  $dx$ , друге на  $dy$ , третє на  $dz$  і, склавши їх, для нестисливої рідини дістанемо

$$d \left( \frac{P}{\rho} + \frac{u^2}{2} - \Phi \right) = -2 \left[ (u_z \omega_y - u_y \omega_z) dx + (u_x \omega_z - u_z \omega_x) dy + (u_y \omega_x - u_x \omega_y) dz \right]. \quad (4.11)$$

<sup>27</sup> Громека Іпполіт Степанович (1851–1889) – російський вчений-механік, професор Казанського університету, один з авторів рівняння течії ідеальної рідини.

<sup>28</sup> Лемб Горацій (1849–1934) – англійський математик і гідродинамік, член Лондонської королівської спілки, один з авторів рівняння течії ідеальної рідини. Дав опис хвилям, що поширюються у тонкому шарі твердого тіла. Тепер ці хвилі називають хвилями Лемба.

Праву частину цього рівняння можна представити у формі визначника

$$d\left(\frac{P}{\rho} + \frac{u^2}{2} - \Phi\right) = -2 \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ u_x & u_y & u_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix}. \quad (4.12)$$

Якщо визначник дорівнює нулю, то для нестисливої рідини рівняння (4.12) легко проінтегрувати

$$\frac{P}{\rho} + \frac{u^2}{2} - \Phi = C. \quad (4.13)$$

Отриманий результат називають *інтегралом Бернуллі*<sup>29</sup>. Він поширюється на усі види течій, для яких справедлива умова рівності нулю правої частини рівняння (4.12).

Відомо, що визначник дорівнює нулю, коли дорівнює нулю один з його рядків або елементи одного рядка пропорційні елементам іншого. Розглянемо можливі випадки і встановимо їх гідродинамічний зміст, пам'ятаючи, що вони справедливі для усталеного руху нестисливої рідини.

1.  $u_x = u_y = u_z = 0$ , тобто рідина не рухається. У цьому випадку інтеграл (4.13) набирає вигляду

$$-\Phi + \frac{P}{\rho} = C,$$

що цілком збігається із загальним інтегралом рівняння Ейлера для гідростатики (2.29). Таким чином, інтеграл Бернуллі справедливий для нерухомої рідини, а стала  $C$  є незмінною для усього об'єму.

2.  $dx = dy = dz = 0$ , що означає відсутність переміщення точки. Отже, сума величин, які входять до рівняння (4.13), для даної точки при усталеній течії незмінна.

3. Умова  $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$  відповідає умові потенціальної течії. Інтеграл (4.13) при цьому називають інтегралом Бернуллі для потенціального потоку, а стала  $C$  буде одною і тією самою для усього потоку.

Певний інтерес становить більш загальний випадок потенціального неусталеного руху. Оскільки  $\vec{\omega} = 0$ , то, як відомо з попереднього розділу, існує потенціал швидкості  $\phi$ , для котрого справедливі рівняння (3.74).

<sup>29</sup> Бернуллі Даніель (1700–1782) – видатний швейцарський математик, фізик, член Петербурзької, Болонської, Берлінської та Паризької академій наук, член Лондонської королівської спілки. Автор важливих праць у галузі математичної фізики та теорії диференціальних рівнянь. Він перший виступив з твердженням, що причиною тиску газу є тепловий рух молекул. У своїй класичній праці «Гідродинаміка» він вивів рівняння стаціонарної течії нестисливої рідини, яке лежить в основі динаміки рідин і газів та носить його ім'я. Дав одне з перших формулювань закону збереження енергії.

Оскільки для неусталеного руху  $\Phi$  є функцією не тільки координат, а і часу  $t$ , який розглядаємо як параметр, то

$$\text{grad} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \frac{P}{\rho} - \Phi \right) = 0. \quad (4.14)$$

З цього випливає, що вираз у дужках не залежить від координат, а залежить тільки від часу. Тому інтегрування рівняння (4.14)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \frac{P}{\rho} - \Phi = f(t), \quad (4.15)$$

де  $f(t)$  – довільна функція часу.

Співвідношення (4.15) називають *інтегралом Лагранжа* для неусталеного потенціального руху ідеальної рідини.

4.  $dx/\omega_x = dy/\omega_y = dz/\omega_z$  повністю збігається з диференціальним рівнянням вихрової лінії (3.44). Тому величина  $C$  буде незмінною для даної вихрової лінії (хоч для різних вихрових ліній вона може бути різною).

5. Рівність  $\omega_x/u_x = \omega_y/u_y = \omega_z/u_z$  є умовою так званого *гвинтового руху* рідини, коли вектори поступальної та кутової швидкостей збігаються (лінії течії збігаються з вихровими лініями). Подібні потоки можуть виникати, наприклад, при обтіканні крила, але все ж таки у природі та техніці вони вважаються досить рідкісними.

6. Вираз  $dx/u_x = dy/u_y = dz/u_z$  є диференціальним рівнянням лінії течії (3.11). Отже, стала  $C$  є незмінною для даної лінії течії (хоч для різних ліній течії одного потоку вона може бути різною). Рівняння (4.13) називають *інтегралом Бернуллі для лінії течії*. Він справедливий як для потенціального, так і вихрового рухів нестисливої рідини.

Цей випадок є виключно важливим для усієї гідромеханіки, тому розглянемо його більш докладно.

Перш ніж провести аналіз фізичного змісту отриманого співвідношення, згадаємо, що під час введення поняття про елементарну струминку одною з її властивостей називався рівномірний розподіл швидкостей в межах будь-якого поперечного перерізу. Це означає, що рівняння (4.13) справедливе для будь-якої точки, яка проходить всередині струминки. Тому це рівняння можна назвати *рівнянням Бернуллі для елементарної струминки ідеальної рідини*. Якщо течія відбувається тільки у полі сил земного тяжіння, то, як було показано раніше,  $\Phi = -gz$ . Отже, рівняння (4.13) набирає вигляду

$$gz + \frac{P}{\rho} + \frac{u^2}{2} = C, \quad (4.16)$$

а для двох довільних перерізів елементарної струминки ідеальної рідини

$$gz_1 + \frac{P_1}{\rho} + \frac{u_1^2}{2} = gz_2 + \frac{P_2}{\rho} + \frac{u_2^2}{2}. \quad (4.17)$$

Встановимо фізичний зміст величин, які входять до рівняння Бернуллі. Розглянемо складову  $u^2/2$ . Вона виражається у  $m^2/c^2$ . Помножимо чисельник і знаменник на  $кг$

$$m^2/c^2 = (m^2 \text{ кг}) / (c^2 \text{ кг}) = (H \text{ м}) / \text{кг} = \text{Дж/кг}.$$

Отже, ця складова виражає енергію, віднесену до одиниці маси, тобто питому енергію. Оскільки кожне правильне фізичне співвідношення є розмірнооднорідним (всі його члени виражаються в однакових одиницях), то зрозуміло, що і перші дві складові також виражають питому енергію. Це дозволяє надати рівнянню Бернуллі енергетичного змісту.

Перша складова характеризує питому енергію положення. Дійсно, якщо рідка частинка масою  $dm$  розташована на висоті  $z$  відносно деякої площини та знаходиться під дією сил тяжіння, то її потенціальна енергія відносно цієї площини дорівнює  $dmgz$ . Розділивши на  $dm$ , отримуємо *питому енергію положення*  $gz$ .

Друга складова є питомою енергією тиску. Щоб це довести, розглянемо резервуар з рідиною (рисунок 4.1), на вільній поверхні якої підтримується атмосферний тиск ( $P_n = 0$  і  $h_n = 0$ ). Створення надлишкового тиску  $P_n$  приведе до підняття рідини у дифманометрі на висоту  $h_n = P_n/\rho g$ . Робота сил тяжіння при переміщенні об'єму  $dV$  дорівнює  $A_m = -\rho g dV h_n$ . Саме настільки підвищиться потенціальна енергія рідини. Потенціальна енергія одиниці маси

$$\frac{A_m}{\rho dV} = \frac{\rho g dV h_n}{\rho dV} = \frac{P_n}{\rho}. \quad (4.18)$$

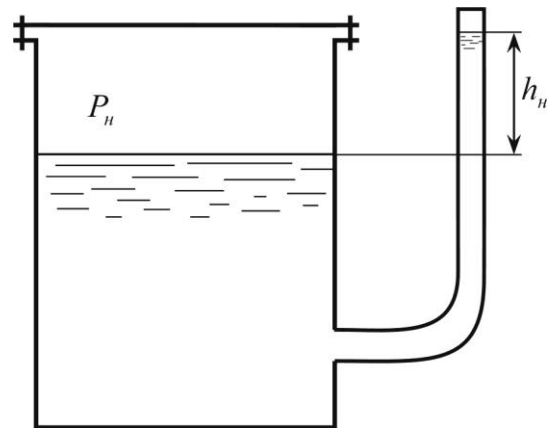


Рисунок 4.1 – До з'ясування фізичного змісту рівняння Бернуллі

Таким чином, одиниця маси рідини, що знаходиться під тиском  $P_n$ , має *потенціальну енергію тиску*  $P_n/\rho$ .

І нарешті, третя складова  $u^2/2$  характеризує *питому кінетичну енергію* рідини. Що це дійсно так, легко пересвідчитись, якщо згадати, що кінетична енергія фізичного тіла (у т. ч. і рідкого) дорівнює половині добутку маси на квадрат швидкості.

Отже, згідно з рівнянням (4.16) або (4.17) *повна питома енергія в будь-якому перерізі елементарної струминки ідеальної рідини є незмінною*. Тому рівняння Бернуллі можна вважати законом збереження енергії для рідини у



найпростішій формі – формі збереження механічної енергії: *вздовж елементарної струминки ідеальної рідини сума потенціальної та кінетичної енергій є величиною незмінною.*

Розділивши обидві частини рівняння (4.17) на прискорення вільного падіння  $g$ , отримаємо рівняння Бернуллі у формі напорів

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g}. \quad (4.19)$$

Кожний його член має розмірність довжини і являє собою напір:  $z$  – *геометричний*;  $P/\rho g$  – *п'єзометричний*;  $u^2/2g$  – *швидкісний*. Сума перших двох доданків називається *гідростатичним напором*. Таким чином, рівняння Бернуллі має геометричне тлумачення: *вздовж елементарної струминки ідеальної рідини сума трьох висот – геометричної  $z$ , п'єзометричної  $P/\rho g$  і швидкісної  $u^2/2g$  – є величиною незмінною.* На рисунку 4.2  $0-0$  – *площина (лінія) відліку*;  $P-P$  – *п'єзо-метрична лінія*;  $N-N$  – *напірна лінія, або лінія повного напору*. П'єзометрична лінія відображає зміну гідро-статичного напору вздовж струминки і таким чином характеризує зміну питомої потенціальної енергії. Зміна цієї енергії, віднесена до одиниці довжини струминки, – *п'єзометричний ухил*

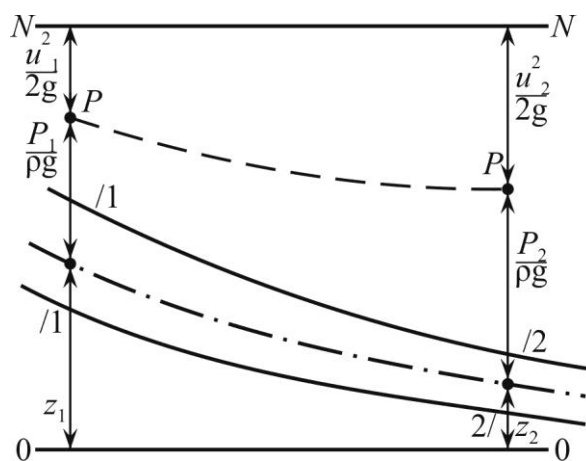


Рисунок 4.2 – Напірна і п'єзометрична лінії вздовж елементарної струминки ідеальної рідини

$$i_n = \frac{d\left(z + \frac{P}{\rho g}\right)}{dl}, \quad (4.20)$$

де  $dl$  – довжина елементарної ділянки струминки.

Середнє значення п'єзометричного ухилу на ділянці між перерізами 1–1 і 2–2 з довжиною  $l$  визначається

$$i_{n1-2} = \frac{\left(z_1 + \frac{P_1}{\rho g}\right) - \left(z_2 + \frac{P_2}{\rho g}\right)}{l}. \quad (4.21)$$

П'єзометричний ухил вважається позитивним, якщо вздовж потоку рідини гідростатичний напір знижується.

## 4.2 ГІДРОДИНАМІКА В'ЯЗКОЇ РІДИНИ

### 4.2.1 Модель в'язкої рідини

Перш ніж безпосередньо розглядати рух в'язкої рідини, усвідомимо термінологію, тобто зміст, який вкладають в поняття «в'язка рідина». З математичних позицій, це означає встановлення функціональних залежностей для напружень, що є дуже важливим, оскільки під час руху в'язкої рідини, окрім нормальних, діють і дотичні напруження.

Під в'язкою рідиною надалі будемо розуміти рідину, яка задовольняє три гіпотези: лінійності, однорідності та ізотропності.

Гіпотеза лінійності передбачає лінійну залежність між швидкостями відносних деформацій і напруженнями. Застосувавши формулу Ньютона (1.22) до рідини, яка рухається паралельно площині  $xoy$  (рисунок 4.3), можемо записати

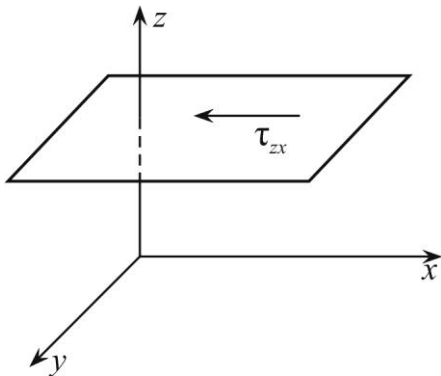


Рисунок 4.3 – До пояснення гіпотези лінійності

$$\tau_{zx} = \mu \frac{\partial u_x}{\partial z}. \quad (4.22)$$

Перший індекс вказує на вісь, яка перпендикулярна до площадки дії дотичного напруження; другий – вісь, на яку спроектоване це напруження.

У підрозділі 3.4 було показано, що швидкість кутової деформації відносно осі  $oy$

$$\gamma_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right). \quad (4.23)$$

Оскільки рух відбувається у площині, яка перпендикулярна до осі  $oz$ , то  $u_z = 0$  і

$$\gamma_y = \frac{1}{2} \frac{\partial u_x}{\partial z}. \quad (4.24)$$

Після підстановки рівняння (4.24) до (4.22) для  $\tau_{zx}$ , а за аналогією і для двох інших проекцій дістаємо

$$\tau_{zx} = 2\mu\gamma_y, \quad \tau_{xy} = 2\mu\gamma_z, \quad \tau_{zy} = 2\mu\gamma_x. \quad (4.25)$$

Отже, дотичні напруження пов'язані зі швидкостями кутової деформації лінійно, а коефіцієнт пропорційності дорівнює  $2\mu$ .

Гіпотеза однорідності передбачає, що гіпотеза лінійності справедлива для усіх точок рідини.

В'язка рідина вважається ізотропною, якщо властивості рідини в будь-якому напрямі у точці, що розглядається, однакові.

Важливо звернути увагу на таку обставину. Наявність в'язкості приводить не тільки до виникнення дотичних напружень, але й до змін

нормальних напружень порівняно з ідеальною рідиною. Тобто на відміну від рівняння (2.7), записаного для стану спокою, коли в'язкість не виявляється, під час руху в'язкої рідини

$$P_{xx} = -P + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad P_{yy} = -P + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad P_{zz} = -P + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (4.26)$$

Таким чином, просте уявлення про тиск, який діє однаково в усіх напрямках, стає неприйнятним для руху в'язкої рідини. Але завжди зручно оперувати деякою скалярною величиною, яка характеризувала б тиск у точці. Як таку величину використовують середнє арифметичне нормальних напружень зі знаком мінус

$$-\frac{1}{3}(P_{xx} + P_{yy} + P_{zz}) = P - \frac{2}{3}\mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = P - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \vec{u}. \quad (4.27)$$

Як відомо, для нестисливої рідини  $\operatorname{div} \vec{u} = 0$ . Тому

$$P = \frac{1}{3}(P_{xx} + P_{yy} + P_{zz}). \quad (4.28)$$

Величина  $P$  у даній точці рідини має одне й те саме значення для будь-яких трьох взаємно ортогональних площадок, що проходять через неї, тобто не залежить від орієнтації цих площадок.

Залежність (4.28) є гіпотезою і точно ніким не доведена. Але вона непрямо підтверджується практикою сучасної гідромеханіки, оскільки поки що немає фактів, котрі спростовували б цю гіпотезу.

#### 4.2.2 Диференціальні рівняння Нав'є-Стокса

Отримане раніше рівняння руху ідеальної рідини Ейлера (4.3) не може використовуватися для аналізу течії реальної (в'язкої) рідини, оскільки нехтування в'язкістю практично завжди призводить до кількісних, а часто і якісних помилок. Рівняння руху в'язкої рідини можна отримати з рівнянь руху в напруженнях. Для цього розглянемо, скажімо, перше рівняння системи (2.15)

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = X + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right).$$

Використавши рівняння (4.26) і (4.27), виконаємо таку дію:

$$3P_{xx} - (P_{xx} + P_{yy} + P_{zz}) = 3 \left( -P + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) - (-3P + 2\mu \operatorname{div} \vec{u}) = 6\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} - 2\mu \operatorname{div} \vec{u}. \quad (4.29)$$

Звідки, враховуючи рівність (4.28),

$$P_{xx} = 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \vec{u} + \frac{P_{xx} + P_{yy} + P_{zz}}{3} = -P + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \vec{u}. \quad (4.30)$$

Тоді

$$\frac{\partial P_{xx}}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \bar{u}. \quad (4.31)$$

Дотичні напруження з урахуванням формул (4.25), (3.35) і (3.37)

$$\tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right), \quad \tau_{zx} = \mu \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right). \quad (4.32)$$

Звідки

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = \mu \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right), \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \mu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial x} \right). \quad (4.34)$$

Склавши рівняння (4.31), (4.33) і (4.34), маємо

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial P}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \bar{u} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial x} \right) = \\ & -\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \bar{u} + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) = \\ & -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{3}\mu \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \bar{u} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Тобто, перше рівняння системи (2.15) набуває вигляду

$$\frac{du_x}{dt} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{3} \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \bar{u}. \quad (4.36)$$

Зважаючи, що  $\mu/\rho = \nu$  для рівняння (4.36), а за аналогією і для двох інших проекцій системи (2.15) маємо

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_x}{dt} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \bar{u} \\ \frac{du_y}{dt} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \bar{u} \\ \frac{du_z}{dt} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \bar{u} \end{aligned} \right\}. \quad (4.37)$$

Для нестисливої рідини  $\text{div} \vec{u} = 0$  і рівняння системи (4.37) скорочується до вигляду

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_x}{dt} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) \\ \frac{du_y}{dt} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) \\ \frac{du_z}{dt} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \right\}. \quad (4.38)$$

Отримана система диференціальних рівнянь описує течію в'язкої рідини. Її називають *системою диференціальних рівнянь Нав'є-Стокса*. У розгорнутому вигляді вона записується так:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} u_z - \nu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_y}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_y}{\partial z} u_z - \nu \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial u_z}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_z}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_z}{\partial z} u_z - \nu \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \right\}, \quad (4.39)$$

у стислому

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{du_x}{dt} - \nu \nabla^2 u_x \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{du_y}{dt} - \nu \nabla^2 u_y \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{du_z}{dt} - \nu \nabla^2 u_z \end{aligned} \right\}, \quad (4.40)$$

а у векторній формі

$$\vec{F}' - \frac{1}{\rho} \text{grad} P + \nu \nabla^2 \vec{u} = \vec{a}, \quad (4.41)$$

де  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – оператор Лапласа.

Рівняння Нав'є-Стокса можна розглядати як форму запису другого закону Ньютона стосовно рідкого середовища. Дійсно, права частина рівняння (4.41) є

<sup>30</sup> Нав'є Клод Луї Марі Анрі (1785–1836) – французький механік та інженер, автор важливих наукових праць з будівельної механіки, опору матеріалів, теорії пружності, гідромеханіки, зокрема вивів рівняння течії в'язкої рідини.

віднесеною до одиниці маси силою інерції, а ліва – сумою питомих масових сил, сил тиску і сил в'язкого тертя.

Мета гідродинамічного розрахунку – визначення полів швидкостей і тиску. Принципово це можливо, якщо систему (4.38) доповнити диференціальними нерозривності (3.19), оскільки при цьому чотирьом змінним ( $u_x, u_y, u_z, P$ ) відповідають чотири рівняння. Густина і в'язкість вважають відомими, а проекції  $X, Y$  і  $Z$  задають умовами конкретної задачі.

Оскільки загальні розв'язання диференціальних у часткових похідних містять довільні функції, то для отримання конкретних результатів слід їх визначити шляхом задання початкових і граничних умов.

*Початкові умови* задають у вигляді розподілу швидкостей у всьому об'ємі рідини в момент часу  $t_0$ , тобто у вигляді функцій  $u_x = f_1(x; y; z; t_0)$ ,  $u_y = f_2(x; y; z; t_0)$ ,  $u_z = f_3(x; y; z; t_0)$ . Їх задають тільки у випадку неусталеного руху (коли локальне прискорення не дорівнює нулю).

*Граничні умови* як з математичної, так і фізичної точки зору мають дуже важливе значення. Раніше зазначалося, що для ідеальної рідини граничною умовою є непроникність стінки – нормальна складова на твердій поверхні  $u_n^{cm} = 0$ . Оскільки для в'язкої рідини справедливий ефект прилипання, то при обтіканні твердого тіла в'язкою рідиною і дотична складова на поверхні дорівнює нулю. Отже, різниця між рухом ідеальної та в'язкої рідини визначається не тільки різницею самих рівнянь, а й граничними умовами.

Граничні умови на твердій поверхні залежать ще й від того, рухається тіло в нерухомій рідині чи нерухоме тіло обтікається потоком. У першому випадку швидкості рідини на поверхні дорівнюють швидкості тіла, а в другому – нулю.

Границею течії краплинної рідини може бути вільна поверхня, у всіх точках котрої тиск однаковий і дорівнює зовнішньому. Цю обставину також можна розглядати як одну з граничних умов.

На завершення зауважимо, що з математичних позицій система Нав'є-Стокса належить до класу нелінійних диференціальних у часткових похідних другого порядку. Таким чином, задача гідромеханіки зводиться до математичної. Оскільки математична теорія таких систем поки розроблена недостатньо, то до цього часу не вдалося отримати жодного загального розв'язання. Відомі лише окремі розв'язання для досить простих граничних умов, котрі розглядатимуться далі.

### 4.3 ПРИКЛАДИ ЗАДАЧ ДО РОЗДІЛУ 4

1. Визначіть місцеву швидкість повітря ( $\rho_n = 1,2 \text{ кг/м}^3$ ) за показанням  $U$ -подібного водяного дифманометра ( $\rho_v = 1000 \text{ кг/м}^3$ ),  $\Delta h = 15 \text{ мм вод. ст.}$ , котрий підключений до швидкісної трубки (трубки Піто-Прандтля).

Швидкісна трубка призначена для вимірювання місцевих швидкостей потоку газу або краплинної рідини. Схематично вона зображена на рисунку 4.4. Її принцип дії полягає у такому. Трубку розміщують у тій точці потоку, де слід визначити місцеву швидкість, носиком  $N$  строго назустріч потоку. Оскільки безпосередньо перед динамічним отвором  $D$  і

в самому отворі рідина не рухається, то в ньому встановлюється деякий тиск  $P_*$  (тиск гальмування), котрий подається на один з боків дифманометра. Розміри динамічного отвору невеликі, тому для двох перерізів, один з яких проходить через край динамічного отвору, а другий – через елементарну струминку, що є співвісною отвору і знаходиться на певній відстані від носика трубки, можна скористатися рівнянням Бернуллі для елементарної струминки ідеальної рідини (4.19). Для даного випадку воно приймає вигляд

$$\frac{P_*}{\rho g} = \frac{P_\infty}{\rho g} + \frac{u_\infty^2}{2g},$$

де  $P_\infty$  і  $u_\infty$  – тиск і швидкість набігаючого потоку на певній відстані від трубки; ( $z_1 = z_2$  – потік вважається горизонтальним).

Щілина  $S$  розташована врівень до стінки носика трубки. У цьому випадку тиск у щілині дорівнює тиску в незбуреному трубою потоці  $P_\infty$  (щілину називають статичним отвором, а тиск у ній – статичним тиском).

Таким чином, з динамічного отвору на дифманометр подається тиск  $P_*$ , а зі статичного отвору –  $P_\infty$ . Отже, перепад на дифманометрі  $\Delta h$  відповідає швидкісному напорові

$$\rho_n g \Delta h = \frac{\rho_n u_\infty^2}{2}.$$

Звідки

$$u_\infty = \sqrt{\frac{2g\Delta h\rho_n}{\rho_n}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \cdot 0,015 \cdot 1000}{1,2}} = 15,7 \text{ м/с}.$$

Слід зауважити, що хоч швидкісну трубку виготовляють невеликих розмірів з добре обтічним носиком, вона все ж трохи захаращує потік і вносить у нього деяке збурення. Тому розраховане значення місцевої швидкості слід помножити на так званий калібровий коефіцієнт, величина котрого визначається дослідним шляхом і близька до одиниці.

2. *Нестислива рідина під дією сталого перепаду тиску  $\Delta P$ , що створений на ділянці довжиною  $l$ , усталено тече між двома горизонтальними нерухомими пластинами, відстань між якими  $h$ . Ширина каналу настільки велика відносно до  $h$ , що впливом бокових стінок на потік можна нехтувати. Нехтуючи також дією масових сил і вважаючи, що лінії течії – горизонтальні прямі, визначити вигляд епюри швидкості.*

Спрямуємо вісь  $ox$  вздовж ліній течії, а інші осі – як це показано на рисунку 4.5. Для таких умов проєкції  $u_y = u_z = 0$ ,  $u_y (\partial u_x / \partial y) = 0$ ,  $u_z (\partial u_x / \partial z) = 0$  і  $\partial^2 u_x / \partial z^2 = 0$ . З рівняння нерозривності (3.19) випливає, що  $\partial u_x / \partial x = 0$ , а тому і  $\partial^2 u_x / \partial x^2 = 0$ .

Ясно, що локальні складові прискорення та всі нелінійні члени другого і третього рівнянь системи Нав'є-Стокса (4.37) також дорівнюють нулю. Крім того, з умови задачі  $X = Y = Z = 0$ . Отже, система (4.37) спрощується до вигляду

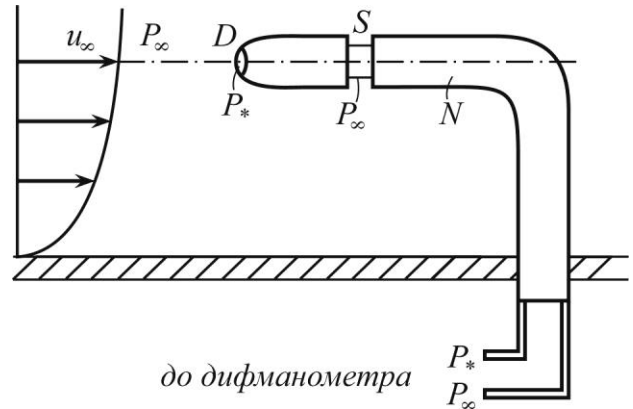


Рисунок 4.4 – До задачі 1

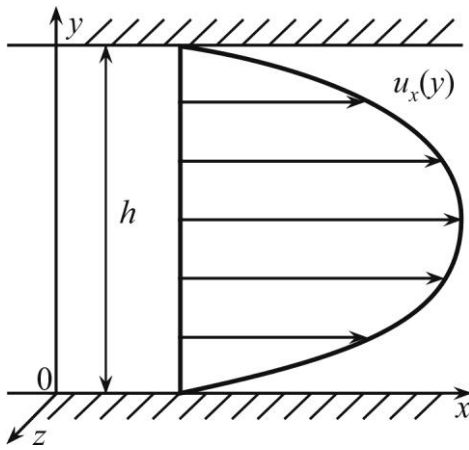


Рисунок 4.5 – До задачі 2

$$\nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 0.$$

Оскільки  $u_x$  і  $P$  залежать від різних координат, то від часткових похідних можна перейти до повних

$$\nu \frac{d^2 u_x}{dy^2} - \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} = 0.$$

$\partial P / \partial x$  характеризує зміну тиску вздовж потоку. Тому для даної задачі можна прийняти  $\partial P / \partial x = -\Delta P / l$  (знак мінус – оскільки вздовж осі  $ox$  тиск зменшується). Розділивши змінні та проінтегрувавши останнє рівняння, отримуємо

$$u_x = -\frac{1}{2\mu} \frac{\Delta P}{l} y^2 + C_1 y + C_2.$$

Для визначення сталих інтегрування задамося такими граничними умовами: при  $y = 0$   $u_x = 0$  (оскільки для в'язкої рідини діє ефект прилипання), тому  $C_2 = 0$ , при  $y = h$  також  $u_x = 0$ , тому

$$0 = -\frac{1}{2\mu} \frac{\Delta P}{l} h^2 + C_1 h.$$

Звідки

$$C_1 = \frac{1}{2\mu} \frac{\Delta P}{l} h.$$

Таким чином,

$$u_x = -\frac{1}{2\mu} \frac{\Delta P}{l} y^2 + \frac{1}{2\mu} \frac{\Delta P}{l} h y = \frac{1}{2\mu} \frac{\Delta P}{l} y(h - y).$$

Отже, еюра швидкості є квадратичною параболою.

Зауважимо, що отриманий закон розподілу швидкостей при усталеній течії нестисливої рідини між двома нерухомими плоскими поверхнями справедливий тільки для так званого ламінарного режиму течії, оскільки для іншого режиму (турбулентного) система дифрівнянь Нав'є-Стокса використовуватися не може. Причина цього, як і самі режими течії, буде розглянута далі.



## 5 ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПОДІБНОСТІ

Кінцевою метою кожного наукового дослідження є побудова математичної моделі, яка з тим чи іншим ступенем наближення описує досліджуваний об'єкт або процес. Ступінь наближення залежить від того, наскільки повно враховані усі властивості та взаємозв'язки предмета вивчення. Очевидно, що чим більш повно враховані всі ці фактори, тим складнішою буде модель і тим важчою буде задача отримання на її основі конкретних прикладних результатів. Так, наприклад, система диференціальних рівнянь Ейлера для гідродинаміки є математичною моделлю руху ідеальної рідини. Для більшості випадків течії реальних (в'язких) рідин вона дає неадекватні результати. Тому для аналізу течії реальних рідин виникла очевидна потреба врахувати в'язкість, що привело до системи диференціальних рівнянь Нав'є-Стокса, яка принципово описує будь-які випадки течії в'язкої рідини. Але, як зазначалося раніше, складність інтегрування системи не дозволяє для переважної більшості інженерних задач отримати конкретні результати.

Таким чином, прикладна гідромеханіка, незважаючи на високий рівень розвитку сучасної гідродинамічної теорії, лишається значною мірою експериментальною наукою. При цьому головну роль відіграє фізичне моделювання, або експеримент на *фізичній моделі*, під якою розуміють зменшений (рідше збільшений) об'єкт дослідження.

Інколи дослідження за допомогою фізичних моделей є єдиним можливим способом вивчення практично важливих процесів, для яких не вдається побудувати математичні моделі, або якщо ці моделі неможна проінтегрувати. Так, процеси, які тривають протягом багатьох років чи навіть століть, не можна дослідити в природі, але можна протягом порівняно короткого часу вивчити на моделях. До таких процесів належать, наприклад, фільтрація нафти в землі, виникнення русел річок, прогнозування поведінки великих гідротехнічних споруд, робота гідравлічних машин та апаратів тощо. При цьому виникають три основні питання: 1) за якими принципами слід будувати модель; 2) які величини слід вимірювати при проведенні дослідів; 3) як перенести результати дослідів на натурний об'єкт? На всі ці запитання дає відповідь *теорія подібності*, котра є основою сучасного фізичного, у т. ч. і гідродинамічного, експерименту.

### 5.1 ГІДРОДИНАМІЧНА ПОДІБНІСТЬ

Перш ніж безпосередньо перейти до розгляду гідродинамічної подібності, дамо визначення подібності взагалі. *Два об'єкти або процеси вважаються подібними, якщо за характеристиками одного з них можна отримати характеристики іншого простим перерахунком, аналогічним переходу від однієї системи одиниць до іншої.*

Для гідродинамічної подібності потоків необхідні їх геометрична, кінематична і динамічна подібності.

Два потоки є геометрично подібними, якщо між їх відповідними лінійними розмірами (рисунок 5.1) існує постійне співвідношення

$$L_n/L_m = k_l = \text{const}, \quad (5.1)$$

де  $k_l$  – геометричний масштаб; (індекси  $n$  і  $m$  вказують на натурний об'єкт і модель).

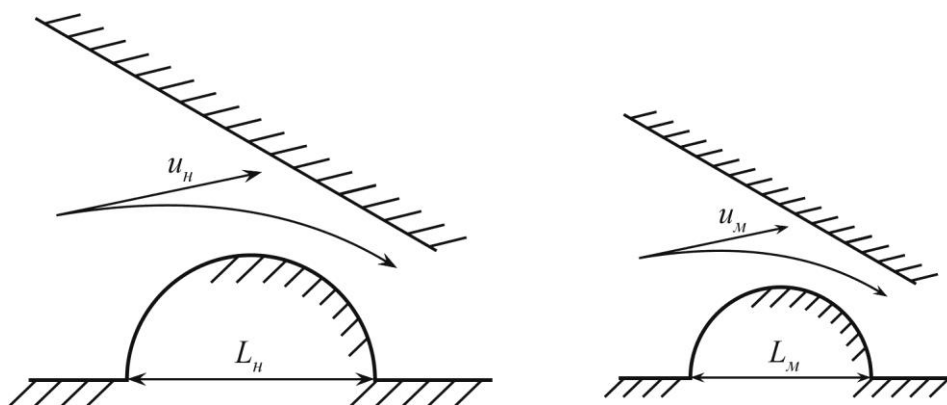


Рисунок 5.1 – До геометричної та кінематичної подібностей

Зрозуміло, що співвідношення площ

$$A_n/A_m = k_l^2, \quad (5.2)$$

а об'ємів

$$V_n/V_m = k_l^3. \quad (5.3)$$

При моделюванні гідродинамічних процесів розрізняють геометричну подібність «у великому» і «у малому». Перша передбачає геометричну подібність границь потоків і може бути достатньо просто реалізована; друга, крім того, ще й подібність шорсткості стінок натурального і модельного об'єктів. Очевидно, що моделювання шорсткості практично неможливе, тому геометрична подібність «у малому» вважається недосяжною.

Два потоки вважаються кінематично подібними при подібності полів швидкостей і прискорень, яке виконується, якщо швидкості  $u_n$  і  $u_m$  та прискорення  $a_n$  і  $a_m$  у відповідних точках природи і моделі знаходяться в однакових співвідношеннях

$$\frac{u_n}{u_m} = \frac{L_n/t_n}{L_m/t_m} = \frac{L_n t_m}{L_m t_n} = \frac{k_l}{k_t} = k_u = \text{const}, \quad (5.4)$$

$$\frac{a_n}{a_m} = \frac{L_n / t_n^2}{L_m / t_m^2} = \frac{k_l}{k_t^2} = \frac{k_u}{k_t} = k_a = \text{const}, \quad (5.5)$$

де  $k_t$ ,  $k_u$  і  $k_a$  – масштаби часу, швидкості та прискорення.

З кінематичної подібності потоків випливає геометрична подібність їх ліній течії.

Дійсно, лінії течії натурального і модельного потоків

$$\frac{dx_n}{u_{xn}} = \frac{dy_n}{u_{yn}}; \quad \frac{dx_m}{u_{xm}} = \frac{dy_m}{u_{ym}}. \quad (5.6)$$

Якщо має місце кінематична подібність, то

$$\frac{dx_n}{dx_m} = \frac{dy_n u_{xn} u_{ym}}{dy_m u_{xm} u_{yn}} = \frac{dy_n}{dy_m}, \quad (5.7)$$

або

$$\frac{dy_n}{dx_n} = \frac{dy_m}{dx_m}. \quad (5.8)$$

Це означає, що у відповідних точках кути нахилу дотичних до лінії течії однакові, з чого випливає їх геометрична подібність.

*Динамічна подібність* полягає у подібності багатокутників сил, що діють на відповідні рідкі частинки. Згідно з законом Ньютона підсумкова цих сил

$$F = ma = m \frac{du}{dt}. \quad (5.9)$$

Тому для кожної рідкої частинки двох динамічно подібних систем

$$\frac{F_n}{F_m} = \frac{m_n a_n}{m_m a_m} = \frac{m_n u_n t_m}{m_m u_m t_n} = \frac{\rho_n V_n u_n t_m}{\rho_m V_m u_m t_n} = \frac{\rho_n L_n^3 u_n t_m}{\rho_m L_m^3 u_m t_n}. \quad (5.10)$$

За сенсом  $L/t = u$ , тому

$$\frac{F_n}{F_m} = \frac{\rho_n L_n^2 u_n^2}{\rho_m L_m^2 u_m^2} = k_\rho k_l^2 k_u^2 = k_F = \text{const}, \quad (5.11)$$

де  $k_\rho$  і  $k_F$  – масштаби густини та сили.

Отриманий результат називається *законом динамічної подібності Ньютона* у коефіцієнтах подібності.

Згрупуємо рівність (5.11) по-іншому:

$$\frac{F_n}{\rho_n L_n^2 u_n^2} = \frac{F_m}{\rho_m L_m^2 u_m^2} = \text{Ne}. \quad (5.12)$$

Ця рівність є умовою *повної динамічної подібності*. Число Ne – *критерій* (число) *Ньютона*. Отже, дві системи динамічно подібні, якщо у всіх відповідних точках  $\text{Ne}_n = \text{Ne}_m$ . З рівності (5.11) видно, що динамічно подібними можуть бути тільки геометрично і кінематично подібні системи.

На рисунку 5.2 показані багатокутники сил, що діють на відповідні рідкі частинки натури та моделі. Сила тяжіння позначена  $F_m$ , тиску –  $F_p$ , тертя  $F_{mp}$ , інерції –  $F_i$ . Якщо виконується умова

$$\frac{F_m^H}{F_m^M} = \frac{F_p^H}{F_p^M} = \frac{F_{mp}^H}{F_{mp}^M} = \frac{F_i^H}{F_i^M} = k_F, \quad (5.13)$$

то системи перебувають у стані *повної динамічної подібності*.

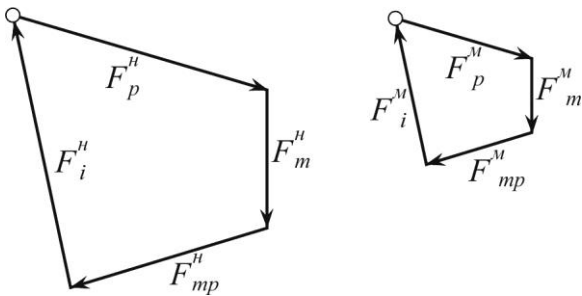


Рисунок 5.2 – Повна динамічна подібність натури та моделі

Оскільки розглянуті сили мають різну фізичну природу, виконати умову повної динамічної подібності натури та моделі неможливо. Однак існує досить широкий клас течій, які викликані дією на рідину, в основному, якої-небудь одної (переважаючої) сили. У цьому випадку враховують цю силу і силу інерції, а інші до уваги не беруть.

Таку динамічну подібність називають *частковою*, а відповідні критерії (числа) – критеріями часткової динамічної подібності, або просто *критеріями подібності*.

Таким чином, маємо змогу відповісти на поставлені раніше питання. По-перше, модель слід будувати так, щоб вона була геометрично подібною натурі. По-друге, для забезпечення динамічної подібності немає потреби, щоб усі величини, які впливають на процес у натурі, чисельно дорівнювали аналогічним величинам на моделі. Достатньо рівності критеріїв подібності, а при проведенні дослідів необхідно вимірювати ті величини, які до цих критеріїв входять. І нарешті, по-третє, як впливає з визначення подібності, результати, отримані на моделі, можна поширити на натуру простим арифметичним перерахунком. Але відкритим поки що лишається дуже важливе питання, без відповіді на яке практичне застосування теорії подібності неможливе, а саме: як

визначити ті критерії подібності, що характеризують процес? Це питання потребує окремого розгляду.

## 5.2 ІНСПЕКЦІЙНИЙ АНАЛІЗ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ. АВТОМОДЕЛЬНІСТЬ

Одним з методів визначення чисел подібності є *інспекційний аналіз дифрівнянь*. Як випливає з самої назви, метод полягає у своєрідному «інспекцію ванні» диференціальних рівнянь, котре повинно виявити числа подібності, що, у свою чергу, дозволяє правильно моделювати процес.

В основі інспекційного аналізу лежить таке положення: якщо дві системи описуються однаковими дифрівняннями і мають однакові граничні умови та якщо значення усіх параметрів у цих рівняннях і граничних умовах теж однакові, то при умові існування одного розв'язку ці дві системи подібні.

Інспекційний аналіз можна розглядати як певний алгоритм дій. На першому етапі диференціальні величини замінюють на самі змінні, а на другому рівняння приводять до безрозмірного вигляду шляхом ділення всіх його членів на один з них, котрий вибирається довільно.

Основним дифрівнянням гідромеханіки, яке описує рух в'язкої рідини, є рівняння Нав'є-Стокса. Розглянемо одну з його проекцій в декартовій системі координат. У даному випадку все одно, яку, оскільки структура рівнянь однакова, що забезпечить і однаковість отриманих результатів.

Вважаючи, що з масових сил діє тільки сила тяжіння, тобто  $X = g \cos \alpha$  ( $\cos \alpha$  враховує знак), запишемо проекцію на вісь  $ox$  у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u_x}{\partial t} + \rho \left( u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = \\ = \rho g \cos \alpha - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho \nu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right). \end{aligned}$$

Кожна складова виражає силу, віднесену до одиниці об'єму: перша і друга – *сили інерції*  $F_{i1}$  і  $F_{i2}$ , третя – *сила тяжіння*  $F_m$ , четверта – *сила тиску*  $F_P$ , п'ята – *сила в'язкого тертя*  $F_{mp}$ .

Відповідно до алгоритму замінимо диференціальні співвідношення відношенням самих величин

$$F_{i1} \approx \frac{\rho u}{t}; \quad F_{i2} \approx \frac{\rho u^2}{L}; \quad F_m \approx \rho g; \quad F_P \approx \frac{\Delta P}{L};$$

$$F_{mp} \approx \nu \rho \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \approx \nu \rho \frac{u}{L^2}.$$

А тепер приведемо ці співвідношення до безрозмірного вигляду, розділивши кожне з них на  $F_{i2}$ , тобто на силу інерції.

Отже,

$$\frac{F_{i1}}{F_{i2}} = \frac{L}{tu} = \text{Sh} \quad (5.14)$$

називається *критерієм Струхаля*, або числом гомохромності. Його використовують при моделюванні систем, в яких переважають сили інерції, обумовлені нестационарністю руху.

$$\frac{F_m}{F_{i2}} = \frac{gL}{u^2}, \quad (5.15)$$

а обернена величина

$$\frac{u^2}{gL} = \text{Fr} \quad (5.16)$$

називається *критерієм Фруда*, який характеризує відношення сил інерції до сил тяжіння. Отже, для забезпечення часткової подібності при переважній дії сил тяжіння моделювати процес слід за числом Фруда.

Величина

$$\frac{F_P}{F_{i2}} = \frac{\Delta P}{\rho u^2} = \text{Eu} \quad (5.17)$$

характеризує відношення сил тиску до сил інерції та називається *критерієм Ейлера*.

$$\frac{F_{mp}}{F_{i2}} = \frac{\nu}{uL}, \quad (5.18)$$

а обернена величина

$$\frac{uL}{\nu} = \text{Re} \quad (5.19)$$

називається *критерієм Рейнольдса*, котрий характеризує відношення сил інерції до сил в'язкого тертя і використовується при переважаючій дії сил в'язкого тертя.

Таким чином, при моделюванні гідродинамічних процесів слід використовувати числа подібності Струхаля, Фруда, Ейлера і Рейнольдса.

Звернемо увагу на одну важливу обставину. Рівняння Нав'є-Стокса описує досить широке коло течій (рух рідини в трубах, каналах, водоймищах, рух атмосферних повітряних мас тощо). Тому його розв'язання багатозначне. Оскільки інженера цікавить, як правило, конкретна течія, то йому потрібний один цілком конкретний розв'язок, який відповідає процесу, що вивчається. Цього можна досягти, якщо при постановці задачі ввести додаткові умови та фізичні властивості рідкого середовища, відомості про початковий стан

системи (початкові умови) і про її стан на границях (граничні умови). Ці додаткові умови називаються умовами однозначності.

Критерії подібності Sh, Fr, Re складені з параметрів, які входять в умови однозначності. Тому ці критерії називаються визначальними. У число Ейлера входить величина  $\Delta P$  (перепад тиску), котру, як правило, необхідно визначити. Іншими словами, величину Eu можна розглядати як наслідок (результат) процесу. Такі числа подібності називають невизначальними. З математичної точки зору це можна представити у вигляді

$$Eu = f(\text{Sh}; \text{Fr}; \text{Re}). \quad (5.20)$$

Для усталеного руху

$$Eu = f(\text{Fr}; \text{Re}). \quad (5.21)$$

Як вже відмічалось раніше, моделювати процеси, в яких діють декілька сил, котрі необхідно врахувати, досить складно. Нехай до рідини одночасно прикладені сили тяжіння і в'язкого тертя. Тоді, згідно із залежністю (5.21), при моделюванні повинні дотримуватися умови

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_n L_n}{\nu_n} &= \frac{u_m L_m}{\nu_m} \\ \frac{u_n^2}{L_n} &= \frac{u_m^2}{L_m} \end{aligned} \right\} \quad (5.22)$$

(вважаємо, що  $g_n = g_m$ ).

З першої рівності випливає, що масштаб швидкості  $k_u = k_l^{-1} k_v$  (де  $k_v$  – масштаб в'язкості). При моделюванні геометричний масштаб, як правило, задають виходячи з умов лабораторії та економічних міркувань.

З другої рівності  $k_u = k_l^{0,5}$ . Отже, при одночасному моделюванні за Re і Fr  $k_v / k_l = k_l^{0,5}$ , або  $\nu_m = \nu_n / k_l^{1,5}$ . Якщо розміри моделі менші, ніж в натурі, то і рідину слід використовувати з меншою в'язкістю. При моделюванні потоків малов'язких рідин, наприклад води, ця обставина призводить до серйозних ускладнень. Цих ускладнень легко уникнути, якщо серед сил, що діють на рідину, можна виділити одну переважаючу. Так, для відкритих потоків цією силою є сила тяжіння, а отже, моделювання слід проводити за критерієм Фруда ( $\text{Fr}_m = \text{Fr}_n$ ). Для напірних потоків (рух рідин в трубах, проточних частинах гідромашин, витратомірах тощо) переважною є сила в'язкого тертя, тобто моделювати слід за числом Рейнольдса ( $\text{Re}_m = \text{Re}_n$ ). Приблизний графік залежності  $Eu = f(\text{Re})$

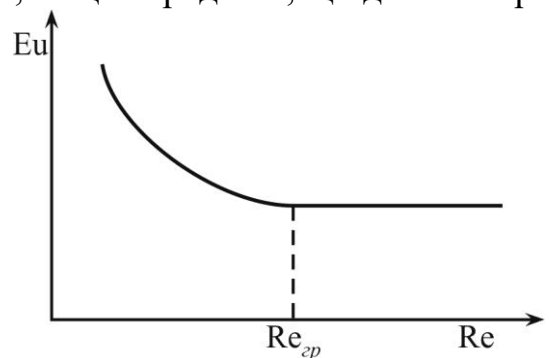


Рисунок 5.3 – Автомоделність

показаний на рисунку 5.3. Як видно, зі зростанням  $Re$  залежність  $E_u = f(Re)$  слабкішає. При деякому числі Рейнольдса, яке називають граничним ( $Re_{gr}$ ), число Ейлера перестає залежати від  $Re$ . Це означає, що механізм гідродинамічного процесу такий, при якому ніяких особливих умов для подібності не треба і всі процеси такого типу автоматично подібні між собою. Цей випадок називають *автомодельністю*.

У загальному випадку *під автомодельністю розуміють незалежність деякої величини, яка характеризує гідродинамічний процес, від того чи іншого критерію подібності*. Відповідну область на графіку називають *автомодельною*.

Поняття автомодельності має велике значення для гідравлічного експерименту, оскільки в автомодельній області не треба турбуватися, щоб  $Re_m = Re_n$ . Достатньо лише виконати умову  $Re_m > Re_{gr}$ . Але граничне число Рейнольдса не є універсальним і для різних процесів воно може бути різним. Тому часто задача першого етапу експерименту полягає у визначенні  $Re_{gr}$ .

Крім розглянутих вище, існують й інші критерії подібності. Так, наприклад, в умовах переважної дії сил поверхневого натягу використовують *критерій Вебера*

$$We = \frac{\rho u^2 L}{\sigma}, \quad (5.23)$$

де  $\sigma$  – коефіцієнт поверхневого натягу;

а в умовах, коли на рух рідкого середовища суттєво впливає стисливість, визначальним є *критерій Маха*

$$M = \frac{u}{c}, \quad (5.24)$$

де  $c$  – швидкість поширення звуку в рідині.

На завершення зробимо одне досить важливе зауваження стосовно переносу результатів з моделі на натурний об'єкт. Як показує досвід, моделювання за класичними принципами теорії подібності не забезпечує точного масштабного переходу. Це означає, що ефективність різного роду технологічних апаратів і процесів в натурних умовах, як правило, нижча, ніж на їх моделі. У цьому полягає так званий *масштабний ефект*. Дослідження останніх років показали, що його виникнення пов'язане з суто гідродинамічними явищами: нерівномірністю розподілу швидкостей по перерізах апаратів, збільшенням масштабу турбулентності тощо. Встановлення причин масштабного ефекту дозволяє лише певною мірою уникати його наслідків. Крім того, слід пам'ятати про неможливість дотримання геометричної подібності «у малому», що також негативно впливає на відповідність результатів моделі та натурального об'єкта. Таким чином, фізичне моделювання процесів і об'єктів дозволяє отримати хоч в цілому і адекватні, але все ж таки дещо приблизні результати.



### 5.3 МЕТОД АНАЛІЗУ РОЗМІРНОСТЕЙ

У випадку коли не вдається побудувати математичну модель процесу і застосування інспекційного аналізу неможливе, використовується так званий *метод аналізу розмірностей*. Кінцевою його метою є складення безрозмірних комплексів, за якими слід моделювати процес, але розв'язується ця задача в умовах досить обмеженої інформації про його характер і механізм.

Ще зі шкільного курсу фізики відомо, що кожен об'єкт або процес має ряд властивостей або параметрів, які обов'язково мають кількісну міру. При цьому кожна властивість або параметр характеризується розміром тієї чи іншої фізичної величини. Одиниці деяких фізичних величин можна вибирати довільно. Такі одиниці називаються основними. За їх допомогою складаються інші, які називають похідними. Так, для механіки основними одиницями є кілограм, метр, секунда, а одиниці, наприклад тиску (Паскаль) або сили (Ньютон), є похідними.

Оскільки держави не можуть домовитися між собою про єдину систему одиниць, то й до цього часу існують різні системи. Наприклад, лінійний розмір можна вимірювати в дюймах, метрах, мілях, футах... Але зрозуміло, що якими б одиницями розмірностей ми не користувались, дійсний розмір фізичної величини від цього не залежить, тобто відношення розмірів двох об'єктів – величина незмінна і не залежить від того, в яких одиницях вони виражені. Крім того, в будь-якій розмірній системі фізичний зміст, який вкладається в похідні одиниці, однаковий. Якими б основними одиницями ми не користувались, наприклад одиниця сили  $F$  – це сила, котра змінює в одиницю часу  $T$  швидкість одиниці маси  $M$  на одиницю швидкості. Символічно це можна записати у вигляді

$$\dim F = MLT^{-2} \quad (5.25)$$

(*dimension* – розмірність).

Аналогічно розмірність тиску  $P$  розглядаємо як одиницю сили, що приходить на одиницю площі,

$$\dim P = MLT^{-2} L^{-2} = MT^{-2} L^{-1} \quad (5.26)$$

незалежно від системи одиниць, в яких вимірюються маса, час та довжина.

Це є передумовою положення про те, що рівняння, які пов'язують ті чи інші властивості та параметри процесів, виражають конкретні закони та тому їх структура не повинна залежати від системи одиниць вимірювань. Більш того, кожне правильне фізичне співвідношення неодмінно повинне бути розмірно-однорідним. Це означає, що його члени і в лівій, і в правій частинах повинні мати однакову розмірність (зрозуміло, що ніяк не можна складати довжину з масою або з часом).

Отже, враховуючи наведене вище, можна встановити деякі загальні властивості рівнянь. Знання цих властивостей дозволить у багатьох випадках прогнозувати структуру шуканих зв'язків між фізично розмірними і безрозмірними величинами під час вивчення того чи іншого процесу, коли відсутній його достовірний математичний опис. Саме у визначенні цих структурних зв'язків полягає основна задача методу аналізу розмірностей.

Головним оперативним засобом розмірнісного аналізу є так звана *π-теорема*. Інколи її називають *теоремою Букінгема*, хоч відомо, що до її формулювання і виведення причетні й інші досить відомі вчені.

*π-теорема* встановлює зв'язок між функцією, котра виражена через розмірні параметри, і функцією в безрозмірній формі. Її можна сформулювати так: *будь-яка функціональна залежність між  $t$ -розмірними величинами може бути представлена у вигляді залежності між  $N$  безрозмірними комплексами (числами  $\pi$ ), що складені з цих величин*. Число таких комплексів  $N = t - n$ , де  $n$  – число основних одиниць (в гідромеханіці  $n = 3$  ( $k_2, m, c$ )).

Сутність цієї теореми полягає у такому. Якщо будь-яка змінна  $A_1$  залежить тільки від незалежних змінних  $A_2, A_3, \dots, A_m$  і більше ні від яких, то загальне функціональне співвідношення може бути записане у формі  $A_1 = f(A_2, A_3, \dots, A_m)$ . Внаслідок математичної рівноваги між залежними та незалежними змінними вони можуть бути згруповані в інше функціональне співвідношення, яке дорівнює нулю:  $f_2(A_1, A_2, A_3, \dots, A_m) = 0$ ; (для пояснення розглянемо приклад: якщо  $x = f_1(y) = 2y$ , то  $x - 2y = f_2(x; y) = 0$ ).

*π-теорема* встановлює, що коли  $t$  змінних можуть бути виражені через  $n$  основних розмірних одиниць, то їх можна згрупувати в  $N = t - n$  безрозмірних комплексів  $f_3(\pi_1; \pi_2; \dots; \pi_{m-n})$ .

Таким чином, використання аналізу розмірностей передбачає на першому етапі встановлення змінних, від яких залежить процес, а на другому – приведення залежності до безрозмірного вигляду з подальшим визначенням чисел подібності. Перший етап має творчий характер і є головним, тому що від того, наскільки вірні та повні наші уявлення про процес, залежить, наскільки повно враховані властивості та параметри, котрі впливають на цей процес. Кожна помилка на цьому етапі неминуче призведе до помилкових кінцевих результатів.

Крім того, зауважимо, що метод аналізу розмірностей далеко не завжди дозволяє встановити остаточний вид шуканої залежності та не є універсальним засобом розв'язання гідродинамічних задач. Однак він досить корисний, коли інформації про взаємний зв'язок між параметрами, що визначають процес, недостатньо, оскільки дозволяє провести початковий аналіз із встановленням структури шуканих залежностей, а це, у свою чергу, дає можливість більш раціонально організувати експериментальні дослідження.

Кращим шляхом для усвідомлення методу розмірностей є розгляд конкретних прикладів.

## 5.4 ПРИКЛАДИ ЗАДАЧ ДО РОЗДІЛУ 5

1. Встановити вид функціональної залежності для падіння тиску  $\Delta P$ , що виникає при течії рідини в трубі з довжиною  $l$  і діаметром  $d$  внаслідок дії сил в'язкого тертя.

З уявлень про фізичну сутність явища можна передбачити, що величина  $\Delta P/l$  повинна залежати від середньої швидкості  $v$ , діаметра  $d$  і шорсткості внутрішньої поверхні труби  $k$ , густини  $\rho$  і в'язкості рідини  $\mu$ .

Отже,

$$\Delta P/l = f_1(v; d; k; \rho; \mu),$$

або

$$f_2(\Delta P/l; v; d; k; \rho; \mu) = 0.$$

Відповідно до  $\pi$ -теорема число  $m = 6$ . Тому число безрозмірних комплексів  $\pi$   $N = m - n = 6 - 3 = 3$ , тобто після відповідної обробки остання формула має набрати вигляду

$$f_3(\pi_1; \pi_2; \pi_3) = 0.$$

Існує декілька методів визначення чисел  $\pi$ . Використаємо метод Релея, основною перевагою котрого є те, що він являє собою своєрідний алгоритм, який приводить до розв'язання задачі.

З числа  $m$  розмірних величин виберемо три величини, в які входили б основні одиниці ( $\kappa z$ ,  $m$ ,  $c$ ). Нехай ними будуть  $\rho$ ,  $d$  і  $v$ . Числа  $\pi$  утворюються у вигляді степеневого одночлена з обраних величин і одного з тих, що залишилися,

$$\pi_1 = v^{x_1} d^{y_1} \rho^{z_1} \Delta P/l;$$

$$\pi_2 = v^{x_2} d^{y_2} \rho^{z_2} \mu;$$

$$\pi_3 = v^{x_3} d^{y_3} \rho^{z_3} k.$$

Далі треба знайти усі показники степеня  $x_1, y_1, \dots, z_3$  виходячи з умов, що числа  $\pi$  повинні бути безрозмірними. Для цього визначимо розмірності усіх величин:

$$\dim v = LT^{-1}; \dim d = L; \dim \rho = ML^{-3}.$$

В'язкість

$$[\mu] = Pa \cdot c = (H \cdot c)/m^2 = \kappa z/(m \cdot c),$$

тобто

$$\dim \mu = ML^{-1}T^{-1}.$$

Параметр

$$[\Delta P/l] = Pa/m = H/m^3 = \kappa z/(c^2 \cdot m^2),$$

тобто

$$\dim \Delta P/l = MT^{-2}L^{-2}.$$

Шорсткість поверхні труби характеризується висотою виступів нерівностей, тому  $\dim k = L$ .

Таким чином,

$$\dim \pi_1 = (LT^{-1})^{x_1} L^{y_1} (ML^{-3})^{z_1} MT^{-2}L^{-2},$$

або

$$\dim \pi_1 = L^{x_1+y_1-3z_1-2} T^{-x_1-2} M^{z_1+1}.$$

Аналогічно

$$\dim \pi_2 = L^{x_2+y_2-3z_2-1} T^{-x_2-1} M^{z_2+1};$$

$$\dim \pi_3 = L^{x_3+y_3-3z_3+1} T^{-x_3} M^{z_3}.$$

Зрозуміло, що умовою безрозмірності  $\pi_1$  є вираз

$$L^{x_1+y_1-3z_1-2} T^{-x_1-2} M^{z_1+1} = L^0 T^0 M^0,$$

з чого випливає

$$\left. \begin{aligned} x_1 + y_1 - 3z_1 - 2 &= 0; \\ -x_1 - 2 &= 0 \\ z_1 + 1 &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Звідки  $x_1 = -2$ ;  $y_1 = 1$ ;  $z_1 = -1$ . Тому

$$\pi_1 = \frac{\Delta P}{l} \frac{d}{\rho v^2}.$$

Діючи аналогічно, дістаємо

$$\pi_2 = \frac{\mu}{vd\rho} = \frac{v}{vd} = \frac{1}{\text{Re}},$$

$$\pi_3 = \frac{k}{d}.$$

Таким чином,

$$f_3 = \left( \frac{\Delta P}{\rho v^2} \frac{d}{l}; \frac{1}{\text{Re}}; \frac{k}{d} \right) = 0.$$

Оскільки  $\frac{\Delta P}{\rho v^2}$  – число Ейлера, яке не є визначальним, то останнє рівняння можна переписати так:

$$\frac{\Delta P}{\rho v^2} \frac{d}{l} = f_4 \left( \frac{1}{\text{Re}}; \frac{k}{d} \right),$$

або

$$\Delta P = f_4 \left( \frac{1}{\text{Re}}; \frac{k}{d} \right) \frac{l}{d} \rho v^2.$$

Як зазначалося раніше, аналіз розмірностей не може дати конкретних кількісних (числових) значень в отриманих за його допомогою співвідношеннях. Тому метод завершується аналізом результатів і за необхідності коректуванням, виходячи із загальних фізичних уявлень. До правої частини останнього рівняння входить  $\rho v^2$ , а як відомо,  $\rho v^2/2$  – динамічний тиск, обумовлений середньою швидкістю. Тому це рівняння можна переписати у вигляді

$$\Delta P = f_5 \left( \frac{1}{\text{Re}}; \frac{k}{d} \right) \frac{l}{d} \frac{\rho v^2}{2}.$$

Позначивши  $f_5 \left( \frac{1}{\text{Re}}; \frac{k}{d} \right)$  через  $\lambda$ , маємо

$$\Delta P = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho v^2}{2},$$

або у формі напору ( $\Delta P = \rho gh$ )

$$\Delta h = \lambda \frac{l v^2}{d 2g},$$

де  $\lambda$  – гідравлічний коефіцієнт тертя, який у загальному випадку залежить від числа Рейнольдса і відносної шорсткості  $k/d$ . Вигляд цієї залежності можна визначити тільки експериментально.

2. Встановити вид функціональної залежності для сили  $F$ , яка виникає внаслідок обтікання круглого циліндра з діаметром  $d$  і довжиною  $l$  рідиною з в'язкістю  $\mu$  і густиною  $\rho$ , зі швидкістю  $u$ .

Сила, що приходиться на одиницю довжини циліндра,

$$F/l = f_1(d; u; \rho; \mu),$$

або

$$f_2(F/l; d; u; \rho; \mu) = 0.$$

Залежність містить п'ять розмірних величин, тому безрозмірних комплексів  $\pi$  повинно бути два:

$$f_3(\pi_1; \pi_2) = 0.$$

Представимо їх у такому вигляді:

$$\pi_1 = u^{x_1} d^{y_1} \rho^{z_1} F/l,$$

$$\pi_2 = u^{x_2} d^{y_2} \rho^{z_2} \mu.$$

Як було показано у попередньому прикладі,  $\pi_2 = 1/Re$ .

Для числа  $\pi_1$

$$\dim \pi_1 = (LT^{-1})^{x_1} L^{y_1} (ML^{-3})^{z_1} MT^{-2}.$$

З чого випливає

$$\left. \begin{aligned} x_1 + y_1 - 3z_1 &= 0 \\ -x_1 - 2 &= 0 \\ z_1 + 1 &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Звідки,  $x_1 = -2$ ;  $y_1 = -1$ ;  $z_1 = -1$ .

Таким чином,

$$\pi_1 = \frac{F}{l\rho u^2}.$$

$$f_3\left(\frac{1}{Re}; \frac{F}{l\rho u^2}\right) = 0,$$

або

$$F = f_4\left(\frac{1}{Re}\right)\rho u^2 l d.$$

Добуток  $ld$  є площею серединного поздовжнього перерізу циліндра;  $\rho u^2$  – подвоєний динамічний тиск. З урахуванням цього останню формулу можна переписати так:

$$F = C_x A \frac{\rho u^2}{2},$$

де  $A = ld$  – характерна площа;

$C_x = f_4 (1/Re)$  – коефіцієнт лобового опору (як буде показано далі, ця величина визначається експериментально).

3. Для випробувань в аеродинамічній трубці виготовлена вдесятеро зменшена модель літального апарата. Випробування здійснюються при абсолютному тиску  $P_m = 1,5$  МПа і температурі  $T_m = 300$  К. Визначить, при якій швидкості слід випробувати модель, щоб забезпечити подібність щодо числа Рейнольдса, якщо натурний об'єкт розрахований на швидкість  $v_n = 50$  м/с при атмосферному тиску ( $P_n = P_a$ ) і температурі  $T_n = 288$  К.

За формулою Клайперона розраховуємо густину повітря в натурних умовах

$$\rho_n = \frac{P_n}{RT_n} = \frac{101 \cdot 10^3}{287 \cdot 288} = 1,22 \text{ кг/м}^3$$

і в аеродинамічній трубці

$$\rho_m = \frac{P_m}{RT_m} = \frac{1,5 \cdot 10^6}{287 \cdot 300} = 17,42 \text{ кг/м}^3.$$

Динамічна в'язкість повітря в натурних і дослідних (модельних) умовах може бути визначена за формулою Сазерленда

$$\mu_n = 18,27 \cdot 10^{-6} \frac{120 + 291,15}{120 + 288} \left( \frac{288}{291,15} \right)^{1,5} = 18,1 \cdot 10^{-6} \text{ Па}\cdot\text{с},$$

$$\mu_m = 18,27 \cdot 10^{-6} \frac{120 + 291,15}{120 + 300} \left( \frac{300}{291,15} \right)^{1,5} = 18,7 \cdot 10^{-6} \text{ Па}\cdot\text{с}.$$

Таким чином, кінематична в'язкість повітря в натурних і модельних умовах

$$v_n = \frac{\mu_n}{\rho_n} = \frac{18,19 \cdot 10^{-6}}{1,22} = 1,48 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с},$$

$$v_m = \frac{\mu_m}{\rho_m} = \frac{18,7 \cdot 10^{-6}}{17,42} = 1,07 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}.$$

З умови рівності числа Рейнольдса для натурних і дослідних умов ( $Re_n = Re_m$ )

$$\frac{v_n L_n}{\nu_n} = \frac{v_m L_m}{\nu_m},$$

де  $L_n/L_m = 10$ , можна визначити

$$v_m = \frac{\nu_m}{\nu_n} \frac{L_n}{L_m} v_n = \frac{1,07 \cdot 10^{-6}}{1,48 \cdot 10^{-5}} 10 \cdot 50 = 36,3 \text{ м/с}.$$

Отже, швидкість повітря в аеродинамічній трубці повинна становити 36,3 м/с.

## 6 ОДНОВИМІРНА ТЕЧІЯ В'ЯЗКОЇ РІДИНИ

Одновимірними називають потоки, основні параметри яких (швидкість, тиск та ін.) залежать тільки від одної координати, напрям котрої збігається з напрямом вектора швидкості. Найпростішим прикладом одновимірної течії є елементарна струминка, швидкості у кожному перерізі якої розподілені рівномірно. Якщо вздовж струминки обрати криволінійну вісь координат, яка збігається з віссю струминки, то задачу знаходження закону зміни швидкості та тиску вздовж цієї осі називають одновимірною.

Реальні потоки кінцевих розмірів, суворо кажучи, не можуть бути одновимірними, оскільки через вплив твердих границь у в'язких рідинах завжди спостерігається нерівномірний розподіл швидкостей. Але у багатьох прикладних задачах розподіл швидкостей не розглядається, а визначаються лише так звана середня по перерізу швидкість і закон зміни тиску вздовж потоку. Нехтування дійсним розподілом швидкостей дозволяє порівняно просто розв'язувати важливі прикладні задачі. Розділ гідромеханіки, в якому вивчаються одновимірні течії, називають гідравлікою.

### 6.1 СЕРЕДНЯ ШВИДКІСТЬ ПОТОКУ

Для розв'язання широкого кола прикладних задач зручно виявилась так звана струминна модель потоку, згідно з якою потік кінцевих розмірів розглядається як сукупність елементарних струминок. У підрозділі 3.3 було показано, що елементарна об'ємна витрата нестисливої рідини крізь поперечний переріз струминки визначається як

$$dQ = u dA. \quad (6.1)$$

Тоді відповідно до струминної моделі об'ємна витрата потоку

$$Q = \iint_A u dA. \quad (6.2)$$

Зауважимо, що при розгляді потоку перерізи у ньому обираються так, щоб перетинаючи їх лінії течії були нормальними до них. Такі перерізи називають *живими*. Очевидно, що за умов паралельності ліній течії живі перерізи будуть плоскими площинами.

Розглянемо рух рідини у круглій трубі та розподіл швидкостей у живому перерізі. Через дію сил в'язкого тертя розподіл швидкостей у ньому (часто такий розподіл називають *епюрою швидкості*) буде нерівномірним (рисунок 6.1). Для зручності перейдемо до циліндричних координат, де  $r$  – радіус, а  $\theta$  – полярний кут. У цій системі  $dA = r dr d\theta$ . З урахуванням цього формула (6.2) набирає вигляду

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^R u(r) r dr d\theta. \quad (6.3)$$

Маючи на увазі, що  $\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$ ,

дістаємо

$$Q = 2\pi \int_0^R u(r) r dr. \quad (6.4)$$

Запис  $u(r)$  означає закон розподілу швидкості по радіусу, тобто є математичним описом епюри. Отже, для того щоб розрахувати об'ємну витрату, необхідно знати рівняння епюри швидкості. У більшості випадків це рівняння невідоме. Тому визначити такий важливий параметр, як витрата, використовуючи дійсне розподілення швидкостей (тобто вважаючи потік тривимірним), досить складно. Але задачу можна спростити виходячи з таких міркувань.

З математичної точки зору, інтеграл у правій частині рівняння (6.2) виражає об'єм епюри швидкості. Проведемо такий уявний експеримент. Припустимо, що за умови незмінності витрати  $Q$  рідина втратила в'язкість. Це приведе до зникнення сил в'язкого тертя – епюра почне перебудовуватися і всі рідкі частинки почнуть рухатися з однаковою швидкістю  $v$  (рисунок 6.1). Оскільки витрата залишилась тою самою, то об'єм нової епюри буде дорівнювати об'єму старої (нерівномірної). Таким чином, при умові  $u(r) = v = \text{const}$  з рівняння (6.4) дістаємо

$$Q = 2\pi \int_0^R v r dr = 2\pi v \int_0^R r dr = 2\pi v \frac{R^2}{2} = vA. \quad (6.5)$$

Введену таким чином швидкість  $v$  називають середньою, або середньо-витратною. *Формально середня швидкість може бути визначена як фіктивна швидкість, з якою повинні були б рухатися усі рідкі частинки в даному живому перерізі для того, щоб витрата дорівнювала її дійсному значенню.* Отже, згідно з таким підходом у кожному живому перерізі потоку швидкості вважаються однаковими. За умови усталеного руху змінюватися вони можуть тільки при переході від одного живого перерізу до іншого, тобто вздовж потоку. Таким чином, від тривимірної задачі переходимо до одновимірної, яка є простішою, оскільки оперувати середньою швидкістю  $v$  легше, ніж нерівномірною епюрою  $u(r)$ .

Рівняння (6.5) є *рівнянням нерозривності у гідравлічній формі.* Воно відображає закон збереження матерії стосовно рідини, що рухається.

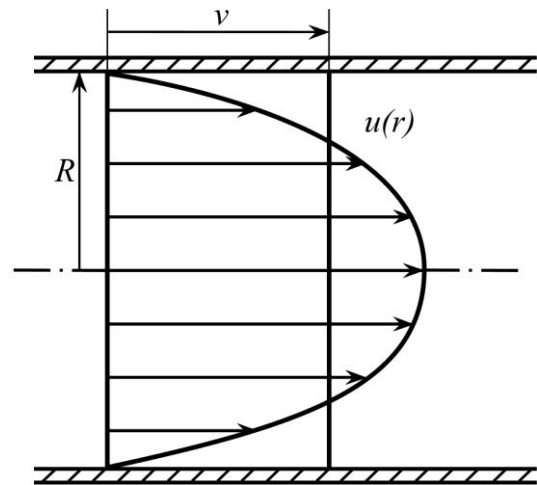


Рисунок 6.1 – Епюра швидкостей



## 6.2 СЛАБОДЕФОРМОВАНІ ПОТОКИ

Геометричні параметри потоку характеризуються формою його живих перерізів, кутом розбігу ліній течії та їх кривизною. Якщо лінії течії є строго паралельними прямими, то такий потік вважається паралельно-струминним. Саме такі потоки спостерігаємо у звичайних прямих трубах постійного діаметра.

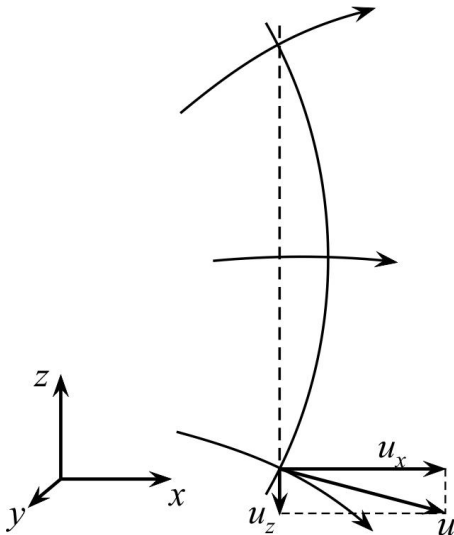


Рисунок 6.2 – Лінії течії та живий переріз у слабодетформованому потоці

Якщо граничні поверхні створюють трубу або канал зі змінним по довжині поперечним перерізом, то паралельноструминність порушується і такі потоки є тривимірними. Але коли кривизна ліній течії (або струминок), а також кут між ними досить малі (рисунок 6.2), то потік можна звести до одновимірної моделі. Потоки, які задовольняють такі умови, називають слабодетформованими (або такими, що плавно змінюються). Зрозуміло, що живі перерізи таких потоків викривлені, але для слабодетформованих потоків вважають, що складові швидкості  $u_z$  і  $u_y$  та складові прискорення  $du_z/dt$  і  $du_y/dt$  настільки малі, що їх величинами можна знехтувати, вважаючи  $u = u_x$  і  $a = du_x/dt$ .

Отже, фізичним критерієм можливості розглядати даний потік як слабодетформований є досить мала величина інерційного прискорення у площині живого перерізу (відносно до прискорення вільного падіння). Кривизною живих перерізів таких потоків нехтують.

Слабодетформований потік можна звести до одновимірного, якщо вісь  $ox$  спрямувати вздовж осі потоку. Оскільки кути між лініями течії малі, то вважатимемо, що  $u_y = u_z = 0$ . Для усталеного потоку всі похідні за часом в системі диференціальних рівнянь руху в'язкої рідини (4.37) дорівнюють нулю. Крім того, з рівняння нерозривності випливає, що  $\partial u_x / \partial x = 0$ . Отже, система (4.37) спрощується до вигляду

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} &= -v \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} &= 0 \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

Останні два рівняння (6.6) збігаються з рівняннями гідростатики (2.16), а це означає, що в межах живого перерізу слабдеформованого потоку тиск розподіляється за гідростатичним законом:  $\rho g z + P = \text{const}$ . Зауважимо, що цей результат для слабдеформованого потоку є приблизним, а для паралельно-струминного – строгим.

Потоки з малими радіусами кривизни ліній течії та великими кутами між ними зводяться такими, що різко змінюються. У таких потоках величинами  $u_y$  і  $u_z$  нехтувати не можна, а тому їх неможливо звести до одновимірної моделі та розрахункові залежності для них значно складніші, ніж для слабдеформованих потоків.

### 6.3 РІВНЯННЯ БЕРНУЛЛІ ДЛЯ ПОТОКУ В'ЯЗКОЇ РІДИНИ

Для розв'язання задач, пов'язаних з одновимірними потоками в'язкої рідини, необхідно встановити зв'язок середньої швидкості з тиском. Одним з принципово можливих шляхів досягнення цієї мети є інтегрування системи диференціальних рівнянь Нав'є-Стокса (4.37). Але, як зазначалося раніше, через великі математичні труднощі для переважної більшості інженерних задач це неможливо. Інший шлях – узагальнення рівняння Бернуллі для елементарної струминки ідеальної рідини на потік в'язкої рідини кінцевих розмірів.

У пункті 4.1.2 для усталеного руху нестисливої рідини шляхом інтегрування системи диференціальних рівнянь руху невіязкої рідини Ейлера був отриманий інтеграл Бернуллі (4.13) і доведено, що для двох перерізів елементарної струминки ідеальної рідини справедливе рівняння (4.19)

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g}.$$

Як було показано раніше, під час руху в'язкої рідини виникають дотичні напруження, що створюють силу опору течії. Для подолання цих сил потрібна певна затрата енергії. Тому під час течії в'язкої рідини запас її механічної енергії зменшується – механічна енергія перетворюється в тепло. Частина питомої механічної енергії, яка перетворилась в тепло, називають втратами напору  $\Delta h'$  (або втратами питомої енергії  $\Delta e' = g\Delta h'$ ). Зазначимо, що поняття «втрата енергії» досить умовне, оскільки насправді не виникає зменшення енергії взагалі, а зменшується механічна енергія за рахунок її часткового переходу в тепло. Таким чином, з енергетичної точки зору, дія в'язкості виявляється в ефекті розсіяння (дисипації) енергії.

На підставі вищенаведених міркувань рівняння Бернуллі для елементарної струминки в'язкої рідини можна записати у вигляді

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} + \Delta h', \quad (6.7)$$

або

$$gz_1 + \frac{P_1}{\rho} + \frac{u_1^2}{2} = gz_2 + \frac{P_2}{\rho} + \frac{u_2^2}{2} + \Delta e'. \quad (6.8)$$

Слід зауважити, що відмінність рівняння (4.19) від рівняння (6.7) на  $\Delta h'$  є результатом відмінності рівнянь руху ідеальної (4.2) та в'язкої рідин (4.40) на величину  $\nu \nabla^2 \vec{u}$ , яка саме і характеризує дію сил в'язкого тертя.

Помножимо усі складові рівняння (6.8) на масову витрату струминки  $dQ_m = \rho u dA$

$$\left( gz_1 + \frac{P_1}{\rho} + \frac{u_1^2}{2} \right) \rho u_1 dA_1 = \left( gz_2 + \frac{P_2}{\rho} + \frac{u_2^2}{2} + \Delta e' \right) \rho u_2 dA_2. \quad (6.9)$$

Відповідно до струминної моделі поширити формулу (6.9) на весь потік можна, проінтегрувавши це рівняння за перерізами 1-1 і 2-2,

$$\iint_{A_1} \left( gz_1 + \frac{P_1}{\rho} + \frac{u_1^2}{2} \right) \rho u_1 dA_1 = \iint_{A_2} \left( gz_2 + \frac{P_2}{\rho} + \frac{u_2^2}{2} + \Delta e' \right) \rho u_2 dA_2, \quad (6.10)$$

або

$$\begin{aligned} & \iint_{A_1} \left( gz_1 + \frac{P_1}{\rho} \right) \rho u_1 dA_1 + \iint_{A_1} \rho \frac{u_1^3}{2} dA_1 = \\ & = \iint_{A_2} \left( gz_2 + \frac{P_2}{\rho} \right) \rho u_2 dA_2 + \iint_{A_2} \rho \frac{u_2^3}{2} dA_2 + \iint_{A_2} \Delta e' \rho u_2 dA_2. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Якщо потік слабдеформований, то  $gz + \frac{P}{\rho} = \text{const}$  і

$$\iint_{A_1} \left( gz_1 + \frac{P_1}{\rho} \right) \rho u_1 dA_1 = \left( gz_1 + \frac{P_1}{\rho} \right) \rho \iint_{A_1} u_1 dA_1 = \left( gz_1 + \frac{P_1}{\rho} \right) \rho Q, \quad (6.12)$$

$$\iint_{A_2} \left( gz_2 + \frac{P_2}{\rho} \right) \rho u_2 dA_2 = \left( gz_2 + \frac{P_2}{\rho} \right) \rho Q. \quad (6.13)$$

Нагадаємо, що метою є отримання рівняння, яке пов'язувало б тиск і середню швидкість. Виходячи з цього до рівняння (6.11) необхідно ввести середню швидкість, для чого розділимо праву і ліву його частини частини з урахуванням рівнянь (6.12) і (6.13) на масову витрату  $\rho Q$

$$gz_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{1}{2Q} \iint_{A_1} u_1^3 dA_1 = gz_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{1}{2Q} \iint_{A_2} u_2^3 dA_2 + \frac{1}{\rho Q} \iint_{A_2} \Delta e' \rho u_2 dA_2. \quad (6.14)$$

Розділимо і помножимо треті складові правої та лівої частин рівняння (6.14) на  $v^2$  і з урахуванням того, що  $Q = vA$ , дістаємо

$$gz_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2} \frac{1}{v_1^3 A_1} \iint_{A_1} u_1^3 dA_1 = gz_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2} \frac{1}{v_2^3 A_2} \iint_{A_2} u_2^3 dA_2 + \frac{1}{\rho Q} \iint_{A_2} \Delta e' \rho u_2 dA_2. \quad (6.15)$$

Величину

$$\alpha = \frac{\iint u^3 dA}{v^3 A} \quad (6.16)$$

називають *коефіцієнтом кінетичної енергії* (коефіцієнтом Коріоліса<sup>31</sup>).

Стосовно останньої складової формули (6.15) необхідно зазначити, що інтегрування втрат енергії по площі  $A_2$  досить умовне, оскільки  $\Delta e'$  виникає вздовж всього шляху струминки від перерізу 1–1 до 2–2. У загальному випадку кожна елементарна струминка має відмінні від інших умови руху, що обумовлює різні значення дотичних напружень і відповідно *втрати енергії*  $\Delta e'$ . Тому визначити втрати в цілому щодо потоку шляхом інтегрування досить складно. Але задачу можна суттєво спростити, якщо останню складову формули (6.15) замінити середньою величиною  $\Delta e$  ( $\Delta e = g\Delta h$ ,  $\Delta h$  – *втрати напору*), яка характеризує втрати питомої енергії всього потоку на ділянці 1–2. Така дія дозволяє уникнути складного інтегрування і цілком відповідає фізичній сутності явища. Таким чином, *рівняння Бернуллі для потоку в'язкої рідини* з урахуванням останніх зауважень набуває вигляду

$$gz_1 + \frac{P_1}{\rho} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2} = gz_2 + \frac{P_2}{\rho} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2} + \Delta e \quad (6.17)$$

у формі енергії та

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \Delta h \quad (6.18)$$

у формі напорів.

Установимо фізичний зміст коефіцієнта Коріоліса. Для цього пригадаємо, що кінетична енергія елементарної струминки

<sup>31</sup> Коріоліс Гаспар Гюстав (1792–1843) – французький математик, механік та інженер, член Паризької академії наук. Його основні наукові здобутки стосуються теоретичної механіки, зокрема Коріоліс першим сформулював поняття механічної роботи, кінетичної енергії та відцентрової сили інерції.

$$dE_k = \frac{\rho u^2 dQ}{2} = \frac{\rho u^3 dA}{2}, \quad (6.19)$$

а всього потоку

$$E_k = \frac{\rho}{2} \iint_A u^3 dA. \quad (6.20)$$

Якщо потік вважати одновимірним, то його кінетична енергія

$$E_{kcp} = \frac{\rho v^2 Q}{2} = \frac{\rho}{2} v^3 A. \quad (6.21)$$

Розділивши рівняння (6.20) на (6.21), дістаємо рівняння (6.16). Таким чином, коефіцієнт Коріоліса  $\alpha$  являє собою відношення кінетичної енергії потоку, розрахованої за дійсним розподілом швидкостей, до кінетичної енергії потоку, визначеної за середньою швидкістю. Тому  $\alpha$  можна розглядати як своєрідний поправковий коефіцієнт, який враховує перехід від тривимірного потоку до одновимірного. Можна довести, що коефіцієнт кінетичної енергії завжди більший за одиницю. Його величина залежить від дійсного розподілу швидкостей – чим більша його нерівномірність, тим більше і значення  $\alpha$ . Тому часто  $\alpha$  використовують як критерій нерівномірності епюри швидкості. Під час розв'язання багатьох інженерних задач вважають, що  $\alpha \approx 1,1$ . Але в деяких випадках (вони будуть розглянуті далі) коефіцієнт Коріоліса може досягти і суттєво більших значень.

Енергетичне і геометричне тлумачення рівнянь (6.17) і (6.18) таке саме, як і рівняння Бернуллі для елементарної струминки ідеальної рідини, котре наведене у пункті 4.1.2. Різниця полягає у тому, що лінія повного (гідродинамічного) напору для в'язкої рідини не буде паралельною площині (лінії) відліку 0–0 (рисунок 6.3). Іншими словами, через виникнення сил опору течії та втрат напору повний напір вздовж потоку в'язкої рідини завжди зменшується.

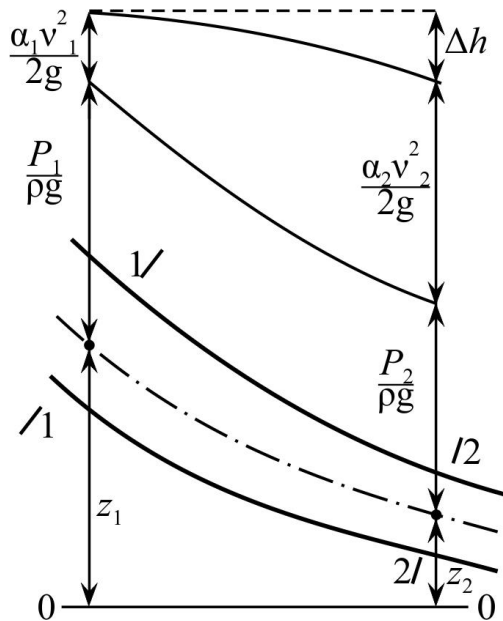


Рисунок 6.3 – Напірна і п'езометрична лінії вздовж потоку в'язкої рідини

Величина втрат напору, що приходить на одиницю довжини, називається гідравлічним ухилом

$$i = \frac{d\Delta h}{dl}, \quad (6.22)$$

де  $dl$  – довжина елементарної ділянки потоку;

$d\Delta h$  – елементарні втрати напору, що виникають на ділянці  $dl$ .

Таким чином,  $i$  вздовж потоку може змінюватися. Тому часто використовують середнє значення гідравлічного ухилу на ділянці між живими перерізами 1–1 і 2–2 з довжиною  $l_{1-2}$

$$i_{1-2} = \frac{\Delta h_{1-2}}{l_{1-2}} = \frac{\left( z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} \right) - \left( z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} \right)}{l_{1-2}}. \quad (6.23)$$

Рівняння Бернуллі, отримане у вигляді формул (6.17) і (6.18), можна застосовувати для усталеного руху нестисливої в'язкої рідини, коли потік слабдеформований. Воно є основним рівнянням гідравліки, оскільки за його допомогою виводять розрахункові формули для багатьох окремих випадків руху рідини та розв'язують численні прикладні задачі.

## 6.4 СТІЙКІСТЬ ТЕЧІЇ. ЧИСЛО РЕЙНОЛЬДСА ЯК КРИТЕРІЙ СТІЙКОСТІ

Виведене приблизно в сер. XVIII ст. рівняння Бернуллі мало б дати поштовх розвитку гідравліки. Але розв'язання за його допомогою прикладних задач передбачало вміння розрахувати втрати напору  $\Delta h$ . Тому це питання стало об'єктом досліджень багатьох відомих вчених. Однак вже у XIX ст. роботи, пов'язані з вивченням опору течії, зайшли в глухий кут. Досліди німецького ін-

женера Хагена<sup>32</sup> і французького лікаря Пуазейля свідчили, що втрати напору лінійно залежать від середньої швидкості. У той самий час не менш ретельні досліди французького інженера Дарсі<sup>33</sup> свідчили, що  $\Delta h$  пропорційні квадрату швидкості (рисунок 6.4). Це протиріччя гальмувало розвиток інженерної практики і вимагало розв'язання.

Аналіз результатів, отриманих при вивченні опору руху рідини в трубах, дозволив ще Хагену у 1855 р. відмітити, що течія може відбуватися по-різному, а її характер змінюється при досягненні деяких умов.

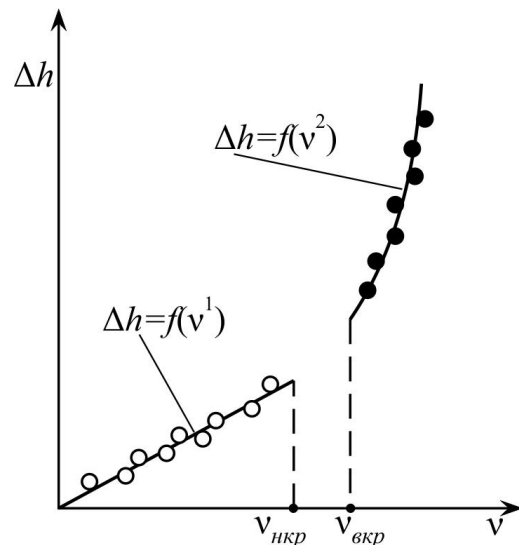


Рисунок 6.4 – Характер дослідної залежності втрат напору

<sup>32</sup> Хаген Готтхильф Генрих Людвіг (1797–1884) – німецький фізик і гідравлік, академік Берлінської академії наук. Визнання йому принесла десятитомна праця «Про мистецтво гідротехнічних споруд».

<sup>33</sup> Дарсі Анрі Філібер Гаспар (1803–1858) – французький інженер-гідравлік. Встановив закон, що зв'язує швидкість фільтрації рідини в пористому середовищі з градієнтом тиску. Закон носить його ім'я. Також його ім'ям названі одиниця вимірювання проникності пористого середовища і формула для визначення втрат напору по довжині.

Повну ясність у питання двох режимів течії рідини вніс видатний англійський фізик та інженер Осборн Рейнольдс<sup>34</sup>, який 1883 р. опублікував результати своїх дослідів. Ці результати мали величезне значення для подальшого розвитку всієї гідромеханіки. На рисунку 6.5 зображена спрощена схема експериментальної установки, а ідея дослідів полягала у такому. До бака *A* приєднана скляна горизонтальна труба *B* з краном *C*. Над баком встановлена посудина *D* з підфарбованою рідиною, що подається до труби *B* крізь тонку трубку *E*. Перед проведенням дослідів бак *A* заповнюється водою і надалі її рівень підтримують постійним. Відкривши кран *C*, в трубі *B* створюють потік води, а відкривши кран *K*, в потоці створюють тонку струминку підфарбованої рідини.

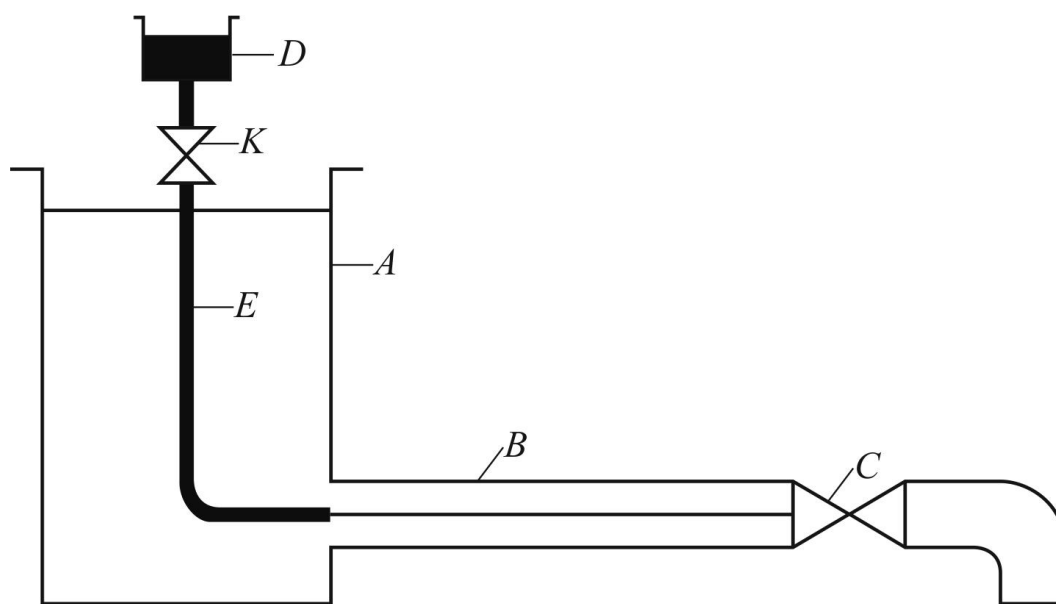


Рисунок 6.5 – Спрощена схема експериментальної установки Рейнольдса

Поступово відкриваючи кран *C*, можна збільшувати витрату, а отже, і швидкість у трубі *B*. При цьому спостерігається така картина: при невеликих швидкостях течії підфарбована рідина рухається у вигляді тонкої прямої струминки (рисунок 6.6,а), не змішуючись з потоком води; при підвищенні швидкості струминка починає коливатися і приймає хвилеподібного вигляду (рисунок 6.6,б); подальше зростання швидкості приводить до появи розривів і перемішування підфарбованої рідини з іншою (рисунок 6.6,в,г). Очевидно, що швидкість течії в трубі досягла деякої критичної величини, коли її поступове кількісне зростання привело до якісної зміни режиму руху. Таку швидкість називають *верхньою критичною швидкістю*  $v_{в.кр.}$ . Якщо дослід проводити у зворотному напрямку, то зміна режиму відбудеться при *нижній критичній швидкості*  $v_{н.кр.}$

<sup>34</sup> Рейнольдс Осборн (1842–1912) – англійський механік і фізик, член Лондонської королівської спілки. Працював у галузі механіки, теплотехніки, магнетизму, але основні досягнення має у гідродинаміці, зокрема у вивченні турбулентності.

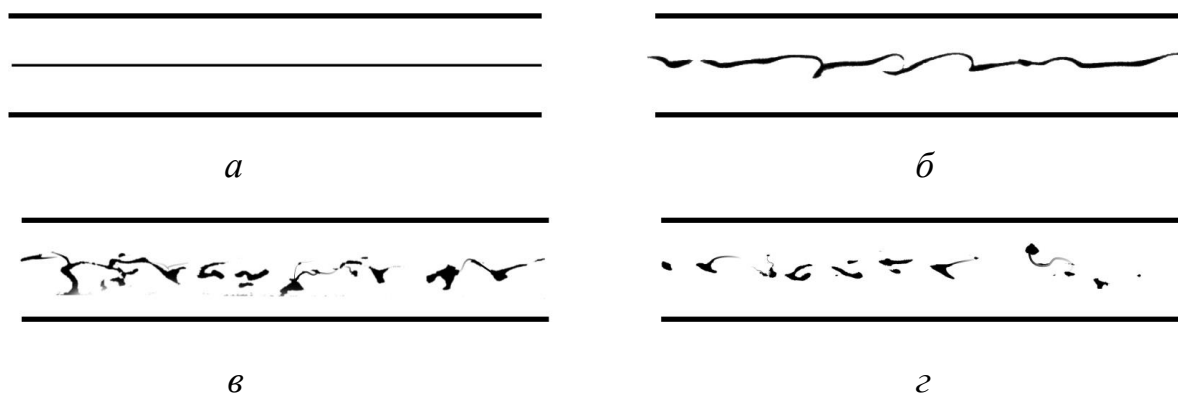


Рисунок 6.6 – Ілюстрація зміни режиму течії:

*a* – ламінарний режим; *б* – зміна режиму; *в, г* – турбулентний режим

Режим течії, при якому має місце спокійний шаровий рух рідини без перемішування рідких частинок (рисунок 6.6,а), називають *ламінарним* (від лат. *lamina* – шар). Другий режим – хаотичний з перемішуванням частинок (рисунок 6.6,в,г) названо *турбулентним*. Рисунок 6.6,б відповідає зміні режиму течії.

Довівши експериментально існування двох режимів течії, Рейнольдс показав, що загальною причиною зміни ламінарного режиму на турбулентний є втрата потоком стійкості. Якщо під *стійкістю течії* розуміти здатність потоку заглушати малі збудження, що в ньому виникають, то перехід від ламінарного до турбулентного режиму можна розглядати як результат втрати стійкості. При цьому з двох категорій сил, які діють на рідкі частинки, *сили в'язкого тертя* відіграють стабілізуючу роль (додають стійкості), а *сили інерції* – дестабілізуючу (сприяють переходу потоку від спокійного, шарового руху до хаотичного).

Отже, співвідношення цих сил може бути критерієм (мірою) стійкості. Такий підхід дозволяє отримати й кількісну міру. Дійсно, сила інерції  $F_i = \rho Va$ ; об'єм пропорційний кубу лінійних розмірів  $V \approx L^3$ ; прискорення – це зміна швидкості за одиницю часу:  $a \approx u/t$ , а швидкість  $u \approx L/t$ . Тому

$$F_i \approx \frac{\rho L^3 u^2}{L} \approx \rho L^2 u^2. \quad (6.24)$$

Сила в'язкого тертя  $F_{mp} = \mu \frac{du}{dy} A$ . Діючи аналогічно, дістаємо

$$F_{mp} \approx \mu \frac{u}{L} L^2 \approx \mu u L. \quad (6.25)$$

Відношення сил інерції до сил в'язкого тертя називають *числом (критерієм) Рейнольдса*

$$Re = \frac{\rho u L}{\mu}, \quad (6.26)$$

де  $u$  – характерна швидкість течії;

$L$  – характерний лінійний розмір.



Оригінальне тлумачення цього критерію дав сам Рейнольдс: «Рідину можна уподібнити загону воїнів, ламінарну течію – монолітному похідному строю, турбулентну – безладному руху. Швидкість рідини – швидкість загону, діаметр труби – величина загону, в'язкість – дисципліна, а густина – озброєність. Чим більший загін, чим швидший його рух і важча зброя, тим раніше розпадеться стрій».

Для круглих труб характерний лінійний розмір – діаметр, а характерна швидкість – середня. З урахуванням цього і маючи на увазі, що  $\mu = \nu\rho$ , вираз (6.26) набирає вигляду

$$Re = \frac{vd}{\nu}. \quad (6.27)$$

Якщо течія рідини відбувається у каналах некруглого перерізу, то як характерний розмір використовують так званий *гідралічний радіус*

$$R_z = \frac{A}{\Pi}, \quad (6.28)$$

де  $A$  – площа живого перерізу каналу;

$\Pi$  – змочений периметр (частина периметра каналу, яка знаходиться у контакті з рідиною).

Для круглих труб  $A = \pi d^2/4$ ,  $\Pi = \pi d$  і  $R_z = d/4$ , тобто гідралічний радіус вдвічі менший за геометричний.

Верхнім і нижнім критичним швидкостям потоку відповідають верхнє та нижнє *критичні числа Рейнольдса*:

$$Re_{н.кр} = \frac{v_{н.кр}d}{\nu}, \quad Re_{в.кр} = \frac{v_{в.кр}d}{\nu}. \quad (6.29)$$

Але число Рейнольдса як критерій стійкості відносно до критичної швидкості має безсумнівну і вирішальну перевагу: критична швидкість для різних рідин і різних діаметрів труб – різна, а  $Re$  є універсальним безрозмірним критерієм. При  $Re < Re_{н.кр}$  течія завжди ламінарна, при  $Re > Re_{в.кр}$  – завжди турбулентна. При  $Re_{н.кр} < Re < Re_{в.кр}$  залежно від конкретних умов потік може бути як ламінарним, так і турбулентним.

Досліди показали, що для звичайних круглих труб  $Re_{н.кр} = 2300$ , а значення  $Re_{в.кр}$  залежить від конкретних умов дослідів. Так, значення критичного числа Рейнольдса залежить від форми труби: в *конфузорах* (трубах, що вздовж потоку звужуються) критичне число більше, ніж у звичайних, а в *дифузорах* (трубах, що вздовж потоку розширюються) – менше. Якщо вхід в трубу зробити плавним, то забезпечити ламінарний режим вдається при більших  $Re$ . Зокрема саме з цієї причини Рейнольдс під час своїх експериментів отримав значення  $Re_{в.кр} = 1,3 \cdot 10^4$ . Втім, чіткого значення  $Re_{в.кр}$  нема. Його величина залежить від конкретних умов течії та в деяких випадках досягає  $2 \cdot 10^4$  і більше. Однак при таких  $Re$  навіть дуже невелике збурення викликає зміну

режиму, а тому під час інженерних розрахунків користуються тільки одним критичним значенням числа Рейнольдса  $Re_{кр} = 2300$ , а перехідну зону ( $Re_{н.кр} < Re < Re_{в.кр}$ ), як правило, не розглядають.

Таким чином, встановлено найважливіший для всієї гідромеханіки факт існування двох режимів течії та отримано число Рейнольдса як критерій стійкості течії. Перехід від ламінарного режиму до турбулентного відбувається при одному і тому самому критичному числі  $Re_{кр}$ , яке не залежить від роду рідини (вода, повітря, масло тощо) і характерного розміру каналу. Саме у цьому полягає універсальність числа Рейнольдса.

## 6.5 ЛАМІНАРНА ТЕЧІЯ В КРУГЛИХ ТРУБАХ

Розглянемо закономірності ламінарної усталеної течії в круглій трубі, що відбувається при незмінному перепаді тиску (так звана течія Пуазейля). Перш за все нас цікавлять закони розподілу швидкостей і дотичних напружень, а також опір течії. Поставлену задачу можна розв'язати шляхом інтегрування системи диференціальних рівнянь Нав'є-Стокса, аналогічно тому, як це зроблено у прикладі 2 до розділу 4. Але ми використаємо інший спосіб, котрий базується на загальних фізичних уявленнях про рух рідких середовищ.

Нехай у горизонтальній круглій трубі радіусом  $R$  під дією незмінного перепаду тиску відбувається ламінарна течія. Двома перерізами, відстань між якими дорівнює  $l$ , виділимо відсік труби і в ньому циліндр радіусом  $r$  (рисунок 6.7). Оскільки течія усталена, то сума проєкцій усіх сил на вісь  $ox$ , яка збігається з віс-

сю труби і виділеного відсіку, повинна дорівнювати нулю. Іншими словами, активні сили, які спонукають рідину до руху, повинні бути рівними силам опору. Активні сили  $P_1A_1 - P_2A_2 = \pi r^2 \Delta P$ . Сили опору течії  $2\pi r l \tau$ . Таким чином,  $\pi r^2 \Delta P = 2\pi r l \tau$  і

$$\tau = \frac{\Delta P r}{2l}. \quad (6.30)$$

Отже, дотичні напруження вздовж радіуса розподіляються за лінійним законом, а на осі труби  $\tau = 0$  (рисунок 6.8). З іншого боку, згідно із законом (1.22)

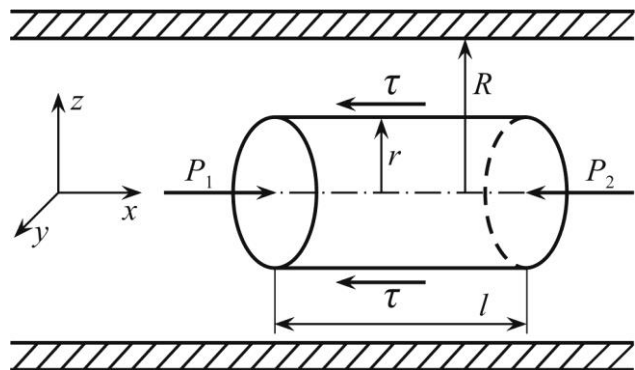


Рисунок 6.7 – До розгляду течії Пуазейля

$$\tau = -\mu \frac{du}{dr} \quad (6.31)$$

(знак мінус вказує на те, що додатному відліку  $r$  відповідає від'ємне значення градієнта).

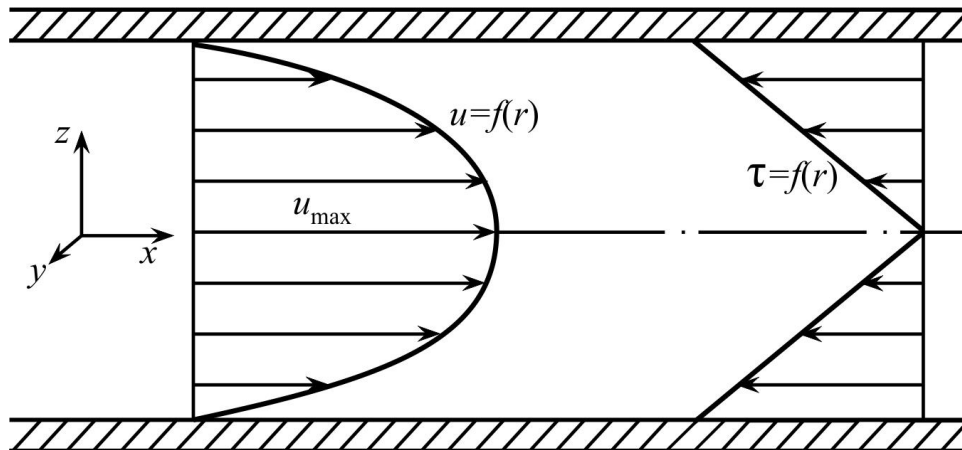


Рисунок 6.8 – Епюри швидкостей і дотичних напружень в ламінарному потоці

З формул (6.30) і (6.31) маємо

$$\frac{\Delta P r}{2l} = -\mu \frac{du}{dr}, \quad (6.32)$$

або розділивши змінні,

$$du = -\frac{\Delta P}{2\mu l} r dr. \quad (6.33)$$

Після інтегрування

$$u = -\frac{\Delta P}{2\mu l} \frac{r^2}{2} + C. \quad (6.34)$$

Сталу інтегрування визначимо з граничних умов: при  $r = R$   $u = 0$  (ефект прилипання), тоді

$$C = \frac{\Delta P}{2\mu l} \frac{R^2}{2}. \quad (6.35)$$

Отже,

$$u = \frac{\Delta P}{4\mu l} (R^2 - r^2) = \frac{\Delta P R^2}{4\mu l} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \quad (6.36)$$

З формули (6.36) видно, що максимальна швидкість ламінарного потоку спостерігається на осі труби та

$$u_{\max} = \frac{\Delta P R^2}{4\mu l}. \quad (6.37)$$

Тоді формулу (6.36) можна записати у вигляді

$$u = u_{\max} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right), \quad (6.38)$$

з чого випливає, що у поперечному перерізі труби при ламінарній течії швидкості розподілені за параболічним законом, тобто епюра швидкостей – параболоїд обертання (рисунок 6.8).

Якщо вираз (6.38) подати у вигляді

$$\frac{u}{u_{\max}} = 1 - \frac{r^2}{R^2}, \quad (6.39)$$

то зрозуміло, що відношення швидкості у точці до максимальної (на осі труби) не залежить ні від витрати, ні від матеріалу стінок і при всіх  $Re < Re_{кр}$  однакове.

Користуючись виразом (6.4), визначимо витрату рідини

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi \int_0^R \frac{\Delta P}{4\mu l} (R^2 - r^2) r dr = \frac{2\pi \Delta P R}{4\mu l} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr = \\ &= \frac{\Delta P R^2}{4\mu l} 2\pi \frac{R^2}{4} = u_{\max} \frac{\pi R^2}{2} = \frac{1}{2} u_{\max} A. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Порівнявши рівняння (6.40) і (6.5), можна зробити висновок, що для ламінарного потоку  $u_{\max} = 2v$  – максимальна швидкість, удвічі більша за середню.

Оскільки потік, що розглядаємо, горизонтальний, а середня швидкість незмінна, то втрати питомої енергії можуть відбуватися лише за рахунок зниження тиску  $\Delta P = \rho g \Delta h$ .

З рівняння (6.37)

$$\Delta P = \frac{4u_{\max} \mu l}{R^2} = \frac{8v \mu l}{R^2} = \frac{32v \mu l}{d^2}, \quad (6.41)$$

де  $d$  – діаметр труби.

Втрати напору

$$\Delta h = \frac{32v \mu l}{\rho g d^2}. \quad (6.42)$$

Це рівняння називається *формулою Пуазейля*. Воно дозволяє розраховувати  $\Delta h$  при ламінарній течії. Як видно з рівняння (6.42), втрати напору лінійно залежать від середньої швидкості, що підтверджується дослідями (рисунок 6.4).

Розділимо і помножимо праву частину рівняння (6.42) на  $2v$

$$\Delta h = \frac{64\mu l v^2}{\rho d^2 2vg} = \frac{64lv^2}{vd d2g} = \frac{64 l v^2}{Re d 2g} = \lambda \frac{l v^2}{d 2g}. \quad (6.43)$$

Отже, *гідралічний коефіцієнт тертя* (див. приклад 1 до розділу 5) для ламінарної течії або *коефіцієнт Дарсі*  $\lambda = 64/Re$ .

*Коефіцієнт Коріоліса*

$$\alpha = \frac{\iint_A u^3 dA}{v^3 A} = \frac{\int_0^R u_{\max}^3 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^3 2\pi r dr}{\left(\frac{u_{\max}}{2}\right)^3 \pi R^2} = \quad (6.44)$$

$$= \frac{16}{R^8} \int_0^R (R^2 - r^2)^3 r dr = \frac{16}{R^8} \frac{R^8}{8} = 2.$$

Таким чином, коефіцієнт Коріоліса для ламінарного потоку в круглій трубі дорівнює двом.

Можна також довести, що ламінарна течія є вихровою. Оскільки для нашого випадку  $u_y = u_z = 0$ , то

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = 0 \\ \omega_y &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left( u_{\max} - \frac{u_{\max}}{R^2} z^2 \right) = -\frac{u_{\max}}{R^2} z \\ \omega_z &= -\frac{1}{2} \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left( u_{\max} - \frac{u_{\max}}{R^2} y^2 \right) = \frac{u_{\max}}{R^2} y \end{aligned} \right\} \quad (6.45)$$

Рівняння вихрової лінії

$$\frac{dy}{-u_{\max} z / R^2} = \frac{dz}{u_{\max} y / R^2} \quad (6.46)$$

Звідки

$$y dy + z dz = 0, \quad (6.47)$$

або

$$\frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} = C. \quad (6.48)$$

Тобто, *вихрові лінії* – концентричні кола з центрами на осі труби, площини котрих їй нормальні.

Викладене у цьому підрозділі показує, як, знаючи закономірності неодновимірної течії, можна строго перейти до одновимірного потоку. Дійсно, рівняння Бернуллі (6.18) разом з рівняннями (6.36), (6.40), (6.43), (6.44) досить повно описують стабілізований ламінарний потік у круглій трубі (*стабілізованим називається потік, епюра швидкостей котрого не змінюється вздовж труби або*

каналу). Однак така течія може існувати тільки на деякій відстані від входу в трубу або її фасонних елементів. У протилежному випадку епіюра швидкостей є деформованою. Для такого потоку точних і загальних розрахункових методів визначення поля швидкостей, а отже, і закону розподілу дотичних напружень величини втрат напору (тиску) і коефіцієнта Коріоліса не існує.

Якщо вхід в трубу, наприклад з резервуара, зроблено досить плавним (рисунок 6.9), то в початковому перерізі 1–1 встановиться практично рівномірний розподіл швидкостей; тільки частинки, що безпосередньо дотикаються до стінок, мають нульову швидкість. Завдяки дії сил в'язкого тертя шари рідини біля стінки гальмуються, а в центральній частині швидкість зростає (середня швидкість є незмінною). Товща шарів загальмованої рідини поступово збільшується, поки по всьому живому перерізу не встановлюється характерний для ламінарного потоку параболічний профіль швидкостей (переріз 2–2). Довжина ділянки, на якій відбувається цей процес (процес стабілізації), називається *початковою ділянкою ламінарної течії*. Її довжину можна оцінити за емпіричною формулою

$$L_n \approx 0,04d Re. \quad (6.49)$$

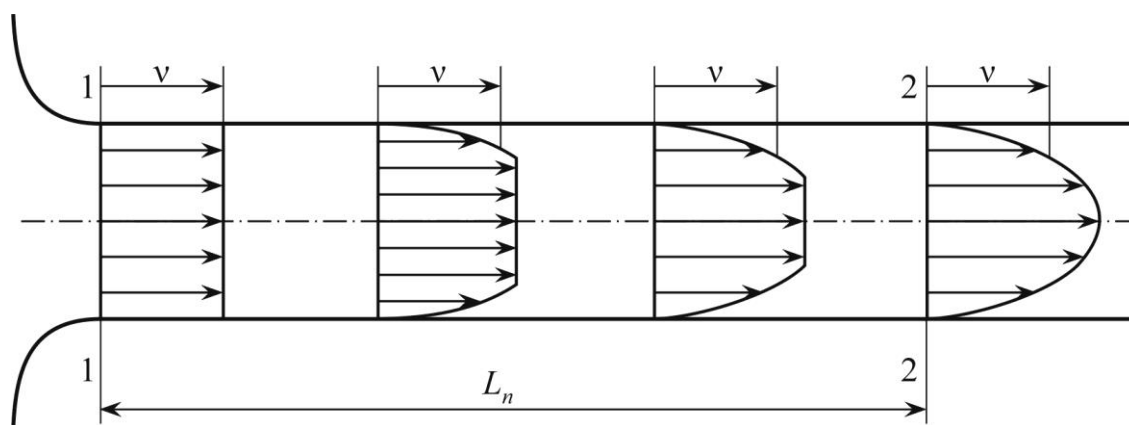


Рисунок 6.9 – Початкова ділянка ламінарної течії

Таким чином, вище виведені залежності, які дозволяють розрахувати основні характеристики усталеного стабілізованого ламінарного потоку в круглій трубі.

## 6.6 ТУРБУЛЕНТНА ТЕЧІЯ В КРУГЛИХ ТРУБАХ

Турбулентний режим течії в природі та техніці зустрічається значно частіше за ламінарний. Тому теорія турбулентних потоків має велике практичне значення і є об'єктом численних досліджень, найважливіші результати котрих розглянемо далі.

### 6.6.1 Поняття про осереднені параметри. Рівняння Рейнольдса

Перехід від ламінарного режиму до турбулентного відбувається при  $Re$ , близьких до критичного. Фізична природа механізму цього переходу достатньо складна і, незважаючи на численні дослідження, остаточно не з'ясована. Розглянемо спрощену його модель.

При  $Re < Re_{кр}$  течія ламінарна і короточасні збурення, що виникають в потоці та «прагнуть» дестабілізувати його (перевести в турбулентний режим), згасають, так і не виконавши цієї функції, тобто в ламінарному потоці в основному за рахунок дії сил в'язкості короточасні та локальні спалахи турбулентності гасяться і такий потік є стійким. При наближенні до критичного числа Рейнольдса зони турбулентності, що виникають в потоці, на окремих його ділянках можуть заповнювати весь переріз труби, створюючи так звані турбулентні пробки. Цей процес є перехідним від ламінарного режиму до турбулентного. Кількісно його можна охарактеризувати часткою  $\Delta t$  деякого інтервалу часу  $\Delta T$ , впродовж якого в даному перерізі потоку спостерігався турбулентний режим. Величину  $\Delta t/\Delta T$  називають коефіцієнтом переміжності. Зі зростанням числа Рейнольдса ця величина також збільшується і при повністю турбулентному режимі дорівнює одиниці. Таким чином, зі зростанням  $Re$ , тобто відношення сил інерції до сил в'язкого тертя, потік втрачає стійкість, наслідком чого є зміна ламінарного режиму на турбулентний.

При зміні режимів течії змінюється закон опору, що видно з графіка на рисунку 6.4, а також розподілу швидкостей. У перехідній області форма епюри швидкостей не зберігається параболічною і залежить від коефіцієнта переміжності.

Одна з головних властивостей турбулентності – неупорядкованість руху, тобто рідкі частинки мають досить складні траєкторії, а місцеві швидкості та інші параметри не зберігаються незмінними, навіть якщо течія відбувається з незмінною витратою. Тому, строго кажучи, турбулентний потік не може бути усталеним. Дослідження показують, що в кожній точці такого потоку швидкість змінюється як за величиною, так і за напрямом. Проекцію швидкості  $u_x$  у даній точці в даний момент часу називають миттєвою. Зміна її величини у часі носить випадковий

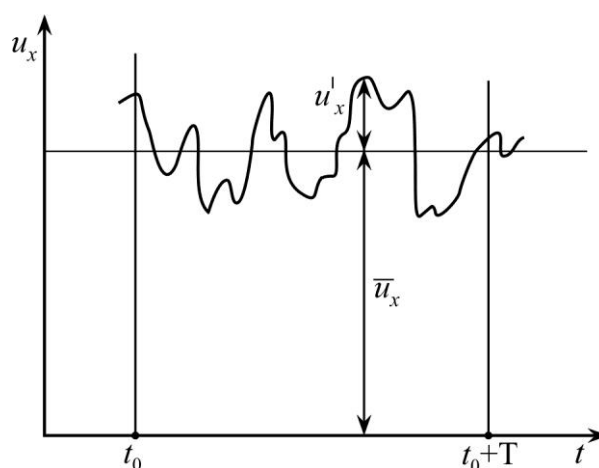


Рисунок 6.10 – Характер залежності  $u_x$  від часу при турбулентній течії рідини

характер. Тому користуватися нею в прикладних розрахунках практично неможливо. З іншого боку, безпосередні виміри свідчать, що при турбулентному режимі швидкість має так звану регулярну частину, відносно якої відбуваються пульсації. Розглянемо типовий вид дослідної залежності, наприклад проекції швидкості  $u_x$  у деякій точці від часу при умові збереження незмінними граничних умов і витрати (рисунок 6.10). Як видно, процес має випадковий, неперіодичний характер. При цьому

$$u_x = \bar{u}_x + u'_x, \quad u_y = \bar{u}_y + u'_y, \quad u_z = \bar{u}_z + u'_z, \quad (6.50)$$

де  $\bar{u}_x, \bar{u}_y, \bar{u}_z$  – регулярні (осереднені) значення проекцій миттєвої швидкості (проекції *осередненої швидкості*);

$u'_x, u'_y, u'_z$  – пульсаційні складові (*пульсації швидкості*), які можуть бути як додатними, так і від'ємними.

Отже, турбулентний рух рідини характеризується хаотичною зміною параметрів у часі, але при цьому можуть бути виділені їх статистично точні осереднені значення. Ці значення можна отримати шляхом інтегрування залежності за проміжком часу  $T$ , величина якого повинна бути набагато більшою за характерний час турбулентної пульсації, тобто результат не повинен залежати від часу осереднення

$$\bar{u}_x = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u_x(t) dt \quad (6.51)$$

(для  $\bar{u}_y$  і  $\bar{u}_z$  аналогічно).

Для осередненого тиску

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} P(t) dt. \quad (6.52)$$

Осереднене значення пульсації швидкості

$$\bar{u}'_x = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u'_x(t) dt = 0, \quad (6.53)$$

(для  $\bar{u}'_y$  і  $\bar{u}'_z$  аналогічно), оскільки  $\bar{u}'_x$  періодично змінює знак. Ясно також, що  $(\bar{u}'_x)^2 \neq 0$ ,  $(\bar{u}'_y)^2 \neq 0$ ,  $(\bar{u}'_z)^2 \neq 0$ . Якщо в даній точці потоку  $(\bar{u}'_x)^2 = (\bar{u}'_y)^2 = (\bar{u}'_z)^2$ , то турбулентність називається *ізотропною*, а якщо ця умова справедлива в усіх точках потоку, то ще й *однорідною*.

Таким чином, принципово неусталений турбулентний рух рідини, при якому параметри хаотично змінюються, можна розглядати як *квазіусталений*, якщо від дійсних миттєвих параметрів перейти до їх осереднених значень. Такий шлях свого часу запропонував Рейнольдс.

Користуючись рівнянням нерозривності (3.19), представимо конвективну складову прискорення першого рівняння системи Нав'є-Стокса (4.38) так (зважаючи на однотипність рівнянь, що складають цю систему, докладно розглядатимемо тільки перше):



$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_x}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} u_z &= \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} u_x \right) + \\
\left( \frac{\partial u_x}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_y}{\partial y} u_x \right) + \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} u_z + \frac{\partial u_z}{\partial z} u_x \right) - u_x \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) &= \\
= \frac{\partial}{\partial x} (u_x u_x) + \frac{\partial}{\partial y} (u_x u_y) + \frac{\partial}{\partial z} (u_x u_z). &
\end{aligned} \tag{6.54}$$

Переходячи від миттєвих параметрів до осереднених і враховуючи рівняння (6.54), перше рівняння системи (4.38) для квазіусталеної турбулентної течії запишемо так:

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u_x u_x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u_x u_y}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{u_x u_z}) - \nu \nabla^2 \bar{u}_x, \tag{6.55}$$

де з урахуванням формули (6.50)

$$\begin{aligned}
\overline{u_x u_x} &= \overline{(\bar{u}_x + u'_x)(\bar{u}_x + u'_x)} = \bar{u}_x^2 + 2\bar{u}_x \bar{u}'_x + \bar{u}'_x{}^2 = \bar{u}_x \bar{u}_x + \overline{u'_x u'_x}; \\
\overline{u_x u_y} &= \overline{(\bar{u}_x + u'_x)(\bar{u}_y + u'_y)} = \overline{u_x u_y} + \bar{u}_x \bar{u}'_y + \bar{u}_y \bar{u}'_x + \overline{u'_x u'_y} = \bar{u}_x \bar{u}_y + \overline{u'_x u'_y}; \\
\overline{u_x u_z} &= \overline{(\bar{u}_x + u'_x)(\bar{u}_z + u'_z)} = \overline{u_x u_z} + \bar{u}_x \bar{u}'_z + \bar{u}_z \bar{u}'_x + \overline{u'_x u'_z} = \bar{u}_x \bar{u}_z + \overline{u'_x u'_z}.
\end{aligned} \tag{6.56}$$

Таким чином, рівняння (6.55), а за аналогією і два інші рівняння (4.38) для квазіусталеного турбулентного руху набирають вигляду

$$\left. \begin{aligned}
X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} &= \bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \bar{u}_y \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} + \bar{u}_z \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} + \\
+ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\overline{\rho u'_x u'_x}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\overline{\rho u'_x u'_y}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\overline{\rho u'_x u'_z}) - \nu \nabla^2 \bar{u}_x \\
Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} &= \bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial x} + \bar{u}_y \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y} + \bar{u}_z \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial z} + \\
+ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\overline{\rho u'_y u'_x}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\overline{\rho u'_y u'_y}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\overline{\rho u'_y u'_z}) - \nu \nabla^2 \bar{u}_y \\
Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} &= \bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x} + \bar{u}_y \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} + \bar{u}_z \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} + \\
+ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\overline{\rho u'_z u'_x}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\overline{\rho u'_z u'_y}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\overline{\rho u'_z u'_z}) - \nu \nabla^2 \bar{u}_z
\end{aligned} \right\}. \tag{6.57}$$

Отриману систему називають *системою диференціальних рівнянь Рейнольдса для турбулентної течії*.

З системи (6.57) видно, що рівняння Рейнольдса відрізняються від рівнянь Нав'є-Стокса не тільки тим, що замість миттєвих параметрів (швидкості та тиску) використовуються осереднені, але й наявністю нових членів  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\rho \overline{u'_x u'_x})$ , ... . Ці члени виражають дію напружень, характерних тільки для турбулентного потоку. Вони породжені пульсаціями швидкості та називаються турбулентними напруженнями. Їх поява в рівняннях руху є наслідком формального переходу від миттєвих швидкостей до осереднених. Фізично виникнення цих напружень пояснюється обміном кількості руху між сусідніми шарами рідини внаслідок хаотичності течії, тобто пульсаціями.

З урахуванням цього формули для нормальних напружень, котрі виникають в рідині, що турбулентно рухається, набирають вигляду:

$$\begin{aligned} P_{xx} &= -\bar{P} + 2\mu \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} - \overline{u'_x u'_x}; \\ P_{yy} &= -\bar{P} + 2\mu \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y} - \overline{u'_y u'_y}; \\ P_{zz} &= -\bar{P} + 2\mu \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} - \overline{u'_z u'_z}. \end{aligned} \quad (6.58)$$

(для ламінарного потоку – це рівняння (4.26).

Дотичні напруження в турбулентному потоці:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \mu \left( \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial x} \right) - \overline{\rho u'_x u'_y}; \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} &= \mu \left( \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x} \right) - \overline{\rho u'_x u'_z}; \\ \tau_{zy} = \tau_{yz} &= \mu \left( \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial z} \right) - \overline{\rho u'_z u'_y}. \end{aligned} \quad (6.59)$$

(для ламінарного потоку – це рівняння (4.25).

Отже, в турбулентному потоці повні дотичні напруження складаються з в'язкісних і турбулентних

$$\tau = \tau_\mu + \tau_m. \quad (6.60)$$

Перші можуть бути розраховані згідно із законом в'язкого тертя Ньютона, другі – за формулами:

$$\begin{aligned}\tau_{mxy} = \tau_{myx} &= -\overline{\rho u'_x u'_y} = -\overline{\rho u'_y u'_x}; \\ \tau_{mxz} = \tau_{mzx} &= -\overline{\rho u'_x u'_z} = -\overline{\rho u'_z u'_x}; \\ \tau_{myz} = \tau_{mzy} &= -\overline{\rho u'_y u'_z} = -\overline{\rho u'_z u'_y}.\end{aligned}\tag{6.61}$$

Легко помітити, що рівняння Рейнольдса створюють незамкнену систему. Її замикання зводиться до встановлення зв'язків між турбулентними напруженнями та іншими змінними, які містяться в рівняннях (6.57). Встановити ці зв'язки дозволяють так звані напівемпіричні теорії турбулентності.

### 6.6.2 Напівемпіричні теорії турбулентності

Можна вважати, що розвиток *напівемпіричних теорій турбулентності* започаткував Буссінеск<sup>35</sup>. 1877 р. він запропонував формулу для  $\tau_m$ , аналогічну формулі Ньютона для  $\tau_\mu$ , і цим встановив зв'язок між турбулентними дотичними напруженнями і осередненими швидкостями

$$\tau_m = \eta \frac{d\bar{u}}{dy} = \rho \varepsilon \frac{d\bar{u}}{dy},\tag{6.62}$$

де  $\eta$  – *турбулентна (віртуальна) в'язкість*, або *коефіцієнт турбулентного перемішування*;

$\varepsilon$  – *кінематична турбулентна в'язкість*.

Оскільки надалі мова йтиме тільки про осереднені параметри потоку, рисочку (знак осереднення) далі не ставитимемо.

Турбулентна в'язкість  $\eta$  має ту саму розмірність, що й молекулярна  $\mu$ , але вона характеризує не фізичні властивості рідини, а статистичні властивості пульсаційного руху. Тому, як зазначав ще сам Буссінеск, вона не є сталою величиною, а залежить головним чином від відстані від стінки труби (дослідні графіки цієї залежності будуть наведені далі). Важливо також відмітити, що для більшої частини потоку (за винятком досить тонкого шару, який безпосередньо дотикається до стінки), турбулентна в'язкість набагато більша за фізичну (молекулярну).

У цілому для турбулентного потоку згідно з виразом (6.60) можна записати

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} + \eta \frac{du}{dy} = \rho(\nu + \varepsilon) \frac{du}{dy}.\tag{6.63}$$

<sup>35</sup> Буссінеск Жозеф Валантен (1842–1929) – французький вчений-механік, член Паризької академії наук, автор наукових праць у галузі оптики, термодинаміки, теорії пружності, гідродинаміки. Зокрема запропонував формулу для вільної поверхні рідини, при її течії у пористому ґрунті та напівемпіричну теорію турбулентності, які носять його ім'я.

Однак уявлення Буссінеска хоч і було великим кроком на шляху замикання рівнянь Рейнольдса, але не привело до остаточного розв'язання задачі опису турбулентної течії, оскільки на той час був невідомий закон розподілу  $\varepsilon(r)$  в перерізі труби, а припущення, що  $\varepsilon = \text{const}$ , не відповідає дійсності та дає відмінні від дослідних результати. Крім того, формула (6.62) має деякі недоліки, наприклад в несиметричних потоках, як свідчить досвід, турбулентні дотичні напруження дорівнюють нулю не в тих точках, де спостерігається максимум швидкості ( $\partial u / \partial y = 0$ ), тощо.

Першого великого успіху в розробці напівемпіричних теорій 1925 р. досяг Людвіг Прандтль<sup>36</sup>. Він запропонував так звану *теорію шляху перемішування* (змішування), яка полягає у такому. При турбулентній течії за рахунок пульсацій в потоці відбувається перенос кількості руху від одних шарів рідини до інших. Цей процес аналогічний молекулярному переносу при ламінарній течії. Відмінність полягає в тому, що носіями імпульсу при турбулентному обміні є не молекули, а значно більші за розмірами кінцеві об'єми рідини, котрі часто називають «молями». Розглянемо усталений турбулентний рух в круглій трубі (рисунок 6.11). Лінії течії його осередненого руху є прямими паралельними осі труби. Їх перетинають лінії течії пульсаційного руху, котрі проникають з одного шару рідини у інший, створюючи при цьому поперечне перемішування цієї рідини. Таке перемішування називають турбулентним, або молярним. Перенос кількості руху, пов'язаний з *турбулентним перемішуванням*, викликає турбулентне тертя між шарами рідини та тенденцію до вирівнювання поля швидкостей. Іншими словами, якщо «моль» рідини у шарі 1 має осереднену швидкість  $u$ , то під впливом турбулентної пульсації, не втрачаючи своєї «індивідуальності», він переміщується на відстань  $l_n$  у шар 2, де осереднена швидкість дорівнює  $u + (du/dy)l_n$ . Головне припущення теорії Прандтля, яке відрізняє її від попередніх, полягає у тому, що шлях між шарами 1 і 2 «моль» проходить без взаємодії з іншою рідиною, тобто так, як молекула газу проходить шлях вільного пробігу. У результаті перемішування з рідиною шару 2 переміщена маса набуває осередненої швидкості цього шару, а в ньому виникають пульсації

---

<sup>36</sup> Прандтль Людвіг (1875–1953) – видатний німецький фізик і гідромеханік, «батько сучасної аеродинаміки». Автор успішної напівемпіричної теорії турбулентності, що привела до логарифмічного закону розподілу швидкостей у турбулентному потоці. Запропонував теорію надзвукової ударної хвилі та на підставі цієї теорії побудував першу надзвукову аеродинамічну трубу. Співавтор і до цього часу актуального метода проектування надзвукового сопла. У своїй першій великій науковій праці «Течія рідини з малою в'язкістю» (1904) Прандтль сформулював основи теорії пограничного шару і пояснив його вплив на відрив потоку від твердого тіла та лобовий опір. Ця теорія актуальна і зараз. Прандтль заснував власну школу аеродинаміки та разом з іншими вченими став автором теорії крила, яка мала великий вплив на розвиток авіації. У сфері авіабудування до 1945 р. активно співпрацював з рейхсміністерством авіації Німеччини. Також відомі праці Прандтля у галузі метеорології та теорії пружності. Ім'ям Прандтля названо один з критеріїв гідродинамічної подібності.

$$u'_x \approx \frac{du}{dy} l_n, \quad u'_y \approx \frac{du}{dy} l_n. \quad (6.64)$$

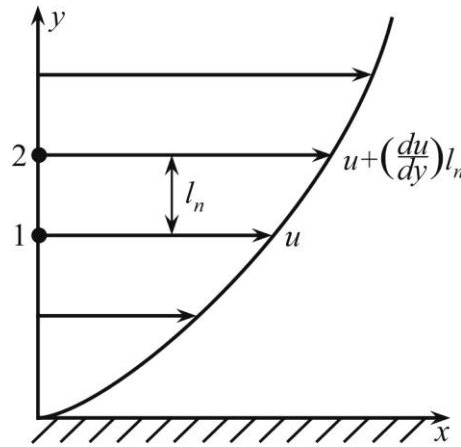


Рисунок 6.11 – До поняття про довжину шляху перемішування

Тоді

$$|u'_x u'_y| \approx \left| l_n^2 \left( \frac{du}{dy} \right)^2 \right| = l_n^2 \left( \frac{du}{dy} \right)^2, \quad (6.65)$$

а модуль дотичного турбулентного напруження

$$|\tau_m| = |\rho u'_x u'_y| = \rho l_n^2 \left( \frac{du}{dy} \right)^2. \quad (6.66)$$

Величину  $l_n$  називають *довжиною шляху перемішування* (змішування).

Як теорія Буссінеска, так і теорія Прандтля задачу знаходження залежності  $\tau_m$  від осереднених швидкостей, а отже, і розрахунку поля швидкостей зводять до задачі визначення розподілу  $\varepsilon(x; y; z)$  або  $l_n(x; y; z)$  у перерізі турбулентного потоку.

### 6.6.3 Розподіл швидкостей при турбулентній течії в круглій трубі

Згідно з логікою, що випливає з формули  $\tau = \tau_\mu + \tau_m$ , Прандтль запропонував умовно ділити потік на *турбулентне ядро*, в якому  $\tau_m \gg \tau_\mu$  (тобто в'язкісними напруженнями можна нехтувати), і так званий *пристінний шар*, в якому вплив турбулентних пульсацій практично відсутній і тому визначальними є в'язкісні напруження  $\tau_\mu$ , а  $\tau_m \approx 0$  (рисунок 6.12). Це так звана *двошарова модель Прандтля*. Вважалось, що течія в пристінному шарі ламінарна, і тому його називали ламінарним.

У безпосередній близькості від стінок, у межах пристінного шару, вирішальний вплив на течію має ефект прилипання і фізична (молекулярна) в'язкість. На стінці труби  $u_x = u_y = u_z = 0$ ,  $u'_x = u'_y = u'_z = 0$ , а отже, турбулентні напруження дорівнюють нулю. Тому для пристінного шару

$$\tau_0 = \mu \frac{du}{dy}, \quad (6.67)$$

де  $\tau_0$  – дотичне напруження на стінці.

Інтегрування рівняння (6.67) дає

$$u = \frac{\tau_0}{\mu} y + C. \quad (6.68)$$

При  $y = 0$   $u = 0$ , а отже, і  $C = 0$ .

Таким чином,

$$u = \frac{\tau_0}{\mu} y = \frac{\tau_0}{\rho \nu} y, \quad (6.69)$$

з чого випливає, що в межах пристінного шару швидкість розподіляється за лінійним законом.

Величина  $\tau_0/\rho$  має розмірність квадрата швидкості. Тому

$$\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = u_* \quad (6.70)$$

називають *динамічною швидкістю*, або *швидкістю тертя*.

Отже,

$$u = u_*^2 \frac{y}{\nu}. \quad (6.71)$$

Оцінимо товщину пристінного шару. Маючи на увазі, що на його границі  $y = \delta$ , рівняння (6.71) перепишемо так:

$$\frac{u}{u_*} = \frac{u_* \delta}{\nu}. \quad (6.72)$$

Іван Нікурадзе<sup>37</sup> дослідним шляхом встановив, що права частина рівняння (6.72) дорівнює приблизно 11,6. Тому

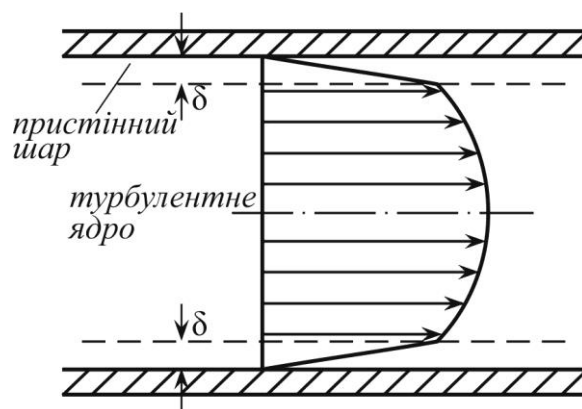


Рисунок 6.12 – Двошарова модель потоку

<sup>37</sup> Нікурадзе Іван Ілліч (1894–1979) – німецький вчений-гідродинамік грузинського походження. Після навчання в Гьоттингенському університеті під керівництвом Л. Прандтля захистив дисертацію «Спостереження за розподілом швидкостей у турбулентному потоці», в якій підтвердив логарифмічний закон розподілення. Провів експерименти, котрі стали класичними, з встановлення залежності для гідравлічного коефіцієнта тертя (графіки Нікурадзе).

$$\delta = 11,6 \frac{v}{u_*}. \quad (6.73)$$

Встановимо зв'язок  $\delta$  з числом Рейнольдса. Для цього скористаємося тими самими міркуваннями, що й для отримання залежності  $\tau$  від  $\Delta P$  при ламінарному режимі (посилання на цю формулу є коректним, оскільки міркування, на підставі яких її було отримано, справедливі незалежно від режиму течії). Саме там була виведена формула (6.43), помножуючи яку на  $\rho g$ , маємо

$$\Delta P = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho v^2}{2}. \quad (6.74)$$

Під час розгляду теорії подібності доведено, що ця формула справедлива як для ламінарного, так і турбулентного режимів. Різниця полягає лише у правилах визначення  $\lambda$  (у першому випадку  $\lambda = 64 / \text{Re}$ , у другому – залежність має більш складний характер).

Підставляючи рівняння (6.74) до рівняння (6.30), дістаємо

$$\tau = \frac{\lambda \rho v^2 R}{4ld} = \frac{\lambda \rho v^2}{8}. \quad (6.75)$$

Скориставшись формулою (6.70) ( $\tau = \tau_0$ ),

$$u_* = v \sqrt{\frac{\lambda}{8}}. \quad (6.76)$$

Отже, формула (6.76) встановлює зв'язок динамічної швидкості із середньою. Підставляючи цю формулу до рівняння (6.73),

$$\delta = 11,6 \frac{v}{v \sqrt{\lambda/8}} = 32,8 \frac{d}{vd/\sqrt{\lambda}} = 32,8 \frac{d}{\text{Re} \sqrt{\lambda}}. \quad (6.77)$$

Звідки випливає, що товщина пристінного шару зменшується при зростанні числа Рейнольдса.

Визначимо тепер розподіл швидкостей у турбулентному ядрі потоку. Як вже відмічалось, у цій області вирішальну роль відіграють турбулентні напруження і тому можна скористатись запропонованою Прандтлем формулою (6.66). Тут не вдалося обійтись без припущень. Перше з них пов'язане з довжиною шляху перемішування. Згідно з гіпотезою Прандтля

$$l_n = \kappa u, \quad (6.78)$$

де  $\kappa \approx 0,4$  – стала Кармана<sup>38</sup>.

<sup>38</sup> Карман Теодор (1881–1963) – американський інженер і фізик угорського походження, видатний фахівець у галузі повітроплавання, учень Л. Прандтля. Вивчав проблеми астронавтики. За його ініціативою була створена Міжнародна академія астронавтики (1960) і Фон Карманівський інститут гідродинаміки у Бельгії (1956). Працював у багатьох галузях гідродинаміки і технологічного прогнозування. Його ім'ям названа послідовність вихорів, що виникає при обтіканні рідиною довгих циліндричних тіл (доріжка Кармана), а також лінія умовної границі між земною атмосферою і космічним простором (лінія Кармана).

Друге припущення – про дотичні напруження. Воно впливає безпосередньо з характеру епюри швидкостей (рисунок 6.12): у турбулентному ядрі градієнти швидкості порівняно невеликі та напруження тертя по суті визначаються градієнтом швидкості біля стінки. Тому Прандтль вважав, що  $\tau_m = \tau_0$ . Отже, формула 6.66) набирає вигляду

$$\tau_0 = \rho \kappa^2 y^2 \left( \frac{du}{dy} \right)^2, \quad (6.79)$$

або з урахуванням формули (6.70)

$$u_*^2 = \kappa^2 y^2 \left( \frac{du}{dy} \right)^2. \quad (6.80)$$

Добувши квадратний корінь і розділивши змінні, дістаємо

$$du = \frac{u_*}{\kappa} \frac{dy}{y}, \quad (6.81)$$

а після інтегрування

$$u = \frac{u_*}{\kappa} \ln y + C, \quad (6.82)$$

тобто швидкості в ядрі турбулентного потоку розподілені за *логарифмічним законом*.

Стала інтегрування визначається з умов на осі труби, де  $y = R$  і  $u = u_{\max}$ .

Тоді

$$C = u_{\max} - \frac{u_*}{\kappa} \ln R \quad (6.83)$$

і з урахуванням цього

$$u = u_{\max} - \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{R}{y}, \quad (6.84)$$

або у безрозмірному вигляді *епюра швидкостей* турбулентного потоку має вигляд

$$\frac{u_{\max} - u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{R}{y}. \quad (6.85)$$

Звернемо увагу на недоліки отриманого закону. При  $y \rightarrow 0$   $du/dy \rightarrow \infty$ , що фізично нереально. Тому формула (6.84) не може описувати розподіл швидкостей у безпосередній близькості від стінки. Цього можна було очікувати, оскільки при виведенні логарифмічного закону не брали до уваги фізичну в'язкість.

Крім того,

$$\left( \frac{du}{dy} \right)_{y=R} = \frac{u_*}{\kappa R} \neq 0, \quad (6.86)$$



хоча природною умовою є

$$\left(\frac{du}{dy}\right)_{y=R} = 0. \quad (6.87)$$

Але незважаючи на ці недоліки, логарифмічний закон досить точно описує розподіл швидкостей в ядрі турбулентного потоку і тому набув широкого використання.

Впровадження *двошарової моделі Прандтля*, тобто поділ потоку на турбулентне ядро і пристінний шар, привело до специфічної класифікації стінок труб. Якщо товщина пристінного шару  $\delta$  більша від виступів шорсткості  $k$ , труби називають *гідравлічно гладкими* (рисунок 6.13,б), а якщо  $\delta < k$  – *гідравлічно шорсткими* (рисунок 6.13,а).

Слід звернути увагу на те, що одна й та сама труба залежно від товщини пристінного шару може бути в одному випадку гідравлічно гладкою, а в іншому – шорсткою.

Як показали численні дослідження, припущення, до яких довелося вдатися при виведенні логарифмічного закону, не відповідають дійсності. Так, експериментальні дослідження в гідравлічно гладкій прямокутній трубі завширшки  $2H$  показали, що  $\tau \neq \tau_0$ , а дотичні напруження в потоці розподілені за лінійним законом (рисунок 6.14).

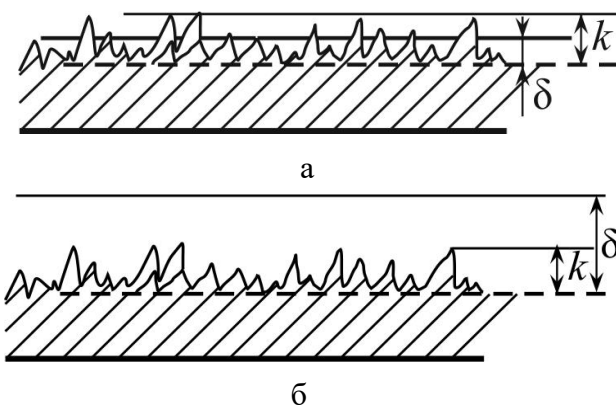


Рисунок 6.13 – Гідравлічно шорсткі (а) і гідравлічно гладкі (б) труби

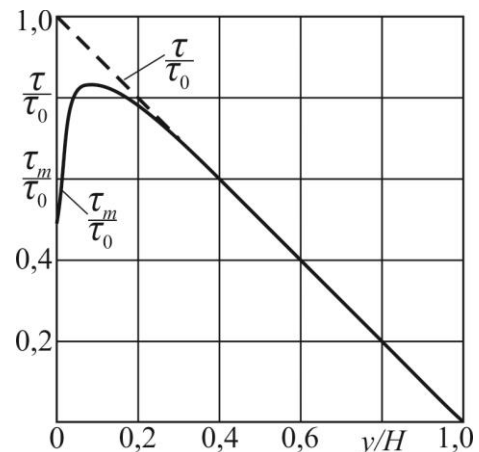


Рисунок 6.14 – Розподіл дотичних напружень в прямокутній трубі

Не відповідає дійсності й гіпотеза про лінійну залежність  $l_n$  від  $y$  формулі (6.78). На рисунку 6.15 зображені графіки, що характеризують розподіл  $l_n$  в перерізі круглої труби за дослідними даними Нікурадзе і формулами, запропонованими різними авторами. З рисунка видно, що гіпотеза Прандтля (6.78) неправомірна.

Не підтвердилось і припущення про ламінарність течії в пристінному шарі. Як виявилось, турбулентні пульсації біля стінки не зникають миттєво, а згасають поступово. Схожість з ламінарною течією виявляється тільки в характері розподілу швидкостей. Таке уявлення підтвердилося експериментами, які були проведені із застосуванням фотометоду, що наведені на рисунку 6.16. Таким

чином, очевидно, що пристінний шар правильно називати не ламінарним, а в'язким.

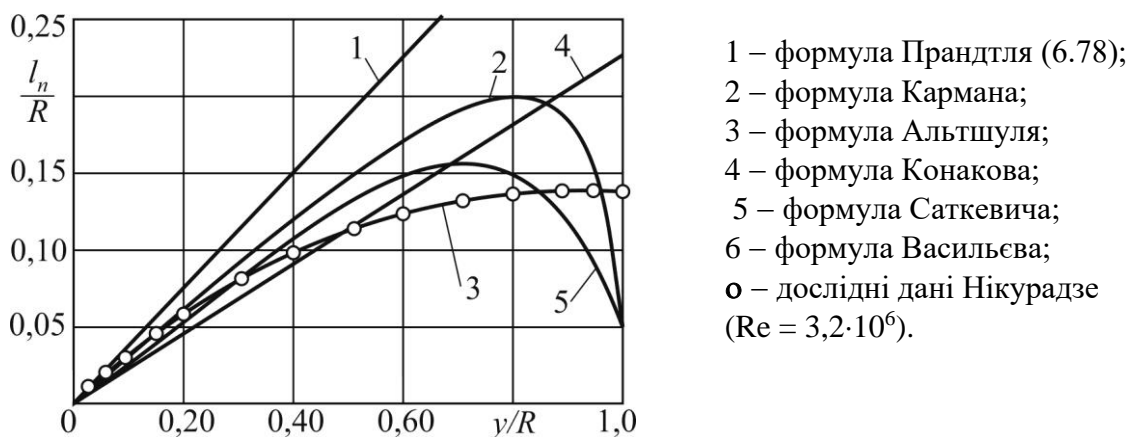


Рисунок 6.15 – Розподіл  $l_n$  в перерізі круглої труби

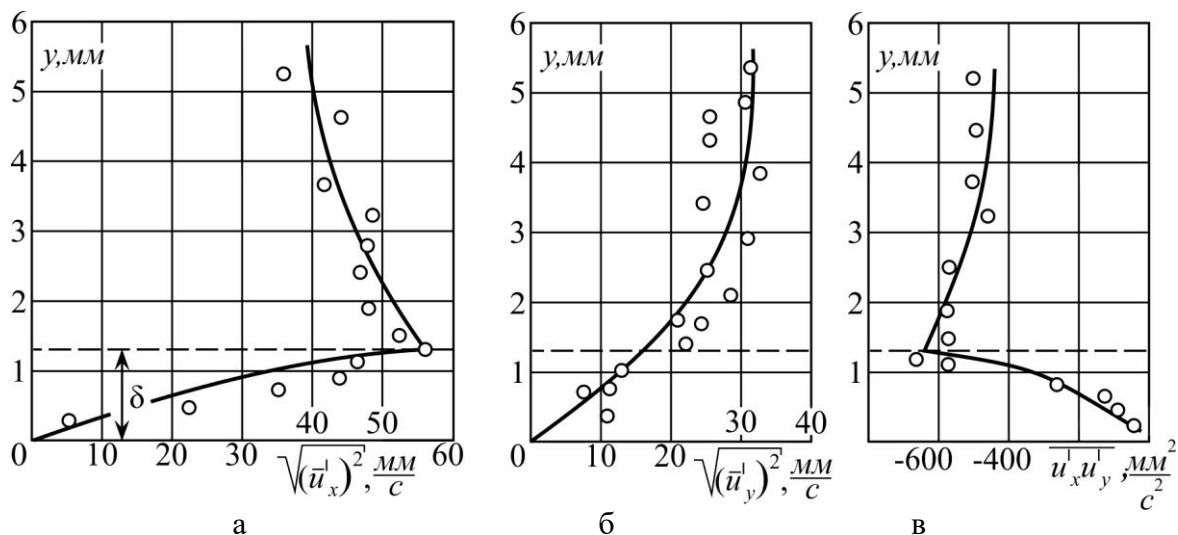


Рисунок 6.16 – Розподіл турбулентних пульсацій поблизу стінки труби:  
 а – розподіл поздовжніх пульсацій; б – розподіл поперечних пульсацій;  
 в – розподіл добутку пульсацій

Відомий фахівець у галузі гідромеханіки А. Д. Альтшуль<sup>39</sup> вважав, що поділ потоку на дві області є грубою схематизацією, яка має штучний характер. Спираючись на результати досліджень другої половини ХХ ст. (деякі з них наведені вище), Альтшуль розробив свою напівемпіричну теорію, яка розглядає потік у цілому і в якій не відкидається та чи інша складова дотичних напружень. Приймаючи вже відоме припущення, що  $\tau_0 = \tau$ , формулу (6.63) можна переписати у вигляді

<sup>39</sup> Альтшуль Адольф Давидович (1913–1994) – професор Московського інженерно-будівельного інституту ім. Куйбишева. Працював у пректно-пошукових і науково-дослідницьких організаціях з роз'язання проблем зрошування заволзьських земель. Визнаний фахівець у галузі гідравлічних опорів, автор напівемпіричної теорії турбулентності та універсальної формули для гідравлічного коефіцієнта тертя, яка носить його ім'я.

$$\frac{\tau_0}{\rho} = (\nu + \varepsilon) \frac{du}{dy} = u_*^2. \quad (6.88)$$

Як вважав ще Буссінеск,  $\varepsilon$  може бути подана як добуток деякої швидкості на деяку довжину. Як швидкість Альтшуль прийняв динамічну швидкість  $u_*$ , а довжина – відстань від стінки  $y$ . Вважаючи залежність  $\varepsilon = f(y)$  лінійною, він прийняв гіпотезу, що

$$\varepsilon = \kappa u_* y. \quad (6.89)$$

Як показали теоретичні та експериментальні дослідження (рисунок 6.17), формула (6.89) добре підтверджується лише поблизу стінки (в центральній частині потоку можна приймати  $\varepsilon = \text{const}$ ).

Таким чином,

$$\frac{du}{dy} = \frac{u_*^2}{\nu \left(1 + \frac{\kappa u_* y}{\nu}\right)}, \quad (6.90)$$

а після інтегрування

$$u = \frac{u_*}{\kappa} \ln \left(1 + \frac{\kappa u_* y}{\nu}\right) + C. \quad (6.91)$$

Визначивши сталу інтегрування з умови, що при  $y = R$   $u = u_{\max}$ , маємо

$$u = u_{\max} - \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{1 + \frac{\kappa u_* y}{\nu}}{1 + \frac{\kappa u_* R}{\nu}}, \quad (6.92)$$

або у безрозмірному вигляді

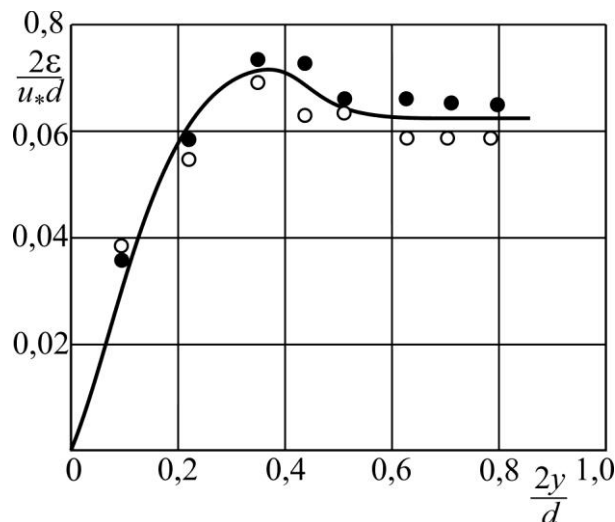
$$\frac{u_{\max} - u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{1 + \frac{\kappa u_* R}{\nu}}{1 + \frac{\kappa u_* y}{\nu}}. \quad (6.93)$$

Рисунок 6.17 – Розподіл турбулентної в'язкості в круглій трубі за дослідями Лауфера (●) і Нуннера (○)

Перевагою формули (6.90) є те, що на стінці труби градієнт швидкості має кінцеве значення

$$\left(\frac{du}{dy}\right)_{y=0} = \frac{u_*^2}{\nu}. \quad (6.94)$$

Але формула (6.90), як і формула (6.80), дає відмінне від нуля значення  $du/dy$  при  $y = R$ , що є наслідком гіпотези (6.89), котра не підтверджується для



центральної частини потоку (як не підтвердилась і гіпотеза Прандтля про лінійний закон для  $l_n$ ). Можна вважати, що цей недолік є спільним для теорій Прандтля і Альтшуля.

Цього недоліку складно уникнути, якщо навіть скористатися більш точним законом розподілу  $\varepsilon$  або  $l_n$ . Так, наприклад, скориставшись апроксимаційною формулою Д. М. Васильєва

$$l_n = \frac{\kappa}{3} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{y}{R} \right)^3 \right] R, \quad (6.95)$$

можна дістати закон розподілу швидкостей, який відповідає гіперболічному тангенсу

$$\frac{u_{\max} - u}{u_*} = 5 \operatorname{arth} \left[ \left( 1 - \frac{y}{R} \right)^{\frac{3}{2}} \right]. \quad (6.96)$$

Легко переконатися, що і у даному випадку при  $y \rightarrow 0$   $du/dy \rightarrow \infty$  та на осі труби  $du/dy \neq 0$ .

Для практичних цілей можуть використовуватися досить зручні показникові формули, отримані шляхом апроксимації:

$$\frac{u}{u_{\max}} = \left( \frac{y}{R} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (6.97)$$

або

$$\frac{u}{u_{\max}} = \left( \frac{y}{R} \right)^{0,9\sqrt{\lambda}}. \quad (6.98)$$

Скориставшись ними, можна отримати важливі характеристики турбулентного потоку в круглій трубі:

$$\frac{u}{v} \approx 1 - 2\sqrt{\lambda} \frac{R}{4,5y}; \quad (6.99)$$

$$\frac{v}{u_{\max}} \approx 1 - 1,2\sqrt{\lambda}; \quad (6.100)$$

$$\frac{y_{cp}}{R} \approx 0,223 + 0,4\lambda; \quad (6.101)$$

$$\alpha \approx 1 + 2,65\lambda, \quad (6.102)$$

де  $y_{cp}$  – координата точки, у якій місцева швидкість дорівнює середній  $v$ .

Розраховані приблизні значення цих характеристик наведені у таблиці 6.1.

Таблиця 6.1 – Приблизні значення гідравлічних характеристик

$\lambda$	0,01	0,02	0,03	0,04	0,06
$n$	10	7	6	5	4
$v/u_{max}$	0,86	0,82	0,79	0,76	0,71
$y_{cp}/R$	0,223	0,232	0,236	0,243	0,250
$\alpha$	1,03	1,05	1,08	1,12	1,16

Дані четвертого рядка мають великий практичний інтерес тому, що вказують відносну відстань, на якій місцева швидкість дорівнює середній. Вимірявши швидкість на цій відстані, наприклад трубкою Піто, можна легко визначити витрату як добуток цієї швидкості на площу живого перерізу.

Дані п'ятого рядка також становлять певний інтерес, оскільки встановлюють величину коефіцієнта Коріоліса, котрий, як відомо, входить в одне з найважливіших рівнянь гідромеханіки – рівняння Бернуллі. Звертає на себе увагу той факт, що  $\alpha$  для турбулентного режиму течії менший, ніж при ламінарному і лише не набагато більший за одиницю. Це пов'язане зі значно більшим ступенем рівномірності поля швидкостей в турбулентному потоці порівняно з ламінарним. Фізично такий факт пояснюється тим, що за рахунок турбулентного перемішування відбувається обмін кількістю руху між шарами рідини і, як наслідок, швидкості в турбулентному стабілізованому потоці розподіляються більш рівномірно.

## 6.7 ГІДРАВЛІЧНІ ОПОРИ

Практичне використання рівняння Бернуллі передбачає вміння розрахувати втрати напору  $\Delta h$ , які є наслідком виникнення в потоці дотичних напружень  $\tau$ , котрі, власне, і є причиною опору течії. Механізм виникнення і дії цих напружень, як було показано вище, досить складний. Тому до цього часу для переважної більшості випадків точного методу визначення  $\Delta h$  не існує, а в інженерних розрахунках користуються емпіричними або напівемпіричними залежностями.

*Гідравлічними опорами прийнято називати всі зовнішні (відносно потоку) діяння, котрі призводять до втрат рідиною механічної енергії. Як показує досвід, гідравлічні опори зручно поділяти на два види: місцеві та по довжині.*

*Місцеві втрати напору  $\Delta h_m$  виникають на досить коротких ділянках, де різко змінюється форма граничних поверхонь потоку, що супроводжується деформацією поля швидкостей. Такі ділянки називають місцевими гідравлічними*

опорами; для трубопроводів – це крани, засувки, повороти, раптові звуження або розширення тощо.

Втрати напору, які виникають вздовж рівномірного (з незмінними граничними умовами і середньою швидкістю) потоку, епюра швидкості якого вздовж шляху не змінюється, називають втратами напору по довжині  $\Delta h_\delta$ .

У реальних гідравлічних конструкціях ділянки рівномірного руху можуть перемінюватися з місцевими опорами. При розрахунку повних втрат напору в таких конструкціях використовують принцип складання, або метод суперпозиції втрат. Згідно з цим принципом сумарні втрати напору дорівнюють арифметичній сумі втрат на окремих ділянках рівномірного руху і у всіх місцевих опорах, що розташовані на шляху рідини,

$$\Delta h = \sum_{i=1}^n \Delta h_{mi} + \sum_{j=1}^m \Delta h_{\delta j}, \quad (6.103)$$

де  $\Delta h_{mi}$  – місцеві втрати у  $i$ -му місцевому опорі;

$\Delta h_{\delta j}$  – втрати по довжині на  $j$ -й ділянці рівномірного руху.

Розглянемо окремо правила визначення кожного виду втрат напору.

#### 6.7.1 Втрати напору по довжині. Графіки Нікурадзе

Розглянемо стабілізований потік рідини у круглій трубі. Як зазначалося у підрозділі 5.4, втрати напору по довжині у цьому випадку можуть бути розрахованими за формулою

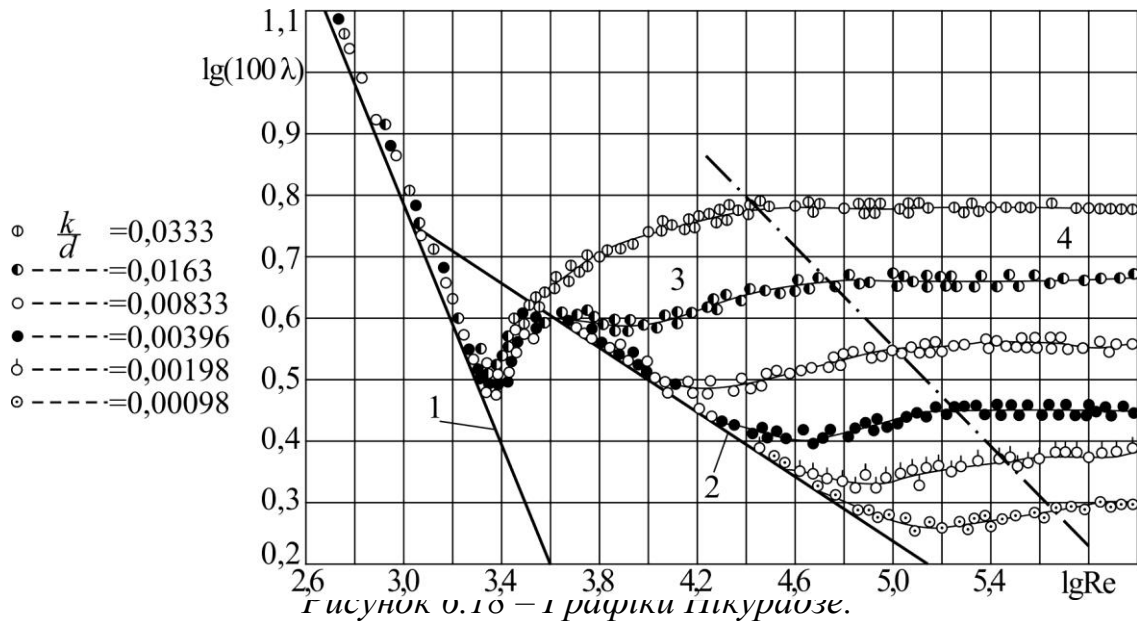
$$\Delta h_\delta = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}. \quad (6.104)$$

Записана у такому вигляді, вона називається *формулою Дарсі* і є досить зручною, оскільки справедлива як для ламінарного, так і турбулентного потоків. Її використання передбачає встановлення залежностей для гідравлічного коефіцієнта тертя, або, як його ще називають, коефіцієнта Дарсі  $\lambda$ .

На відміну від ламінарного режиму течії для турбулентного нема можливості отримати залежності для  $\lambda$  строгим теоретичним шляхом. Тому єдиний вихід – побудова емпіричних або напівемпіричних співвідношень, які базуються на результатах експериментальних досліджень.

Методом аналізу розмірностей доведено, що у загальному випадку  $\lambda$  залежить від числа Рейнольдса і стану внутрішньої поверхні труби, тобто  $\lambda = f(\text{Re}; k/d)$ , де  $k$  – висота нерівностей або висота виступів шорсткості; ( $k/d$  – *відносна шорсткість*, а обернена величина  $d/k$  – *відносна гладкість* труби діаметром  $d$ ). Перші систематичні дослідження щодо визначення характеру цієї залежності провів Нікурадзе. Він експериментував з круглими трубами, на внутрішню поверхню котрих був наклеєний калібрований кварцевий пісок. Така шорсткість була рівнозернистою, чим суттєво відрізнялась від природної шорсткості, яка утворюється внаслідок корозії, відкладень тощо. Проте опубліковані у 1933 р.

графіки Нікурадзе (рисунок 6.18) вперше дозволили проаналізувати залежність гідравлічного коефіцієнта тертя від числа Рейнольдса і шорсткості внутрішньої поверхні труб.



1 – ламінарний режим; 2 – лінія гідравлічно гладких труб;  
 3 – перехідна зона (зона змішаного тертя); 4 – зона гідравлічно шорстких труб

Логарифмічні координати застосовані для компактності, а співмножник 100 введений заради виключення від'ємних логарифмів, оскільки  $\lambda$ , як правило, лежить в межах 0,01–0,05.

Пізніше у різних лабораторіях проводились численні дослідження залежності  $\lambda = f(d/k; Re)$  для промислових труб з технічною шорсткістю. Отримані результати дещо відрізнялись від даних Нікурадзе, для труб зі штучною шорсткістю. Як приклад, на рисунку 6.19 наведено графіки Муріна (ламінарний режим на цих графіках не представлений).

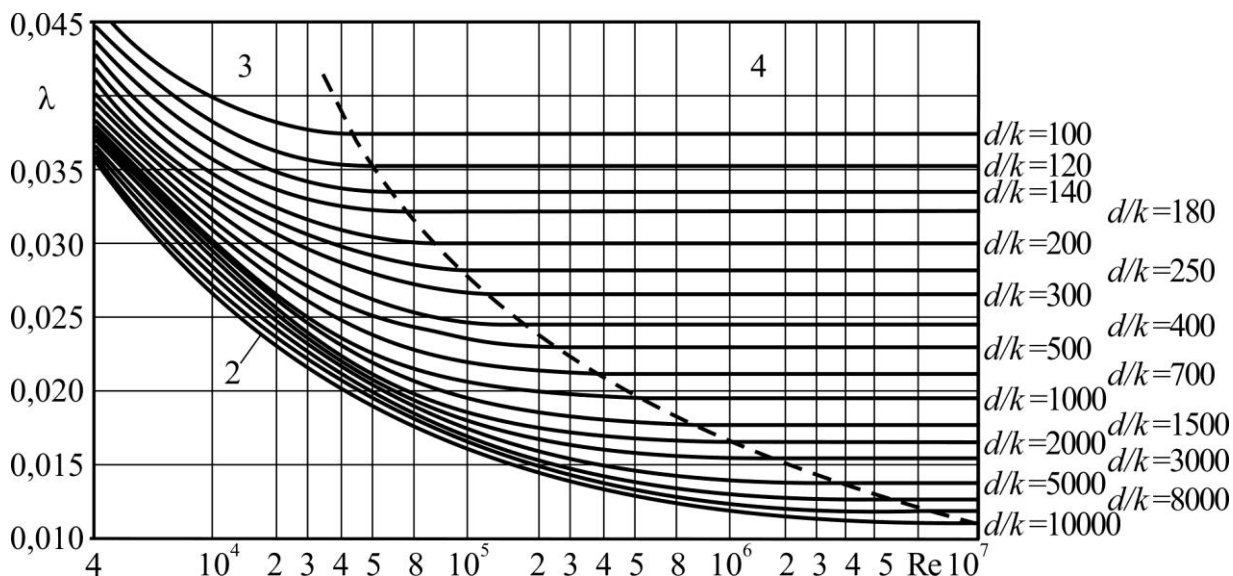


Рисунок 6.19 – Графік Муріна:  
 2 – гідралічно гладкі труби; 3 – перехідна область;  
 4 – автомодельна область

На графіках можна виділити такі зони гідралічного опору.

1. Ламінарний режим течії.

Дослідні точки на цій частині графіка незалежно від величини  $d/k$  лежать на прямій 1, тобто експериментально підтверджено, що для ламінарного потоку  $\lambda$  залежить тільки від числа Рейнольдса. Причому обробка дослідних даних дає формулу

$$\lambda = \frac{64}{Re}, \quad (6.105)$$

що цілком збігається з теоретичними результатами підрозділу 6.5.

Підставляючи формулу (6.105) до формули (6.104), можна пересвідчитись, що втрати напору при ламінарному режимі течії пропорційні середній швидкості у першому степені, що, до речі, підтверджується і графіком на рисунку 6.4.

У діапазоні чисел  $Re \approx 2000 - 4000$  відбувається перехід від ламінарного режиму до турбулентного. У цьому проміжку потік є нестійким; у ньому періодично виникають і згасають турбулентні пробки. Тому отримати формулу для  $\lambda$  в цій зоні неможливо.

2. Область гідралічно гладких труб (або зона гладкостінної течії).

Як і при гладкостінній течії, усі дослідні точки створюють одну лінію 2. Отже, гідралічний коефіцієнт тертя також не залежить від шорсткості. Фізично це можна пояснити тим, що виступи шорсткості повністю занурені у в'язкий пристінний шар, тому не вносять збурення в турбулентне ядро потоку.



Для гідравлічно гладких труб справедлива *формула Блазіуса*<sup>40</sup>

$$\lambda = 0,3164 \operatorname{Re}^{-0,25}. \quad (6.106)$$

Умовою її застосування є

$$\operatorname{Re} \frac{k_e}{d} \leq 10, \quad (6.107)$$

де  $k_e$  – *еквівалентна шорсткість*, мм.

Якщо формулу (6.106) підставити до формули Дарсі, то видно, що втрати напору при гладкостінній течії пропорційні  $v^{1,75}$ .

### 3. *Перехідна область (або область змішаного тертя).*

Вона обмежується ліворуч лінією гладкостінної течії, а праворуч – штриховою лінією. Можна бачити, що у цій зоні кожна крива відповідає певному значенню  $d/k$ , тому  $\lambda$  залежить як від числа Рейнольдса, так і від відносної шорсткості. Вплив останньої пояснюється тим, що збільшення  $\operatorname{Re}$  приводить до зменшення товщини в'язкого шару і виступи шорсткості починають проникати в турбулентне ядро потоку.

Для перехідної області найбільш поширеною є *формула Альтшуля*, яка була отримана на основі його напівемпіричної теорії та дослідних даних,

$$\lambda = 0,11 \left( \frac{k_e}{d} + \frac{68}{\operatorname{Re}} \right)^{0,25}. \quad (6.108)$$

Втрати напору в цій області пропорційні середній швидкості у степені від 1,75 до 2,0. Тому перехідну область ще називають *зоною доквадратичного опору*. Її границі

$$10 \leq \operatorname{Re} \frac{k_e}{d} \leq 500. \quad (6.109)$$

### 4. *Область гідравлічно шорстких труб (або автомодельна область).*

Вона знаходиться праворуч від штрихової лінії. Очевидно, що тут коефіцієнт Дарсі не залежить від  $\operatorname{Re}$ . Це пояснюється тим, що зростання числа Рейнольдса приводить до все більшого стоншення в'язкого шару і нарешті настає момент, коли збільшення  $\operatorname{Re}$  вже не викликає скільки-небудь помітного зменшення  $\delta$ . Виступи шорсткості практично повністю знаходяться в ядрі потоку. Границя автомодельної області

$$\operatorname{Re} \frac{k_e}{d} \geq 500, \quad (6.110)$$

а число Рейнольдса, при якому в даній трубі настає автомодельність, називають *граничним числом Рейнольдса* ( $\operatorname{Re}_{gr}$ ).

---

<sup>40</sup> Блазіус Пауль Ріхард Генріх (1883–1970) – німецький гідромеханік, учень Л. Прандтля. Працював у Гьоттингенському університеті та Інженерній школі Гамбурга, запропонував формулу для гідравлічного коефіцієнта тертя, яка носить його ім'я.

Гідравлічний коефіцієнт тертя може бути розрахований за *формулою Шифрінсона*

$$\lambda = 0,11 \left( \frac{k_e}{d} \right)^{0,25}. \quad (6.111)$$

У цій області втрати напору пропорційні квадрату швидкості. Тому її часто називають *зоною квадратичного опору*.

Легко пересвідчитися, що формула Альтшуля в граничних випадках (гідравлічно гладкі труби та гідравлічно шорсткі труби) перетворюється у формули (6.106) і (6.111). Тому вона є універсальною, тобто придатною для розрахунку  $\lambda$  у будь-якому випадку турбулентної течії.

Особливого розгляду потребує питання впливу на  $\lambda$  шорсткості. Справа у тому, що цей вплив залежить не тільки від висоти виступів нерівностей, а й від інших характеристик, наприклад гостроти виступів, відстані між ними тощо. Якимось чином врахувати усі особливості геометрії шорсткості неможливо. Тому в гідромеханіці використовується так звана еквівалентна шорсткість  $k_e$  – *така фіктивна рівнозерниста шорсткість, яка при рівних умовах за результатами розрахунків дає такі самі втрати напору, що і дійсна шорсткість*.

Величина  $k_e$  для різних видів труб визначається експериментально і наводиться в довідниках з гідравліки.

Можна бачити, що відмінність графіків Нікурадзе і графіків для труб з технічною шорсткістю стосується насамперед перехідної зони: для промислових труб з нерівномірною шорсткістю перехід від гладкостінної течії до зони квадратичного опору є плавним. Це пояснюється тим, що при зростанні  $Re$  і відповідному зменшенні  $\delta$  у стикання з турбулентним ядром виступи шорсткості вступають поступово.

### 6.7.2 Місцеві втрати напору

Як вже зазначалося, місцеві втрати енергії виникають на ділянках потоку, де різко змінюється його кінематична структура (розподіл швидкостей) під впливом різкої зміни граничних умов. Будь-яка деформація епюри швидкостей супроводжується виникненням додаткових дотичних напружень в потоці, а отже, переходом частини його механічної енергії в тепло, тобто втратами напору. Крім того, в більшості місцевих опорів можуть спостерігатися так звані вихрові зони. Механізм їх виникнення розглянемо на прикладі раптового розширення.

Внаслідок дії сил інерції струминки рідини не можуть точно повторити контури прямого кута  $B$  (рисунок 6.20). Тому за ним утворюється застійна *вихрова зона*, границі котрої відмічені штриховою лінією  $BK$ , а основний рух відбувається нижче від цієї лінії.

Завдяки розширенню основного потоку за кутом  $B$  середня швидкість зменшується, а тиск підвищується. Це сприяє виникненню поблизу стінки труби зворотної течії (її напрям вказано стрілкою). Зрозуміло, що на підтримку цієї «некорисної» циркуляційної течії витрачається певна частина механічної енергії потоку. Розглянута течія є відривною.

Місцеві втрати напору розраховуються за формулою Вейсбаха<sup>41</sup>

$$\Delta h_m = \zeta \frac{v^2}{2g}, \quad (6.112)$$

де  $v$  – середня швидкість, як правило, за місцевим опором;

$\zeta$  – коефіцієнт місцевих втрат.

Коефіцієнт  $\zeta$  у загальному випадку залежить від числа Рейнольдса і конфігурації (форми) місцевого опору.

Теоретичний розрахунок  $\zeta$  можливий для досить обмеженого числа найбільш простих випадків.

Знову розглянемо раптове розширення. Для двох перерізів 1–1 і 2–2 запишемо рівняння Бернуллі

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \Delta h.$$

Вважаючи, що вісь труби горизонтальна ( $z_1 = z_2$ ), відстань між перерізами незначна ( $\Delta h_0 \approx 0$ , і тому втрати між означеними перерізами складаються лише з місцевих втрат у раптовому розширенні  $\Delta h = \Delta h_p$ ) та приймаючи  $\alpha_1 = \alpha_2 \approx 1$ , перепишемо його у такому вигляді:

$$\Delta h_p = \frac{P_1 - P_2}{\rho g} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g}. \quad (6.113)$$

З теореми імпульсів, яка буде розглянута докладно у підрозділі 6.12, випливає, що

$$(P_1 - P_2) A_2 = \rho Q(v_2 - v_1). \quad (6.114)$$

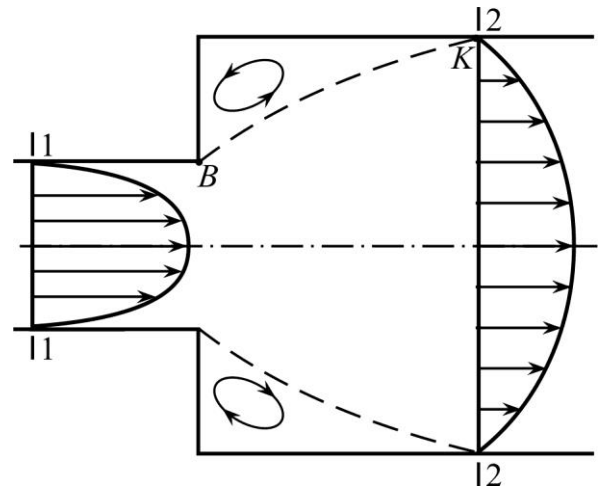


Рисунок 6.20 –  
Раптове розширення

<sup>41</sup> Вейсбах Юліус (1806–1871) – саксонський математик і гідромеханік. Вивчав витікання рідини крізь отвори і насадки, гідравлічні опори. Основна наукова праця – «Підручник з інженерії і механіки машин» (1845) – стала класичною і витримала багато перевидань. Запропонував формулу для втрат напору у місцевих опорах, яка носить його ім'я.

Розділивши останній вираз на  $\rho g$  і скориставшись рівнянням нерозривності, маємо

$$A_2 \frac{P_1 - P_2}{\rho g} = \frac{v_2 A_2}{g} (v_2 - v_1), \quad (6.115)$$

або

$$\frac{P_1 - P_2}{\rho g} = \frac{v_2^2}{g} - \frac{v_2 v_1}{g}. \quad (6.116)$$

Підставляючи вираз (6.116) до формули (6.113), дістаємо

$$\Delta h_p = \frac{v_2^2}{g} - \frac{v_2 v_1}{g} + \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g} = \frac{v_2^2 - 2v_2 v_1 + v_1^2}{2g}, \quad (6.117)$$

що нарешті дає

$$\Delta h_p = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}. \quad (6.118)$$

Таким чином, *втрати напору при раптовому розширенні дорівнюють швидкісному напору від втраченої швидкості*. Цей результат називають *теоремою Борда*<sup>42</sup>.

Якщо в формулі (6.118) з урахуванням рівняння нерозривності провести нескладні перетворення, то

$$\Delta h_p = \left( \frac{d_2^2}{d_1^2} - 1 \right)^2 \frac{v_2^2}{2g}, \quad (6.119)$$

а з урахуванням формули Вейсбаха

$$\Delta h_p = \zeta_p \frac{v_2^2}{2g}. \quad (6.120)$$

Якщо  $d_2 = d_1$ , то  $\zeta_p = 0$ . Якщо  $d_2 \gg d_1$ , то виникає невизначеність, оскільки  $\zeta_p \rightarrow \infty$ , а  $v_2 \rightarrow 0$ . Тому  $\Delta h_p$  зручно розрахувати за швидкістю  $v_1$ .

$$\Delta h_p = \zeta'_p \frac{v_1^2}{2g}. \quad (6.121)$$

Легко довести, що

$$\zeta'_p = \left( 1 - \frac{d_1^2}{d_2^2} \right)^2, \quad (6.122)$$

<sup>42</sup> Борда Жан-Шарль (1733 – 1799) – французський математик, фізик, геодезист, інженер, політолог, генерал-майор флоту, член Академії наук Бордо і Королівської академії флоту. Вивчав питання опору тіл, що рухаються у рідині (дійшов висновку про квадратичну залежність опору від швидкості), водяні колеса та насоси, витікання рідини крізь малі отвори. Автор формули для втрат напору при раптовому розширенні, яка носить його ім'я.

а величина  $\zeta'_p$  знаходиться в межах від 0 до 1.

Для випадку раптового звуження широко використовується приблизна формула Ідельчика

$$\zeta_s = 0,5 \left( 1 - \frac{d_2^2}{d_1^2} \right), \quad (6.123)$$

де  $d_1$  і  $d_2$  – діаметри труби до і після звуження.

Існують й інші приклади теоретичного розрахунку коефіцієнта місцевих втрат, але для переважної більшості випадків  $\zeta$  може бути визначений лише на підставі дослідів, за результатами котрих креслять графіки  $\zeta = f(\text{Re})$ . Як приклад на рисунку 6.21 показані дослідні криві залежності  $\zeta$  витратомірних діафрагм від  $\text{Re}$ .

При малих  $\text{Re}$  течія рідини крізь місцеві опори є безвідривною, тобто вихрові зони не утворюються, а втрати обумовлені тільки дією сил в'язкого тертя і пропорційні швидкості в першому степені. При цьому

$$\zeta = \frac{A}{\text{Re}}, \quad (6.124)$$

де  $A$  – коефіцієнт, який залежить від виду (геометричної форми) місцевого опору.

Формула (6.124) справедлива для області ліворуч від лінії  $BC$ .

Зростання числа Рейнольдса приводить до появи вихрових зон, і в деякому інтервалі  $\text{Re}$  (між лініями  $BC$  і  $DE$ ) вплив на втрати сил в'язкості та руху в застійних зонах спільновимірний. Причому чим сильніше деформується потік в місцевому опорі, тим раніше (тобто при менших значеннях  $\text{Re}$ ) виникають вихрові зони та лінійна залежність (6.124) переходить у більш складну

$$\zeta = \frac{A}{\text{Re}^n}. \quad (6.125)$$

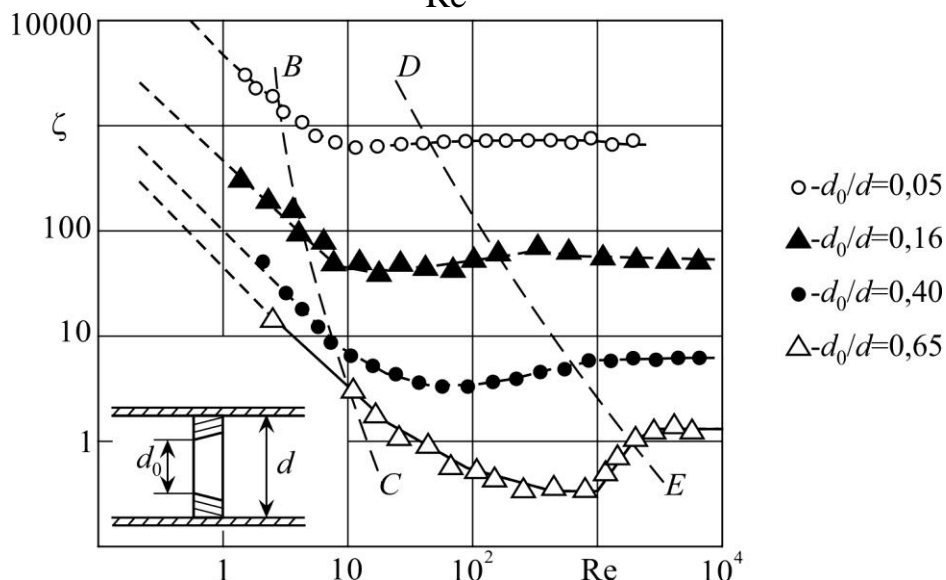


Рисунок 6.21 – Залежність коефіцієнтів місцевих втрат діафрагм від числа Рейнольдса, за даними Н. В. Левкоївої

Подальше зростання  $Re$  приводить до того, що втрати на вихорівиникнення стають визначаючими, а вплив в'язкості – практично непомітним. Лінія  $DE$  відмічає початок автотельності за  $Re$ , тобто коефіцієнт місцевих втрат у цій зоні залежить тільки від конфігурації місцевого опору. Число Рейнольдса, при якому для даного опору починається *автотельна область*, як і у випадку з гідравлічним коефіцієнтом тертя, є *граничним* ( $Re_{ep}$ ). Зрозуміло, що втрати напору при цьому пропорційні середній швидкості у другому степені. Тому автотельну область можна називати зоною квадратичного опору.

У загальному випадку коефіцієнт місцевих втрат може бути розрахований за формулою, запропонованою Альтшулем,

$$\zeta = \frac{A}{Re} + \zeta_{кв}, \quad (6.126)$$

де  $\zeta_{кв}$  – коефіцієнт втрат даного опору в квадратичній зоні опору.

Як показали численні досліди, величини  $Re_{ep}$  і  $\zeta_{кв}$  залежать від конфігурації місцевого опору. Чим більше різко змінюється кінематична структура потоку, тим більший  $\zeta_{кв}$  і тим раніше настає автотельність.

Величини  $\zeta_{кв}$  і  $A$ , отримані експериментальним шляхом для різноманітних місцевих опорів, наводяться у довідниках з гідравліки.

### 6.7.3 Взаємний вплив місцевих опорів. Ділянка гідродинамічної стабілізації

Як зазначалося, подолання потоком місцевого опору супроводжується деформацією поля швидкостей. Ділянка, протягом котрої епюра швидкостей стабілізується, тобто набуває незбуреного вигляду, називається ділянкою гідродинамічної стабілізації. Деформована епюра наближається до стабілізованої асимптотично. Тому питання про довжину ділянки стабілізації  $l_{cm}$ , по суті, є питанням угоди про те, яку епюру вже можна вважати стабілізованою, а яку ще ні. Вважають, що коли всі швидкості даної епюри відрізняються від відповідних швидкостей явно стабілізованої епюри менше ніж 1 %, то потік в цілому є стабілізованим.

Існують різні критерії, що характеризують ступінь деформації поля швидкостей. Одним з них є коефіцієнт Коріоліса. Очевидно, що у випадку відмінності  $\alpha$  у даному перерізі від коефіцієнта Коріоліса стабілізованого потоку  $\alpha_{cm}$  епюру швидкостей у цьому перерізі слід вважати деформованою.

Роботи, проведені під керівництвом Ю. М. Константинова, дозволили встановити, що  $l_{cm}$  можна представити як суму довжин двох ділянок  $l_1$  і  $l_2$ ; перша з них залежить від коефіцієнта місцевих втрат  $\zeta$ , а друга від гідравлічного коефіцієнта тертя  $\lambda$  (типовий графік зміни коефіцієнта Коріоліса потоку за місцевим опором показаний на рис. 6.22). Ця залежність апроксимована формулою

$$\frac{l_{cm}}{d} = 19(1 - e^{-0,6\zeta}) + \frac{0,45}{\lambda}. \quad (6.127)$$

З поняттям ділянки гідродинамічної стабілізації пов'язані особливості взаємного впливу місцевих опорів. При гідравлічному розрахунку трубопроводів повна втрата напору визначається як сума втрат усіх видів. Наприклад, повна втрата напору в трубі довжиною  $l$  і діаметром  $d$ , на якій розташовано  $n$  місцевих опорів, становитиме

$$\Delta h = \Delta h_0 + \sum_{i=1}^n \Delta h_{mi} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} + \sum_{i=1}^n \zeta_i \frac{v^2}{2g}. \quad (6.128)$$

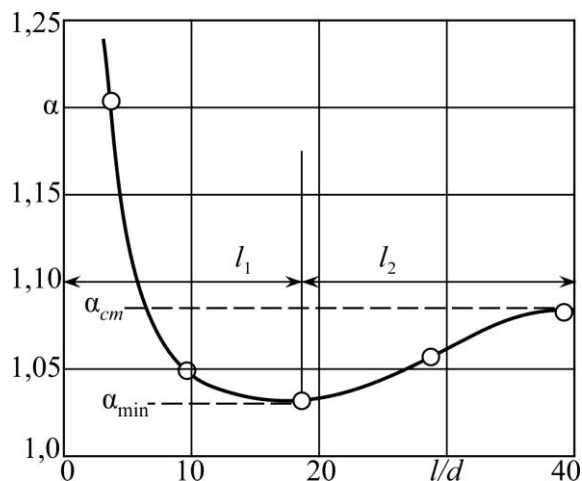


Рисунок 6.22 – Зміна коефіцієнта Коріоліса потоку після діафрагми з  $d_0/d = 0,245$

Як приклад розглянемо результати експериментального дослідження взаємного впливу двох прямокутних поворотів на  $90^\circ$  (рисунок 6.23). Як видно з графіків, при П-подібній компоновці коефіцієнт опору системи менший за арифметичну суму двох окремо взятих поворотів  $\sum \zeta$ . Це пояснюється тим, що, пройшовши перший поворот, потік набуває такого розподілу швидкостей, який є «зручним» для другого, тобто на другому повороті перебудова епюри швидкостей незначна. При Z-подібній компоновці – все навпаки. Після першого повороту потік набуває такої епюри швидкостей, яка в другому зазнає більшої деформації щодо випадку, коли потік на підході до цього повороту був би стабілізований.

Нагадаємо, що таке арифметичне складання називається *методом суперпозиції втрат*. Він дає правильний результат лише у тих випадках, коли довжини прямолінійних ділянок трубопроводу між окремими місцевими опорами достатні для стабілізації потоку. Якщо ця умова не витримується, то відбувається взаємний вплив опорів, причому він може привести як до збільшення коефіцієнта місцевих втрат усієї системи  $\zeta_\Sigma$  відносно до арифметичної суми  $\sum \zeta$  окремих опорів, так і до його зменшення. Це залежить від особливостей взаємного розташування місцевих опорів.

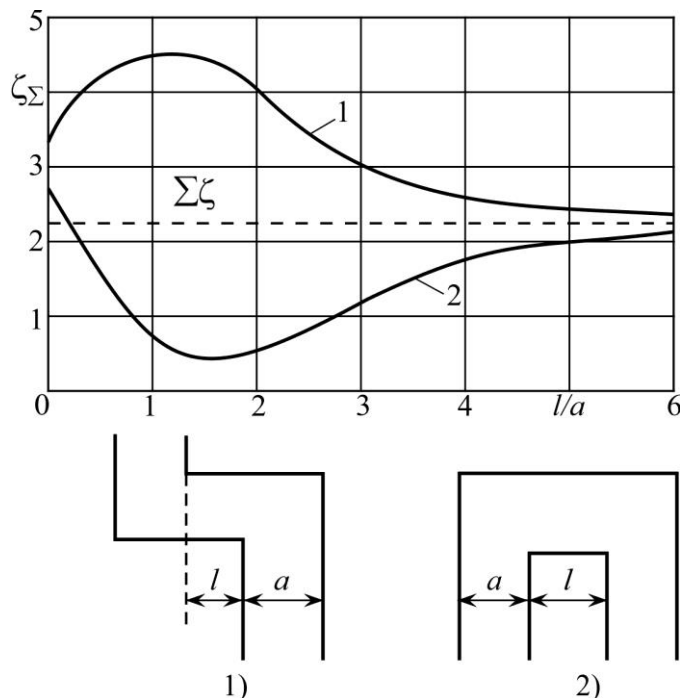


Рисунок 6.23 – Взаємний вплив двох поворотів на  $90^\circ$ , за даними М. М. Верьовкіна: 1 – Z-подібна компоновка; 2 – П-подібна компоновка

У міру зростання відстані між опорами і у першому, і у другому випадках їх взаємний вплив зменшується. Обидві криві асимптотично наближуються до лінії, що відповідає  $\sum \zeta$ . Очевидно, що коли віддалення між поворотами становитиме довжину ділянки гідродинамічної стабілізації, взаємний вплив місцевих опорів зникне.

#### 6.7.4 Кавітація в місцевих опорах

Розглянемо течію краплинної рідини крізь місцевий опір, в якому відбувається звуження потоку. Відповідно до рівняння Бернуллі тиск у її вузькій частині знижується. Якщо він падає нижче від тиску паровиникнення  $P_n$ , котрий відповідає температурі рідини, то в потоці зароджуються парогазові бульбашки – виникає процес холодного кипіння. Слово «холодне» означає, що процес може відбуватися при температурах, значно нижчих за ті, при яких рідина закипає при атмосферному тиску, тобто виникнення парогазових бульбашок досягається не шляхом підвищення температури, а за рахунок зниження тиску. Рухаючись з потоком, бульбашки потрапляють у частину труби, де тиск зростає. У деякому перерізі він стає більшим за  $P_n$ , і відбувається процес конденсації. У місці конденсації виникає різке підвищення тиску та температури. Причому це підвищення настільки велике, що у випадку конденсації на твердій поверхні виникає її ерозія (руйнування). Тому кавітація негативно впливає на роботу обладнання і супроводжується шумом та вібрацією. Зрозуміло, що робота гідравлічних систем у кавітаційному режимі недопустима.

Таким чином, під кавітацією розуміють сукупність фізико-хімічних процесів, що супроводжуються виникненням і конденсацією парогазових бульбашок. Незважаючи на уявну простоту визначення, кавітація є комплексом досить складних і швидкоплинних процесів. Важливу роль в них відіграють динаміка вільних поверхонь, турбулентність, дифузія, фазові переходи тощо. Тому і на цей час теорія кавітації розроблена неостаточно.

Розрізняють дві основні стадії кавітації. Початкова стадія характеризується виникненням і зростанням бульбашок. При зростанні вони можуть зливатися, створюючи так звані каверни, форма яких залежить від конфігурації твердих границь потоку і його гідродинамічних параметрів. Поява каверн, заповнених парами і газом, відповідає другій стадії – розвиненій кавітації.

Основним параметром, який характеризує можливість виникнення кавітації, є безрозмірне число кавітації

$$\chi = \frac{P_1 - P_{кр}}{0,5 \rho v_1^2}, \quad (6.129)$$

де  $P_1$  і  $v_1$  – тиск і середня швидкість потоку перед місцевим опором;

$P_{кр}$  – тиск, при якому виникає кавітація (часто приймають  $P_{кр} = P_n$ ).



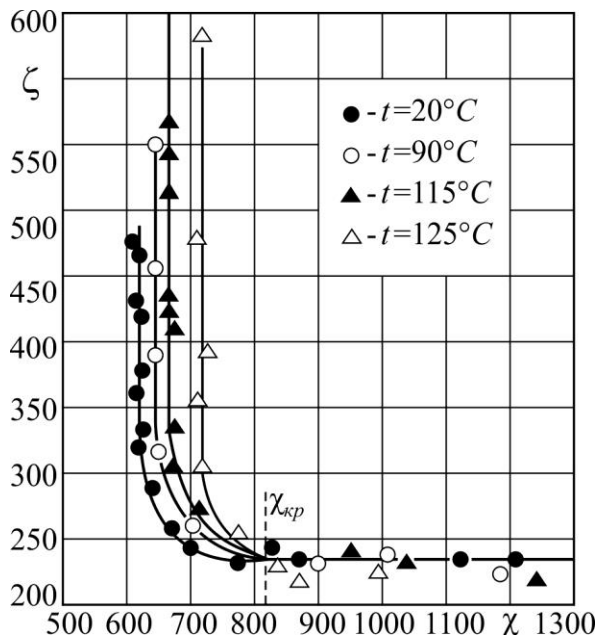


Рисунок 6.24 – Залежність  $\zeta$  регулюючого клапана від  $\chi$

Значення  $\chi$ , при якому виникає кавітація, називається критичним ( $\chi_{кр}$ ). Його величину для кожного місцевого опору визначають експериментально.

Як показали дослідження, виникнення в місцевому опорі кавітації призводить до різкого підвищення його коефіцієнта втрат. Як приклад на рисунку 6.24 наведені дослідні криві залежності коефіцієнта місцевих втрат регулюючого клапана від числа кавітації, отримані під керівництвом А. Д. Альтшуля. Як видно, при  $\chi > \chi_{кр}$  течія безкавітаційна і  $\zeta$  є величиною практично сталою, а при  $\chi < \chi_{кр}$  відбувається різке зростання  $\zeta$ .

Кавітація може виникати не тільки там, де зменшується площа живого перерізу. Уникнення кавітації є важливою задачею при експлуатації насосів; кавітація може виникати на поверхні судових гвинтів тощо.

## 6.8 ВИТІКАННЯ РІДИНИ КРІЗЬ ОТВОРИ ТА НАСАДКИ

### 6.8.1 Витікання рідини крізь малі отвори та насадки під дією сталого тиску

У багатьох випадках інженерної практики виникає задача визначення витрати при витіканні рідини крізь отвори в стінці резервуара або крізь коротку трубу спеціальної форми (насадок).

Розглянемо витікання рідини в атмосферу крізь *малий отвір* діаметром  $d_0$  у *тонкій стінці* (отвір називають малим, якщо в різних його точках тиск можна вважати незмінним; стінку називають тонкою, якщо її товщина  $\delta < 0,2 d_0$ ).

Як показують досліди, струмина рідини при виході з отвору стискається і на відстані приблизно  $0,5d_0$  набуває найменшої площі живого перерізу  $A_{ст}$ . Це відбувається тому, що рідина всередині резервуара притікає до отвору в радіальному напрямі та, досягши краю отвору, через інерційність не може раптово змінити напрям свого руху. Якщо стиснення відбувається по всьому периметру отвору, то воно називається *повним* (у протилежному разі – *неповним*). Якщо, крім того, стінки і дно резервуара ніяк не впливають на процес стиснення, то воно називається *досконалим* (у протилежному разі – *недосконалим*).

З метою виводу формули для витрати застосуємо рівняння Бернуллі до перерізів 1–1 (рисунок 6.25) (вільна поверхня рідини в резервуарі) і 2–2 (стиснутий переріз струмнини). Площу вільної поверхні будемо вважати великою, тому швидкісним напором у перерізі 1–1 знехтуємо, а рівень  $H$  розглядатимемо як незмінний. Якщо площину відліку 0–0 провести через вісь отвору, а тиск  $P_1$  вважати надлишковим, то рівняння Бернуллі для потоку в'язкої рідини (6.18) з урахуванням формули (6.112) набирає вигляду

$$H + \frac{P_1}{\rho g} = \frac{\alpha_{cm} v_{cm}^2}{2g} + \zeta \frac{v_{cm}^2}{2g}, \quad (6.130)$$

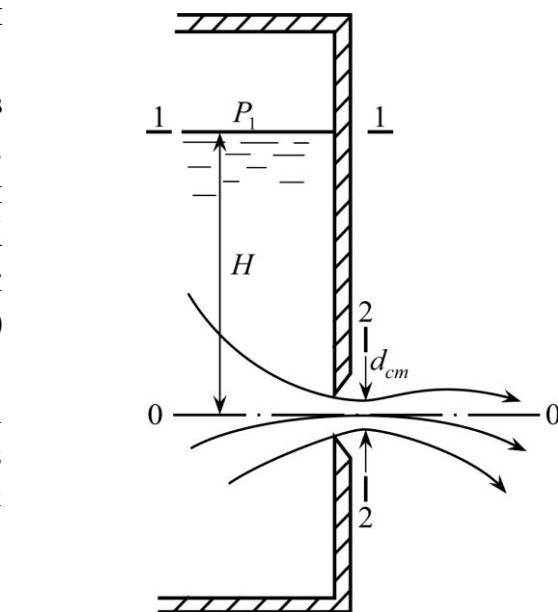


Рисунок 6.25 – Витікання рідини з резервуара крізь малий отвір

де  $\zeta$  – коефіцієнт місцевих втрат в отворі;

$v_{cm}$  – середня швидкість у стиснутому перерізі струмнини;

$\alpha_{cm}$  – коефіцієнт Коріоліса у стиснутому перерізі.

Розв'язуючи рівняння (6.130) відносно швидкості у стиснутому перерізі, маємо

$$v_{cm} = \frac{1}{\sqrt{\zeta + \alpha_{cm}}} \sqrt{2g \left( H + \frac{P_1}{\rho g} \right)} = \phi \sqrt{2g \left( H + \frac{P_1}{\rho g} \right)}. \quad (6.131)$$

Величину  $\phi = \frac{1}{\sqrt{\zeta + \alpha_{cm}}}$  називають *коефіцієнтом швидкості*.

Якщо розглядати ідеальну рідину ( $\zeta = 0$ ,  $\alpha_{cm} = 1$ ), тиск на вільній поверхні якої  $P_1$  атмосферний, то з формули (6.131) дістаємо *формулу Торрічеллі*<sup>43</sup>

$$v_{cm} = \sqrt{2gH}, \quad (6.132)$$

яка показує, що швидкість витікання ідеальної рідини визначається висотою стовпа  $H$ .

<sup>43</sup> Торрічеллі Еванджеліста (1608–1647) – італійський математик і фізик, учень Галілея. Автор концепції про атмосферний тиск, першим сконструював барометр. У механіці розвинув ідеї Галілея і сформулював принцип руху центра ваги тіла. Сформулював закон витікання рідини крізь отвір у стінці відкритої посудини і вивів формулу для визначення швидкості, яка носить його ім'я.

## Витрата крізь отвір

$$Q = v_{cm} A_{cm} = \varphi A_{cm} \sqrt{2g \left( H + \frac{P_1}{\rho g} \right)}. \quad (6.133)$$

Замість площі струмینی у стиснутому перерізі  $A_{cm}$  зручніше користуватись площею отвору  $A_0$ . Тоді, назвавши відношення

$$\varepsilon = \frac{A_{cm}}{A_0} \quad (6.134)$$

коефіцієнтом стиснення струмینی, дістаємо

$$Q = \varphi \varepsilon A_0 \sqrt{2g \left( H + \frac{P_1}{\rho g} \right)}, \quad (6.135)$$

або зрештою,

$$Q = \mu A_0 \sqrt{2g \left( H + \frac{P_1}{\rho g} \right)}, \quad (6.136)$$

де  $\mu = \varphi \varepsilon$  – коефіцієнт витрати.

На рисунку 6.26 наведені графіки залежності  $\mu$ ,  $\varphi$ ,  $\varepsilon$  для малого отвору в тонкій стінці від числа Рейнольдса. Можна вважати, що при

$Re > 10^5$  всі коефіцієнти перестають залежати від цього критерію.

Якщо стінка, крізь отвір в якій відбувається витікання, має значну товщину відносно до  $d_0$ , то характер витікання може якісно змінитися. Така сама зміна відбудеться у випадку приєднання до отвору короткої труби того самого діаметра – насадка. На рисунку 6.27 показані найбільш типові насадки. Розглянемо витікання крізь зовнішній циліндричний насадок.

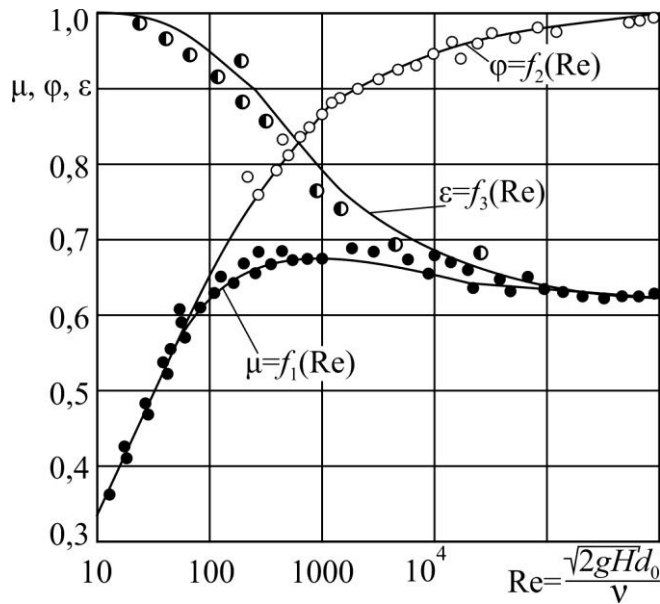


Рисунок 6.26 – Залежність коефіцієнтів  $\mu$ ,  $\varphi$ ,  $\varepsilon$  від числа Рейнольдса, за даними А. Д. Альтишуля

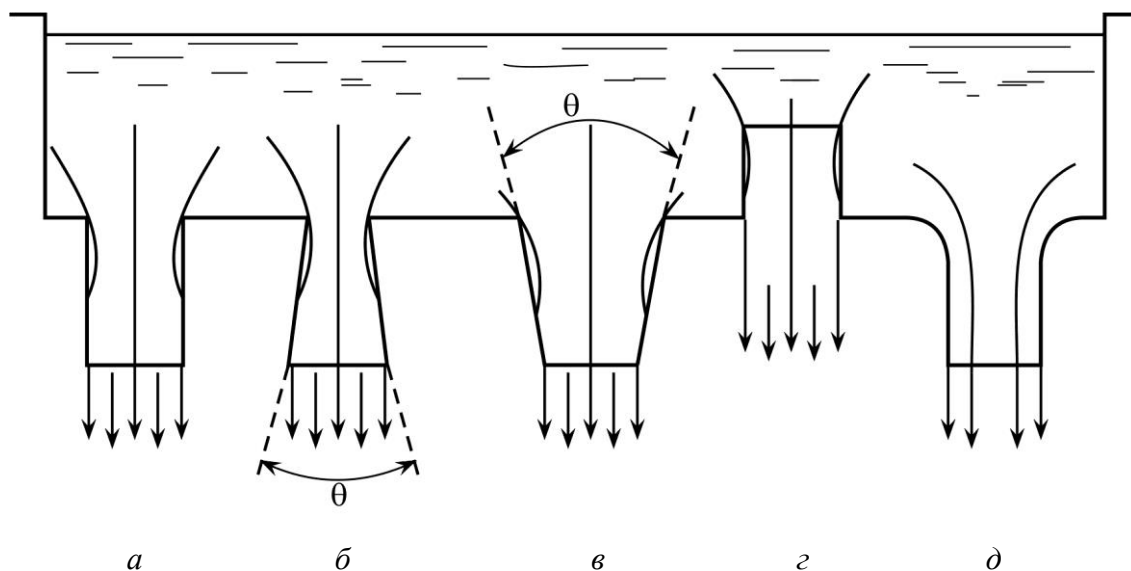


Рисунок 6.27 – Види насадків:

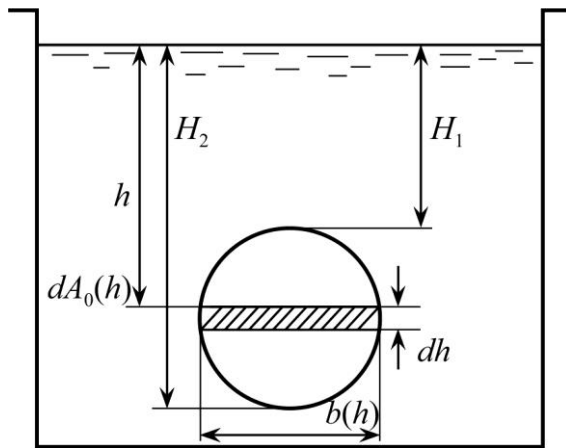
*a* – зовнішній циліндричний насадок; *б* – конічний розхильчастий насадок;  
*в* – конічний збіжний насадок; *г* – внутрішній циліндричний насадок; *д* – коноїдальний насадок

При вході в такий насадок струмина стискається так само, як і при витіканні крізь отвір. Але оскільки вона обмежена стінками, то створюється вихрова кільцева зона. За стиснутим перерізом струмина розширюється і на виході заповнює весь переріз. Швидкість у стиснутому перерізі більша, ніж у вихідному, тому згідно з рівнянням Бернуллі тиск у першому менший за зовнішній. Якщо зовнішній тиск дорівнює атмосферному, то у кільцевій зоні виникає вакуум. Оскільки вакуум сприяє витіканню, то коефіцієнт витрати у насадка більший, ніж у отвора. Отже, при інших рівних умовах витрата через насадок буде більшою, ніж крізь отвір (для насадка також можна користуватися формулою (6.136)). І хоча використання насадка призводить до збільшення коефіцієнта втрат, при довжині насадка  $l_n = (3...4)d_n$ , як свідчать розрахунки і експериментальні дані, додаткові втрати менші за абсолютну величину вакууму. У таблиці 6.2 наведені характеристики витікання води з деяких отворів і насадків.

Таблиця 6.2 – Коефіцієнти швидкості, стиснення і витрати насадків

Тип отвору або насадка	$\varphi$	$\varepsilon$	$\mu$
Круглий малий отвір у тонкій стінці	0,97	0,62...0,64	0,61
Зовнішній циліндричний насадок	0,82	1	0,82
Внутрішній циліндричний насадок	0,71	1	0,71
Конічний збіжний насадок	0,963	0,982	0,946
Конічний розхильчастий насадок ( $\theta = 8^\circ$ )	0,45	1	0,45
Коніодальний насадок	0,98	1	0,98

### 6.8.2 Витікання рідини крізь великі отвори під дією сталого напору



Якщо отвір у тонкій стінці має такі розміри та форму, що у різних його точках тиск неможна вважати однаковим, то це слід враховувати при визначенні витрати. Нехай напори у верхній і нижній точках отвору довільної форми (рисунок 6.28) становлять  $H_1$  і  $H_2$ , а залежність ширини отвору від вертикальної координати  $b(h)$  відома. Якщо елементарна витрата крізь елементарну площадку  $dA_0(h)$

Рисунок 6.28 – Витікання рідини з резервуару крізь великий отвір

$$\begin{aligned} dQ &= \mu dA_0(h) \sqrt{2gh} = \\ &= \mu db(h) dh \sqrt{2gh}, \end{aligned} \quad (6.137)$$

то витрата крізь весь отвір

$$Q = \int_{H_1}^{H_2} \mu b(h) \sqrt{2gh} dh = \mu \sqrt{2g} \int_{H_1}^{H_2} b(h) \sqrt{h} dh. \quad (6.138)$$

Вважалося, що коефіцієнт витрати  $\mu = \text{const}$ , хоч це і є спрощенням.

Якщо  $b$  не залежить від глибини занурення  $h$  (отвір прямокутної форми), то рівняння (6.138) легко проінтегрувати

$$Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \left( H_2^{\frac{3}{2}} - H_1^{\frac{3}{2}} \right). \quad (6.139)$$

Представляючи напори  $H_1 = H_u - a/2$  і  $H_2 = H_u + a/2$ , де  $H_u$  – глибина занурення центру ваги прямокутного отвору;  $a$  – його висота, формулу (6.139) можна переписати так:

$$Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \left[ \left( H_u + \frac{a}{2} \right)^{\frac{3}{2}} - \left( H_u - \frac{a}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \right]. \quad (6.140)$$

Розклавши вирази у круглих дужках в ряд за формулою бінома Ньютона (обмежимося чотирма складовими)

$$\left( H_u + \frac{a}{2} \right)^{\frac{3}{2}} = H_u^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} H_u^{\frac{1}{2}} \frac{a}{2} + \frac{3}{8} H_u^{-\frac{1}{2}} \frac{a^2}{4} - \frac{3}{48} H_u^{-\frac{3}{2}} \frac{a^3}{8} \quad (6.141)$$

та

$$\left(H_u - \frac{a}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = H_u^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}H_u^{\frac{1}{2}}\frac{a}{2} + \frac{3}{8}H_u^{-\frac{1}{2}}\frac{a^2}{4} + \frac{3}{48}H_u^{-\frac{3}{2}}\frac{a^3}{8}, \quad (6.142)$$

вираз в квадратних дужках зводиться до вигляду

$$\left[\left(H_u + \frac{a}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(H_u - \frac{a}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{3}{2}H_u^{\frac{1}{2}}a\left(1 - \frac{a^2}{96H_u^2}\right). \quad (6.143)$$

Нехтуючи другим членом у круглих дужках правої частини рівняння, отримуємо формулу для витрати крізь великий отвір при незмінному напорі у прийнятій раніше і зручній для розрахунків форми

$$Q = \frac{2}{3}\mu ab \frac{3}{2}H_u^{\frac{1}{2}}\sqrt{2g} = \mu A_0\sqrt{2gH_u}. \quad (6.144)$$

### 6.8.3 Витікання рідини крізь малий отвір під дією змінного напору

Розглянемо резервуар довільної форми, з якого відбувається витікання рідини з витратою  $Q$  і в який одночасно надходить витрата  $Q_0$  (рисунок 6.29). Якщо рівень у резервуарі  $H_1$  менший від рівня  $H_0$ , котрий відповідає витраті  $Q_0$  ( $Q_0 = \mu A_0\sqrt{2gH_0}$ ), то резервуар буде наповнюватися, поки не встановиться рівність витрат. Якщо  $H_1 > H_0$ , то рівень буде знижуватися, аж поки знов-таки не встановиться рівність витрат.

Визначимо час зміни рівнів від  $H_1$  до  $H_2$ , вважаючи, що  $H_1 > H_2 \geq H_0$ .

За елементарний відрізок часу  $dt$  приплив рідини в резервуар складе  $Q_0 dt = \mu A_0\sqrt{2gH_0} dt$ , а витече об'єм  $Q dt = \mu A_0\sqrt{2gh} dt$ , де  $h$  – плинне значення напору. Тоді зміна об'єму рідини в резервуарі за час  $dt$

$$dV = \mu A_0\sqrt{2gH_0} dt - \mu A_0\sqrt{2gh} dt = \mu A_0\sqrt{2g} (\sqrt{H_0} - \sqrt{h}) dt. \quad (6.145)$$

Внаслідок цього рівень зміниться на величину  $dh$  і

$$dV = dhA(h) = \mu A_0\sqrt{2g} (\sqrt{H_0} - \sqrt{h}) dt, \quad (6.146)$$

або

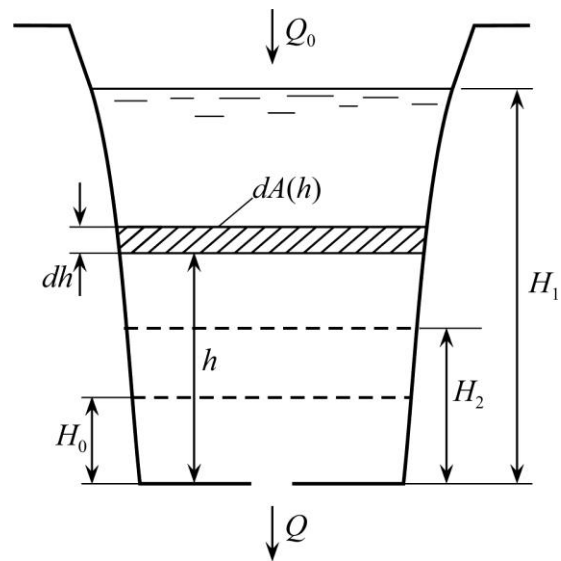


Рисунок 6.29 – Витікання рідини крізь малий отвір під дією змінного напору

$$dt = \frac{A(h)}{\mu A_0 \sqrt{2g} (\sqrt{H_0} - \sqrt{h})} dh, \quad (6.147)$$

де  $A(h)$  – плинне значення площі вільної поверхні.

Час, за який рівень зміниться від  $H_1$  до  $H_2$ ,

$$t = \int_{H_1}^{H_2} \frac{A(h)}{\mu A_0 \sqrt{2g} (\sqrt{H_0} - \sqrt{h})} dh = \frac{1}{\mu A_0 \sqrt{2g}} \int_{H_1}^{H_2} \frac{A(h)}{(\sqrt{H_0} - \sqrt{h})} dh. \quad (6.148)$$

Зробимо таку заміну змінних:  $\sqrt{H_0} - \sqrt{h} = y$ . Тоді  $\sqrt{h} = \sqrt{H_0} - y$  і  $dh = -2(\sqrt{H_0} - y) dy$ .

Таким чином, для випадку  $A = \text{const}$

$$t = \frac{2A}{\mu A_0 \sqrt{2g}} \int_{y_1}^{y_2} \left(1 - \frac{\sqrt{H_0}}{y}\right) dy, \quad (6.149)$$

де  $t = \frac{2A}{\mu A_0 \sqrt{2g}} (\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2})$  і  $y_2 = \sqrt{H_0} - \sqrt{H_2}$ .

Після інтегрування дістаємо

$$t = \frac{2A}{\mu A_0 \sqrt{2g}} \left( \sqrt{H_1} - \sqrt{H_2} + \sqrt{H_0} \ln \frac{\sqrt{H_0} - \sqrt{H_1}}{\sqrt{H_0} - \sqrt{H_2}} \right). \quad (6.150)$$

Якщо в резервуар не надходить рідина, то  $H_0 = 0$  і (6.150) спрощується до вигляду

$$t = \frac{2A}{\mu A_0 \sqrt{2g}} (\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}). \quad (6.151)$$

Час повного випорожнення резервуара ( $H_2 = 0$ )

$$t = \frac{2A\sqrt{H_1}}{\mu A_0 \sqrt{2g}} = \frac{2AH_1}{\mu A_0 \sqrt{2gH_1}} = \frac{2V}{Q}. \quad (6.152)$$

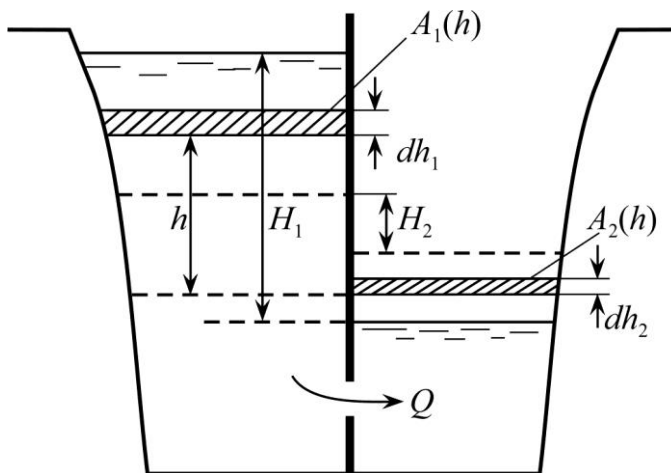


Рисунок 6.30 – Витікання рідини під рівень при змінному напорі

Отже, час повного випорожнення резервуара дорівнює відношенню подвоєного об'єма рідини до початкової витрати. З цього випливає, що при сталому напорі даний об'єм рідини витече вдвічі швидше, ніж при повному випорожненні.

Тепер розглянемо витікання рідини під рівень при змінному напорі – рідина перетікає з одного резервуара в інший (рисунок 6.30).

У кожен момент часу витікання відбувається під дією змінного напору  $h$ . За час  $dt$  з першого резервуара в другий перетече об'єм  $dV = Qdt = \mu A_0 \sqrt{2gh} dt$ . За цей час рівень в першому резервуарі зменшиться на  $dh_1$ , а в другому збільшиться на  $dh_2$ , що приведе до зміни діючого напору на  $-dh = dh_1 + dh_2$  (знак «мінус» вказує на те, що приріст діючого напору від'ємний), або  $dh = -dh_1 - dh_2$ .

Очевидно, що

$$dV = A_1(h)dh_1 = A_2(h)dh_2, \quad (6.153)$$

або

$$\mu A_0 \sqrt{2gh} dt = A_1(h)dh_1. \quad (6.154)$$

Звідки

$$dt = \frac{A_1(h)dh_1}{\mu A_0 \sqrt{2gh}}, \quad (6.155)$$

а час, за який діючий напір зміниться від  $H_1$  до  $H_2$ ,

$$t = \int_{H_1}^{H_2} \frac{A_1(h)}{\mu A_0 \sqrt{2gh}} dh_1 = \frac{1}{\mu A_0 \sqrt{2g}} \int_{H_1}^{H_2} \frac{A_1(h)}{\sqrt{h}} dh_1 \quad (6.156)$$

(тут, як і раніше, вважалось, що  $\mu = \text{const}$ ).

З формули (6.153)

$$dh_2 = \frac{A_1(h)}{A_2(h)} dh_1 \quad (6.157)$$

і

$$dh = -dh_1 - \frac{A_1(h)}{A_2(h)} dh_1 = -dh_1 \left( 1 + \frac{A_1(h)}{A_2(h)} \right). \quad (6.158)$$

Звідки

$$dh_1 = -\frac{dh}{1 + \frac{A_1(h)}{A_2(h)}} = -\frac{A_2(h)}{A_2(h) + A_1(h)} dh. \quad (6.159)$$

Підставляючи це значення до формули (6.156), дістаємо

$$t = -\frac{1}{\mu A_0 \sqrt{2g}} \int_{H_1}^{H_2} \frac{A_1(h)}{\sqrt{h}} \frac{A_2(h)}{(A_2(h) + A_1(h))} dh. \quad (6.160)$$

Якщо площі вільних поверхонь рідини в резервуарах не залежать від вертикальної координати, то формулу (6.160) легко проінтегрувати

$$t = \frac{2A_1A_2(\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2})}{\mu A_0 \sqrt{2g}(A_1 + A_2)}. \quad (6.161)$$

Час повного вирівнювання рівнів в резервуарах



$$t = \frac{2A_1 A_2 \sqrt{H_1}}{\mu A_0 \sqrt{2g(A_1 + A_2)}}. \quad (6.162)$$

## 6.9 ГІДРАВЛІЧНИЙ РОЗРАХУНОК ТРУБОПРОВОДІВ

Розрахунок трубопроводних мереж – одна з головних задач гідравліки. Залежно від постановки задачі розрізняють конструкторський розрахунок, коли, як правило, за заданою витратою необхідно обрати оптимальний діаметр мережі та визначити напір, що забезпечить цю витрату, та перевірочний, коли мережа і обладнання на ній вже функціонують, а треба визначити дійсну витрату.

Трубопроводи незмінного діаметра, які не мають паралельних ділянок і відгалужень, називаються *простими*. У протилежному разі вони є *складними*.

Трубопроводи також поділяють на так звані *довгі*, в яких втрати напору по довжині становлять не менше ніж 90–95 % від загальних, і *короткі*, в яких місцеві втрати становлять більше 5–10 %. Крім того, течія в мережі може відбуватися завдяки роботі насоса (їх називають трубопроводами з насосною подачею) і різниці п'єзометричних напорів в резервуарах, між якими ця течія відбувається. У техніці більш поширеним є перший випадок.

### 6.9.1 Характеристика простого трубопроводу з насосною подачею

Розглянемо простий трубопровід з насосною подачею (рисунок 6.31).

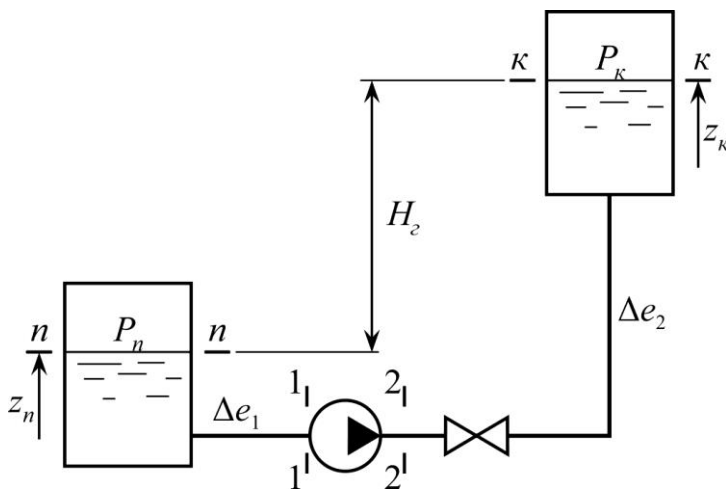


Рисунок 6.31 – Простий трубопровід з насосною подачею

Частина магістралі до насоса називають всмоктувальною, а після – нагнітальною. Позначимо через  $\Delta e_1$  і  $\Delta e_2$  втрати питомої енергії на цих ділянках. Рух будемо вважати усталеним, а діаметр трубопроводу незмінним.

Питома енергія, яку набуває рідина в насосі,  $E = E_2 - E_1$  (де  $E_1$  і  $E_2$  – питомі енергії потоку до і після насоса).

Згідно з рівнянням Бернуллі, в початковому перерізі  $n - n$  питома енергія

$$E_n = gz_n + \frac{P_n}{\rho} + \frac{\alpha_n v_n^2}{2}, \quad (6.163)$$

а в кінцевому  $k - k$

$$E_k = gz_k + \frac{P_k}{\rho} + \frac{\alpha_k v_k^2}{2}. \quad (6.164)$$

Тоді в перерізах 1–1 і 2–2

$$E_1 = gz_n + \frac{P_n}{\rho} + \frac{\alpha_n v_n^2}{2} - \Delta e_1, \quad (6.165)$$

$$E_2 = gz_k + \frac{P_k}{\rho} + \frac{\alpha_k v_k^2}{2} + \Delta e_2, \quad (6.166)$$

а

$$E = g(z_k - z_n) + \frac{P_k - P_n}{\rho} + \frac{\alpha_k v_k^2 - \alpha_n v_n^2}{2} + \Delta e_1 + \Delta e_2. \quad (6.167)$$

Якщо площі вільних поверхонь в резервуарах вважати великими, то швидкісними напорами, а отже, і третьою складовою правої частини формули (6.167) можна знехтувати. Тоді

$$E = g(z_k - z_n) + \frac{P_k - P_n}{\rho} + \Delta e, \quad (6.168)$$

або у формі напорів

$$H = (z_k - z_n) + \frac{P_k - P_n}{\rho g} + \Delta h, \quad (6.169)$$

де  $\Delta e = \Delta e_1 + \Delta e_2$  – сумарні втрати питомої енергії;

$\Delta h = \Delta h_1 + \Delta h_2$  – сумарні втрати напору (для переважної більшості мереж  $\Delta h_2 \gg \Delta h_1$ , тому втратами у всмоктувальному трубопроводі часто нехтують).

У загальному випадку

$$\Delta h = \left( \lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta \right) \frac{v^2}{2g} = \left( \lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta \right) \frac{Q^2}{2gA^2} = SQ^2, \quad (6.170)$$

де  $S$  – опір мережі,  $c^2/m^5$ .

Отже,

$$H = (z_k - z_n) + \frac{P_k - P_n}{\rho g} + SQ^2. \quad (6.171)$$

Таким чином, енергія, яка передається рідині в насосі, витрачається на таке: 1) підйом рідини на висоту  $H_z = (z_k - z_n)$ ; 2) подолання різниці тисків у кінцевому (нагнітальному) і початковому (живильному) резервуарах ( $P_k - P_n$ ); 3) подолання втрат напору  $\Delta h$ .

Якщо суму перших двох складових у формулі (6.171) позначити  $H_{cm}$ , розуміючи під цією величиною так звану *статичну висоту*, або *статичний напір*, то

$$H = H_{cm} + SQ^2. \quad (6.172)$$

Отримана формула є рівнянням характеристики простого трубопроводу. Характеристика є квадратичною параболою і встановлює залежність між витратою в мережі  $Q$  і напором  $H$ , який має розвинути насос для забезпечення цієї витрати. Якщо  $P_k = P_n$ , то  $H_{cm} = H_z$ , а якщо  $z_k = z_n$ , то статична висота дорівнює нулю і характеристика мережі виходить з початку координат.

Для безпосереднього визначення витрати в простому трубопроводі або складній мережі з насосною подачею необхідне розв'язання системи рівнянь, що складається з характеристики трубопроводу (мережі) (6.172) і напірної характеристики насоса  $H = f(Q)$ . Ця система, по суті, є енергетичним і матеріальним балансами мережі з насосною подачею. Оскільки характеристика насоса подається, як правило, в графічній формі, то і розв'язують цю систему найчастіше графічним шляхом. На рисунку 6.32 показаний приклад графічного розв'язання. Точка 1 перетину характеристики трубопроводу і напірної характеристики насоса називається *робочою*. За нею визначають подавання насоса  $Q_{n1}$  (витрату рідини в трубопроводі) і напір, який розвиває насос  $H_{n1}$ . Легко помітити, що крутизна характеристики трубопроводу залежить від величини опору  $S$ : чим більший опір, тим крутіше проходить крива. Тому, якщо, наприклад, за рахунок збільшення коефіцієнта втрат вентиля  $\zeta$  (рисунок 6.31) збільшити загальний опір до значення  $S_{др}$ , то робоча точка переміститься з позиції 1 в позицію 2 і параметри насоса зміняться до значень  $Q_{n2}$  і  $H_{n2}$ . У цьому полягає принцип так званого *дрельного регулювання* параметрів. *Дроселем* називається *регульований місцевий опір*, тобто *місцевий опір*, коефіцієнт втрат якого можна змінювати за нашим бажанням, наприклад вентиль. Цей спосіб регулювання досить простий в реалізації, але суттєвим його недоліком є виникнення додаткових втрат напору  $\Delta h_{др}$ .

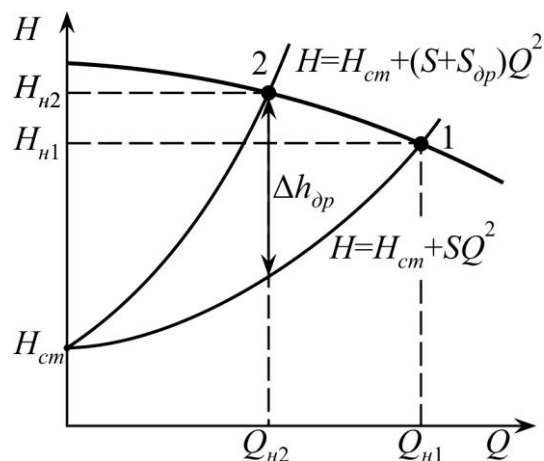


Рисунок 6.32 – Графічне визначення параметрів у трубопроводі

### 6.9.2 Принципи розрахунку складних гідравлічних мереж

*Послідовним* називається таке з'єднання простих трубопроводів, коли витрата на всьому шляху є незмінною, а сама мережа складається з ділянок різного діаметра і довжини.

В основу розрахунку послідовного з'єднання покладені два цілком очевидних положення: витрати на ділянках з різними діаметрами однакові  $Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n = Q$  і втрати в трубопроводі є сумою втрат в його елементах  $\Delta h = \Delta h_1 + \Delta h_2 + \dots + \Delta h_n$ . Таким чином, необхідний напір насоса

$$H = \sum_{i=1}^n (H_{cmi} + \Delta h_i) = \sum_{i=1}^n (H_{cmi} + S_i Q^2). \quad (6.173)$$

Характеристику мережі, що складається з послідовно сполучених простих трубопроводів, можна отримати графічним додаванням характеристик її елементів (простих трубопроводів) по напорам при фіксованих витратах. На рисунку 6.33 як приклад наведена мережа з двох послідовних ділянок, а на рисунку 6.34 – побудова їх сумарної характеристики.

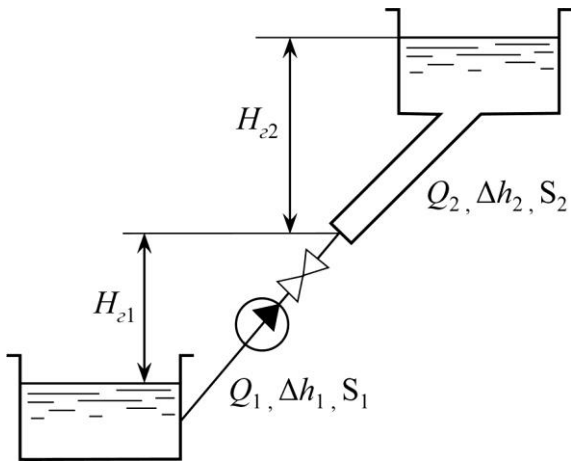


Рисунок 6.33 – Послідовне сполучення двох простих трубопроводів

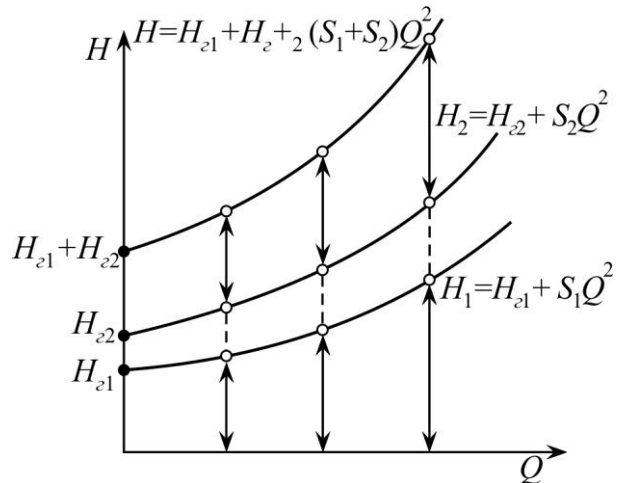


Рисунок 6.34 – Характеристика двох послідовно сполучених простих трубопроводів

Паралельними називають трубопроводи, котрі мають спільні точки, – точки, в яких тиск однаковий для різних трубопроводів. Спільною точкою можна вважати і простір, куди витікає рідина. Точки *A* і *B* (рисунку 6.35) належать одночасно декільком простим трубопроводам, з яких складається мережа, і тому є спільними. Оскільки тиски в них однакові для всіх ділянок, то з цього випливає перша властивість паралельних трубопроводів: втрати напору в паралельних ділянках однакові –  $\Delta h_1 = \Delta h_2 = \dots = \Delta h_n$ . Друга властивість очевидна:  $Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n = Q$ . Таким чином,

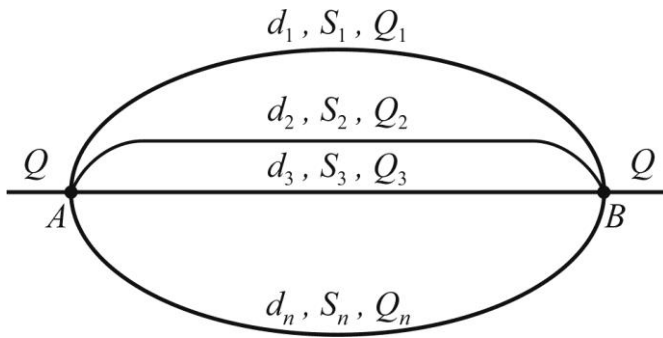


Рисунок 6.35 – Паралельне сполучення простих

$$S_1 Q_1^2 = S_2 Q_2^2 = \dots = S_n Q_n^2, \quad (6.174)$$

тобто витрати по окремих ділянках розподіляються зворотно пропорційно корню квадратному опорів цих ділянок

$$\left. \begin{aligned} Q_2 &= Q_1 \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} \\ &\dots \\ Q_n &= Q_1 \sqrt{\frac{S_1}{S_n}} \end{aligned} \right\}. \quad (6.175)$$

Для побудови сумарної характеристики такої мережі  $H_\Sigma = f(Q)$  слід характеристики окремих ділянок графічно скласти за витратами при фіксованих напорах, як це зроблено на рисунку 6.36 для двох паралельних ділянок.

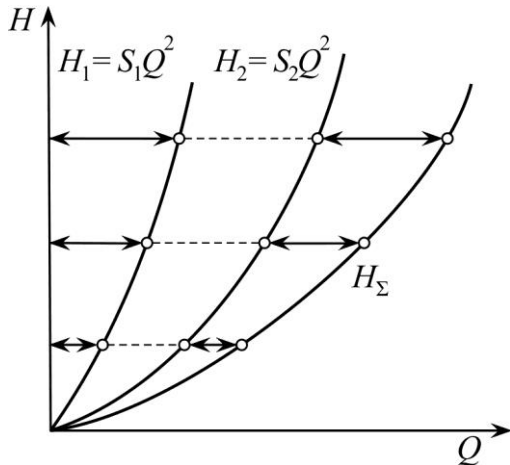


Рисунок 6.36 – Характеристика двох паралельно сполучення простих трубопроводів

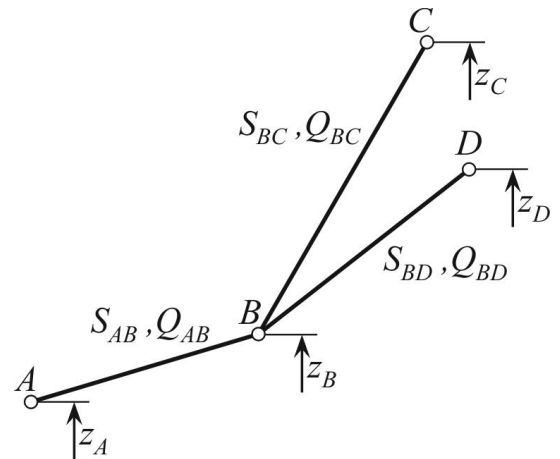


Рисунок 6.37 – Розгалужений трубопровід

І нарешті, розглянемо розгалужений трубопровід (просте розгалуження) (рисунок 6.37), в якому ділянки BC і BD є паралельними, котрі відносно до трубопроводу AB сполучені послідовно. Для простого розгалуження справедлива така система:

$$\left. \begin{aligned} H_{AB} &= (z_B - z_A) + S_{AB} Q_{AB}^2 \\ H_{BC} &= (z_C - z_B) + S_{BC} Q_{BC}^2 \\ H_{BD} &= (z_D - z_B) + S_{BD} Q_{BD}^2 \end{aligned} \right\}. \quad (6.176)$$

Графік характеристики такої мережі можна отримати, якщо спочатку графічно скласти за витратами характеристики паралельних ділянок BC і BD, а потім до отриманого графіка графічно додати за напорами характеристику ділянки AB (рисунок 6.38).

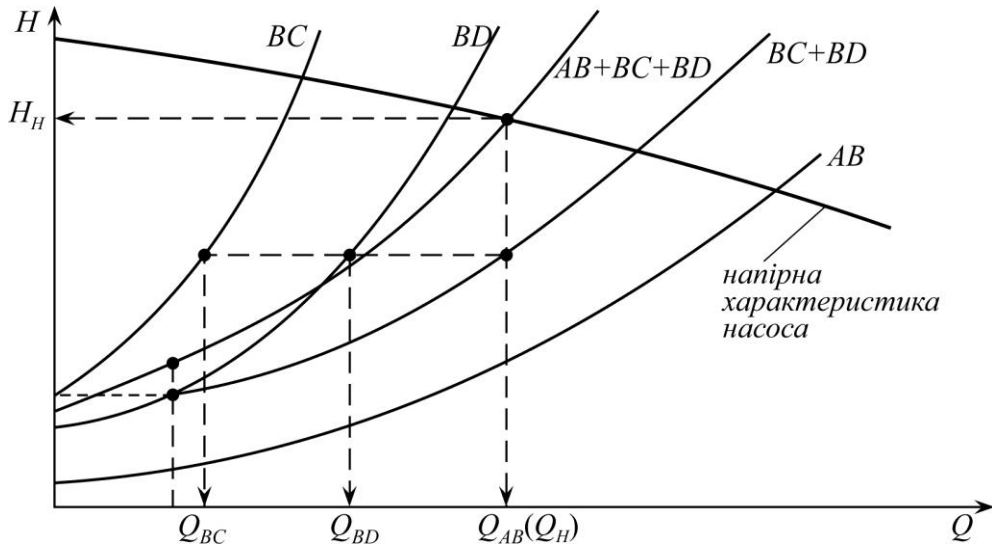
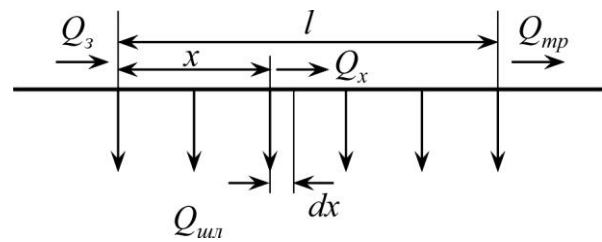


Рисунок 6.38 – Характеристика розгалуженого

Трубопроводами з безперервною рівномірною роздачею вздовж шляху є трубопроводи, в яких на однаковій відстані одна від одної знаходяться точки розбору витрати та ці витрати однакові.

Витрата, що підводиться до трубопроводу, називається загальною  $Q_z$  (рисунок 6.39). Витрата, що розбирається вздовж шляху, – шляховою  $Q_{шл}$ , а витрата, яка доходить до кінця трубопроводу, – транзитною  $Q_{тр}$ . Очевидно, що



$$Q_z = Q_{шл} + Q_{тр} = ql + Q_{тр}, \quad (6.177)$$

де  $q$  – питома шляхова витрата,  $m^2/s$ .

Витрата в трубопроводі на довільній відстані  $x$  від початку роздачі

Рисунок 6.39 – Трубопровід з безперервною рівномірною роздачею вздовж шляху

$$Q_x = Q_z - Q_{шл} \frac{x}{l} = Q_{тр} + Q_{шл} \left(1 - \frac{x}{l}\right). \quad (6.178)$$

Тоді втрати напору на елементарній ділянці шляху  $dx$  (враховуються тільки втрати по довжині)

$$d\Delta h_0 = S' Q_x^2 dx = S' \left[ Q_{тр} + Q_{шл} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \right]^2 dx, \quad (6.179)$$

де  $S'$  – питомий опір довгого трубопроводу – опір, що приходить на одиницю довжини,  $s^2/m^6$ .

Вважаючи, що течія відбувається в квадратичній зоні опору, тобто, що  $S' = \text{const}$ , для втрат напору на ділянці роздачі з довжиною  $l$  можна записати

$$\Delta h_{\partial} = S' \int_0^l \left[ Q_{mp} + Q_{шл} \left( 1 - \frac{x}{l} \right) \right]^2 dx. \quad (6.180)$$

Проінтегрувавши, дістаємо

$$\Delta h_{\partial} = S'l \left( Q_{mp}^2 + Q_{mp}Q_{шл} + \frac{Q_{шл}^2}{3} \right) = S \left( Q_{mp}^2 + Q_{mp}Q_{шл} + \frac{Q_{шл}^2}{3} \right). \quad (6.181)$$

Для приведення характеристики трубопроводу з безперервною рівномірною роздачею до прийнятого виду характеристики мережі (6.172) величину

$$\sqrt{Q_{mp}^2 + Q_{mp}Q_{шл} + \frac{Q_{шл}^2}{3}} = Q_p \quad (6.182)$$

зручно розглядати як так звану розрахункову витрату  $Q_p$ . В інженерних розрахунках часто приймають  $Q_p \approx Q_{mp} + 0,55Q_{шл}$ .

З формули (6.181) видно, що у випадку, коли вся загальна витрата роздається вздовж шляху ( $Q_{mp} = 0$ ), то втрата напору втричі менша, ніж у випадку тільки транзитного (без роздачі) потоку.

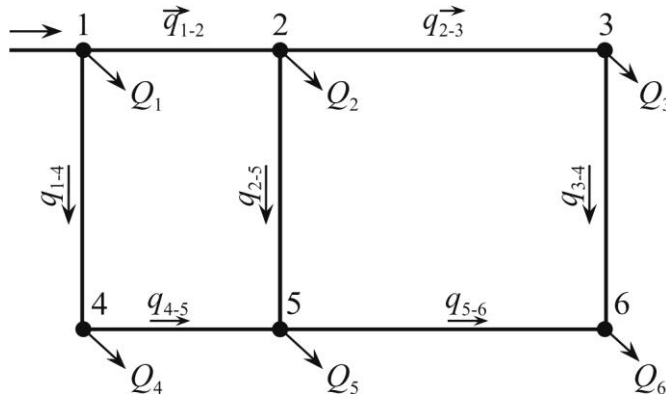


Рисунок 6.40 – Кільцева мережа

Найбільш складним є розрахунок так званих *кільцевих*, або *замкнутих мереж* (рисунок 6.40). Вважається, що для них є заданими довжини та діаметри окремих ділянок, геометричні висоти та витрати у вузлах мережі. Одним з методів розрахунку таких мереж є метод, запропонований В. Г. Лобачовим. Він полягає в розв'язанні системи рівнянь, одне з яких є балансом витрати у вузлі, а друге – балансом втрат напору в кільці

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n Q_{i \text{ вуз}} &= 0 \\ \sum_{i=1}^n \Delta h_{i \text{ к}} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (6.183)$$

Іншими словами, повинна витримуватися рівність притоку і відтоку рідини в кожному вузлі та алгебраїчна сума втрат напору в лініях кожного

кільця при його повному обході має дорівнювати нулю. При цьому якщо напрям обходу за годинниковою стрілкою збігається з напрямом течії, то втрата вважається позитивною, у протилежному випадку – від’ємною.

Розрахунок кільцевих мереж ведуть, як правило, за методом послідовних наближень, довільно задаючись розподілом витрати (при цьому дотримуючись першої умови (6.183), а потім перерозподіляють витрати таким чином, щоб врешті-решт задовольнити другу умову. Такі клопіткі розрахунки доцільно робити з використанням ЕОМ.

## 6.10 НЕУСТАЛЕНИЙ РУХ НЕСТИСЛИВОЇ РІДИНИ

### 6.10.1 Рівняння Бернуллі для неусталеного руху

З метою отримання рівняння Бернуллі для неусталеного руху перепишемо рівняння Нав’є-Стокса так:

$$\vec{F}' - \frac{1}{\rho} \text{grad}P = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \text{grad} \frac{u^2}{2} + 2\vec{\omega} \times \vec{u} - \nu \nabla^2 \vec{u}. \quad (6.184)$$

Провівши перетворення аналогічно тому, як це зроблено у пункті 4.1.2, для елементарної струминки формула (6.184) набирає вигляду

$$\begin{aligned} -d \left( \frac{P}{\rho} + \frac{u^2}{2} - \Phi \right) - \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} dx + \frac{\partial u_y}{\partial t} dy + \frac{\partial u_z}{\partial t} dz \right) + \\ + \nu \left( \nabla^2 u_x dx + \nabla^2 u_y dy + \nabla^2 u_z dz \right) = 0, \end{aligned} \quad (6.185)$$

або

$$-d \left( \frac{P}{\rho} + \frac{u^2}{2} - \Phi \right) - \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \nu \nabla^2 \vec{u} \cdot d\vec{S} = 0, \quad (6.186)$$

де  $d\vec{S}(dx; dy; dz)$  – елемент лінії течії, що проходить крізь дану елементарну струминку.

Тоді для двох перерізів елементарної струминки 1 – 1 і 2 – 2

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} - \frac{\nu}{g} \int_{1-1}^{2-2} \nabla^2 \vec{u} \cdot d\vec{S} + \frac{1}{g} \int_{1-1}^{2-2} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot d\vec{S}. \quad (6.187)$$

Перший інтеграл відображає дію сил в’язкого тертя на відрізьку шляху рідини між перерізами 1 – 1 і 2 – 2 і є втратами напору  $\Delta h'$ . Другий – сил інерції неусталеного руху і називається *інерційним напором*  $h'_i$ .

Провівши перетворення, як це зроблено у підрозділі 6.3, для неусталеного потоку рідини дістаємо



$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + \Delta h + \frac{1}{Q} \iint_A h'_i u dA. \quad (6.188)$$

Розглянемо докладно останню складову. З урахуванням того, що вектори  $d\vec{u}$  і  $d\vec{S}$  колінеарні, можна від векторного добутку перейти до добутку їх модулів. Тоді, зважаючи, що  $u dA$  у даний момент часу вздовж всієї лінії течії є величиною сталою і можна змінювати послідовність інтегрування,

$$\begin{aligned} \frac{1}{Q} \iint_A h'_i u dA &= \frac{1}{gQ} \iint_A \left( \int_{1-1}^{2-2} \frac{\partial u}{\partial t} dS \right) u dA = \\ \frac{1}{gQ} \int_{1-1}^{2-2} dS \iint_A \frac{\partial u}{\partial t} u dA &= \frac{1}{gQ} \int_{1-1}^{2-2} dS \frac{\partial}{\partial t} \iint_A \frac{u^2}{2} dA. \end{aligned} \quad (6.189)$$

Помножимо і розділемо останній вираз на  $v^2 A$

$$\begin{aligned} \frac{1}{Q} \iint_A h'_i u dA &= \frac{v^2 A}{2gQ} \int_{1-1}^{2-2} dS \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\iint_A u^2 dA}{v^2 A} \right) = \frac{1}{2gQ} \int_{1-1}^{2-2} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_0 v^2 A) dS = \\ &= \frac{1}{2gQ} \int_{1-1}^{2-2} 2\alpha_0 v A \frac{\partial v}{\partial t} dS. \end{aligned} \quad (6.190)$$

Величину

$$\alpha_0 = \frac{\iint_A u^2 dA}{v^2 A} \quad (6.191)$$

називають *коефіцієнтом кількості руху*, або *коефіцієнтом Буссінеска*. Легко помітити, що *коефіцієнт Буссінеска*  $\alpha_0$  являє собою відношення кількості руху потоку, розрахованого за дійсним розподілом швидкостей, до кількості руху потоку, визначеного за середньою швидкістю.

Оскільки добуток  $vA = Q$  залежить тільки від часу, а площа перерізу потоку – тільки від поздовжньої координати, що збігається з напрямком течії, то  $v = \frac{Q(t)}{A(S)}$  і величина

$$\frac{1}{Q} \iint_A h'_i u dA = \frac{1}{g} \int_{1-1}^{2-2} \alpha_0 \frac{\partial v}{\partial t} dS = \frac{1}{g} \int_{1-1}^{2-2} \alpha_0 \frac{1}{A} \frac{dQ}{dt} dS = \frac{1}{g} \frac{dQ}{dt} \int_{1-1}^{2-2} \frac{\alpha_0}{A} dS \quad (6.192)$$

є інерційним напором потоку  $h_i$ .

Для труби незмінного діаметра  $A = \text{const}$ . Тоді, зважаючи, що і  $\alpha_0 = \text{const}$ , дістаємо

$$h_i = \frac{1}{g} \frac{dQ}{dt} \frac{\alpha_0}{A} \int_{1-1}^{2-2} dS = \alpha_0 \frac{1}{g} \frac{dQ}{dt} \frac{l}{A} = \alpha_0 \frac{l}{g} \frac{dv}{dt}, \quad (6.193)$$

де  $l$  – відстань між перерізами 1 – 1 і 2 – 2.

Отже, рівняння Бернуллі для неусталеного руху нестисливої в'язкої рідини в підсумку має вигляд

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \Delta h + h_i. \quad (6.194)$$

Інерційний напір враховує затрату механічної енергії на подолання сил інерції рідини, котра знаходиться між перерізами потоку в даний момент часу. Тому на відміну від рівняння Бернуллі для усталеної течії формула (6.194) записується не тільки для двох перерізів, а й для даного моменту часу. Інерційний напір є знакоперемінною величиною: при  $dv/dt > 0$   $h_i$  додатний (рисунок 6.41,а), а при  $dv/dt < 0$   $h_i$  – від'ємний, тобто на шляху між перерізами буде звільнятися частина кінетичної енергії. Якщо втрати напору невеликі, то повний напір у даний момент часу вздовж потоку може зростати (рисунок 6.41,б), що є неможливим для усталеної течії. Хоч інерційний напір і знаходиться в правій частині рівняння Бернуллі разом з втратами напору, він не виражає втрат енергії, оскільки не пов'язаний з дією дисипативних сил. Він характеризує обернені перетворення механічної енергії, пов'язані з нестационарністю течії.

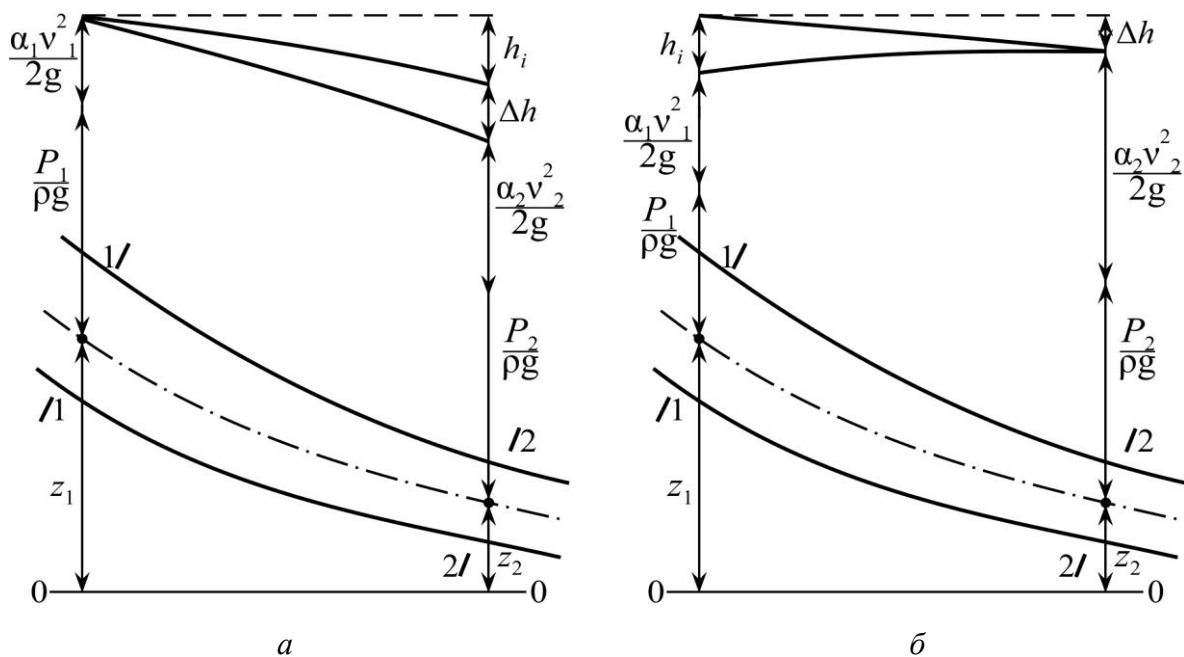


Рисунок 6.41 – Напірна і п'єзометрична лінії вздовж неусталеного потоку в'язкої рідини: а – додатний інерційний напір; б – від'ємний інерційний напір

### 6.10.2 Гідравлічний удар в трубах

При невеликому прискоренні інерційним напором можна нехтувати. Так, наприклад, при витіканні рідини під дією змінного тиску (випорожнення резервуара або вирівнювання рівнів в різних резервуарах) течія є неусталеною. Але оскільки  $dv/dt$  мала, то інерційний напір помітного впливу на процес не має. Тому в підрозділі 6.8 використовувалось рівняння Бернуллі для стаціонарної течії.

При великому прискоренні потоку рідини в трубі вплив  $h_i$  може виявитися превалюючим щодо інших членів рівняння (6.194). Більш того, якщо припустити, що гальмування відбувається миттєво, то  $dv/dt = -\infty$  і  $h_i = -\infty$ . У цьому випадку повинне  $P_2 = \infty$ , що фізично неможливо. Причиною такого парадокса є припущення про нестисливість рідини. Виявляється, що при дуже великих прискореннях зміна тиску може бути настільки значною, що модель нестисливої рідини стає неприйнятною і навіть для краплинних рідин стисливість слід враховувати. Крім того, при великих значеннях тиску необхідно враховувати й пружність стінок труби.

*Різка зміна тиску в трубі, що спричинена великими локальними прискореннями рідини, називається гідравлічним ударом.* Для розгляду фізичного механізму цього явища проведемо уявний експеримент.

Нехай з резервуара через трубу, в кінці якої встановлено затвор, під дією напору  $H$  витікає рідина (рисунок 6.42). При різкому закритті затвора найближчий до нього шар рідини зупиниться і його кінетична енергія перейде в потенціальну (енергію тиску). Слідом за ним зупиниться наступний шар тощо. Таким чином, процес гальмування рідини зі швидкістю  $C_{xв}$  буде поширюватися вздовж труби від затвора до входу (пряма ударна хвиля) і в міру цього тиск в трубі буде зростати.  $C_{xв}$  називається *швидкістю поширення фронту ударної хвилі (фронт ударної хвилі – поверхня, що відділяє ділянку поширення ударної хвилі від ділянки незбуреного потоку)*. На рисунку 6.43 показаний типовий графік залежності тиску від часу при гідроударі в трубі. Процесу гальмування рідини відповідає криволінійний відрізок  $OA$ . В момент часу, коли відбувається зупинка всієї рідини в трубі, тиск в ній досяг-не максимального значення  $P_1$ . Оскільки цей тиск буде більшим від вагового тиску стовпа рідини, під дією якого відбувалась течія, то почнеться відтік рідини з труби у резервуар. Тобто процес піде у зворотному напрямі – потенціальна енергія почне переходити в кінетичну і тиск у трубі почне знижуватися (криволінійний відрізок  $AB$ ). Хвиля зниження тиску, яка поширюється від входу в трубу до затвора, називається зворотною. За час

$$t_{\phi} = \frac{2L}{C_{xв}} \quad (6.195)$$

ударна хвиля зміни тиску пройде шлях від затвора до входу в трубу і назад. Цей час називають *часом фази*.

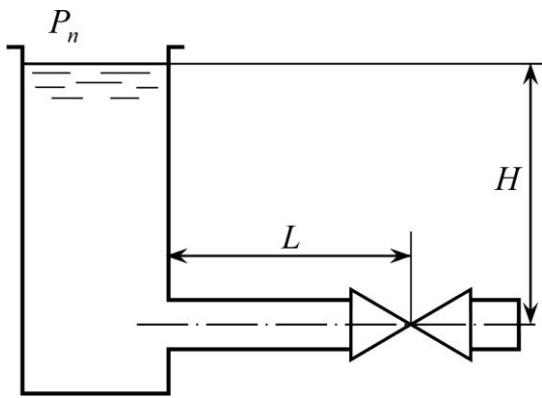


Рисунок 6.42 – Схема витікання

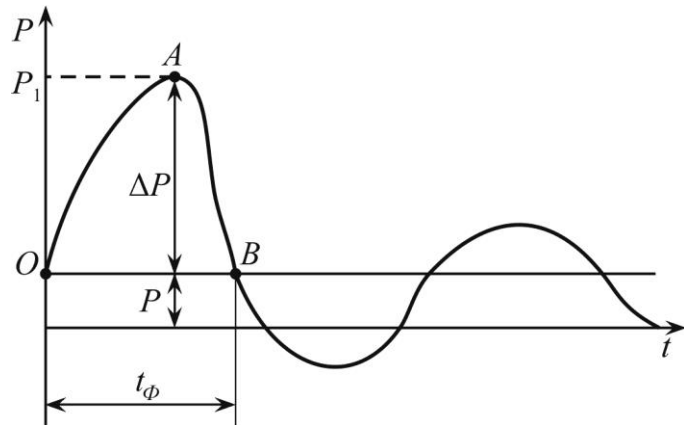


Рисунок 6.43 – Зміна тиску в трубі при гідроударі

Досягши точки  $B$ , процес буде йти в бік подальшого зниження тиску завдяки дії на рідину сил інерції. Через в'язкість рідини та деформованість стінок труби процес, як видно з графіка, має не тільки коливальний, але й затухаючий характер.

Розрізняють два види гідроудару: *прямий* і *непрямий*. Якщо час закриття затвора  $t_3$  менший за час фази, тобто якщо до моменту повернення зворотної хвилі затвор вже повністю перекрив переріз потоку, то удар називають прямим. І навпаки, при  $t_3 > t_\phi$  – гідроудар непрямий.

Основною характеристикою гідроудару є ударне підвищення тиску  $\Delta P$ . Розглянемо один з можливих шляхів виводу формули для цієї величини.

Нехай рідина рухається по трубі діаметром  $d$  зі швидкістю  $v_0$ . Якщо в момент часу  $t$  затвор частково перекриє переріз потоку, то швидкість зменшиться до величини  $v = v_0 - \Delta v$ . З наведеного вище розгляду механізму гідроудару зрозуміло, що ця зміна відбудеться у безпосередній близькості до робочого органу затвора і потім буде поширюватися по трубопроводу.

У деякий момент часу  $t_1$  ця зміна швидкості досягне перерізу 1 – 1 (рисунок 6.44), а через досить невеликий проміжок часу  $\Delta t$  – перерізу 2 – 2. Очевидно, що зміна швидкості приведе до зміни тиску, який дорівнюватиме  $P + \Delta P$ , а це приведе до зміни густини:  $\rho + \Delta \rho$ . Швидкість поширення збурення, викликаного закриттям затвора,

$$C_{xв} = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad (6.196)$$

де  $\Delta x$  – відстань між перерізами 1 – 1 і 2 – 2, яку ударна хвиля долає за час  $\Delta t$ .

Маса рідини, яка знаходиться між цими перерізами,

$$m = \rho A \Delta x, \quad (6.197)$$

де  $A$  – площа живого перерізу труби.

Зміна густини приводить і до зміни маси, котра через проміжок часу  $\Delta t$  дорівнюватиме

$$\begin{aligned} m + \Delta m &= (\rho + \Delta\rho)(A + \Delta A)\Delta x = \\ &= \rho A \Delta x + \rho \Delta A \Delta x + \Delta\rho A \Delta x + \Delta\rho \Delta A \Delta x. \end{aligned} \quad (6.198)$$

Якщо знехтувати прирістом площі перерізу, то

$$m + \Delta m = (\rho + \Delta\rho)A\Delta x. \quad (9.199)$$

Отже, приріст маси

$$\Delta m = \Delta\rho A \Delta x. \quad (6.200)$$

З іншого боку,  $\Delta m$  – це різниця між масою, що втікає у контрольний об'єм зі швидкістю  $v_0$  і витікає з нього зі швидкістю  $v_0 - \Delta v$ ,

$$\Delta m = \rho A \Delta v \Delta t. \quad (6.201)$$

Прирівнявши формули (6.201) і (6.200), дістаємо

$$\Delta\rho \Delta x = \rho \Delta v \Delta t, \quad (6.202)$$

а використавши рівняння (6.196),

$$C_{x\delta} = \frac{\rho \Delta v}{\Delta\rho}. \quad (6.203)$$

Зовнішня сила, під дією якої відбувається рух у відсіку між перерізами 1–1 і 2–2, дорівнює  $\Delta P A$ . Сила інерції – добуток маси рідини  $\rho A \Delta x$  на прискорення  $\Delta v / \Delta t$ . Згідно з відомим *принципом Даламбера* систему, що рухається, можна розглядати як статичну, якщо до діючих на неї сил додати силу інерції. Сили в'язкого тертя через їх відносну малість до уваги не братимемо.

Таким чином,

$$\Delta P A = \rho A \Delta x \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad (6.204)$$

а з урахуванням формули (6.196)

$$\Delta v = \frac{\Delta P}{C_{x\delta} \rho}. \quad (6.205)$$

Величину тиску в трубі після закриття затвора  $P_1 = P + \Delta P$  можна визначити, використавши формулу (6.205)

$$P_1 = P + \Delta P = P + C_{x\delta} \rho \Delta v = P + C_{x\delta} \rho (v_0 - v). \quad (6.206)$$

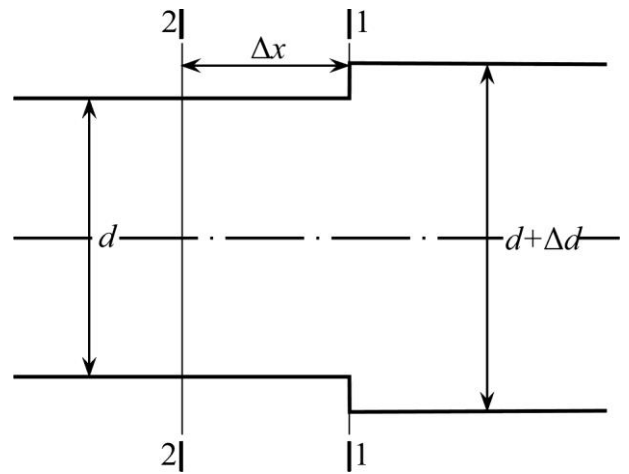


Рисунок 6.44 – До виводу формули для ударного підвищення тиску

Таким чином, підвищення тиску залежить від того, на скільки зменшується швидкість в трубопроводі, тобто від того, скільки кінетичної енергії рідини перейде в потенціальну. Найбільшому підвищенню тиску  $\Delta P$  відповідає випадок повного закриття затвора ( $v = 0$ )

$$\Delta P = \rho v_0 C_{xв}. \quad (6.207)$$

Отриманий результат називають *формулою Жуковського для прямого гідродару*.

Прирівнявши формули (6.205) і (6.203), дістаємо

$$C_{xв} = \sqrt{\frac{\Delta P}{\Delta \rho}}. \quad (6.208)$$

Як буде показано в підрозділі 9.3,  $\sqrt{\Delta P / \Delta \rho}$  є швидкістю поширення звуку в даному середовищі. Тому можна зробити висновок, що фронт ударної хвилі поширюється зі швидкістю звуку. Оскільки при виводі формули (6.208) ніяких обмежень стосовно фізичних властивостей рідини не робилось, то цей висновок справедливий як для краплинних рідин, так і для газів.

Зважаючи на рівняння (1.12), формулу (6.208) можна подати так:

$$C_{xв} = \sqrt{\frac{E_p}{\rho}}, \quad (6.209)$$

де  $E_p$  – модуль об'ємної пружності рідини.

Якщо в формулі (6.198) розширенням труби не знехтувати, то, скориставшись рівнянням (6.197), маємо

$$\begin{aligned} \Delta m &= m - \rho \Delta A \Delta x + \rho \Delta A \Delta x + \Delta \rho \Delta A \Delta x + \Delta \rho \Delta A \Delta x = \\ &= \Delta x (\rho \Delta A + \Delta \rho A + \Delta \rho \Delta A), \end{aligned} \quad (6.210)$$

або нехтуючи величинами вищого порядку малості,

$$\Delta m = \Delta x (\rho \Delta A + \Delta \rho A). \quad (6.211)$$

Прирівнявши формули (6.211) і (6.201) з урахуванням рівняння (6.196), дістаємо

$$C_{xв} = \frac{\Delta v}{\frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{\Delta A}{A}}, \quad (6.212)$$

а з урахуванням рівняння (6.205)

$$C_{xв}^2 = \frac{\Delta P}{\rho \left( \frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{\Delta A}{A} \right)}. \quad (6.213)$$

Площа перерізу круглої труби  $A = \pi d^2/4$ . Тому

$$\Delta A = \frac{\pi d \Delta d}{2}. \quad (6.214)$$

Відносне видовження периметра труби

$$\frac{\pi(d + \Delta d) - \pi d}{\pi d} = \frac{\Delta d}{d}. \quad (6.215)$$

Відповідно до загальних принципів механіки твердого тіла, напруження, що виникають в матеріалі труби,

$$G = \frac{\Delta d}{d} E_m, \quad (6.216)$$

де  $E_m$  – модуль об'ємної пружності матеріалу труби.

З іншого боку, для круглої труби справедлива формула (2.48). Тоді, переходячи до прийнятих у даному підрозділі позначень,

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{\Delta P d}{2\delta E_m}. \quad (6.217)$$

Відносне збільшення площі

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta P d}{\delta E_m}. \quad (6.218)$$

Таким чином, швидкість поширення ударної хвилі

$$C_{xв} = \sqrt{\frac{\Delta P}{\rho \left( \frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{\Delta P d}{\delta E_m} \right)}}, \quad (6.219)$$

а з урахуванням формули (1.12)

$$C_{xв} = \frac{1}{\sqrt{\rho \left( \frac{1}{E_p} + \frac{d}{\delta E_m} \right)}}, \quad (6.220)$$

або

$$C_{xв} = \frac{C_0}{\sqrt{1 + \frac{d}{\delta} \frac{E_p}{E_m}}}, \quad (6.221)$$

де  $C_0 = \sqrt{\frac{E_p}{\rho}}$  – швидкість звуку в рідині (для води  $E_p = 2 \cdot 10^9$  Па, тому  $C_0 \approx 1425$  м/с);

$\delta$  – товщина стінки труби.

Підвищення тиску при непрямому гідроударі описує співвідношення (6.206). Втім частіше використовують таку, хоча і приблизну, але зручну для інженерних розрахунків формулу:

$$\Delta P_n = \rho v_0 C_{xв} \frac{t_{\phi}}{t_3} = \frac{2\rho v_0 L}{t_3}. \quad (6.222)$$

На завершення зазначимо, що у деяких випадках (різке відкриття затвора або відключення насоса) гідроудар може починатися зі зниження тиску. У цілому для гідравлічних мереж явище гідроудару є досить небезпечним, оскільки під дією ударного підвищення тиску може вийти з ладу обладнання і навіть розірватися трубопровід.

## 6.11 ОСОБЛИВОСТІ ТЕЧІЇ В ТРУБАХ НЕКРУГЛОГО ПЕРЕРІЗУ

Так склалося, що напірні труби некруглого перерізу в промисловості та побуті використовуються значно рідше, ніж круглі (виключенням є хіба що повітро- і газоходи систем вентиляції, а також деяких технологічних процесів енергетичних, хімічних та інших виробництв). Така цілком закономірна ситуація обумовлена низкою об'єктивних факторів, пов'язаних зі зручністю і економічністю виготовлення та експлуатації, котрі визначають перевагу круглих труб над трубами більш складної форми поперечного перерізу. Тому цілком природно, що переважна більшість гідравлічних досліджень стосується саме вісесиметричних потоків. Втім, як засвідчують експериментальні та теоретичні дослідження, течія рідини в напірних трубах некруглого перерізу має певні особливості, не властиві вісесиметричним потокам. Ці особливості суттєво ускладнюють математичний опис такої течії. Розглянемо їх докладно.

Основною характерною відмінністю невісесиметричних напірних потоків є нерівномірність розподілу дотичних напружень на стінці вздовж периметра перерізу. Як показали експериментальні та теоретичні дослідження, ближче до кутів прямокутних чи трикутних труб величина цих напружень зменшується, а безпосередньо в куті наближається до нуля. Така особливість викликає появу так званих *вторинних течій* – течій рідини у площині, нормальній напрямку основного потоку. Як приклад на рисунку 6.45 наведені *ізотакси* (лінії рівних швидкостей) основного потоку і лінії течії вторинних течій (числа, що стосуються окремих ліній течії, вказують значення функції течії в см<sup>3</sup>/с. Показано праву верхню чверть перерізу). Таким чином, невісесиметричні потоки, строго кажучи, не можна звести до

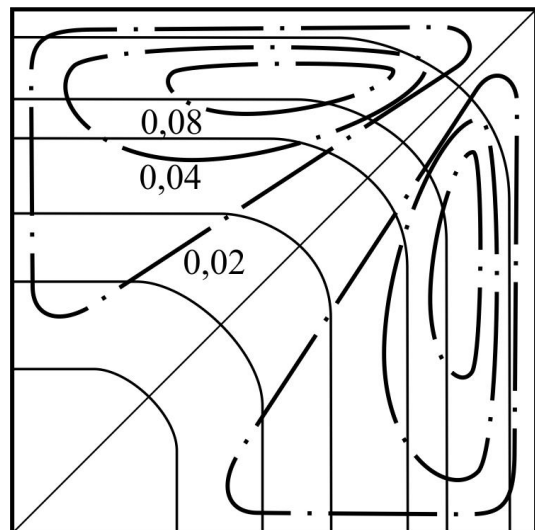


Рисунок 6.45 – Лінії течії вторинних течій та ізотакси в квадратній трубі, за даними Л. Тепакса



одновимірної моделі. Однак оскільки величина поперечних складових місцевих осереднених швидкостей складає усього декілька відсотків від середньовитратної, то при інженерних розрахунках фактом існування вторинних течій нехтують.

Вторинні течії впливають на розподіл швидкостей. Завдяки їм рідина перетікає з центральної частини перерізу до периферії – в кути і тому ізотахи в кутах мають випуклу форму.

Строга математична модель поля швидкостей турбулентного потоку в трубах некруглого перерізу ще не отримана, а відомі моделі побудовані на тих чи інших гіпотезах, переважно є або досить громіздкими, або дозволяють робити лише приблизний розрахунок розподілу швидкостей.

У ламінарних невісесиметричних потоках вторинні течії на спостерігаються.

Як впливає з матеріалу пункту 6.6.3, товщина в'язкого пристінного шару  $\delta$  залежить зворотно від величини дотичних напружень на стінці. Тому нерівномірність розподілу дотичних напружень приводить до нерівномірності розподілу  $\delta$ . У кутах товщина в'язкого шару більша, ніж у центральній частині периметра, і, як буде показано далі, це впливає на закономірності гідравлічного опору некруглих труб.

Для визначення втрат напору в трубах некруглого перерізу використовують формули Дарсі та Весбаха. Причому замість діаметра у формулі (6.104) підставляють еквівалентний діаметр

$$\Delta h = \lambda \frac{l}{d_e} \frac{v^2}{2g}, \quad (6.223)$$

де  $d_e = \frac{4A}{\Pi} = 4R_c$  – еквівалентний діаметр.

Для прямокутного напірного каналу площа живого перерізу  $A = ab$ , змочений периметр  $\Pi = 2(a + b)$ , де  $a$  і  $b$  – менша і більша сторони перерізу. Відтак для прямокутного каналу

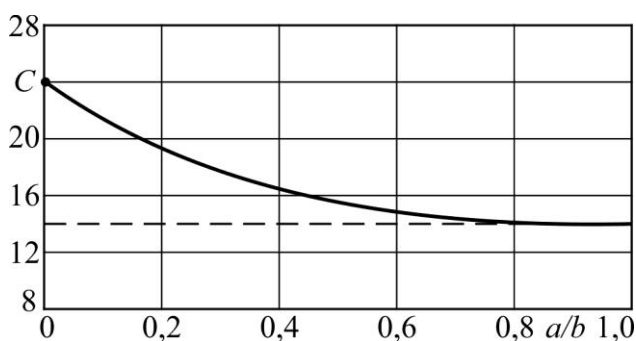


Рисунок 6.46 – Залежність коефіцієнта  $C$  від співвідношення сторін перерізу прямокутної труби  $a/b$ , за даними Л. Шиллера

$$\Delta h = \lambda \frac{l(a+b)}{2ab} \frac{v^2}{2g}. \quad (6.224)$$

При ламінарному режимі течії гідравлічний коефіцієнт тертя може бути розрахований за формулою, аналогічною до формули (6.105),

$$\lambda = \frac{C}{\text{Re}}, \quad (6.225)$$

де  $C$  – коефіцієнт, який залежить від співвідношення сторін перерізу  $a/b$  (рисунок 6.46).

Таким чином, у невісесиметричних трубах гідравлічний коефіцієнт тертя у загальному випадку залежить не тільки від числа Рейнольдса і відносної еквівалентної шорсткості, але й від форми перерізу каналу. Очевидно, що чим більше відношення периметра до площі живого перерізу, тим більшим має бути коефіцієнт Дарсі. Так, наприклад, при однакових еквівалентних діаметрах периметр прямокутних труб ( $P_{пр}$ ) завжди більший за периметр круглих ( $P_{кр}$ ) і чим більший ступінь витягнутості каналу  $b/a$ , тим відношення  $P_{пр}/P_{кр}$  більше, а отже, більша і площа дотикання потоку зі стінками. Однак очікувана і на перший погляд логічна рівність  $\lambda_{пр}/\lambda_{кр} = P_{пр}/P_{кр}$  дослідними даними підтверджується не для всіх значень числа Рейнольдса.

На рисунку 6.47 наведена дослідна залежність відношення коефіцієнтів Дарсі квадратної  $\lambda_{кв}$  і круглої  $\lambda_{кр}$  фанерних труб з однаковим еквівалентним діаметром від числа Рейнольдса. Як бачимо, відношення  $\lambda_{кв}/\lambda_{кр}$  при  $Re < 1,2 \cdot 10^6$  не є сталою величиною. Причому при  $Re < 0,85 \cdot 10^6$   $\lambda_{кв}/\lambda_{кр} < P_{кв}/P_{кр} = 1,128$ . Це можна пояснити нерівномірністю розподілу товщини в'язкого шару вздовж периметра перерізу – в кутах  $\delta$  більша, ніж у центральній частині. Тому при зростанні числа Рейнольдса зміна зони гідравлічного опору в різних частинах периметра відбувається неоднаково: у центральних перехід від гладкостінної течії до перехідної зони або від перехідної зони до автомодельної відбувається раніше (при менших  $Re$ ), ніж в кутах. Таким чином, на відміну від течії в круглих трубах, різні частини стінки невісесиметричних труб можуть «працювати» в різних зонах опору. Можна вважати, що при досягненні деякого граничного числа Рейнольдса, коли практично весь периметр перерізу починає «працювати» в квадратичній зоні опору,  $\lambda_{кв}/\lambda_{кр} = P_{кв}/P_{кр} = 1,128$ . Однак на процес виникнення втрат енергії по довжині в невісесиметричних трубах впливають і вторинні течії, на підтримання котрих також витрачається деяка кількість енергії. Очевидно тому в автомодельній зоні опору  $\lambda_{кв}/\lambda_{кр} \approx 1,16 > P_{кв}/P_{кр}$ .

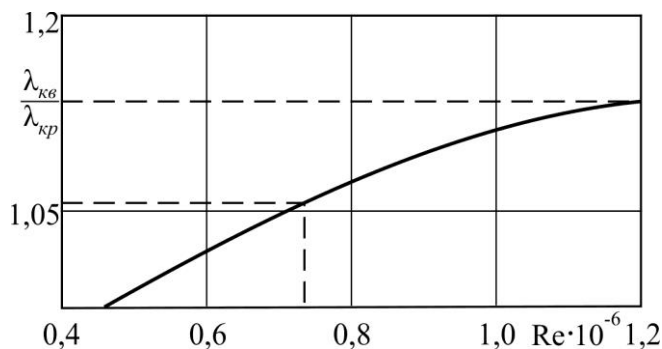


Рисунок 6.47 – Залежність відношення коефіцієнтів гідравлічного тертя квадратної і круглої труб, за даними Г.О. Адамова і І.Є. Ідельчика

Слід визнати, що детального теоретичного і дослідного вивчення питання течії в некруглих трубах, яке б дало якісне і кількісне розв'язання задачі розрахунку таких потоків, на цей час нема. Цьому, напевне, посприяли такі обставини. По-перше, це складність процесів, що відбуваються при течії в невісесиметричних каналах, а по-друге, уявлення, що задачу розрахунку таких трубопроводів можна розв'язувати за формулами для круглих труб, лише замінивши в них діаметр еквівалентним діаметром. Як свідчить навіть

поверхневий аналіз особливостей невісесиметричних напірних потоків, таке припущення є неприйнятним, оскільки процеси в цих потоках в деяких аспектах якісно відрізняються від вісесиметричних, а проста заміна діаметра на еквівалентний діаметр цього не враховує. Тому такий спрощений підхід часто може призвести до огріхи в результатах розрахунків порядку 10... 15 %, що не задовольняє точність інженерних розрахунків.

З прийнятною для інженерних розрахунків точністю коефіцієнт Дарсі в трубах прямокутного перерізу може бути визначений за формулами С. С. Золотова, отриманими шляхом апроксимації дослідних даних

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \left(1,6 + 0,25 \frac{a}{b}\right) \lg \text{Re} + 0,25 - 1,7 \frac{a}{b}, \quad (6.226)$$

для гідравлічно гладких труб  $\left(\text{Re} = \frac{va}{\nu}\right)$ ,

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -\lg \left[ 10^{\left(0,25 - 1,7 \frac{a}{b}\right)} \text{Re}^{-\left(1,6 + 0,25 \frac{a}{b}\right)} + 10^{-\left(1,7 - 0,6 \frac{a}{b}\right)} \left(\frac{a}{k_e}\right)^{-\left(1,8 + 0,25 \frac{a}{b}\right)} \right] \quad (6.227)$$

для зони доквадратичного опору і

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \left(1,8 + 0,25 \frac{a}{b}\right) \lg \frac{a}{k_e} + 1,7 - 0,6 \frac{a}{b} \quad (6.228)$$

для гідравлічно шорстких труб.

Останнім часом, завдячуючи розвитку обчислювальної техніки, для вивчення течій зі складними граничними умовами усе частіше використовуються прикладні програмні пакети. Вони дозволяють моделювати гідродинамічні процеси шляхом розв'язання диференціальних рівнянь руху числовими методами. У нашій країні поширеними є пакети SOLID WORKS Flow Simulation, FLUENT, Flow Vision тощо, які можуть використовуватися для ламінарного і турбулентного режимів, для усталеного і неусталеного рухів краплинних рідин і стисливих газів, стосовно внутрішньої та зовнішньої задач, для суцільних і дисперсних середовищ тощо. Ці пакети значною мірою витісняють з наукових досліджень фізичне моделювання (експеримент), оскільки є, як правило, дешевшими і скорочують час цих досліджень. З іншого боку, слід розуміти, що оскільки числові моделі за своєю суттю є приблизними, то і отримані на їх основі наукові результати також мають певну огріху. Крім того, отриманий таким чином результат у великій мірі залежить від коректності заданих граничних і початкових умов, а також від щільності обраної розрахункової сітки та можливостей ЕОМ.

## 6.12 СИЛОВА ВЗАЄМОДІЯ ПОТОКУ ІДЕАЛЬНОЇ РІДИНИ З ТВЕРДИМИ ТІЛАМИ

Одною з основних задач гідромеханіки є розрахунок силової взаємодії потоків рідини з твердими тілами. При цьому якщо потік обмежений твердими стінками, то задача називається *внутрішньою*, а якщо рідина обтікає тверде тіло, то – *зовнішньою*.

### 6.12.1 Закон збереження імпульсу

Природно, що на рух рідких середовищ поширюються загальні закони механіки. Серед них особливо важливе і найбільш загальне значення мають так звані закони збереження. Стосовно гідромеханіки, наприклад, закон збереження маси має вигляд рівняння нерозривності, а закон збереження енергії – рівняння Бернуллі. Для розв'язання деяких технічних задач силової взаємодії рідини з твердими тілами немає потреби знати розподіл швидкостей і тиску в потоці, а достатньо знати інтегральні величини. У цьому випадку ефективно користуватися іншим загальним законом механіки, а саме – *законом збереження кількості руху (теоремою імпульсів)*. Головна перевага такого підходу полягає у тому, що при відомих параметрах течії на границях він дозволяє розв'язувати задачі, не вдаючись до інтегрування диференціальних рівнянь руху.

Стосовно руху рідини теорема імпульсів може бути сформульована таким чином: *похідна за часом від кількості руху рідкого тіла дорівнює головному вектору зовнішніх сил, що на нього діють,*

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{d(m\vec{u})}{dt} = \vec{F}, \quad (6.229)$$

де  $\vec{K}$  – головний вектор кількості руху.

Теорему можна сформулювати й по-іншому: *швидкість зміни кількості руху всередині виділеного об'єму дорівнює головному вектору зовнішніх сил, що на нього діють*. Однак у загальному випадку безпосередній розрахунок зміни кількості руху рідкого об'єму пов'язаний з великими (інколи – нездоланими) труднощами. Тому в гідромеханіці замість визначення зміни кількості руху знаходять *потік імпульсу* через нерухому поверхню. Такий метод отримав назву *методу контрольного об'єму*. Він особливо ефективний при розгляді ustalеної течії.

Для усвідомлення його суті розглянемо ustalений рух рідкого об'єму  $V$ , обмеженого поверхнею площею  $A$ . Нехай у момент часу  $t$  цей об'єм займає положення в просторі, як це показано на рисунку 6.48. Поверхню  $A$  називають контрольною. За час  $dt$  через елементарну площадку  $dA$ , яка виділена на контрольній поверхні і орієнтацію котрої задає зовнішня нормаль  $\vec{n}$ , протікає рідина масою  $\rho u_n dA dt$  з кількістю руху  $\rho u_n \vec{u} dA dt = \delta(d\vec{K})$  (символ  $\delta$  означає диференціювання кількості руху по поверхні).

Очевидно, що  $\delta(d\vec{K})$  додатна для тих елементарних площадок, крізь котрі рідина витікає з контрольного об'єму ( $u_n > 0$ ), і від'ємна для тих площадок, крізь які рідина втікає ( $u_n < 0$ ). Отже, інтеграл

$$\iint_A \delta(d\vec{K}) = d\vec{K} = \iint_A \rho u_n \vec{u} dt dA \quad (6.230)$$

являє собою різницю кількості руху, винесеного і внесеного в контрольний об'єм  $V$  за час  $dt$  рідиною, що протікає за цей самий час крізь поверхню  $A$ .

Таким чином, для усталеного руху

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \iint_A \rho u_n \vec{u} dA, \quad (6.231)$$

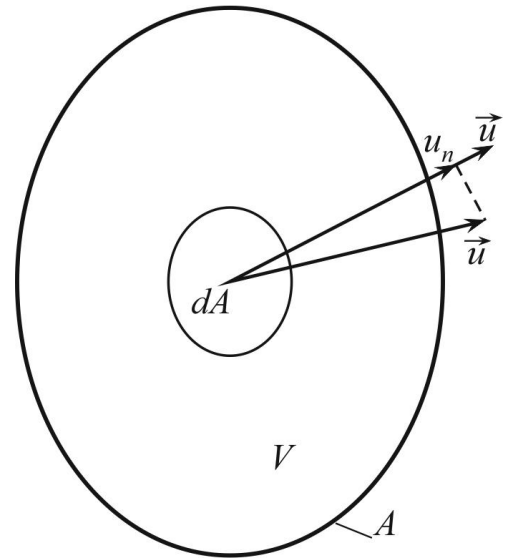


Рисунок 6.48 –  
До поняття про потік імпульсу

а це свідчить про те, що похідна за часом від кількості руху рідини у довільному об'ємі дорівнює потоку імпульсу через поверхню, що цей об'єм обмежує.

З урахуванням формули (6.229) останній вираз можна переписати так:

$$\iint_A \rho u_n \vec{u} dA = \vec{F}. \quad (6.232)$$

Оскільки  $\vec{F}$  – рівнодіюча усіх зовнішніх сил, що діють на об'єм (як масових, так і поверхневих), то формулу (6.232) можна подати у такому вигляді:

$$\iint_A \rho u_n \vec{u} dA = \iiint_V \rho \vec{F}' dV + \iint_A P \vec{n} dA. \quad (6.233)$$

У загальному випадку неусталеного руху для того, щоб визначити зміну імпульсу, необхідно також врахувати і його локальну складову

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{\partial \vec{K}}{\partial t} + \iint_A \rho u_n \vec{u} dA, \quad (6.234)$$

і тоді

$$\frac{\partial \vec{K}}{\partial t} + \iint_A \rho u_n \vec{u} dA = \iiint_V \rho \vec{F}' dV + \iint_A P \vec{n} dA. \quad (6.235)$$

Вирази (6.233) і (6.235) є інтегральною формою запису теореми імпульсів для усталеного і неусталеного рухів ідеальної рідини.

### 6.12.2 Внутрішня і зовнішня задачі

Розглянемо силову взаємодію усталеного потоку нестисливої рідини зі стінками криволінійного каналу, що його обмежують (внутрішня задача). Контрольним об'ємом будемо вважати відсік каналу, що утворюється боковими стінками та перерізами 1 – 1 і 2 – 2 (рисунок 6.49). Визначимо проекції сили динамічної дії з боку рідини на стінки. Рідину вважатимемо ідеальною, а силою тяжіння знехтуємо.

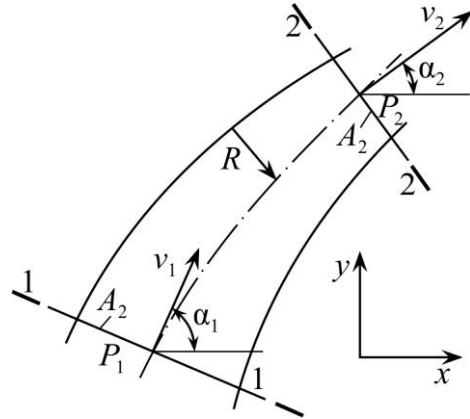


Рисунок 6.49 – Внутрішня задача

Потік імпульсу в перерізі 1 – 1 в проекції на вісь  $ox$

$$\iint_{A_1} \rho v_1 \cos \alpha_1 v_1 dA_1 = \rho v_1^2 A_1 \cos \alpha_1 = \rho Q v_1 \cos \alpha_1, \quad (6.236)$$

а в перерізі 2 – 2

$$\iint_{A_2} \rho v_2 \cos \alpha_2 v_2 dA_2 = \rho v_2^2 A_2 \cos \alpha_2 = \rho Q v_2 \cos \alpha_2. \quad (6.237)$$

Тоді згідно з рівнянням (6.232) можна записати

$$F_x = \rho Q (v_2 \cos \alpha_2 - v_1 \cos \alpha_1). \quad (6.238)$$

З іншого боку, оскільки  $F_x$  – проекція рівнодіючої зовнішніх сил, то

$$F_x = P_1 A_1 \cos \alpha_1 - P_2 A_2 \cos \alpha_2 + R_x, \quad (6.239)$$

де  $P_1$  і  $P_2$  – гідростатичні тиски у відповідних перерізах;

$R_x$  – проекція реакції стінки.

Таким чином,

$$-R_x = P_1 A_1 \cos \alpha_1 - P_2 A_2 \cos \alpha_2 + \rho Q (v_1 \cos \alpha_1 - v_2 \cos \alpha_2). \quad (6.240)$$

Оскільки ставилася задача розрахувати не реакцію стінки, а силу динамічної дії рідини, то, маючи на увазі, що  $R_x = -F_{\partial x}$ , дістаємо

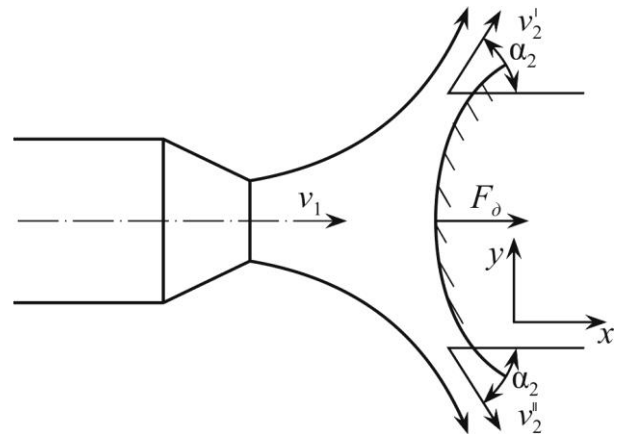
$$F_{\partial x} = P_1 A_1 \cos \alpha_1 - P_2 A_2 \cos \alpha_2 + \rho Q (v_1 \cos \alpha_1 - v_2 \cos \alpha_2). \quad (6.241)$$

Діючи аналогічно, легко дійти результату для проекції на вісь  $oy$

$$F_{\partial y} = P_1 A_1 \sin \alpha_1 - P_2 A_2 \sin \alpha_2 + \rho Q (v_1 \sin \alpha_1 - v_2 \sin \alpha_2). \quad (6.242)$$

Отже, отримані досить зручні рівняння для розрахунку силових взаємодій при розв'язанні внутрішньої задачі.

Зовнішня задача розглядає силову взаємодію вільних струмин з твердими тілами. Струмину називають вільною, якщо вона не стиснута твердими границями. Для розрахунку сили, з котрою ця струмина діє на тверде тіло, можна скористатися результатами, отриманими для внутрішньої задачі. При цьому осі координат завжди можна спрямувати так, щоб  $\alpha_1 = 0$  ( $\cos\alpha_1 = 1$ ) (рисунок 6.50). Для зовнішньої задачі  $P_1 = P_2$ , а  $v'_2 = v''_2 = v_1$  (це легко довести за допомогою рівняння Бернуллі, нехтуючи вагою рідини та силами в'язкого тертя).



Отже, з рівняння (6.241) випливає, що для зовнішньої задачі

$$F_{\delta} = \rho Q v_1 (1 - \cos\alpha_2) \quad (6.243)$$

Рисунок 6.50 – Зовнішня задача

(індекс  $x$  опускається, оскільки при даному спрямуванні координатних осей  $F_{\delta y} = 0$ , а  $F_{\delta} = F_{\delta x}$ ). Кут  $\alpha_2$  називають *кутом сходу потоку*.

Як окремий випадок може розглядатися силова взаємодія струмини з плоскою перешкодою, котра перпендикулярна до первинного напрямку потоку. У цьому випадку  $\alpha_2 = 90^\circ$  ( $\cos\alpha_2 = 0$ ) і

$$F_{\delta} = \rho Q v_1. \quad (6.244)$$

Якщо криволінійну перешкоду сконструювати так, щоб кут сходу потоку був більшим за  $90^\circ$ , то  $\cos\alpha_2$  змінює знак на від'ємний і співмножник у дужках рівняння (6.143) стає більшим за одиницю. У граничному випадку, коли  $\alpha_2 = 180^\circ$ , він дорівнює двом

$$F_{\delta} = 2\rho Q v_1. \quad (6.245)$$

Отже, з цього випливає, що, не змінюючи витрати, за рахунок тільки геометричної конструкції твердого тіла можна збільшувати силу динамічної дії струмини. Фізично це пояснюється тим, що при переході кута сходу потоку через  $90^\circ$ , крім активної, виникає ще й *реактивна складова сили*.

Якщо під дією потоку тверде тіло рухається зі швидкістю  $u$ , то в формулі (6.243) слід замість абсолютної швидкості підставляти відносну ( $v_1 - u$ )

$$F_{\delta} = \rho Q (v_1 - u) (1 - \cos\alpha_2). \quad (6.246)$$

При взаємодії струмина передає тілу потужність

$$N = F_{\delta} u = \rho Q (v_1 - u) u (1 - \cos\alpha_2). \quad (6.247)$$

З формули (6.247) видно, що потужність залежить від співвідношення швидкостей  $v_1$  і  $u$ : при  $v_1 = u$ , або при  $u = 0$   $N = 0$ . Для визначення

оптимального співвідношення  $v_1/u$  (при якому передана потужність максимальна) слід знайти екстремум функції (6.247)

$$\frac{dN}{du} = \rho Q(1 - \cos \alpha_2)(v_1 - 2u), \quad (6.248)$$

тобто екстремуму відповідає  $u = 0,5v_1$ .

Виконавши прості перетворення, формулу (6.243) можна подати у дещо іншому вигляді:

$$F_0 = 2(1 - \cos \alpha_2)A \frac{\rho v_1^2}{2}. \quad (6.249)$$

Така форма запису дозволяє зробити досить важливий висновок про те, що сила динамічної дії вільної струмини на тверде тіло пропорційна динамічному тиску потоку, а величину  $2(1 - \cos \alpha_2)$  можна розглядати як деякий коефіцієнт, величина котрого залежить від форми твердого тіла, що обтікається струминою ідеальної рідини.

На завершення зауважимо, що отримані залежності для вільної струмини справедлива для плоскої задачі. Крім того, важливо усвідомити, що під час усього попереднього розгляду не брали до уваги таку важливу властивість рідини, як в'язкість. Таке спрощення дозволило отримати досить прості розрахункові залежності, але використовувати їх можна тільки для порівняно невеликого кола найбільш простих задач. У більшості ж випадків для отримання прийнятних за точністю розв'язків необхідно враховувати дію сил в'язкого тертя, що, зрозуміло, значно ускладнює задачу, оскільки вимагає розгляду дійсного розподілу швидкостей. Питання силової взаємодії в'язкої рідини з твердими тілами розглядатимуться далі.

### 6.13 ПРИКЛАДИ ЗАДАЧ ДО РОЗДІЛУ 6

1. Шляхом інтегрування рівнянь Нав'є-Стокса визначити середню швидкість усталеної течії етилового безводного спирта в прямій циліндричній трубі з діаметром  $D = 10$  мм і гідравлічний коефіцієнт тертя, якщо на ділянці з довжиною  $l = 1,5$  м перепад тиску складає  $\Delta P = 150$  Па. Температура рідини  $t = 20$  °С. Дією масових сил знехтувати.

Для прямої циліндричної труби (рисунок 6.51) проекції швидкості  $u_y = u_z = 0$ . Тоді відповідно до рівняння нерозривності

$$(3.19) \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \quad \text{і} \quad \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = 0.$$

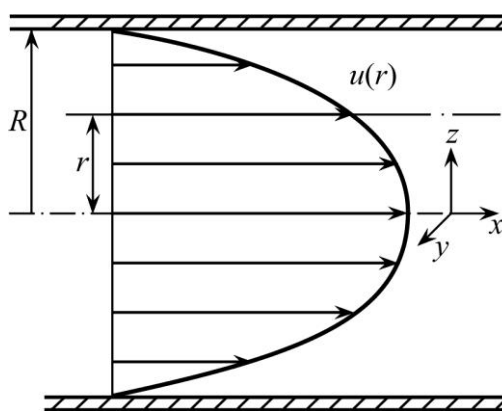


Рисунок 6.51 – До задачі 1



Оскільки дією масових сил нехтуємо, то  $X = Y = Z = 0$  і  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial z} = 0$ , а оскільки течія

усталена, то  $\frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial u_y}{\partial t} = \frac{\partial u_z}{\partial t} = 0$ . Таким чином, для даної задачі система диференціальних рівнянь Нав'є-Стокса (4.38) спрощується до вигляду

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \nu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right).$$

Тиск залежить тільки від поздовжньої координати, тому можна перейти від часткової похідної до повної

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{dP}{dx} = -\frac{\Delta P}{l}$$

(знак «мінус» вказує на те, що тиск вздовж потоку зменшується).

Для потоку в круглій трубці зручно використовувати циліндричну систему координат. У ній  $y = r \cos \theta$ ,  $z = r \sin \theta$ . Отже,

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\Delta P}{l} = \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right).$$

Для вісесиметричного потоку остання складова дорівнює нулю. Тоді залишається

$$-\frac{1}{\mu} \frac{\Delta P}{l} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right).$$

Інтегруючи, дістаємо

$$u = -\frac{1}{4\mu} \frac{\Delta P}{l} r^2 + C_1 \ln r + C_2.$$

При  $r = 0$  швидкість може мати кінцеве значення тільки при  $C_1 = 0$ . На стінці труби ( $r = R$ ) швидкість дорівнює нулю

$$0 = -\frac{1}{4\mu} \frac{\Delta P}{l} R^2 + C_2.$$

Звідки

$$C_2 = \frac{1}{4\mu} \frac{\Delta P}{l} R^2.$$

Отже,

$$u = \frac{1}{4\mu} \frac{\Delta P}{l} (R^2 - r^2) = \frac{1}{4\mu} \frac{\Delta P}{l} R^2 \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right).$$

Середня швидкість

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{4\mu} \frac{\Delta P}{l} R^2 \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) d\theta r dr = \frac{2\pi}{\pi R^2} \frac{1}{4\mu} \frac{\Delta P}{l} R^2 \int_0^R \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) r dr = \frac{\Delta P R^2}{8\mu l}.$$

Для етилового безводного спирту  $\mu = 119 \cdot 10^{-5}$  Па·с,  $\nu = 154 \cdot 10^{-8}$  м<sup>2</sup>/с. Тоді середня швидкість

$$v = \frac{\Delta PR^2}{8\mu l} = \frac{150 \cdot 0,005^2}{8 \cdot 119 \cdot 10^{-5} \cdot 1,5} = 0,26 \text{ м/с}.$$

Число Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{vd}{\nu} = \frac{0,26 \cdot 0,01}{154 \cdot 10^{-8}} = 1688.$$

Коефіцієнт Дарсі

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}} = \frac{64}{1688} = 3,79 \cdot 10^{-2}.$$

2. У круглій трубці з діаметром  $d = 54$  мм, еквівалентна шорсткість котрої  $k_e = 0,08$  мм, протікає вода витратою  $Q = 2$  л/с. Приймаючи в'язкість води  $\nu = 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с, а течію вважаючи усталеною і стабілізованою, визначити відношення швидкості на осі труби до середньої.

Визначимо режим течії води

$$\text{Re} = \frac{vd}{\nu} = \frac{4Q}{\pi d \nu} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 0,054 \cdot 10^{-6}} = 4,72 \cdot 10^4.$$

Оскільки  $\text{Re} > \text{Re}_{\text{кр}} = 2300$ , то течія турбулентна. Тому, не визначаючи зони гідравлічного опору, розрахуємо гідравлічний коефіцієнт тертя за універсальною формулою Альтшуля

$$\lambda = 0,11 \left( \frac{k_e}{d} + \frac{68}{\text{Re}} \right)^{0,25} = 0,11 \left( \frac{0,08}{54} + \frac{68}{4,72 \cdot 10^4} \right)^{0,25} = 2,56 \cdot 10^{-2}.$$

Зважаючи, що течія є турбулентною усталеною і стабілізованою, для встановлення відношення швидкості на осі труби, яка є максимальною, до середньої швидкості скористаємося формулою (6.98). Середня швидкість води

$$v = \frac{1}{A} 2\pi \int_0^R u(r) r dr = \frac{2\pi}{A} \int_0^R u_{\text{max}} \left( \frac{y}{R} \right)^{0,9\sqrt{\lambda}} r dr.$$

Зробимо таку заміну змінних:  $\frac{y}{R} = n$  і  $0,9\sqrt{\lambda} = m$ . Оскільки  $r = R - y$ , то  $r = R(1 - n)$ ,  $dr = -Rdn$ . З урахуванням цього нижня границя інтегрування  $r = 0 \rightarrow y_1 = 1$ , а верхня  $r = R \rightarrow y_2 = 0$ . Таким чином,

$$v = -\frac{2\pi}{A} R^2 u_{\text{max}} \int_{y_1}^{y_2} n^m (1-n) dn = 2u_{\text{max}} \int_0^1 n^m (1-n) dn = 2u_{\text{max}} \left( \frac{n^{m+1}}{m+1} - \frac{n^{m+2}}{m+2} \right) \Big|_0^1 = \frac{2u_{\text{max}}}{m^2 + 3m + 2}.$$

Звідки

$$\frac{u_{\text{max}}}{v} = 1 + 1,5m + 0,5m^2 = 1 + 1,35\sqrt{\lambda} + 0,45\lambda = 1 + 1,35\sqrt{2,56 \cdot 10^{-2}} + 0,45 \cdot 2,56 \cdot 10^{-2} = 1,23.$$

Таким чином, швидкість на осі труби більша середньої на 23 %.

3. Из зовнішнього циліндричного насадка під дією напора  $H = 5$  м витікає рідина. Нехтуючи опором повітря, визначити відстань  $x_0$  від площі вихідного перерізу насадка до струминки на висоті  $h_0 = 2$  м.

Швидкість довільної рідкої частинки, що знаходиться в струминці рідини, представимо через проєкції на координатні осі  $u_x$  і  $u_y$ . У точці  $O$ , котра відповідає початку витікання,  $u_{yO} = 0$ , а  $u = u_x$ . Горизонтальна складова  $u_x = \varphi\sqrt{2gH}$  і, оскільки на рідку частинку із зовнішніх сил діє тільки сила земного тяжіння, проєкція котрої на горизонтальну площину дорівнює нулю, то величина  $u_x$  вздовж струминки не змінюється. Запишемо рівняння Бернуллі для струминки ідеальної рідини (4.19) стосовно вихідного перерізу сопла 1-1 і довільного перерізу 2-2. Для даної задачі  $z_1 = y$ ,  $z_2 = 0$ ,  $P_1 = P_2$ ,  $u_1 = u_x$ ,  $u_2 = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$ . Таким чином, рівняння (4.19) набирає вигляду

$$y + \frac{u_x^2}{2g} = \frac{(\sqrt{u_x^2 + u_y^2})^2}{2g}.$$

Звідки

$$u_y = \sqrt{2gy}.$$

Тоді, вважаючи, що течія є двовимірною, рівняння лінії течії струминки (3.11) записується так:

$$\frac{dx}{\varphi\sqrt{2gH}} = \frac{dy}{\sqrt{2gy}}.$$

Проінтегрувавши, дістаємо,

$$\frac{x}{\varphi\sqrt{H}} = 2\sqrt{y} + C.$$

При  $x = 0$   $y = 0$ . Тому  $C = 0$  і

$$x = 2\varphi\sqrt{yH}.$$

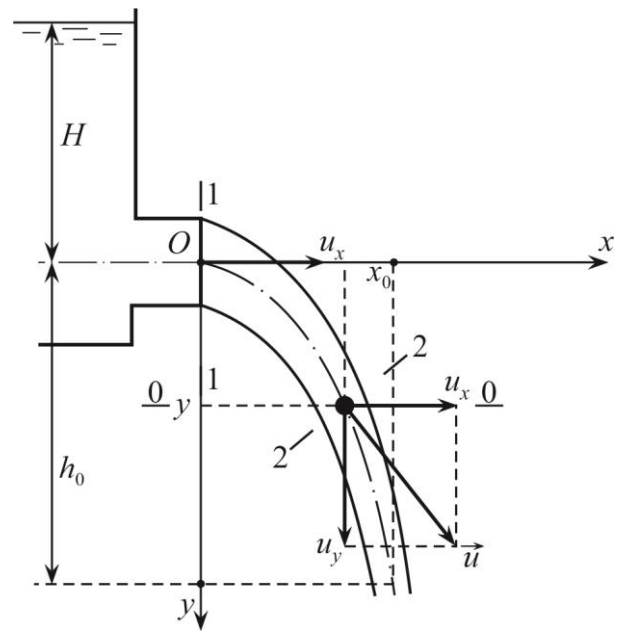


Рисунок 6.52 – До задачі 3

Коефіцієнт швидкості зовнішнього циліндричного насадка  $\varphi = 0,82$ . Таким чином,

$$x_0 = 2\varphi\sqrt{h_0H} = 2 \cdot 0,82\sqrt{2 \cdot 5} = 5,19 \text{ м.}$$

4. Нехтуючи втратами напору, визначити об'ємну витрату в трубі з діаметром  $D = 100$  мм за показаннями витратоміра Вентурі діаметром  $d = 50$  мм, якщо  $h = 25$  мм.

Витратомір Вентурі являє собою вставку меншого діаметра з плавним входом і виходом, принцип дії якого оснований на зміні тиску залежно від зміни швидкості (рисунок 6.53). Щоб визначити витрату скористаємося рівняннями Бернуллі для потоку в'язкої рідини (6.18) і нерозривності (6.5). З урахуванням того, що величиною втрат можна знехтувати ( $\Delta h = 0$ ) і якщо вважати трубу горизонтальною ( $z_1 = z_2$ ), рівняння (6.18) спрощується до вигляду

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_2^2}{2g}.$$

Провівши перерізи 1-1 і 2-2 через точки відбору тисків, легко помітити, що

$$\frac{P_1}{\rho g} - \frac{P_2}{\rho g} = h.$$

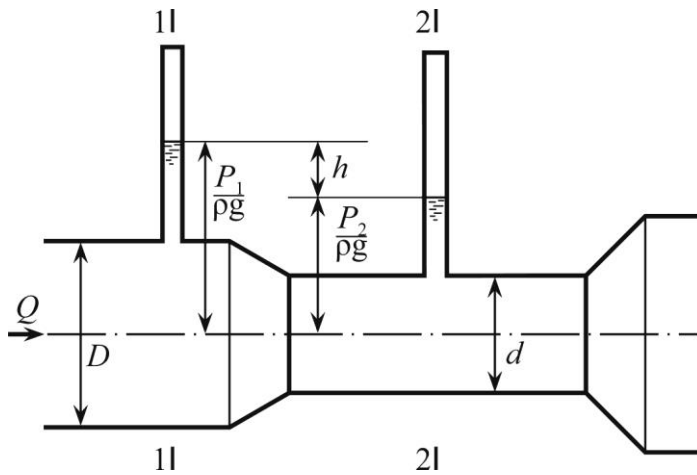


Рисунок 6.53 – До задачі 4

Тоді, приймаючи  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ , рівняння Бернуллі записується так:

$$h + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g},$$

або з урахуванням рівняння нерозривності  $v_1 = v_2 \frac{A_2}{A_1} = v_2 \left(\frac{d}{D}\right)^2$

$$h + \frac{v_2^2}{2g} \left(\frac{d}{D}\right)^4 = \frac{v_2^2}{2g}.$$

Швидкість в трубці Вентурі

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4}},$$

а витрата

$$Q = v_2 A_2 = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4}} = \frac{3,14 \cdot 0,05^2}{4} \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \cdot 0,025}{1 - \left(\frac{50}{100}\right)^4}} = 1,42 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с}.$$

5. У точці розгалуження гідравлічної мережі на два паралельних простих трубопровода з діаметрами  $d_1 = 100$  мм і  $d_2 = 82$  мм та довжинами  $l_1 = 152$  м і  $l_2 = 185$  м витрата складає  $Q = 20$  л/с. Нехтуючи втратами в місцевих опорах, визначити витрати в цих трубопроводах  $Q_1$  і  $Q_2$ , якщо їх статичні висоти дорівнюють нулю, еквівалентна шорсткість однакова, а течія відбувається в квадратичній зоні опору.

Оскільки статичні висоти трубопроводів дорівнюють нулю, то весь напір  $H$  витрачається на втрати напору. Причому

$$\Delta h_1 = S_1 Q_1^2 = \Delta h_2 = S_2 Q_2^2 = H.$$

Звідки

$$Q_1 = Q_2 \sqrt{\frac{S_2}{S_1}} = Q_2 \sqrt{\frac{\lambda_2 \frac{l_2}{d_2} \frac{1}{2gA_2^2}}{\lambda_1 \frac{l_1}{d_1} \frac{1}{2gA_1^2}}} = Q_2 \sqrt{\frac{0,11 \left(\frac{k_e}{d_2}\right)^{0,25} \frac{l_2}{d_2} \frac{4}{2g\pi^2 d_2^4}}{0,11 \left(\frac{k_e}{d_1}\right)^{0,25} \frac{l_1}{d_1} \frac{4}{2g\pi^2 d_1^4}}} = Q_2 \sqrt{\frac{l_2}{l_1} \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{5,25}}.$$

Очевидно, що  $Q = Q_1 + Q_2$ , або

$$Q = Q_2 \sqrt{\frac{l_2}{l_1} \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{5,25}} + Q_2 = Q_2 \left( 1 + \sqrt{\frac{l_2}{l_1} \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{5,25}} \right).$$

Отже, витрати

$$Q_2 = \frac{Q}{1 + \sqrt{\frac{l_2}{l_1} \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{5,25}}} = \frac{20 \cdot 10^{-3}}{1 + \sqrt{\frac{185}{152} \left(\frac{100}{82}\right)^{5,25}}} = 7,0 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с},$$

$$Q_1 = Q - Q_2 = (20 - 7) \cdot 10^{-3} = 13 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с}.$$

## 7 ОБТІКАННЯ ТВЕРДИХ ТІЛ В'ЯЗКОЮ РІДИНОЮ. ОСНОВИ ТЕОРІЙ ПОГРАНИЧНОГО ШАРУ ТА ВІЛЬНИХ ТУРБУЛЕНТНИХ СТРУМИН

Задача розрахунку силової взаємодії потоку рідини (краплинної або газу) з твердими тілами зустрічається при проектуванні різноманітних апаратів (літаків, морських суден тощо) і гідротехнічних споруд. Використання при її розв'язанні залежностей, отриманих для ідеальної рідини, як буде показано далі, призводить до принципово невірних розв'язків. Тому при розгляді обтікання слід враховувати в'язкість рідини, а отже, необхідно користуватись рівнянням Нав'є-Стокса (для ламінарного потоку) або Рейнольдса (для турбулентного потоку). Але, як вже зазначалося раніше, інтегрування цих диференціальних рівнянь можливе лише для деяких окремих випадків. Тобто виникає тупикова ситуація: модель ідеальної рідини не приводить до вірних розв'язків, а в межах моделі в'язкої рідини, через насамперед математичні складнощі, для більшості задач розв'язки взагалі дістати неможливо. Однак потреби техніки вимагали вирішення цієї проблеми. Першим знайшов вихід з ситуації, що склалася, Л. Прандтль, коли 1904 р. ввів поняття пограничного шару.

### 7.1 ОСНОВИ ТЕОРІЙ ПОГРАНИЧНОГО ШАРУ

#### 7.1.1 Поняття пограничного шару. Умовні товщини

Ідея Прандтля була досить простою, але разом з тим, як засвідчив подальший розвиток гідромеханіки, дуже продуктивною. Вона зводилася до того, що при обтіканні твердих тіл потоком в'язкої рідини *сили в'язкості* в різних областях течії проявляються неоднаково. Сили в'язкості значні там, де виникають значні поперечні градієнти швидкості, які приводять до появи дотичних напружень. Це спостерігається у шарах рідини, що знаходяться поблизу твердого тіла. У міру віддалення від нього дія сил в'язкості слабне, оскільки зменшується поперечний градієнт швидкості, і на порівняно невеликій відстані стає настільки малою, що нею можна нехтувати. Таким чином, Прандтль запропонував потік в'язкої рідини, що обтікає тверде тіло, умовно ділити на дві частини: *пограничний шар*, в якому швидкості розподілені нерівномірно і тому течія вихрова, і *зовнішній потенціальний потік* з практично рівномірним розподілом швидкостей (рисунок 7.1). Оскільки при рівномірному розподілі швидкостей в'язкісних дотичних напружень не виникає, то рідину у зовнішньому потоці можна вважати нев'язкою. За тілом утворюється так званий *гідродинамічний* (або *аеродинамічний*) *слід*. У цій області ще зберігається нерівномірний розподіл швидкостей, викликаний гальмуючим впливом твердої поверхні.

Течія у зовнішньому потоці, як правило, є турбулентною. Однак у пограничному шарі через різке падіння швидкості біля поверхні тіла течія може

бути або ламінарною, або турбулентною. Тому розрізняють *ламінарний і турбулентний пограничні шари*, деякі методи розрахунку яких розглянемо далі.

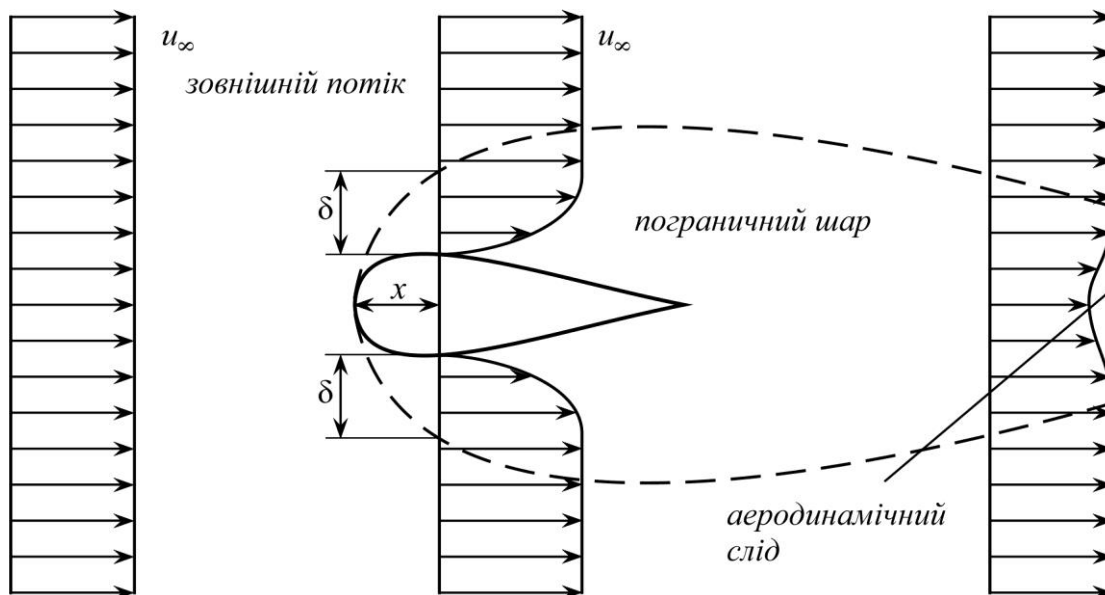


Рисунок 7.1 – Поділ потоку, що обтікає тверде тіло

При обтіканні твердого тіла необмеженим потоком (*зовнішня задача*) пограничний шар утворюється, починаючи від передньої кромки. На рисунку 7.1 границя показана штриховою лінією. Поняття границі носить дещо умовний характер. Оскільки швидкість у кожній точці наближається до швидкості зовнішнього потоку ( $u_\infty$ ) асимптотично, то встановлення границі по суті є угодою про точність. Прийнято, що *границею пограничного шару* є лінія, у кожній точці котрої швидкість менша за  $u_\infty$  на 1 %.

При течії рідини в трубі або каналі (*внутрішня задача*) пограничний шар виникає на початковій ділянці, де формується поле швидкостей (див. рисунок 6.9).

Таким чином, *пограничним вважають шар рідини, в якому швидкості розподіляються нерівномірно, сили інерції спільномірні з силами в'язкого тертя, а течія вихрова; за межами цього шару розподіл швидкостей рівномірний, а потік потенціальний*. Остання умова є також досить важливою, оскільки при відсутності зовнішнього потенціального потоку пограничний шар виділити неможливо.

Для уникнення довільності у визначенні границь пограничного шару вводиться поняття про так звані умовні товщини.

Розглянемо обтікання нестисливою рідиною плоскої пластини, встановленої паралельно вектору швидкості потоку. Нехай площина 1–1 проходить у зоні потенціальної течії перед пластиною (рисунок 7.2), а площина 2–2 на відстані  $x$  від її передньої кромки, де *товщина пограничного шару* дорівнює  $\delta$ .

Простежимо за рухом рідких частинок вздовж виділеної лінії течії.

Витрата рідини, що приходить на одиницю ширини пластини у перерізі 1–1 через шар товщиною  $\delta$ , дорівнює  $u_\infty \delta$ . При усталеному русі ця витрата буде завжди більшою за витрату у перерізі 2–2 пограничного шару, оскільки  $u_x < u_\infty$ . Отже, для того щоб через площину 2–2 пройшла витрата  $u_\infty \delta$ , необхідно збільшити переріз потоку. Тому виділена лінія течії відхиляється від свого початкового напрямку на деяку величину  $\delta^*$ .

Рівняння балансу витрат для площин 1–1 і 2–2 має вигляд

$$u_\infty \delta = u_\infty \delta^* + \int_0^\delta u_x dy, \quad (7.1)$$

де  $u_\infty \delta^*$  відображає витрату у площині 2–2 через шар завтовшки  $\delta^*$ ;  $\int_0^\delta u_x dy$  – те саме у пограничному шарі завтовшки  $\delta$ .

Оскільки  $\int_0^\delta dy = \delta$ , то з формули (7.1) легко дістати

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u_x}{u_\infty}\right) dy. \quad (7.2)$$

Величину  $\delta^*$  називають умовною товщиною витискання. Вона являє собою відхилення лінії течії в'язкої рідини від лінії течії ідеальної рідини, яке викликане гальмуючою дією твердої поверхні (тобто утворенням пограничного шару). Вирішальною перевагою умовної товщини витискання є те, що вона практично не залежить від точності визначення  $\delta$ , оскільки вже при деяких значеннях  $y$ , близьких до  $\delta$ , швидкість  $u_x \approx u_\infty$ . Тому верхню границю інтегрування у рівнянні (7.2) можна замінити на  $\infty$

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u_x}{u_\infty}\right) dy. \quad (7.3)$$

Очевидно, що витискання маси у пограничному шарі супроводжується втратою деякої кількості руху. Товщина втрати імпульсу

$$\delta^{**} = \int_0^\infty \frac{u_x}{u_\infty} \left(1 - \frac{u_x}{u_\infty}\right) dy \quad (7.4)$$

характеризує ту частину кількості руху в'язкої рідини, котра втрачається в пограничному шарі завтовшки  $\delta$  через гальмуючу дію твердої поверхні.

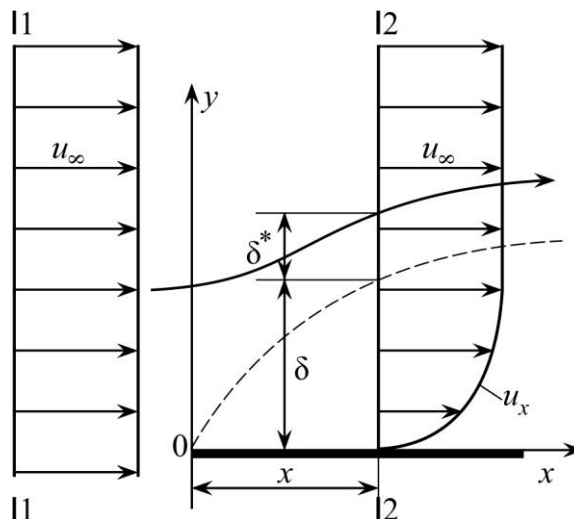


Рисунок 7.2 – До поняття про товщину витискання



Величини  $\delta^*$  і  $\delta^{**}$  називають інтегральними характеристиками пограничного шару і в багатьох випадках вони є більш зручними для його розрахунку, ніж  $\delta$ .

Важливо також зауважити, що відхилення лінії течії в пограничному шарі обумовлює двовимірний характер руху рідини навіть у найпростішому випадку обтікання плоскої пластини. Тому для опису руху необхідно враховувати дві проекції швидкості  $u_x$  і  $u_y$  (для плоскої задачі). Крім того, незважаючи на те, що вздовж потоку товщина пограничного шару зростає, при великих числах Рейнольдса малість відношення  $\delta/x$  зберігається по всій довжині тіла.

### 7.1.2 Рівняння руху в плоскому ламінарному пограничному шарі

Ламінарна течія в'язкої рідини, як було показано у пункті 4.2.2, описується системою диференціальних рівнянь Нав'є-Стокса (4.38), до якої додається рівняння нерозривності (3.17). У випадку плоскої задачі при усталеному русі система спрощується до вигляду

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) &= u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) &= u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

Свого часу Прандтль припустив, що не всі члени в системі (7.5) роблять співмірний внесок у опис течії, що відбувається в плоскому ламінарному пограничному шарі (рисунок 7.3). При цьому основною вихідною передумовою

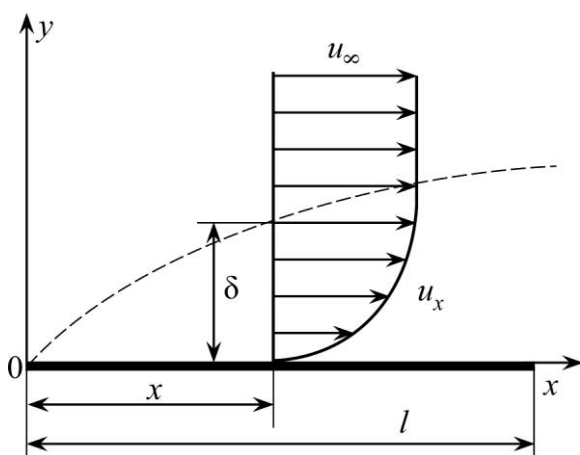


Рисунок 7.3 – Плоский ламінарний пограничний шар

було припущення про те, що в'язкісні та інерційні члени мають однаковий порядок малості. Дійсно, якщо знехтувати силами інерції, то дістанемо рівняння так званої *повзучої* течії, котра спостерігається тільки при дуже малих числах Рейнольдса і зустрічається рідко. Якщо відкинути в'язкісні члени, то дістанемо рівняння руху ідеальної рідини, розв'язання котрого, як вже зазначалося, не приводить до правильних результатів хоча б тому, що не задовольняє граничні умови. Що стосується масових сил, то у переважній

більшості випадків їх вплив на рух рідини порівняно з силами інерції та в'язкості незначний. Тому можна вважати, що  $X = Y = 0$ . Таким чином, у системі рівнянь (7.5) необхідно зберегти в'язкісні та інерційні члени.

Оцінемо порядок малості кожного з них. При цьому будемо виходити з того, що поздовжня координата спільномірна з поздовжнім розміром твердого тіла  $l$  ( $x \approx l$ ); поперечна координата – з товщиною пограничного шару ( $y \approx \delta$ ), швидкості  $u_x \approx u_\infty$ ,  $u_y \ll u_x$ . Відповідно до визначення пограничного шару можна вважати, що  $\delta \ll x$ .

Для оцінки порядку величини  $u_y$  та її похідних проінтегруємо рівняння нерозривності по  $y$  від 0 до  $\delta$

$$\int_0^\delta \frac{\partial u_y}{\partial y} dy = - \int_0^\delta \frac{\partial u_x}{\partial x} dy. \quad (7.6)$$

При  $y = \delta$

$$u_y = - \int_0^\delta \frac{\partial u_x}{\partial x} dy \approx \frac{u_\infty \delta}{l}. \quad (7.7)$$

Тепер можна оцінити порядок усіх величин, що входять до системи (7.5). Для проекції на вісь  $ox$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} &\approx \frac{u_\infty}{l^2}; & \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} &\approx \frac{u_\infty}{\delta^2}; \\ u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} &\approx \frac{u_\infty^2}{l}; & u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} &\approx \frac{u_\infty^2}{l}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Порядок величин конвективних членів однаковий, тому їх не можна виключати з розгляду. Легко помітити, що з в'язкісних членів перший суттєво менший за другий, і тому його доцільно відкинути.

Отже, перше рівняння (7.5) набуває вигляду

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y}. \quad (7.9)$$

Порядок першої складової лівої частини рівняння (7.9) визначається тільки тиском і його зміною у зовнішньому потоці.

За визначенням сили інерції у пограничному шарі спільномірні з силами в'язкого тертя, тобто

$$\frac{u_\infty^2}{l} \approx \nu \frac{u_\infty}{\delta^2}, \quad (7.10)$$

або товщина пограничного шару

$$\delta \approx \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} \approx \frac{x}{\sqrt{\text{Re}_l}}, \quad (7.11)$$

де  $Re_l$  – число Рейнольдса, в якому за характерний лінійний розмір прийнята довжина тіла.

З формули (7.11) випливає, що товщина ламінарного пограничного шару зростає вздовж потоку, а передумова про малість  $\delta$  по відношенню до  $l$  виконується тим точніше, чим більше число Рейнольдса.

Для проекції на вісь  $ou$  з урахуванням формули (7.7)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} &\approx \frac{u_\infty \delta}{l^3}; & \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} &\approx \frac{u_\infty}{l\delta}; \\ u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} &\approx \frac{u_\infty^2 \delta}{l^2}; & u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} &\approx \frac{u_\infty^2 \delta}{l^2}. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Відразу помітно, що порядок першого в'язкісного члена суттєво менший від другого і ним можна знехтувати.

З формули (7.10) випливає, що

$$v \approx \frac{\delta^2 u_\infty}{l}, \quad (7.13)$$

а тому

$$v \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \approx \frac{\delta u_\infty^2}{l^2}. \quad (7.14)$$

Отже, другий в'язкісний член і конвективні члени мають однаковий порядок, який менший від будь-якого з членів рівняння (7.9). Тому у підсумку для проекції на вісь  $ou$  можна записати

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = 0. \quad (7.15)$$

Оскільки  $1/\rho \neq 0$ , то  $\partial P/\partial y = 0$ , а отже,  $P = \text{const}$ . Сенс цього результату досить очевидний: у *поперечному перерізі пограничного шару тиск не змінюється і дорівнює тиску на поверхні*.

Таким чином, система диференціальних рівнянь для плоского ламінарного пограничного шару набуває вигляду

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + v \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} &= u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (7.16)$$

Ця система вперше була запропонована Л. Прандтлем 1904 р. і є вихідною для розвитку теорії пограничного шару. Заміна  $\partial P/\partial x$  на  $dP/dx$  підкреслює те, що тиск залежить лише від поздовжньої координати.

Система (7.16) є незамкнутою, оскільки містить три змінних  $u_x$ ,  $u_y$  і  $P$ . Граничними для неї будуть умови: при  $y = 0$   $u_x = u_y = 0$  і при  $y \rightarrow \infty$   $u_x \rightarrow u_\infty$ , котрі ще більше ускладнюють задачу тому, що вказують на асимптотичне наближення  $u_x$  до  $u_\infty$ .

Обмежує широке використання рівнянь Прандтля ще й те, що при деяких числах Рейнольдса ламінарна течія в пограничному шарі може змінюватися на турбулентну. Фізична сутність процесів, які при цьому відбуваються, аналогічна зміні режимів течії у трубах.

Розглянемо спрощену схему зміни режимів течії на прикладі плоскої пластини. При натіканні потоку на пластині утворюється пограничний шар, товщина якого  $\delta$  і число Рейнольдса, в якому за характерний лінійний розмір прийнята поздовжня координата  $x$ ,  $Re_x$  вздовж тіла зростають (рисунок 7.4). При досягненні деякої поздовжньої координати  $x_{кр}$  ( $Re_{крx} = u_\infty x_{кр} / \nu$ ) течія в пограничному шарі втрачає стійкість і ламінарний режим змінюється на турбулентний. При цьому слід мати на увазі, що при  $x < x_{кр}$  пограничний шар буде ламінарним, навіть якщо течія у зовнішньому потоці турбулентна. Очевидно, що процес зміни

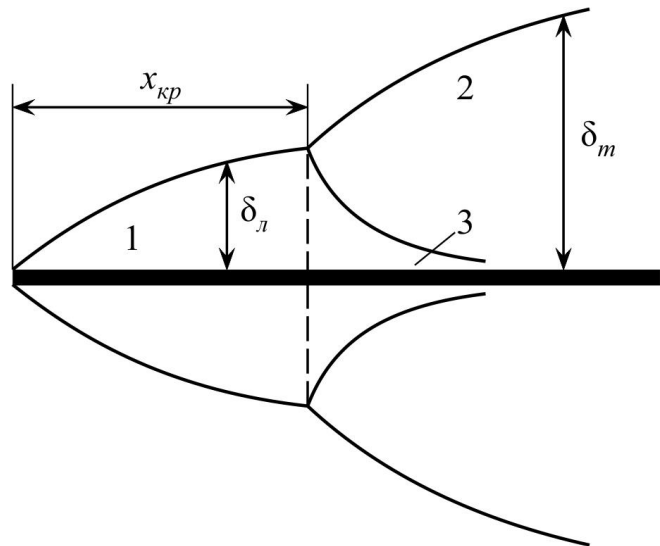


Рисунок 7.4 – Зміна режиму течії в пограничному шарі:

- 1 – ламінарний пограничний шар;
- 2 – турбулентний пограничний шар;
- 3 – в'язкий пристінний шар

режиму відбувається не раптово, як це показано на рисунку, а протягом деякої ділянки. Але при розв'язанні практичних задач поступовістю процесу, як правило, можна нехтувати.

Навіть після переходу ламінарного пограничного шару в турбулентний на поверхні твердого тіла лишається зовсім тонкий в'язкий пристінний шар, у якому сили в'язкого тертя переважають сили інерції (аналогічно течії в трубах; див. пункт 6.6.3). Його товщина становить близько 1–1,5 % від товщини пограничного шару.

При визначенні числа Рейнольдса як характерного лінійного розміру часто використовують не поздовжню координату  $x$ , а товщину пограничного шару  $\delta$

$$Re_\delta = \frac{u_\infty \delta}{\nu}. \quad (7.17)$$

Для пластин можна приймати  $Re_{крx} = 2 \cdot 10^5 \dots 2 \cdot 10^6$ ,  $Re_{кр\delta} = 2740 \dots 8700$ ; для крилових профілів  $Re_{крx} = 2 \cdot 10^5 \dots 5 \cdot 10^5$ ,  $Re_{кр\delta} = 2200 \dots 6290$ .

Встановлено, що зміна режиму відбувається тим ближче до передньої кромки тіла, чим більші ступінь турбулентності набігаючого потоку і

шорсткість поверхні цього тіла. На тілі криволінійної форми ламінарний режим може зберігатися тільки в зоні від'ємних градієнтів тиску вздовж течії.

### 7.1.3 Інтегральне співвідношення Кармана для пограничного шару

Розв'язання прикладних задач шляхом безпосереднього інтегрування рівнянь Прандтля являє значну складність. Тому виникла потреба в розробці приблизних методів розрахунку, які забезпечували б достатню точність результатів. Ці методи базуються на застосуванні до пограничного шару загальних законів гідромеханіки. Один з таких методів 1921 р. був запропонований Т. Карманом і полягав у застосуванні до відсіку пограничного шару закону збереження кількості руху. Така дія приводить до заміни диференціальних рівнянь інтегральними.

Розглянемо плоский пограничний шар, що виникає на твердій поверхні (рисунок 7.5). Течію будемо вважати усталеною, а рідину – нестисливою. Виділимо відсік 1–2–4–3 і застосуємо до нього закон збереження імпульсу.

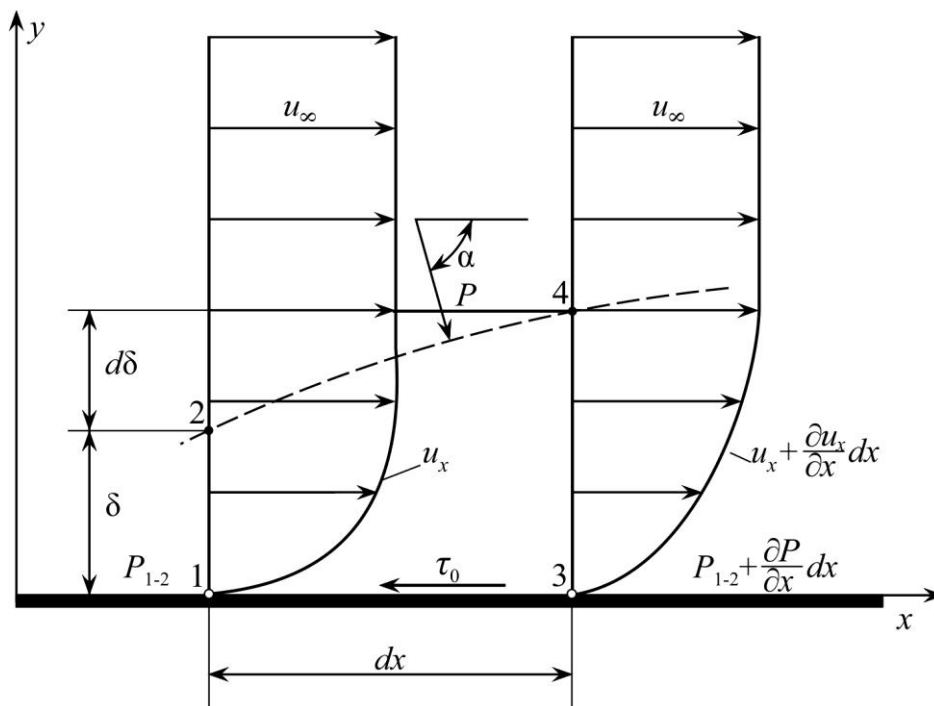


Рисунок 7.5 – Плоский пограничний шар

Визначимо зміну імпульсу між перерізами 1–2 і 3–4.

Через переріз 1–2 у контрольний об'єм одиничної ширини втікає секундна маса

$$m_{1-2} = \rho \int_0^{\delta} u_x dy, \quad (7.18)$$

кількість руху котрої

$$K_{1-2} = \rho \int_0^{\delta} u_x^2 dy. \quad (7.19)$$

З контрольного об'єму витікає секундна маса

$$m_{3-4} = \rho \int_0^{\delta} \left( u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx \right) dy = \rho \int_0^{\delta} u_x dy + \rho \int_0^{\delta} \frac{\partial u_x}{\partial x} dx dy, \quad (7.20)$$

з кількістю руху

$$K_{3-4} = \rho \int_0^{\delta} u_x^2 dy + \rho \int_0^{\delta} \frac{\partial u_x}{\partial x} u_x dx dy. \quad (7.21)$$

Зіставивши рівняння (7.18) і (7.20), легко помітити, що існує розбаланс, який можна пояснити тільки втіканням рідини крізь границю пограничного шару 2–4

$$m_{2-4} = \rho \int_0^{\delta} \frac{\partial u_x}{\partial x} dx dy. \quad (7.22)$$

Імпульс цієї секундної маси

$$K_{2-4} = \rho u_{\infty} \int_0^{\delta} \frac{\partial u_x}{\partial x} dx dy. \quad (7.23)$$

Таким чином, зміна кількості руху за одиницю часу в напрямі осі  $ox$

$$\frac{dK}{dt} = dx \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} \rho u_x^2 dy - dx u_{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} \rho u_x dy, \quad (7.24)$$

котра згідно з теоремою імпульсів повинна дорівнювати рівнодіючій усіх зовнішніх сил  $F_x$ , що за умовою задачі приходить на одиницю ширини. Такими є сили тиску на перерізи 1–2, 3–4 і поверхню 2–4 та сила тертя на поверхні пластини (масові сили помітного впливу не мають, і тому ними можна знехтувати):

$$F_x = P_{1-2} \delta - \left( P_{1-2} + \frac{\partial P}{\partial x} dx \right) (\delta + d\delta) + Pl_{2-4} \cos \alpha - \tau_0 dx. \quad (7.25)$$

Розкривши дужки і виключивши з розгляду нескінченно малі вищого порядку  $(P_{1-2} d\delta, Pl_{2-4} \cos \alpha = Pd\delta, \frac{\partial P}{\partial x} dx d\delta)$ , маємо

$$F_x = -\frac{\partial P}{\partial x} dx \delta - \tau_0 dx. \quad (7.26)$$

Отже, порівнюючи рівняння (7.24) і (7.26), дістаємо вираз

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho u_x^2 dy - u_{\infty} \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho u_x dy = -\frac{dP}{dx} \delta - \tau_0, \quad (7.27)$$

який називається інтегральним співвідношенням Кармана, або рівнянням кількості руху для плоского пограничного шару. Часткові похідні замінені на повні, оскільки рух усталений.

Якщо використати рівняння Бернуллі, записане для зовнішньої границі пограничного шару, то з рівняння (7.27) можна виключити тиск.

$$P = -\frac{\rho u_\infty^2}{2} + C, \quad (7.28)$$

а

$$\frac{dP}{dx} = -\rho u_\infty \frac{du_\infty}{dx}. \quad (7.29)$$

Відтак

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho u_x^2 dy - u_\infty \frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho u_x dy = \rho u_\infty \frac{du_\infty}{dx} \delta - \tau_0. \quad (7.30)$$

Відносним недоліком цього рівняння є те, що в ньому міститься товщина пограничного шару  $\delta$ , яка визначається дещо умовно. Тому проведемо перетворення, які дозволять рівняння (7.30) привести до іншого вигляду.

$$\tau_0 = -\frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho u_x^2 dy + u_\infty \frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho u_x dy + \rho u_\infty \frac{du_\infty}{dx} \int_0^\delta dy. \quad (7.31)$$

Зважаючи на те, що

$$\frac{d}{dx} \left( u_\infty \int_0^\delta \rho u_x dy \right) = \frac{du_\infty}{dx} \int_0^\delta \rho u_x dy + u_\infty \frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho u_x dy, \quad (7.32)$$

$$\tau_0 = -\int_0^\delta \rho u_x^2 dy + \frac{d}{dx} \left( u_\infty \int_0^\delta \rho u_x dy \right) - \frac{du_\infty}{dx} \int_0^\delta \rho u_x dy + \frac{du_\infty}{dx} \int_0^\delta \rho u_\infty dy, \quad (7.33)$$

або

$$\tau_0 = \frac{d}{dx} \left[ u_\infty^2 \int_0^\delta \rho \frac{u_x}{u_\infty} \left( 1 - \frac{u_x}{u_\infty} \right) dy \right] + u_\infty \frac{du_\infty}{dx} \int_0^\delta \rho \left( 1 - \frac{u_x}{u_\infty} \right) dy. \quad (7.34)$$

а з урахуванням рівнянь (7.3) і (7.4) дістаємо інтегральне співвідношення Кармана в умовних товщина

$$\tau_0 = \frac{d}{dx} (\rho u_\infty^2 \delta^{**}) + \frac{du_\infty}{dx} (\rho u_\infty \delta^*). \quad (7.35)$$

Для нестисливої рідини

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \frac{d}{dx} (u_\infty^2 \delta^{**}) + \frac{du_\infty}{dx} (u_\infty \delta^*). \quad (7.36)$$

Перевага такої форми запису над рівнянням (7.30) у тому, що замість  $\delta$  використовуються  $\delta^*$  і  $\delta^{**}$ , котрі визначаються більш точно.

На завершення зауважимо, що при виводі формули (7.30) не робилося припущень про режим течії та форму тіла. Тому отримані співвідношення справедливі як для ламінарного, так і для турбулентного пограничних шарів, що утворюються при обтіканні як плоских пластин, так і криволінійних профілів. У випадку турбулентного режиму під  $u_x$  слід розуміти осереднену місцеву швидкість.

#### 7.1.4 Розрахунок ламінарного пограничного шару на пластині

Розглянемо методику застосування інтегрального співвідношення Кармана на прикладі обтікання нескінченно тонкої пластини, яка розташована паралельно вектору швидкості зовнішнього потоку.

Оскільки для даної задачі  $u_\infty$  величина незмінна, то формулу (7.36) можна переписати у такому вигляді:

$$\frac{\tau_0}{\rho u_\infty^2} = \frac{d\delta^{**}}{dx}. \quad (7.37)$$

Для розв'язання рівняння (7.37) необхідно знати закони розподілу дотичних напружень  $\tau_0 = f(y)$  і швидкостей  $u_x = f(y)$ . Очевидно, що для ламінарного пограничного шару справедливий закон в'язкого тертя Ньютона, і тому  $\tau_0 = f(y)$  можна вважати відомим. Профіль швидкості у пограничному шарі 1921 р. К. Пальгаузенем було запропоновано апроксимувати поліномом

$$u_x = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots + a_n y^n. \quad (7.38)$$

Число членів полінома визначається числом достовірних граничних умов, котрі можна використати для визначення коефіцієнтів. У даному випадку скористаємося трьома граничними умовами: при  $y = 0$   $u_x = 0$ , тому  $a_0 = 0$ ; при  $y = \delta$   $u_x = u_\infty$ , а отже,  $a_1 \delta + a_2 \delta^2 = u_\infty$ ; при  $y = \delta$   $\partial u_x / \partial y = 0$ , з чого випливає, що  $0 = a_1 + 2a_2 \delta$ .

Розв'язками системи

$$\left. \begin{aligned} a_1 \delta + a_2 \delta^2 &= u_\infty \\ a_1 + 2a_2 \delta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.39)$$

є  $a_1 = 2 \frac{u_\infty}{\delta}$  і  $a_2 = -\frac{u_\infty}{\delta^2}$ , а поліном (7.38) набуває вигляду

$$u_x = 2 \frac{u_\infty}{\delta} y - \frac{u_\infty}{\delta^2} y^2. \quad (7.40)$$

Знаючи  $u_x = f(y)$ , легко визначити  $\delta^*$  і  $\delta^{**}$



$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left( 1 - \frac{u_x}{u_{\infty}} \right) dy = \frac{1}{3} \delta; \quad (7.41)$$

i

$$\delta^{**} = \int_0^{\delta} \frac{u_x}{u_{\infty}} \left( 1 - \frac{u_x}{u_{\infty}} \right) dy = \frac{2}{15} \delta. \quad (7.42)$$

Напруження на стінці

$$\tau_0 = \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)_{y=0} = 2\mu \frac{u_{\infty}}{\delta}. \quad (7.43)$$

Таким чином, рівняння (7.37) набирає вигляду

$$\frac{2\mu}{\rho u_{\infty} \delta} = \frac{2}{15} \frac{d\delta}{dx}, \quad (7.44)$$

або

$$\delta d\delta = 15 \frac{\nu}{u_{\infty}} dx. \quad (7.45)$$

Звідки

$$\frac{\delta^2}{2} = 15 \frac{\nu}{u_{\infty}} x + C \quad (7.46)$$

i

$$\delta = \sqrt{30 \frac{\nu x}{u_{\infty}} + C}. \quad (7.47)$$

На передній кромці пластини ( $x = 0$ ) товщина пограничного шару  $\delta = 0$ , тому стала  $C = 0$ .

Таким чином,

$$\delta = \sqrt{30 \frac{\nu x}{u_{\infty}}}, \quad (7.48)$$

або

$$\delta = 5,48 \frac{x}{\sqrt{\text{Re}_x}}, \quad (7.49)$$

а з урахуванням рівняння (7.43)

$$\tau_0 = \frac{0,361 \rho u_{\infty}^2}{\sqrt{\text{Re}_x}}. \quad (7.50)$$

При більш ретельному розгляді задачі розподіл швидкостей  $u_x = f(y)$  можна апроксимувати поліномом четвертого степеня. Це значно ускладнює розв'язання і приводить до заміни коефіцієнтів у рівняннях (7.49) і (7.50) на 5,83 і 0,343.

Випадок ламінарного пограничного шару на плоскій пластині, коли  $du_\infty/dx = 0$  і  $dP/dx = 0$ , є найпростішим. Розв'язки для нього можна отримати та шляхом інтегрування рівнянь Прандтля (7.16), як це зробив 1908 р. Блазіус. Він дістав формули

$$\delta = 5 \frac{x}{\sqrt{\text{Re}_x}}, \quad (7.51)$$

і

$$\tau_0 = 0,332 \sqrt{\frac{\mu \rho u_\infty^3}{x}} = \frac{0,332 \rho u_\infty^2}{\sqrt{\text{Re}_x}}. \quad (7.52)$$

Величина коефіцієнта у формулі (7.51) залежить від прийнятої точності визначення границі пограничного шару. Якщо її визначити з точністю не в 1 %, а в 0,5 %, то коефіцієнт 5,0 зміниться на 5,4, а якщо в 0,1 % – то на 6,1.

Як видно, формули Блазіуса від попередніх відрізняються лише значеннями коефіцієнтів і досить добре співпадають з дослідними даними. Співвідношення мають також один спільний недолік: при  $x \rightarrow 0$   $\tau_0 \rightarrow \infty$ , тоді як  $\tau_0$  повинні наближатися до нуля. Це пов'язане з тим, що поблизу передньої кромки пластини пограничний шар лише починає формуватися і порушується одна з основних його властивостей, а саме та, згідно з якою інтенсивність зміни компоненти швидкості  $u_x$  вздовж напрямку течії неспівмірно менша, ніж у поперечному напрямі.

Величину

$$c_f = \frac{2\tau_0}{\rho u_\infty^2}, \quad (7.53)$$

називають *місцевим (локальним) коефіцієнтом опору тертя*. Для ламінарного пограничного шару на плоскій пластині з урахуванням рівняння (7.50)

$$c_{f,l} = \frac{0,722}{\sqrt{\text{Re}_x}}. \quad (7.54)$$

Опір тертя для одної сторони пластини площею  $A = bl$

$$F_{\tau,l} = b \int_0^l \tau_0 dx = b \int_0^l 0,361 \sqrt{\frac{\mu \rho u_\infty^3}{x}} dx = 0,722 b \sqrt{l \mu \rho u_\infty^3}, \quad (7.55)$$

а коефіцієнт повного опору тертя

$$C_l = \frac{F_l}{\rho \frac{u_\infty^2}{2}} = \frac{1,444 \sqrt{l \rho u_\infty^3}}{l \rho u_\infty^2} = \frac{1,444}{\sqrt{Re_l}}. \quad (7.56)$$

При двосторонньому обтіканні пластини дотичні напруження подвоюються, тому в цьому випадку праві частини рівнянь (7.50), (7.54) і (7.56) теж необхідно подвоїти.

Слід також зауважити, що отримані розв'язки справедливі при достатньо великих значеннях чисел Рейнольдса, оскільки і вся теорія пограничного шару прийнятна тільки при великих  $Re_l$ . При малих  $Re_l$ , величина котрих вимірюється десятками або сотнями, можна використовувати формулу Го-Юн-Хуая

$$C_l = \frac{1,328}{\sqrt{Re_l}} + \frac{4,18}{Re_l}. \quad (7.57)$$

### 7.1.5 Розрахунок турбулентного пограничного шару на пластині

Для випадку, коли у пограничному шарі встановлюється розвинутий турбулентний режим, при застосуванні інтегрального співвідношення Кармана потрібні принципово відмінні вихідні співвідношення. Це насамперед пов'язане з різкою зміною епюри швидкостей. Її апроксимують напівемпіричними або чисто емпіричними залежностями. Найчастіше використовується степеневопоказникова формула

$$\frac{u_x}{u_\infty} = \left( \frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{7}}. \quad (7.58)$$

Це дає можливість легко визначити товщину втрати імпульсу

$$\delta^{**} = \int_0^\delta \left( \frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{7}} \left[ 1 - \left( \frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{7}} \right] dy = \frac{7}{72} \delta. \quad (7.59)$$

Для гідравлічно гладкої пластини дотичні напруження також оцінюють за дослідною залежністю

$$\frac{\tau_0}{\rho u_\infty^2} = 0,0225 \left( \frac{v}{u_\infty \delta} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (7.60)$$

Таким чином, рівняння (7.37) для турбулентного пограничного шару набирає вигляду

$$0,0225 \left( \frac{v}{u_\infty \delta} \right)^{\frac{1}{4}} = \frac{7}{72} \frac{d\delta}{dx}. \quad (7.61)$$

Розділивши змінні та виконавши інтегрування, дістаємо

$$\delta = 0,37x \left( \frac{u_\infty x}{\nu} \right)^{\frac{1}{5}} = \frac{0,37x}{\sqrt[5]{\text{Re}_x}} \quad (7.62)$$

(стала інтегрування дорівнює нулю, оскільки при  $x = 0$   $\delta = 0$ ).

З рівнянь (7.60) і (7.61) випливає, що коефіцієнт місцевого опору тертя для турбулентного пограничного шару

$$c_m = \frac{14}{72} \frac{d\delta}{dx}, \quad (7.63)$$

або з урахуванням рівняння (7.62)

$$c_m = \frac{14}{72} \frac{d}{dx} \left( 0,37x \left( \frac{u_\infty x}{\nu} \right)^{-\frac{1}{5}} \right) = \frac{0,0576}{\text{Re}_x^{\frac{1}{5}}}. \quad (7.64)$$

Сила опору тертя на одній стороні пластини площею  $A = bl$  (з урахуванням рівнянь (7.60) і (7.62))

$$\begin{aligned} F_m &= b \int_0^l \tau_0 dx = b \int_0^l 0,0225 \rho u_\infty^2 \left( \frac{\nu \left( \frac{u_\infty x}{\nu} \right)^{\frac{1}{5}}}{u_\infty 0,37x} \right)^2 dx = 0,02884 \rho u_\infty^2 b \left( \frac{\nu}{u_\infty} \right)^{\frac{1}{5}} \int_0^l x^{-\frac{1}{5}} dx = \\ &= 0,0361 \rho u_\infty^2 b \left( \frac{\nu}{u_\infty} \right)^{\frac{1}{5}} l^{\frac{4}{5}} = 0,0361 \rho u_\infty^2 b l \left( \frac{u_\infty l}{\nu} \right)^{-\frac{1}{5}}. \end{aligned} \quad (7.65)$$

Тоді коефіцієнт повного опору тертя

$$C_m = \frac{F_m}{A \rho \frac{u_\infty^2}{2}} = \frac{0,0722}{\text{Re}_l^{\frac{1}{5}}} \quad (7.66)$$

(досвід вказує на те, що коефіцієнт 0,074 краще відповідає експериментальним даним).

Формула (7.66) добре відповідає дослідним даним при  $\text{Re}_l = 5 \cdot 10^5 \dots 10^7$ . При більших значеннях числа Рейнольдса доцільно використовувати іншу залежність

$$C_m = \frac{0,0307}{\text{Re}_l^{\frac{1}{7}}}. \quad (7.67)$$

Порівнявши рівняння (7.56) і (7.66), легко помітити, що сили опору тертя в турбулентному пограничному шарі при інших рівних умовах завжди більші, ніж в

ламінарному (при  $Re_l = 5 \cdot 10^5$   $C_m \approx 2,6 C_l$ , а при  $Re_l = 10^6$   $C_m \approx 3,2 C_l$ ). Ця закономірність пояснюється характером тертя при ламінарному і турбулентному режимах течії. Одже, для зменшення опору тертя на твердій поверхні доцільно збільшувати ділянку ламінарного пограничного шару за рахунок турбулентного.

Зіставивши формули (7.49) з (7.62), легко також помітити, що і товщина турбулентного пограничного шару вздовж потоку збільшується інтенсивніше, ніж в ламінарному (при  $Re_x = 5 \cdot 10^5$   $\delta_m \approx 3,5 \delta_l$ , а при  $Re_x = 10^6$   $\delta_m \approx 4,3 \delta_l$ ). Більш інтенсивно в турбулентному шарі збільшуються і умовні товщини.

Отримані вище співвідношення справедливі для турбулентного пограничного шару тільки на гідравлічно гладкій пластині. На практиці поверхні, що обтікаються, далеко не завжди є гідравлічно гладкими. Як і в трубах, розрізняють три зони гідравлічного тертя в турбулентному пограничному шарі, а саме: зона гідравлічно гладкої поверхні (в ній коефіцієнт опору не залежить від висоти виступів шорсткості  $k$ , а визначається числом Рейнольдса), перехідна зона (в ній на опір впливають обидва фактори) і зона гідравлічно шорсткої поверхні, або квадратична зона опору (в ній величина опору тертя визначається тільки висотою виступів шорсткості і не залежить від числа Рейнольдса).

На підставі дослідів отримана залежність для дотичних напружень на гідравлічно шорстких поверхнях

$$\frac{\tau_0}{\rho u_\infty^2} = 0,0031 \left( \frac{\delta^{**}}{k} \right)^{-\frac{1}{6}}. \quad (7.68)$$

Тоді з урахуванням рівняння (7.37)

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} = 0,0031 \left( \frac{\delta^{**}}{k} \right)^{-\frac{1}{6}}. \quad (7.69)$$

Розділивши змінні та проінтегрувавши, дістаємо

$$\delta^{**} = 0,0081x \left( \frac{x}{k} \right)^{-\frac{1}{7}} \quad (7.70)$$

(при  $x = 0$   $\delta^{**} = 0$ , тому стала інтегрування дорівнює нулю).

Коефіцієнт місцевого опору тертя шорсткої пластини

$$c_{m.u} = \frac{\tau_0}{\frac{\rho u_\infty^2}{2}} = 0,0062 \left( \frac{\delta^{**}}{k} \right)^{-\frac{1}{6}} = 0,0062 \left( \frac{0,0081x \left( \frac{x}{k} \right)^{-\frac{1}{7}}}{k} \right)^{-\frac{1}{6}} = \quad (7.71)$$

$$= 0,0139 \left( \frac{x}{k} \left( \frac{x}{k} \right)^{-\frac{1}{7}} \right)^{-\frac{1}{6}} = 0,0139 \left( \frac{x}{k} \right)^{-\frac{1}{7}},$$

а коефіцієнт повного опору

$$C_{m.u} = \frac{b \int_0^l \tau_0 dx}{A \frac{\rho u_\infty^2}{2}} = \frac{0,0139 b \int_0^l \left( \frac{x}{k} \right)^{-\frac{1}{7}} dx}{A} = \frac{0,0139 \frac{7}{6} l^{\frac{6}{7}}}{lk^{-\frac{1}{7}}} = 0,0162 \left( \frac{l}{k} \right)^{-\frac{1}{7}}. \quad (7.72)$$

На підставі більш строгих і тому більш складних теоретичних обґрунтувань (використовувався логарифмічний закон розподілу швидкостей) Г. Шліхтінгу<sup>44</sup> вдалося дістати формулу для коефіцієнта повного опору тертя шорсткої пластини такого вигляду:

$$C_{m.u} = \left( 1,89 + 1,62 \lg \frac{l}{k} \right)^{-2,5}. \quad (7.73)$$

Формули (7.72) (7.73) у цілому непогано відповідають одна одній.

Ґрунтовний аналіз турбулентного пограничного шару на пластині дозволили Прандтлю і Шліхтінгу розробити *номограми* приблизного розрахунку коефіцієнтів  $c_m$  і  $C_m$  (рисунок 7.6) для всіх трьох зон гідравлічного опору. Номограми побудовані з використанням логарифмічного закону розподілу швидкостей і без врахування ділянки ламінарного пограничного шару. Вони, зокрема, дозволяють при різних умовах визначати величину виступів шорсткості, а отже, і необхідну ступінь обробки поверхонь, при якій зберігається режим гладкостінного обтікання, тобто шорсткість не впливає на опір.

<sup>44</sup> Шліхтінг Герман (1907–1982) – німецький вчений в області аеродинаміки, професор Брауншвейзького університету, працював над створенням аеродинамічного інституту в аеропорті Брауншвейг-Ваггум. Автор численних наукових робіт з динаміки в'язкої рідини, аеродинаміки літака, лопатевих апаратів, у т. ч. монографії «Теорія пограничного шару» (1951), яка стала класичною у цій галузі гідромеханіки та витримала чимало перевидань.

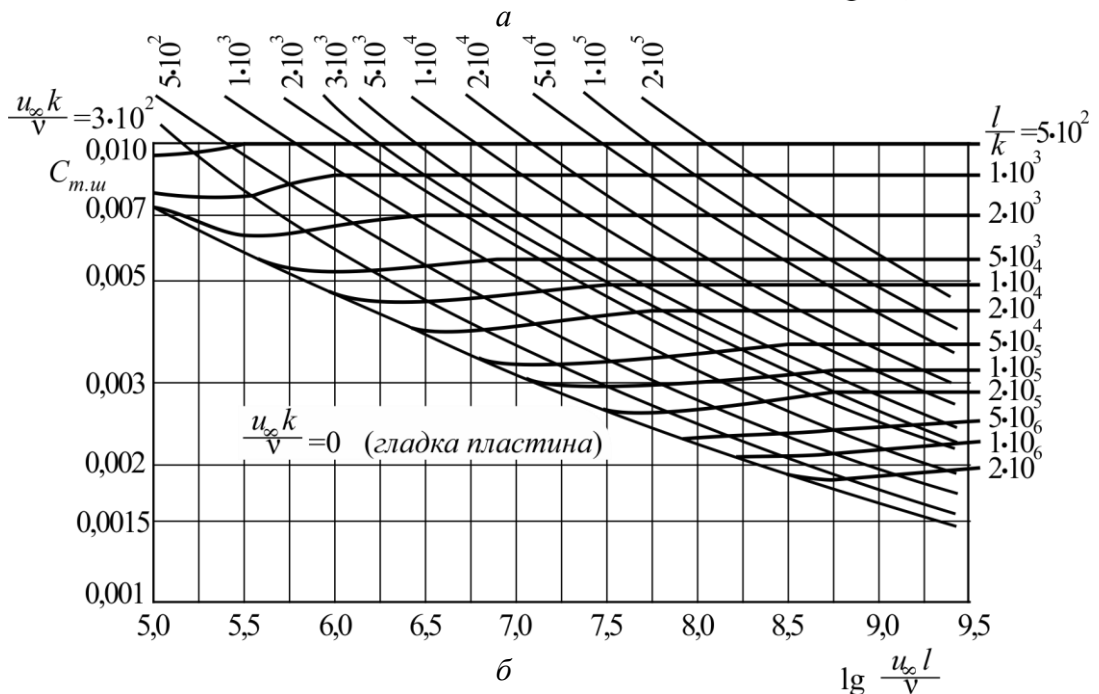
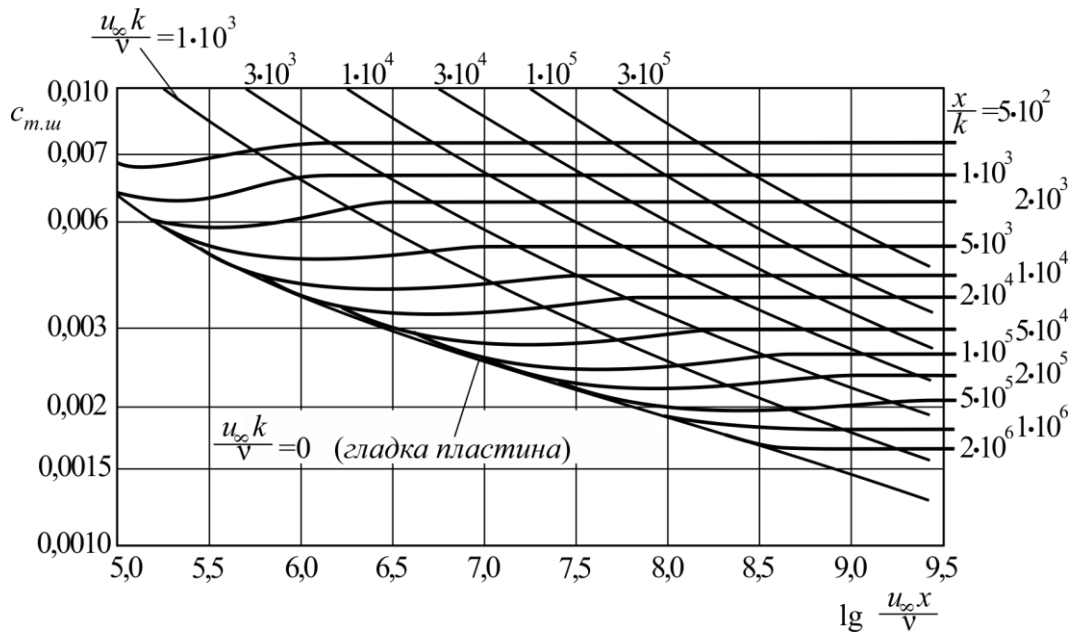


Рисунок 7.6 – Номограми Прандтля-Шліхтінга для для коефіцієнта місцевого опору плоскої пластини (а) і коефіцієнта повного опору плоскої пластини (б)

Слід зауважити, що номограми справедливі лише для пластин з рівнозернистою і однаково розподіленою по поверхні шорсткістю. Вони не поширюються на поверхні зі зварними швами, клепками тощо.

Таким чином, у цьому і попередньому підрозділах розглянута найбільш проста задача теорії пограничного шару – задача приблизного (нестрогого) розрахунку турбулентного і ламінарного пограничних шарів, що виникають на нескінченно тонкій пластині при умові незмінності тиску і швидкості у зовнішньому потоці.

### 7.1.6 Відрив пограничного шару

На відміну від обтікання плоскої пластини при обтіканні тіл криволінійної форми тиск у зовнішньому потоці не лишається сталим, а змінюється залежно від швидкості. На ділянці  $AB$  (рисунок 7.7) швидкість рідких частинок, що знаходяться у пограничному шарі, зростає ( $\partial u_x / \partial x > 0$ ), а тиск зменшується ( $\partial P / \partial x < 0$ ). Цей від'ємний градієнт тиску, незважаючи на дію сил в'язкого тертя, сприяє прискореному руху рідини.

При переході потоку через точку  $B$  градієнт тиску змінює знак, а отже, рідина для руху вперед повинна долати не тільки силу опору тертя, а й силу тиску. Якби рідина була ідеальною, то її швидкість поблизу тіла не зменшувалася б і кінетичної енергії було б достатньо для подолання сил тиску. Швидкість реальної рідини біля твердої поверхні мала, і тому кінетичної енергії недостатньо для подолання сукупної дії сил в'язкого тертя і тиску. Тому в деякій точці  $O$  відбувається гальмування рідини. Частинки, що рухаються за більш віддаленими від тіла траєкторіями, відхиляються у бік зовнішнього потоку і товщина пограничного шару різко зростає. Частина рідини за точкою  $O$  починає рухатися у зворотному напрямі. Це явище називають *відривом пограничного шару*, а точку  $O$  – *точкою відриву*.

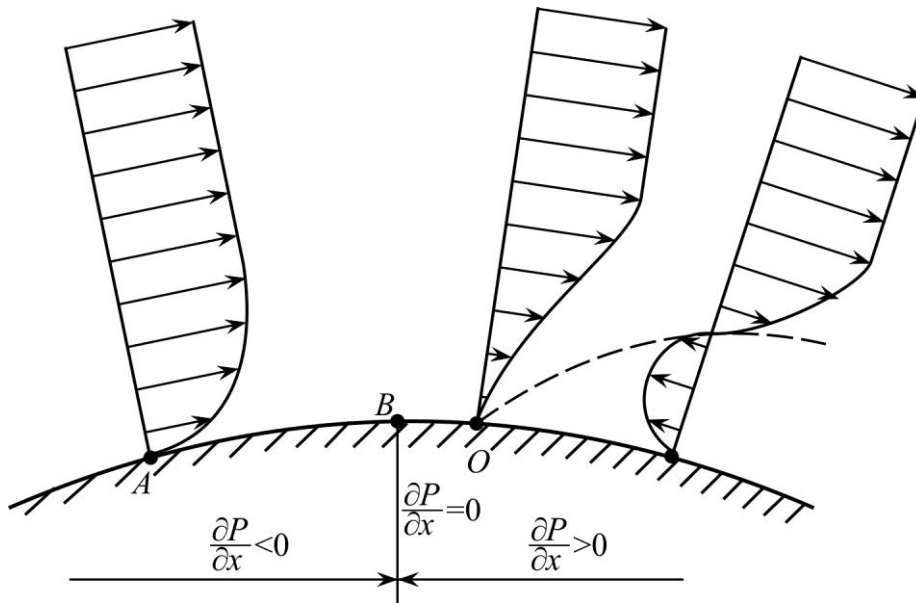


Рисунок 7.7 – Відрив пограничного шару

Оскільки в точці відриву відбувається зміна напрямку течії рідини, що знаходиться безпосередньо біля поверхні, то

$$\left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)_{y=0} = 0, \quad (7.74)$$

а отже, у точці відриву дотичні напруження  $\tau_0 = 0$ . Ця умова може бути використана при визначенні положення точки відриву. Так, застосувавши для



опису ламінарного пограничного шару на криволінійній поверхні метод Кочина-Лойцянского, можна дістати, що в точці відриву

$$\frac{\delta^{*2}}{\nu} \frac{du_\infty}{dx} = -0,0681. \quad (7.75)$$

Тому якщо відомі  $u_\infty = f(x)$  і  $\delta^{*2} = f(x)$ , то рівняння (7.75) можна розв'язати відносно поздовжньої координати. Однак при цьому слід враховувати такі обставини. По-перше, в області відриву внаслідок гальмування якісно змінюються характеристики (властивості), які приписувалися пограничному шару при його визначенні і виводі рівнянь Прандтля – поперечні розміри пограничного шару стають великими, складовою  $\partial^2 u_x / \partial x^2$  по відношенню до  $\partial^2 u_x / \partial y^2$  у формулі (7.5) нехтувати не можна. Отже, на зону відриву рівняння (7.16) поширюватися не може, а тому тиск в будь-якому поперечному перерізі пограничного шару також не можна вважати сталою величиною. По-друге, внаслідок потовщення пограничного шару необхідно враховувати його вплив на зовнішній потік (так званий зворотний вплив), що ще більше ускладнює задачу. Тому і до цього часу розрахунок пограничного шару поблизу точки відриву є слабким місцем всіх відомих теорій, а розрахунки ведуть, як правило, на підставі дослідних даних.

Відрив пограничного шару, як засвідчує ґрунтовний теоретичний аналіз і дані дослідів, можливий тільки за умови сукупної дії позитивного градієнту тиску і сил в'язкого тертя. Якщо один з цих факторів відсутній, то відрив не відбувається (наприклад безградієнтне обтікання в'язкою рідиною плоскої пластини).

За точкою відриву виникає відривна течія, характерна сильною нестійкістю великомасштабних вихорів. Окремі вихори відриваються від поверхні та зносяться потоком, а на їх місці виникають нові тощо. Утворення, взаємодія і переміщення вихорів за тілом становлять відмінну від пограничного шару на твердій поверхні та зовнішнього потоку область течії, яка називається *гідродинамічним (аеродинамічним) слідом*. Його протяжність залежить від форми поверхні, що обтікається, і числа Рейнольдса.

## 7.2 ОПР ТІЛ, ЩО ОБТІКАЮТЬСЯ В'ЯЗКОЮ РІДИНОЮ

### 7.2.1 Сили, котрі діють на тіло, що обтікається в'язкою рідиною

При обтіканні потоком в'язкої рідини тверде тіло сприймає сили, які розподілені по його поверхні. Ці поверхневі аеродинамічні сили у загальному випадку можуть бути зведені до головного вектора

$$\vec{F} = \iint_A P \vec{n} dA + \iint_A \vec{\tau}_0 dA = \vec{F}_P + \vec{F}_\tau, \quad (7.76)$$

де  $\vec{F}_P$  – рівнодіюча сил тиску, котра обумовлена нерівномірністю розподілу тиску по поверхні тіла;

$\vec{F}_\tau$  – рівнодіюча сил в'язкого тертя, яка визначається розподілом дотичних напружень на поверхні тіла.

Враховуючи, що

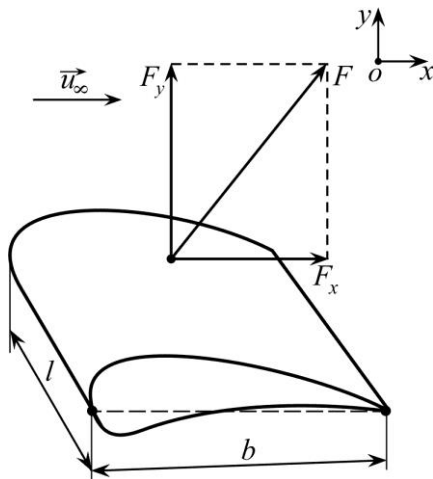
$$\tau_0 = c_f \frac{\rho u_\infty^2}{2}, \quad (7.77)$$

силу тертя можна подати як

$$\vec{F}_\tau = 0,5 \iint_A \rho u_\infty^2 c_f dA, \quad (7.78)$$

(залежно від режиму течії в пограничному шарі для пластини локальний коефіцієнт опору  $c_f$  можна розрахувати за формулою (7.54) або (7.64).

Якщо, діючи в межах плоскої моделі, при визначенні  $\vec{F}$  вісь  $ox$  спрямувати паралельно вектору  $\vec{u}_\infty$ , а вісь  $oy$  перпендикулярно до нього і вертикально вгору (рисунок 7.8), то  $\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$ , де



$$F_x = \iint_A P \cos(\vec{n}; x) dA + \iint_A \tau_0 \cos(\tau_0; x) dA \quad (7.79)$$

є силою лобового опору, а

$$F_y = \iint_A P \cos(\vec{n}; y) dA + \iint_A \tau_0 \cos(\tau_0; y) dA \quad (7.80)$$

Рисунок 7.8 – Підйомна сила та сила лобового опору на криловому профілі підйомною силою.

Першу складову в рівнянні (7.79) називають *опором тиску*; другу – *опором тертя*.

З формули (7.80) випливає, що підйомна сила залежить не тільки від розподілу тиску, а й від дотичних напружень. Останні частіше за все відіграють незначну роль, і тому при визначенні  $F_y$  ними нехтують. Якщо б течія була відсутня (рідина знаходиться у стані спокою), то за наявності сили тяжіння дія рідини на тіло звалася б до архімедової підйомної сили.

Тіла, що обтікаються рідиною, розділяють на *добре* і *погано обтічні*. До перших належать ті, в яких пограничний шар прилягає до поверхні в усіх її точках, тобто відриву не відбувається. Це *профілі* типу аеродинамічного крила або турбінної лопатки, тонка пластинка, котра розташована паралельно вектору швидкості. Їх обтікання характеризується плавністю і стабільністю, а силу лобового опору визначає опір тертя.

Тіла з тупими обводами типу сфери, циліндра або корпусу автомобіля є поганообтічними. Їх обтікання супроводжується відривом пограничного шару, а в силі лобового опору головну роль відіграє опір тиску.

У прикладних розрахунках при визначенні  $F_x$  і  $F_y$ , як правило, користуються не формулами (7.79) і (7.80), а так званими *аеродинамічними формулами*, побудова структури котрих може здійснитися, наприклад, методом аналізу розмірностей (підрозділ 5.4):

$$F_x = C_x A \frac{\rho u_\infty^2}{2}, \quad (7.81)$$

$$F_y = C_y A \frac{\rho u_\infty^2}{2}, \quad (7.82)$$

де  $C_x$  і  $C_y$  – коефіцієнти лобового опору і підйомної сили, які визначаються експериментально;

$A$  – характерна площа.

*Характерна площа  $A$*  визначається залежно від типу тіла. Для погано обтічних тіл – це *площа мідельового перерізу*, тобто максимальна площа поперечного перерізу тіла, нормальна до вектора швидкості набігаючого потоку  $\vec{u}_\infty$  (наприклад, для сфери – це площа кола, розрахована за діаметром). Для добре обтічних тіл – це площа в плані, що дорівнює добутку розмаху  $l$  на довжину хорди профіля  $b$  (хордою називається лінія, що єднає дві найбільш віддалені точками профілю, тобто передню і задню кромки).

Класифікація тіл, що обтікаються, є дещо умовною. Так, наприклад, аеродинамічне крило (за визначенням, добре обтічне тіло) при великих кутах атаки фактично є погано обтічним, оскільки в таких умовах відбувається відрив пограничного шару і опір тиску значно зростає (кутом атаки називається кут між хордою і напрямом руху потоку). Те ж саме можна сказати і про тонку пластину, якщо її розташувати під великим кутом до вектора швидкості набігаючого потоку.

Необхідно також зауважити, що опір не вичерпується двома складовими (тиску і тертя). Так, при обтіканні, наприклад, аеродинамічного крила тиск по поверхні розподіляється нерівномірно. Внаслідок цього відбувається перетікання рідини біля торців із зони з більшим тиском (під крилом) у зону з меншим тиском (над крилом). Виникає так званий *красвий ефект*, котрий полягає у виникненні особливої системи вихорів, що збігають з поверхні та утворюють таким чином додатковий опір. Його називають *індуктивним опором*. Оскільки підйомна сила є наслідком нерівномірності розподілу тиску по поверхні профілю, то, очевидно, що індуктивна складова лобового опору існує тільки при  $F_y \neq 0$ .

Крім того, при обтіканні краплинною рідиною частково занурених тіл, наприклад суден, утворюються поверхневі хвилі, енергія котрих пропорціональна квадрату амплітуди. При обтіканні тіл надзвуковим газовим потоком утворюються ударні хвилі (докладно їх фізична природа буде розглянута далі). Ці фактори призводять до виникнення так званого *хвильового опору*. У деяких випадках

частини індуктивної та хвильової складових у загальному опорі можуть бути значними.

### 7.2.2 Обтікання кругового циліндра ідеальною рідиною.

#### Парадокс Ейлера-Даламбера. Формула Жуковського

Оскільки для погано обтічних тіл, котрим є циліндр, визначаючим є опір тиску, то було б природним спробувати в межах моделі ідеальної рідини отримати розподіл тиску по поверхні та завдяки цьому розрахувати перші складові в формулах (7.79) і (7.80).

Одним із шляхів визначення закону розподілу тиску по поверхні циліндра, що обтікається ідеальною рідиною, є метод суперпозиції найпростіших потенціальних течій (пункт 3.6.4). Розглянемо накладення плоскопаралельного потенціального потоку і диполя. Згідно з *принципом суперпозиції потенціал швидкості та функція течії* нового потоку

$$\varphi = u_{\infty}x + \frac{M}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}; \quad (7.83)$$

$$\psi = u_{\infty}y - \frac{M}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}. \quad (7.84)$$

З останнього випливає, що сімейство *ліній течії* описується виразом

$$u_{\infty}y - \frac{M}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} = u_{\infty}y \left( 1 - \frac{M}{2\pi u_{\infty}} \frac{1}{x^2 + y^2} \right) = C, \quad (7.85)$$

а рівняння нульової лінії течії

$$y \left( 1 - \frac{M}{2\pi u_{\infty}} \frac{1}{x^2 + y^2} \right) = 0. \quad (7.86)$$

Воно справедливе при  $y = 0$  і  $\left( 1 - \frac{M}{2\pi u_{\infty}} \frac{1}{x^2 + y^2} \right) = 0$ .

Перша умова показує, що нульова лінія течії збігається з віссю  $ox$ , а друга – коло з центром у початку координат і радіусом

$$r_0 = \sqrt{\frac{M}{2\pi u_{\infty}}}. \quad (7.87)$$

Таким чином, нульова лінія течії являє собою вісь  $ox$  на деякій відстані від циліндра; в точці  $K_1$  розділяється на два напівкола, а в точці  $K_2$  знову зливається і збігається з віссю  $ox$  (рисунок 7.9). Якщо взяти до уваги, що в ідеальній рідині умова, котра визначає будь-яку лінію течії ( $u_n = 0$ ), збігається з граничною умовою, то можна коло радіусом  $r_0$  (нульову лінію течії) замінити твердою поверхнею. Картина течії при цьому не змінюється. Отже, не враховуючи течію

всередині кола, отримаємо його обтікання (точніше – обтікання кругового циліндра) потенціальним потоком зі швидкістю  $u_\infty$ .

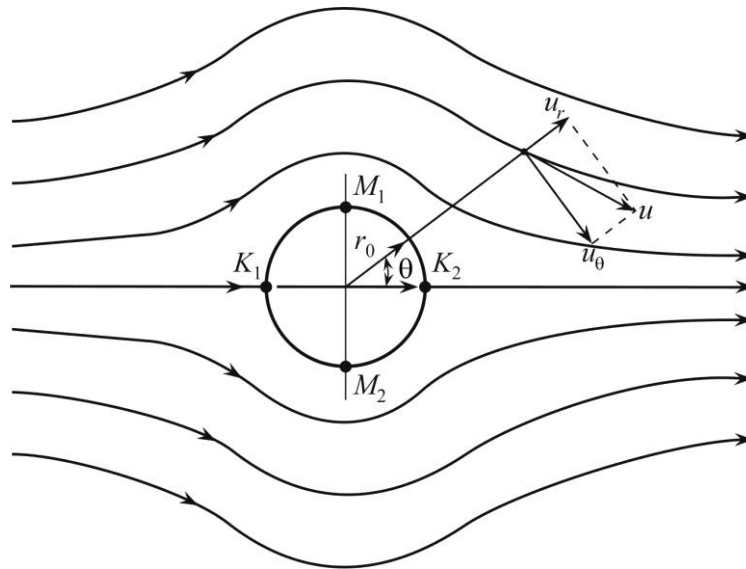


Рисунок 7.9 – Обтікання кругового циліндра потенціальним потоком  
Перейдемо до полярної системи координат, в якій  $x = r \cos\theta$ ,  $y = r \sin\theta$ .  
Враховуючи, що  $M = 2\pi u_\infty r_0^2$ ,

$$\varphi = u_\infty r \cos \theta \left( 1 + \frac{r_0^2}{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} \right) = u_\infty r \cos \theta \left( 1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right), \quad (7.88)$$

$$\psi = u_\infty r \sin \theta \left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} \right) = u_\infty r \sin \theta \left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right). \quad (7.89)$$

Складові швидкості

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left[ u_\infty r \cos \theta \left( 1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \right] = u_\infty \cos \theta \left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right), \quad (7.90)$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ u_\infty r \cos \theta \left( 1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \right] = -u_\infty \sin \theta \left( 1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right). \quad (7.91)$$

На поверхні циліндра ( $r = r_0$ )  $u_r = 0$  і

$$u_\theta = -2u_\infty \sin \theta. \quad (7.92)$$

Останній вираз є законом розподілу швидкості ідеальної рідини на поверхні циліндра. Знак мінус означає, що напрям руху потоку і відліку кута  $\theta$  протилежні.

З рівняння (7.92) випливає, що у точках  $K_1$  ( $\theta = \pi$ ) і  $K_2$  ( $\theta = 0$ ), які називаються передньою і задньою *критичними точками*,  $u_\theta = 0$ , а в точках  $M_1$  і  $M_2$  ( $\theta = \pm \pi/2$ ) швидкість досягає максимального значення  $u_\theta = 2u_\infty$ .

Якщо скористатися рівнянням Бернуллі, то від розподілу швидкостей можна перейти до розподілу тиску на поверхні. Нехтуючи масовими силами, запишемо рівняння Бернуллі у формі тиску для точки, що достатньо віддалена від циліндра і для довільної точки циліндра

$$P_\infty + \frac{\rho u_\infty^2}{2} = P + \frac{\rho u_\theta^2}{2}, \quad (7.93)$$

або

$$\frac{2(P - P_\infty)}{\rho u_\infty^2} = 1 - \frac{u_\theta^2}{u_\infty^2} = 1 - 4 \sin^2 \theta. \quad (7.94)$$

Дріб у лівій частині рівняння (7.94) позначають  $\bar{P}$  і називають *коефіцієнтом тиску*. Це рівняння дозволяє представляти розподіл тиску на поверхні циліндра у безрозмірному вигляді.

Залежність представляють або у вигляді *координатної діаграми* (рисунок 7.10) (по осі абсцис відкладені координатні кути  $\beta = 180^\circ - \theta$ , що відраховуються від точки  $K_1$  за годинниковою стрілкою), або *полярної діаграми* (рисунок 7.11) ( $\bar{P}$  відкладають від поверхні циліндра по радіусу всередину, якщо  $\bar{P} > 0$ , і зовні, якщо  $\bar{P} < 0$ ). З графіків можна легко помітити, що теоретична і дослідна криві задовільно збігаються у лобовій частині циліндра і суттєво відрізняються в його тильній частині. Це пов'язане з тим, що теоретична конфігурація ліній течії симетрична відносно координатних осей, у той час як при обтіканні циліндра в'язкою рідиною відбувається відрив пограничного шару і зона за його тильною стороною заповнена вихорами, що відриваються від поверхні. Це приводить до зниження тиску ( $\bar{P} < 0$ ).

Елементарна сила тиску (рисунок 7.12)

$$d\vec{F} = -P\vec{n}dA = -P\vec{n}r_0 l d\theta, \quad (7.95)$$

де  $l$  – довжина твірної циліндра.

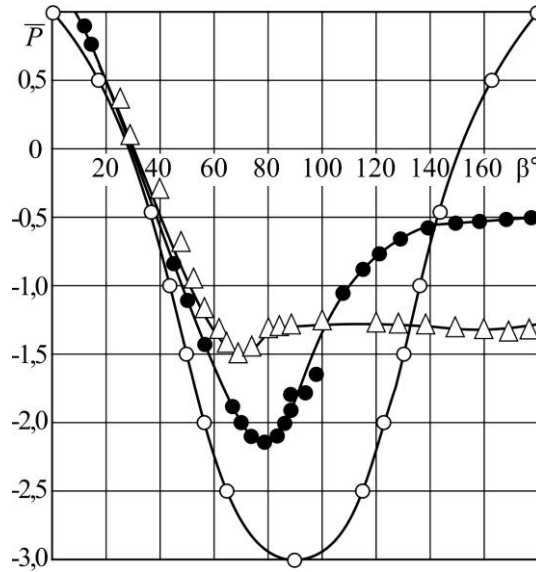


Рисунок 7.10 – Координатна діаграма: о – теорія;

• – дослід  $Re = \frac{u_\infty d_0}{\nu} = 2,12 \cdot 10^5$ ;  $\Delta$  – дослід  $Re = 1,06 \cdot 10^5$

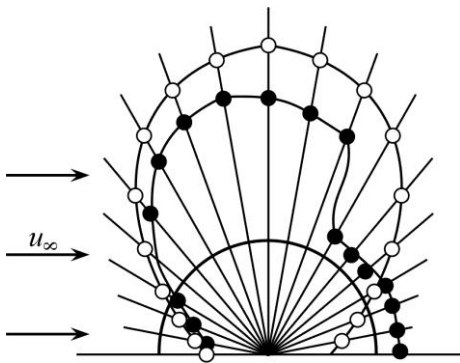


Рисунок 7.11 – Полярна діаграма:  
о – теорія; • – дослідні точки

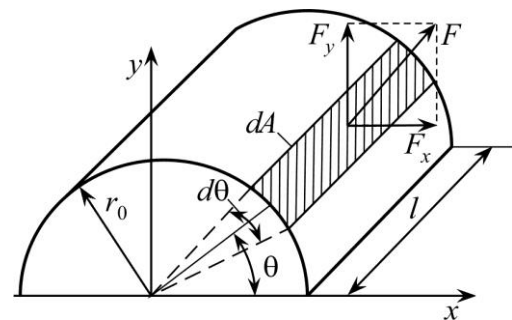


Рисунок 7.12 – Проекції сили тиску на круговому циліндрі

$$F_x = -lr_0 \int_0^\pi P \cos \theta d\theta, \quad (1.96)$$

$$F_y = -lr_0 \int_0^{2\pi} P \sin \theta d\theta. \quad (7.97)$$

Розрахувавши інтеграли, можна пересвідчитися, що  $F_x = F_y = 0$ . До цього результату можна також прийти і без математичних викладок, виходячи із симетричності розподілу тиску по поверхні відносно координатних осей.

Таким чином, при обтіканні круглого циліндра ідеальною рідиною рівнодіюча сил тиску дорівнює нулю. Цей дещо дивний результат вперше був отриманий Даламбером, а декількома роками раніше до аналогічного розв'язку прийшов і Ейлер при визначенні сили опору сфери. Тому цей результат отримав назву *парадокса Ейлера-Даламбера*. У зв'язку з цим пізніше Даламбер писав, що

це «єдиний парадокс, котрий я залишаю для розв'язання геометрам наступних часів».

Парадоксальність отриманого результату виявляється насамперед при зіставленні його з дослідними даними, котрі беззаперечно свідчать, що при обтіканні твердих тіл (у т. ч. і циліндра) реальною рідиною сили діяння існують. Однак, враховуючи, що розглядалась ідеальна рідина, тобто не бралась до уваги в'язкість, отриманий результат є цілком логічним. Виключивши з розгляду цю властивість, котра є причиною різкого розходження теоретичної та дослідних залежностей  $\bar{P}=f(\theta)$ , свідомо пішли на спрощення, яке виявилось занадто грубим і привело до неправдоподібних результатів. Крім того, сили в'язкого тертя проявляються і безпосередньо у вигляді дотичних напружень на поверхні обтічного тіла (другі складові у правих частинах рівнянь (7.79) і (7.80)).

У зв'язку з наведеними вище міркуваннями цілком обґрунтовано була б спроба, залишаючись в межах теорії ідеальної рідини, дещо ускладнити задачу з метою отримання розподілу тиску, яке давало б ненульове значення рівнодіючої сили. Для цього накладемо на отриману вище течію плоский вихор з центром у початку координат і обертанням за годинниковою стрілкою (при такому напрямі знак у формулі (3.117) змінюється на від'ємний). У результаті такого складання знову отримаємо потік, який обтікає круглий циліндр. Дійсно, оскільки лінії плоского потенціального вихору – кола, то серед них знайдеться таке, яке збігається з поверхнею циліндра. Очевидно, що усі інші лінії течії в результаті складання змінять свою конфігурацію. Така течія називається *циркуляційним обтіканням циліндра*. Для неї

$$\varphi = u_{\infty} r \cos \theta \left( 1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta; \quad (7.98)$$

$$\psi = u_{\infty} r \sin \theta \left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r. \quad (7.99)$$

Тоді

$$u_r = \frac{\partial}{\partial r} \left[ u_{\infty} r \cos \theta \left( 1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \right] = u_{\infty} \cos \theta \left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right); \quad (7.100)$$

$$u_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ u_{\infty} r \cos \theta \left( 1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \right] = -u_{\infty} \sin \theta \left( 1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi r}, \quad (7.101)$$

а на поверхні циліндра  $u_r = 0$  і

$$u_{\theta} = -2u_{\infty} \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi r_0}. \quad (1.102)$$



Визначимо положення *критичних точок*. З умови  $u_\theta = 0$  випливає, що

$$\sin \theta = -\frac{\Gamma}{4u_\infty \pi r_0}, \quad (7.103)$$

а це можливо у трьох випадках значення *циркуляції швидкості*.

1.  $\Gamma < 4u_\infty \pi r_0$ ; тоді на поверхні розташовані дві критичні точки в третій і четвертій чвертях (рисунок 7.13,а).

2.  $\Gamma = 4u_\infty \pi r_0$ ; тоді  $\sin \theta_{кр} = -1$  або  $\theta_{кр} = 270^\circ$ . Отже, на поверхні циліндра одна критична точка (рисунок 7.13,б).

3.  $\Gamma > 4u_\infty \pi r_0$ . Оскільки  $\sin \theta_{кр}$  не може бути більшим від одиниці, то на поверхні циліндра критичних точок нема. Більш докладний розгляд цього випадку показує, що точка з нульовою швидкістю розташована всередині потоку на петлеподібній лінії течії, яка обмежує замкнену область поблизу циліндра з циркуляційною течією (рисунок 7.13,в).

З урахуванням формули (7.102) можна визначити вираз для коефіцієнта тиску

$$\bar{P} = 1 - \frac{u_\theta^2}{u_\infty^2} = 1 - \frac{\left(-2u_\infty \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi r_0}\right)^2}{u_\infty^2} = 1 - \left(2\sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_0 u_\infty}\right)^2. \quad (7.104)$$

На рисунку 7.14 показані криві залежності  $\bar{P} = f(\theta)$ . Вони свідчать про те, що відносно осі  $ou$  тиск розподілений симетрично, а отже, як і у попередньому випадку  $F_x = 0$ . Однак ці епюри несиметричні відносно осі  $ox$ , а тому  $F_y$  відмінна від нуля. Її можна визначити з рівняння (7.97). При цьому згідно з рівнянням (7.93) тиск

$$\begin{aligned} P &= P_\infty + \frac{\rho u_\infty^2}{2} - \frac{\rho u_\theta^2}{2} = P_\infty + \frac{\rho u_\infty^2}{2} \left(1 - \frac{u_\theta^2}{u_\infty^2}\right) = \\ &= P_\infty + \frac{\rho u_\infty^2}{2} \bar{P} = P_\infty + \frac{\rho u_\infty^2}{2} \left[1 - \left(2\sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_0 u_\infty}\right)^2\right]. \end{aligned} \quad (7.105)$$

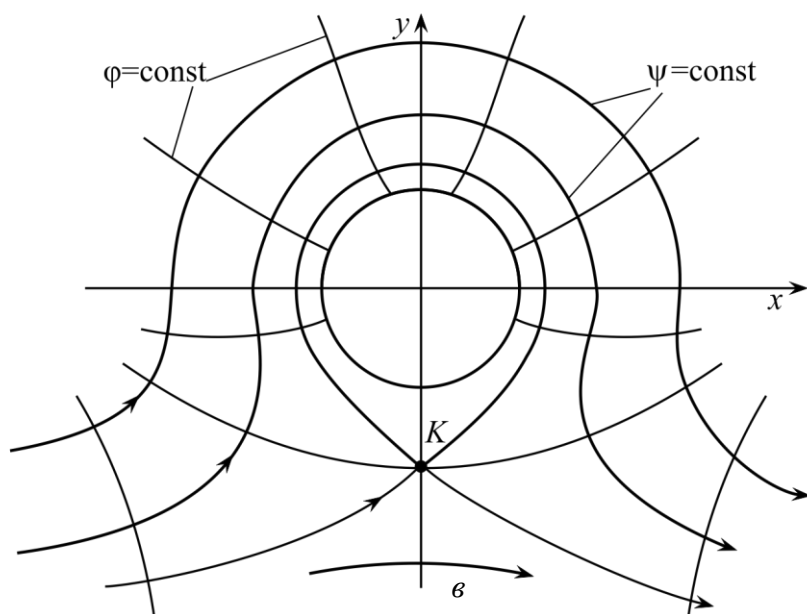
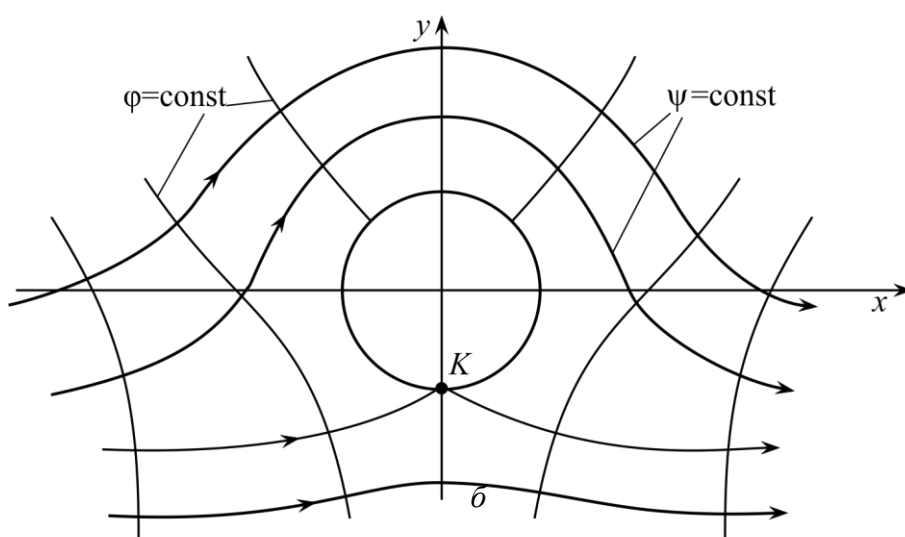
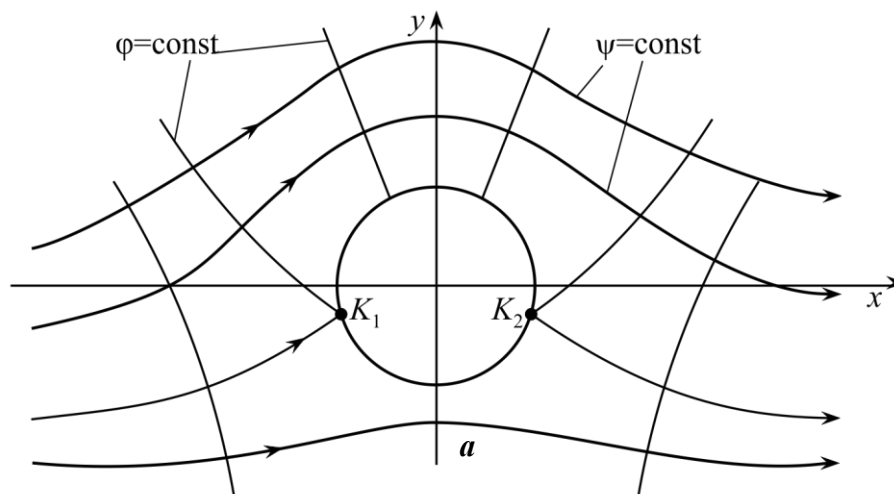


Рисунок 7.13 – Циркуляційне обтікання круглого циліндра:  
 $a - \Gamma < 4u_{\infty}\pi r_0$ ;  $b - \Gamma = 4u_{\infty}\pi r_0$ ;  $v - \Gamma > 4u_{\infty}\pi r_0$

Відтак,

$$\begin{aligned}
 F_y &= -lr_0 \int_0^{2\pi} \left\{ P_\infty + \frac{\rho u_\infty^2}{2} - \frac{\rho u_\infty^2}{2} \left( 2\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_0 u_\infty} \right)^2 \right\} \sin\theta d\theta = \\
 &= lr_0 \frac{\rho u_\infty^2}{2} \int_0^{2\pi} \left( 4\sin^2\theta + 4\sin\theta \frac{\Gamma}{2\pi r_0 u_\infty} + \left( \frac{\Gamma}{2\pi r_0 u_\infty} \right)^2 \right) \sin\theta d\theta = \quad (7.106) \\
 &= lr_0 \frac{\rho u_\infty^2}{2} \int_0^{2\pi} \frac{2\Gamma}{\pi r_0 u_\infty} \sin\theta d\theta = l\rho u_\infty \Gamma.
 \end{aligned}$$

Вираз (7.106) є формулою Жуковського для підйомної сили, котра виникає при циркуляційному обтіканні циліндра потенціальним потоком. Силу, що приходить на одиницю довжини тіла  $\vec{G} = \rho \vec{u}_\infty \Gamma$ , яка у даному випадку збігається з проекцією  $F_y$ , називають силою Жуковського. Для того щоб знайти напрям її дії, необхідно вектор швидкості повернути на  $90^\circ$  у бік, протилежний циркуляції.

1906 р. Жуковський довів, що формула (7.106) справедлива для циліндричного тіла довільної форми. Це означає, що за формулою Жуковського можна визначити підйомну (поперечну) силу при розрахунку аеродинамічних крил, корабельних гребних гвинтів, лопаток турбін тощо. Фізично існування підйомної сили пояснюється перерозподілом тиску на поверхні, до якого привело приєднання до потоку вихора.

У природі циркуляційне обтікання циліндра реальною рідиною можна отримати, якщо його обертати навколо своєї осі. При цьому картина обтікання подібна показаній на рисунку 7.13, а на циліндр діє поперечна сила. Виникнення поперечної сили при обтіканні реальною рідиною циліндра або сфери, що обертаються навколо своєї осі, називається ефектом Магнуса. Саме цим ефектом пояснюється криволінійність горизонтальної проекції траєкторії польоту підкрученого м'яча.

Можливість практичного застосування ефекту Магнуса привернула увагу суднобудівників. Так, 1923 р. морське судно «Бухау» було оснащено вертикальними циліндричними роторами (роторами Флетнера), які встановлювалися на палубі. Ротори обертались навколо своєї осі та використовували вітровий потік для утворення поперечної сили, під дією якої судно рухалось.

### 7.2.3 Обтікання кругового циліндра в'язкою рідиною. Криза опору

Коефіцієнт лобового опору  $C_x$

характеризує сумарний опір і залежить від форми обтічного тіла і числа Рейнольдса. Причому, як свідчать результати експериментів, ця залежність має досить складний характер. На рисунку 7.15 наведені дослідні криві  $C_x = f(Re)$  для кругового циліндра і сфери. При малих  $Re$  картина обтікання циліндра, тобто конфігурація ліній течії близька до обтікання ідеальною рідиною, тому розподіл тиску також близький до теоретичного (рисунок 7.10). Очевидно, що опір тиску вкрай незначний, а  $F_x$  визначається дотичними напруженнями, тобто опором тертя. При зростанні  $Re$  зона дії в'язкості зменшується, а отже, зменшується опір тертя і  $F_x$ . У діапазоні  $Re = 10^4 \dots 10^5$  значення  $C_x$  лишаються практично незмінними, а при подальшому зростанні  $Re$  величина коефіцієнта лобового опору різко зменшується. Цей скачок називають кризою опору. Причина його полягає у такому. При невеликих числах Рейнольдса пограничний шар є ламінарним. Його відрив від поверхні відбувається при  $\beta = 82 \dots 87^\circ$ , тобто у лобовій частині циліндра (рисунок 7.16,а). Зростання  $Re$  приводить до того, що течія в пограничному шарі турбулізується до моменту відриву. Існування турбулентних пульсацій приводить до зростання кінетичної енергії рідких частинок. Тому такий пограничний шар є більш стійким до відриву, тобто момент відриву затягується – зміщується вниз по потоку ( $\beta = 110 \dots 120^\circ$ ) (рисунок 7.15,б). Таким чином, зона відриву, яка характеризується пониженими значеннями тиску (рисунки 7.10 і 7.11),

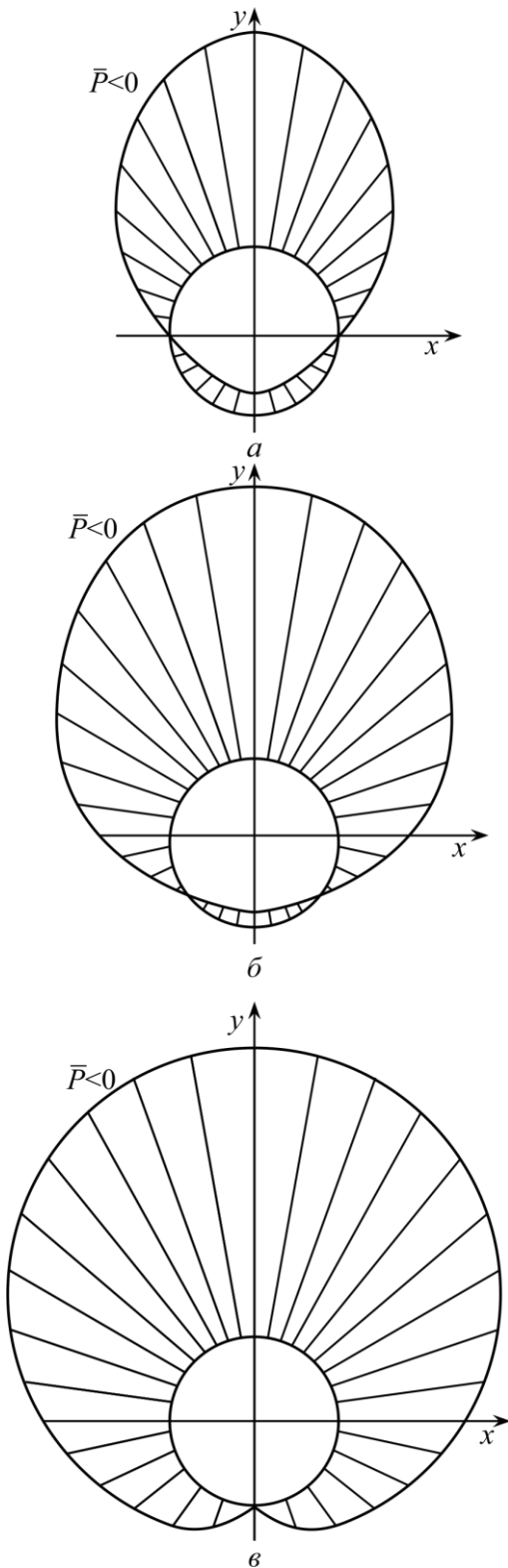


Рисунок 7.14 – Залежності  $\bar{P} = f(\theta)$  при циркуляційному обтіканні циліндра

зменшується, а тому зменшується сила лобового опору. Отже, явище кризи опору пов'язане з турбулізацією пограничного шару і зміщенням точки його відриву у тильну частину циліндра.

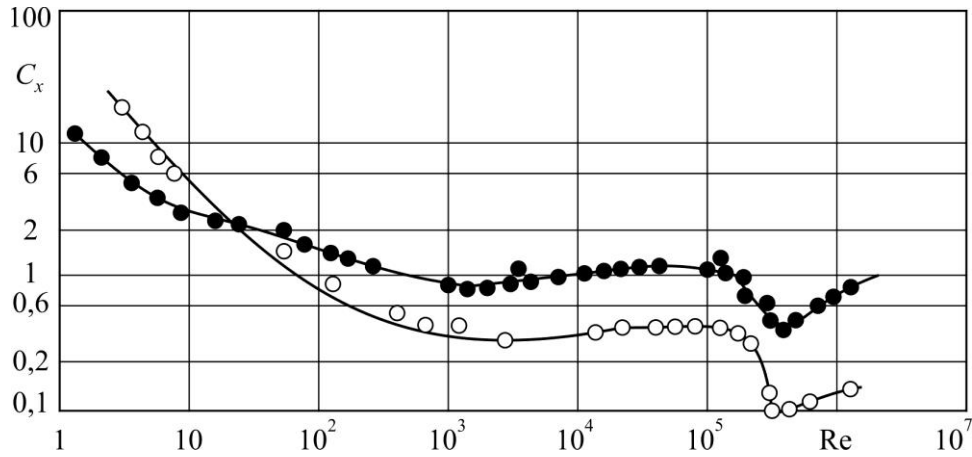


Рисунок 7.15 – Дослідні криві  $C_x = f(Re)$  для кругового циліндра (●) і сфери (○)

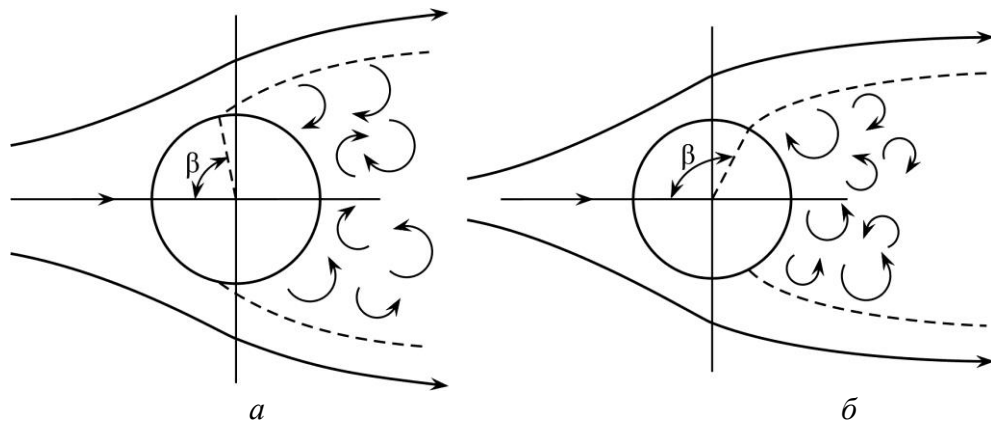


Рисунок 7.16 – Відрив ламінарного (а) та турбулентного (б) пограничних шарів

#### 7.2.4 Формула Жуковського для ґратки профілів. Аеродинамічні характеристики профілів

Велике практичне значення має задача розрахунку взаємодії рідини з ґратками профілів – системою лопаток однакової форми, котрі рівномірно розташовані на поверхні обертання. Строго кажучи, під профілем розуміють нормальний до твірної переріз обтічного тіла, але інколи профілем називають лопатку або крило у цілому. Ґратки профілів є основним елементом турбін і динамічних нагнітачів (насосів, вентиляторів, компресорів). У турбінах внаслідок силової взаємодії відбувається передача енергії від потоку рідини до лопаток. У нагнітачах – від лопаток до рідини. При цьому потік змінює напрям і швидкість свого руху. Окремим видом є нерухомі ґратки, в яких відбувається не обмін енергією, а її перетворення з одного виду на інший та поворот потоку.

Залежно від відношення швидкості потоку до швидкості звуку ґратки профілів класифікують на дозвукові, звукові та надзвукові. Фізична картина течії в

міжлопатових каналах останніх двох видів ґраток визначається не тільки в'язкістю, а й стисливістю, що, зрозуміло, значно ускладнює задачу їх розрахунку.

Не зупиняючись на особливостях конструкцій ґраток профілів, лише визначимо деякі з їх основних параметрів. *Кроком ґратки*  $t$  називають відстань між відповідними точками сусідніх профілів, а лінію, що поєднує ці точки, – *фронтом ґратки*. Нормаль до фронту – *вісь ґратки*. Кут  $\beta_1$  між напрямом швидкості на вході та фронтом є *кутом входу*, а між фронтом і швидкістю на виході – *кутом виходу*  $\beta_2$ .

Розрахунок силової взаємодії потоку із заданими параметрами на вході та ґратки профілів (лопаток) конкретної форми називають *прямою задачею*. Під *зворотною задачею* розуміють визначення конструктивних параметрів ґратки, які забезпечили б задані кути входу і повороту потоку. Оскільки задані умови можуть задовольняти нескінченно багато різноманітних ґраток, то для розв'язання зворотної задачі необхідно задавати додаткові умови, наприклад умову мінімальності втрат енергії в проточній (міжлопатовій) частині ґратки.

Розглянемо обтікання прямолінійної плоскої ґратки профілів усталеним потоком ідеальної рідини (рисунок 7.17) з метою визначення сили  $F$ , котра діє з боку рідини на окрему лопатку. Для цього паралельно фронту проведемо два перерізи 1–1 і 2–2, на такій відстані, що швидкості та тиск в них можна вважати сталими. Двома конгруентними лініями течії  $bd$  і  $ae$ , котрі знаходяться одна від одної на відстані  $t$ , виділимо контрольний об'єм одиничної ширини  $abed$ . Якщо течія усталена, то в нього втікає і витікає секундна маса

$$m = m_{ab} = m_{de} = \rho_1 t c_{1z} = \rho_2 t c_{2z}. \quad (7.107)$$

Проекції імпульсу цієї секундної маси на вісь  $ou$  у вхідному і вихідному перерізах

$$K_{abu} = \rho_1 t c_{1z} c_{1u} \quad (7.108)$$

і

$$K_{deu} = \rho_2 t c_{2z} c_{2u}, \quad (7.109)$$

а на вісь  $oz$

$$K_{abz} = \rho_1 t c_{1z}^2 \quad (7.110)$$

$$\text{і } K_{dez} = \rho_2 t c_{2z}^2. \quad (7.111)$$

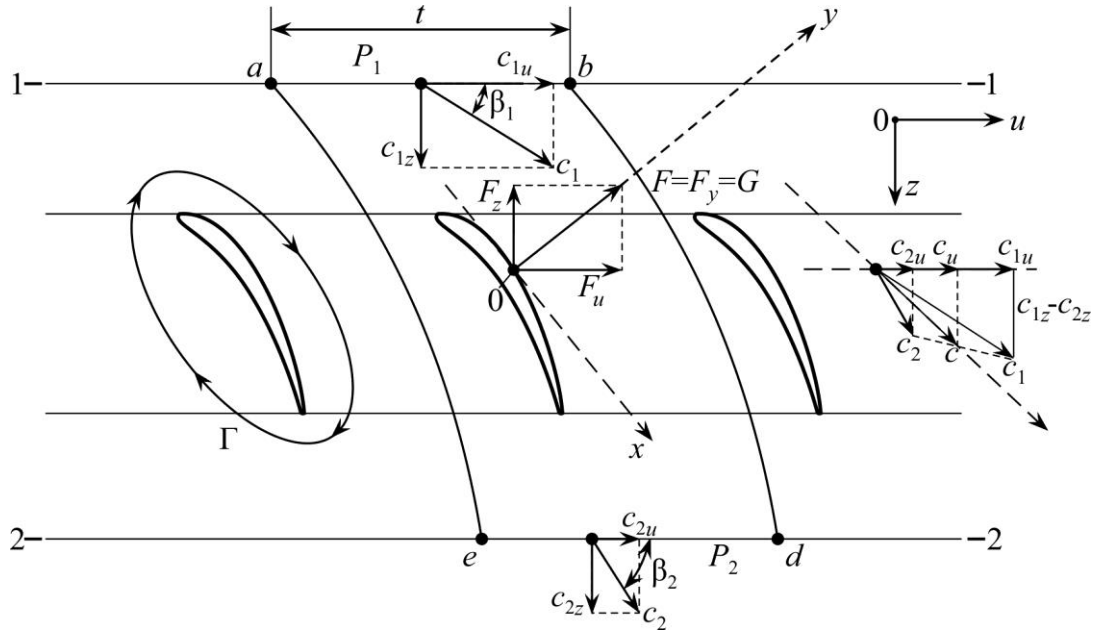


Рисунок 7.17 – Обтікання ідеальною рідиною гратки профілів

Тоді відповідно до закону збереження кількості руху фронтальна і осева проекції рівнодіючої сили  $\vec{F}$ , що діє з боку рідини на лопатку одиничної ширини,

$$F_u = \rho_1 t c_{1z} (c_{1u} - c_{2u}), \quad (7.112)$$

$$F_z = t(\rho_1 c_{1z}^2 - \rho_2 c_{2z}^2 + P_1 - P_2) \quad (7.113)$$

(сили тиску на поверхні  $ae$  і  $bd$  в напрямі осі  $ou$  однакові за величиною і протилежні за напрямом, тому у формулі (7.112) вони не представлені).

Для нестисливої рідини ( $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ )  $c_{1z} = c_{2z} = c_z$ . Тоді

$$F_z = t(P_1 - P_2). \quad (7.114)$$

Записавши для перерізів 1-1 і 2-2 рівняння Бернуллі, легко отримати, що

$$P_1 - P_2 = \frac{\rho}{2}(c_2^2 - c_1^2). \quad (7.115)$$

Відтак,

$$\begin{aligned} F_z &= t \frac{\rho}{2}(c_2^2 - c_1^2) = t \frac{\rho}{2}[(c_{2u}^2 + c_{2z}^2) - (c_{1u}^2 + c_{1z}^2)] = \\ &= t \frac{\rho}{2}(c_{2u}^2 - c_{1u}^2) = t \frac{\rho}{2}(c_{2u} + c_{1u})(c_{2u} - c_{1u}). \end{aligned} \quad (7.116)$$

Ввівши у розгляд середню між вхідною і вихідною швидкостями  $\vec{c} = 0,5(\vec{c}_1 + \vec{c}_2)$ , з рисунку 7.17 бачимо, що

$$c_u = \frac{c_{1u} + c_{2u}}{2}. \quad (7.117)$$

Тоді рівняння (1.116) набирає вигляду

$$F_z = t\rho c_u (c_{2u} - c_{1u}). \quad (7.118)$$

Циркуляція швидкості по контуру  $abde$

$$\Gamma_{abde} = \Gamma_{ab} + \Gamma_{bd} + \Gamma_{de} + \Gamma_{ea} = \Gamma_{ab} + \Gamma_{ed} \quad (7.119)$$

$$(\Gamma_{bd} = -\Gamma_{ed}).$$

$$\Gamma_{ab} = tc_1 \cos \beta_1 = tc_{1u}, \quad (7.120)$$

$$\Gamma_{ed} = -tc_2 \cos \beta_2 = -tc_{2u} \quad (7.121)$$

(за позитивний прийнятий напрям обходу за годинниковою стрілкою).

Для потенціального потоку ідеальної рідини, як впливає з матеріалу пункту 5.5.2,  $\Gamma_{abde}$  дорівнює циркуляції по довільному контуру, у т. ч. і по контуру поверхні лопатки  $\Gamma$ . Отже,

$$\Gamma_{abde} = \Gamma = t(c_{1u} - c_{2u}), \quad (7.122)$$

а тому

$$F_u = \rho c_z \Gamma_{abde}, \quad (7.123)$$

$$F_z = -\rho c_u \Gamma_{abde}. \quad (7.124)$$

Таким чином, рівнодіюча сили, з якою діє ідеальна рідина на профіль одиничної ширини, дорівнює силі Жуковського

$$\vec{F} = \vec{F}_y = \vec{G} = \rho \bar{c} \Gamma_{abde} \quad (7.125)$$

(напрямок осі  $ox$  збігається з напрямом  $\vec{c}$ ).

Ця формула вперше була виведена 1912 р. М. Є. Жуковським і називається формулою Жуковського для гратки профілів. Напрямок дії  $\vec{F}$ , як і сили Жуковського, визначається поворотом швидкості  $\vec{c}$  на  $90^\circ$  у бік, протилежний циркуляції.

Якщо розглядати в'язку рідину, то формула (7.115) має вигляд

$$P_1 - P_2 = \frac{\rho}{2} (c_2^2 - c_1^2) + \Delta P_{1-2}, \quad (7.126)$$

де  $\Delta P_{1-2}$  – втрати тиску в міжлопатевому каналі.

Тоді рівнодіюча сила, що виникає на лопатці одиничної ширини при її обтіканні в'язкою рідиною,

$$\vec{F} = \vec{F}_u + \vec{F}_z = \vec{F}_u + \vec{F}_{z1} + \Delta \vec{F}_z, \quad (7.127)$$

де

$$F_u = \rho c_z \Gamma_{abde}, \quad (7.128)$$

$$F_{z1} = -\rho c_u \Gamma_{abde}, \quad (7.129)$$

а

$$\Delta F_z = t \Delta P_{1-2} \quad (7.130)$$



є так званою додатковою осевою силою, яка не залежить від циркуляції, а визначається втратами енергії в міжлопатевому каналі гратки.

Таким чином,

$$\vec{F} = \rho c \Gamma_{abde} + \Delta \vec{F}_z = \vec{G} + \Delta \vec{F}_z. \quad (7.131)$$

Отже, результуюча сила, що діє на профіль у гратці з боку в'язкої рідини, складається з сили Жуковського і додаткової осевої сили, котра спрямована вздовж осі гратки. Оскільки циркуляція при інших рівних умовах в потоці в'язкої рідини менша, ніж в ідеальній, то менша і сила Жуковського.

Гратки, площа живого перерізу міжлопатєвого каналу котрих зростає, називають *дифузорними гратками*. У них  $P_2 > P_1$ ,  $c_2 < c_1$ . Тому напрям  $\vec{F}_{z1}$  і  $\Delta \vec{F}_z$  протилежний, а отже, в дифузорних гратках величина рівнодіючої  $\vec{F}$  менша за силу Жуковського  $\vec{G}$  (рисунок 7.18,а). Дифузорними є гратки, наприклад, в нагнітачах. У реактивних ступенях турбін навпаки – міжлопатєві канали *конфузорні* (площа живого перерізу їх міжлопатєвих каналів зменшується). У них  $P_2 < P_1$  і  $c_2 > c_1$ . Відповідно напрям дії  $\vec{F}_{z1}$  і  $\Delta \vec{F}_z$  збігається, тому величина рівнодіючої більша за силу Жуковського (рисунок 7.18,б).

Відношення підйомної сили одиничного профілю до сили лобового опору

$$k = \frac{F_y}{F_x} = \frac{C_y}{C_x} \quad (7.132)$$

характеризує його аеродинамічну досконалість і називається *якістю профілю* (крила).

*Коефіцієнти підйомної сили і лобового опору* даного профілю залежать від кута атаки. На рисунку 7.19 наведені типові дослідні залежності  $C_y = f(\alpha)$  і  $C_x = f(\alpha)$  профілю. Порівняння дослідних значень коефіцієнта підйомної сили з теоретичними засвідчують, що дослідні значення підйомної сили менші за теоретичні. Це пояснюється впливом в'язкості.

При деякому критичному куті атаки  $\alpha_{кр}$   $C_y$  набуває максимального значення, а при подальшому зростанні  $\alpha$  зменшується.

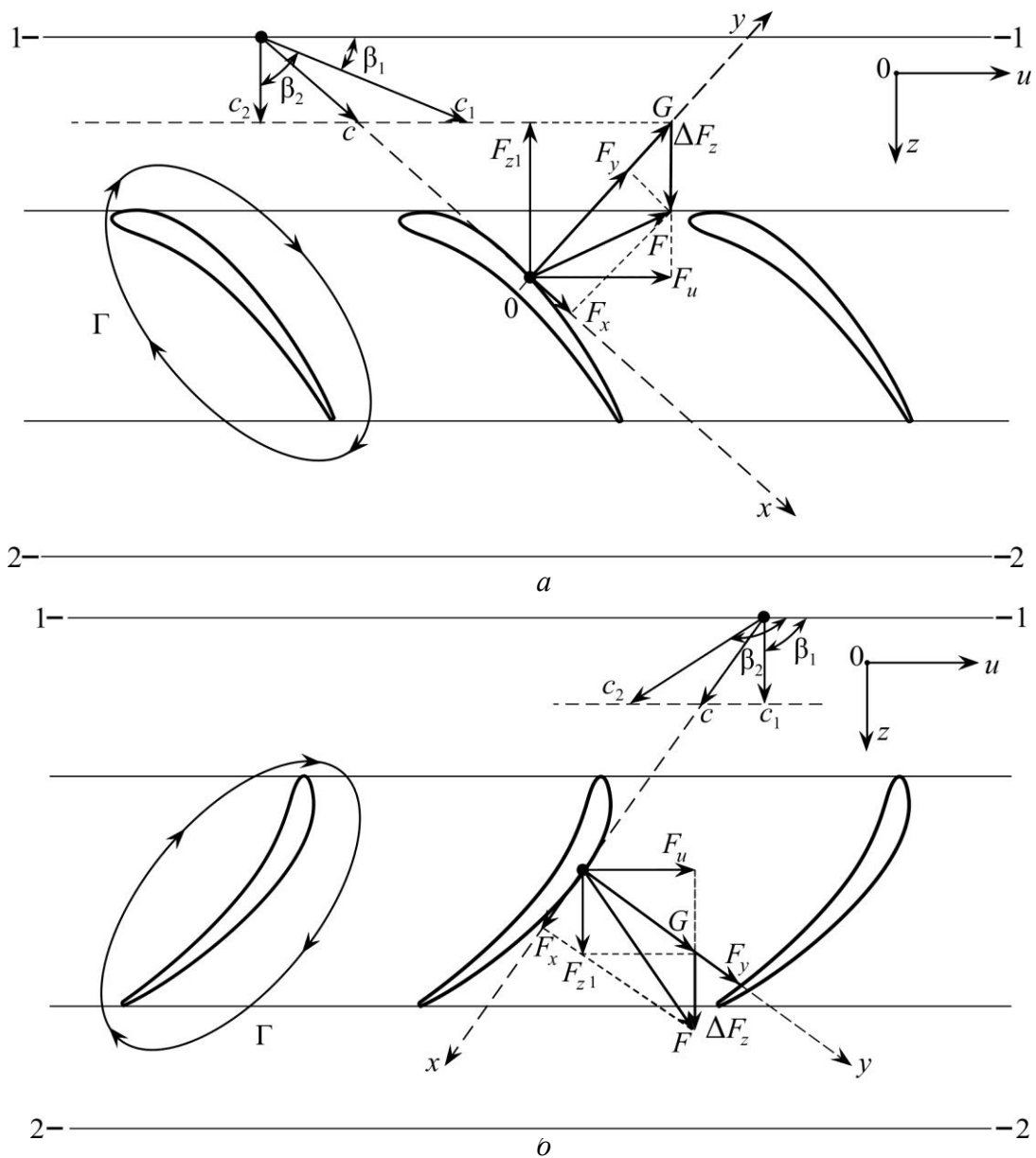


Рисунок 7.18 – Обтікання дифузорної (а) і конфузорної (б) ґраток профілів в'язкою нестисливою рідиною

Величина  $C_x$  навпаки – при досягненні  $\alpha_{кр}$  починає зростати більш інтенсивно. Такий характер зміни коефіцієнтів пов'язаний з відривом пограничного шару, що відбувається при досягненні кутів атаки, близьких до критичного.

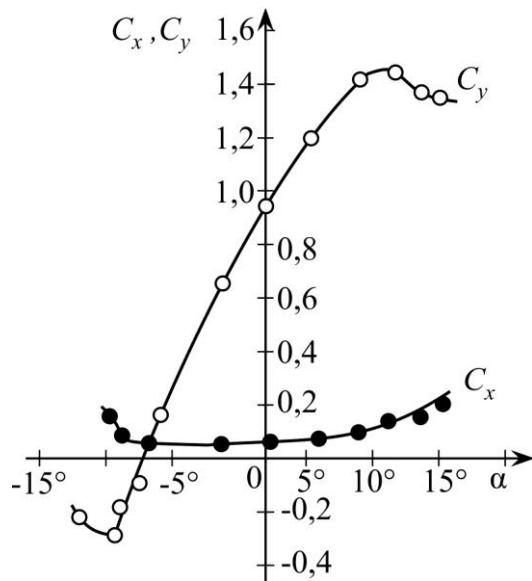


Рисунок 7.19 – Типові дослідні залежності  $C_y = f(\alpha)$  і  $C_x = f(\alpha)$

Мінімальному значенню коефіцієнта лобового опору відповідає такий кут атаки, при якому  $C_y = 0$ , тобто  $F_y = 0$ , а отже, обтікання є фактично безциркуляційним.

Результати аеродинамічних випробувань профілів часто представляють у вигляді залежностей  $C_y = f(C_x)$  (такий графік називають *полярною крила* або *профіля*), які креслять для різних кутів атаки (рисунок 7.20), і  $k = f(\alpha)$  (рисунок 7.21). Аеродинамічні характеристики різних профілів зібрані у спеціальних атласах.

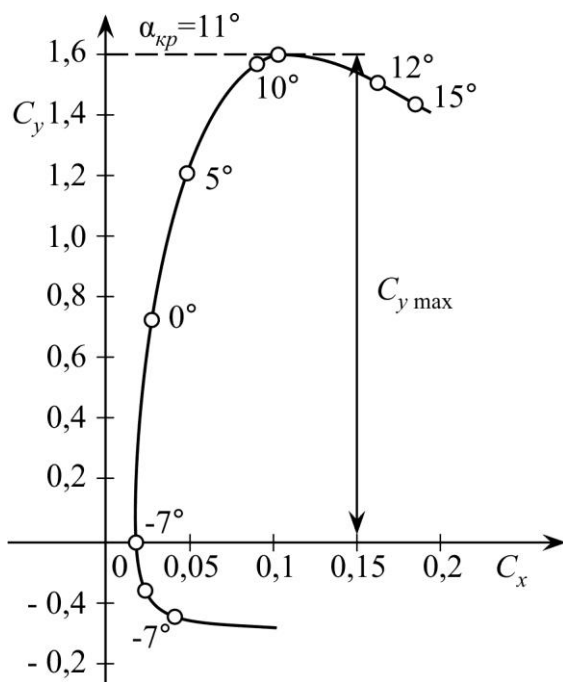


Рисунок 7.20 – Залежність  $C_y = f(C_x)$  профілю

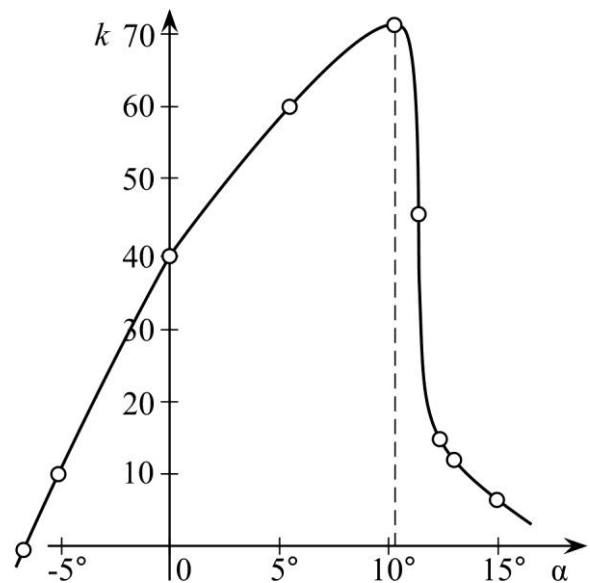


Рисунок 7. 21 – Залежність  $k = f(\alpha)$  профілю

### 7.3 ВІЛЬНІ ТУРБУЛЕНТНІ СТРУМИНИ

У попередніх підрозділах цього розділу розглядалася течія в'язких рідин біля твердих тіл, тобто задача, що стосується так званої *пристіночної турбулентності*. Однак у техніці, зокрема ракетних і авіаційних реактивних двигунах, парогенераторах теплових електростанцій, системах вентиляції та гідропневмоавтоматики тощо, часто спостерігаються потоки з нерівномірним розподілом швидкостей, які не контактують з твердими поверхнями і тому належать до так званої *вільної турбулентності*.

#### 7.3.1 Класифікація і загальні властивості турбулентних струмин

До потоків з вільною турбулентністю можна віднести такі: 1) аеродинамічний слід за твердим тілом, що обтікається в'язкою рідиною (рисунок 7.1), або супутну течію за твердим тілом, котре рухається в нерухомій рідині; 2) два паралельних потоки в'язкої рідини, які рухаються з різними швидкостями та взаємодіють між собою (рисунок 7.22);

3) *вільні струмини* – струмини, що утворюються при витіканні рідини, наприклад із сопел або отворів у середовище, границі котрого ніяк не впливають на особливості течії. Якщо фізичні властивості середовища, куди відбувається витікання, такі самі, як і у рідині, котра витікає, то такі струмини називають *затопленими*. У протилежному випадку – *незатопленими* (наприклад витікання води в повітря). Якщо струмина по всій своїй довжині має однакову температуру, тобто не обмінюється теплом із зовнішнім середовищем, то її називають *ізотермічною*. У протилежному випадку – *неізотермічною*. Залежно від режиму течії можуть бути *ламінарни* або *турбулентні струмини*. Можливий випадок, коли на виході з сопла струмина є ламинарною, а далі втрачає стійкість і відбувається зміна режиму на турбулентний (рисунок 7.23). Однак у переважній більшості практично значущих випадків струмини є турбулентними.

Залежно від форми сопла чи отвору, з якого відбувається витікання, струмина може бути *плоскою*, *вісесиметричною* або іншої, більш складної, форми. А залежно від співвідношення швидкості витікання до швидкості звуку струмини поділяють на *дозвукові* та *надзвукові*.

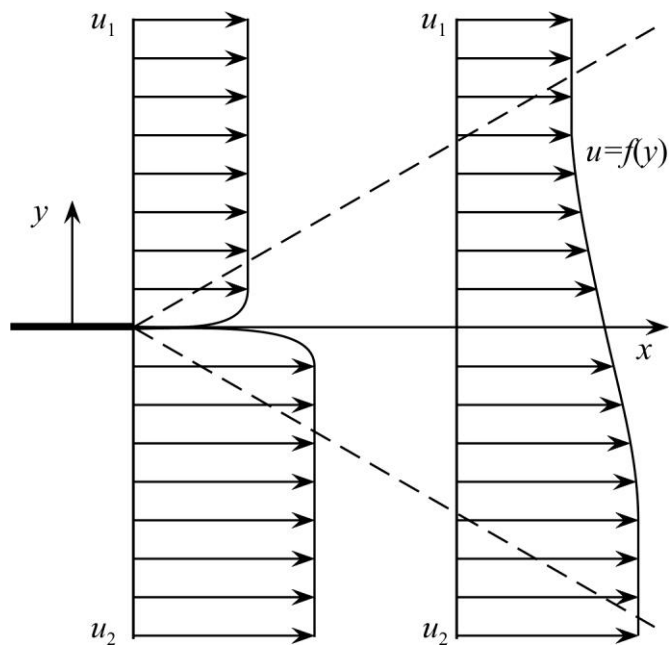


Рисунок 7.22 – Два паралельних потоки, що рухаються з різними швидкостями в одному напрямі

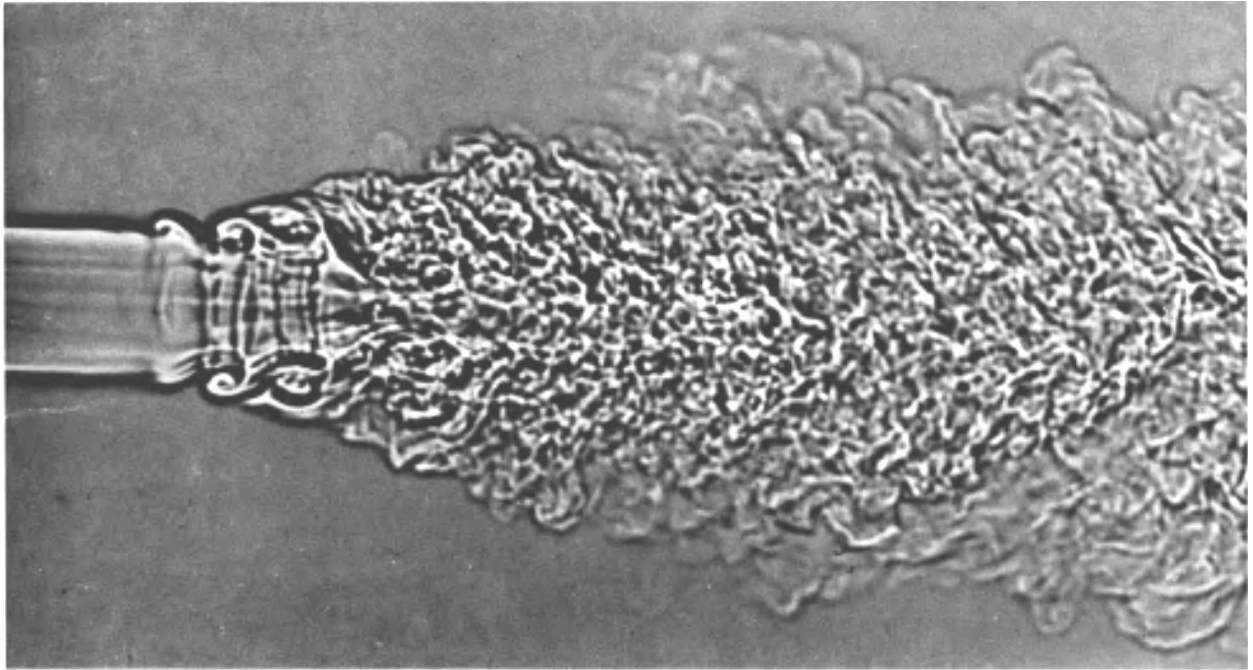


Рисунок 7.23 – Тіньова фотографія струмини вуглекислого газу, що витікає у повітря, Ф. Ландіса і А. Х. Шапіро

Розглянемо турбулентну затоплену струмину (рисунок 7.24). Такі струмини, як правило, поділяють на три характерні ділянки: початкову, перехідну і основну. На *початковій ділянці* струмина складається з *потенціального ядра* з незмінною швидкістю  $u_0$  (якщо, звичайно, на виході з сопла був рівномірний розподіл швидкостей) і *струминного пограничного шару*. Причому вздовж струмини завдяки захопленню зовнішньої рідини та проникненню ззовні в ядро вихорових структур зона пограничного шару збільшується, а ядра зменшується.

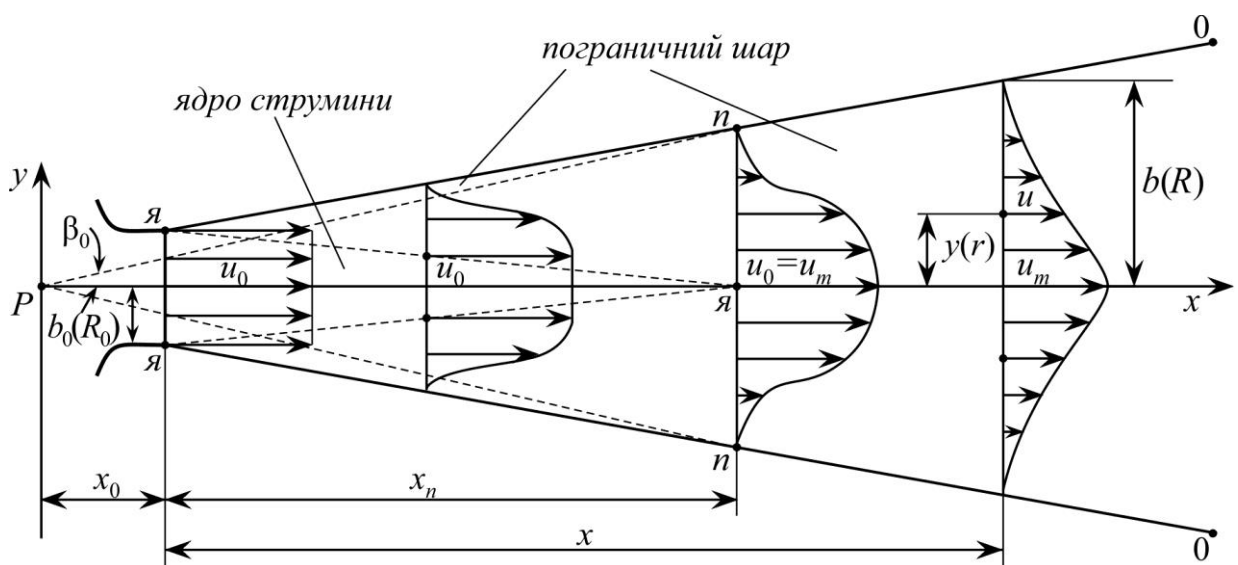


Рисунок 7.24 – Схематичний поділ вільної струмини

На відстані  $x_n$ , де поперечний обмін досягає осі струмини, ядро зникає і починається *перехідна ділянка* (на рисунку 7.24 вона не показана). Протягом її відбувається падіння осевої швидкості  $u_m$  і велике зростання *інтенсивності турбулентності* поблизу осі. Там, де це зростання припиняється, закінчується перехідна і починається *основна ділянка*, головні особливості котрої у тому, що на ній спостерігається подібність епюр швидкостей та інтенсивність турбулентності змінюється слабо. У переважній більшості розрахунків перехідну зону взагалі до уваги не беруть, тобто її існуванням нехтують.

На підставі численних дослідів і теоретичного аналізу можна стверджувати, що *границі ядра турбулентної струмини я-я і зовнішні границі струминного пограничного шару я-п і п-о* є прямими лініями. Як і у випадку пограничного шару на твердій поверхні, границею струминного пограничного шару вважатимемо лінію, де місцеві швидкості відрізняються від швидкості зовнішнього середовища на 1 %. Лінії зовнішніх границь на початковій і основній ділянках не співпадають за рахунок того, що на основній ділянці товщина струмини зростає більш інтенсивно. Точку  $P$ , що утворюється на перетині продовження границь струмини на основній ділянці, називають *полюсом*. Причому, як знов-таки засвідчують досліди,  $\text{tg}\beta_0 = 0,22$ .

Як засвідчили роботи, проведені під керівництвом А. С. Гіневського, величина інтенсивності турбулентності у вільних струминах на порядок більша, ніж у трубах. Крім того, відрізняється і структура турбулентності – в струминному пограничному шарі існує дві форми турбулентного обміну, а саме – *градієнтна дифузія*, котра залежить від градієнтів осереднених швидкостей і описується напівемпіричними теоріями турбулентності, та *об'ємна конвекція*, яка обумовлена існуванням великих вихорів і не залежить від місцевих градієнтів. Причому турбулентний обмін об'ємною конвекцією проводиться не окремим вихором від початку до кінця, а послідовним ланцюгом вихорів.

Таким чином, у межах турбулентних струмин, як і при будь-якій турбулентній течії, відбувається інтенсивне поперечне перемішування, внаслідок якого виникає струминний пограничний шар і поперечні розміри струмин збільшуються. Це зростання обумовлене захопленням в струмину зовнішньої рідини. Тому витрата через поперечний переріз вздовж струмини зростає. Оскільки тиск вздовж вільної струмини не змінюється, то відповідно до закону збереження імпульсу кількість руху в кожному перерізі однакова.

Характерною особливістю турбулентних струмин є й те, що швидкість поперек потоку у пограничному шарі змінюється значно інтенсивніше, ніж вздовж його, а поперечні складові швидкості у будь-якому перерізі неспівмірно малі порівняно з поздовжніми. Тому поперечні лінійні розміри струмин суттєво менші за поздовжні, а відтак, до вільних затоплених струмин можна застосовувати диференціальні аналізи для пограничного шару.

Як засвідчили результати теоретичного аналізу, підтверджені дослідними даними, як в супутному сліді, так і на основній ділянці затопленої струмини існує повна подібність профілів надлишкових значень швидкостей, температур

і концентрацій домішок (по відношенню значення на осі). На рисунку 7.25 представлена динаміка зміни поля швидкостей у вільній плоскій затопленій струмині, а на рисунку 7.26 – безрозмірні профілі швидкостей ( $y_c$  – координата точки, де місцева швидкість дорівнює  $0,5u_m$ ) на основній ділянці цієї струмини (за даними Е. Фертмана). Струмина утворювалась при витіканні повітря з прямокутного отвору розмірами 0,03 x 0,65 м.

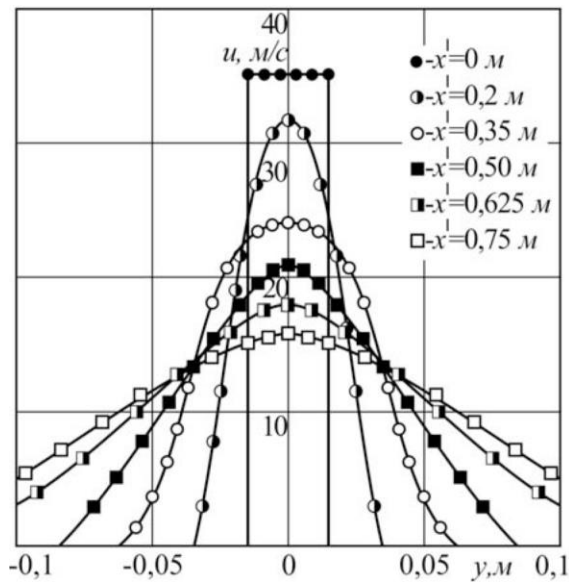


Рисунок 7.25 –  
Епюри швидкостей струмини

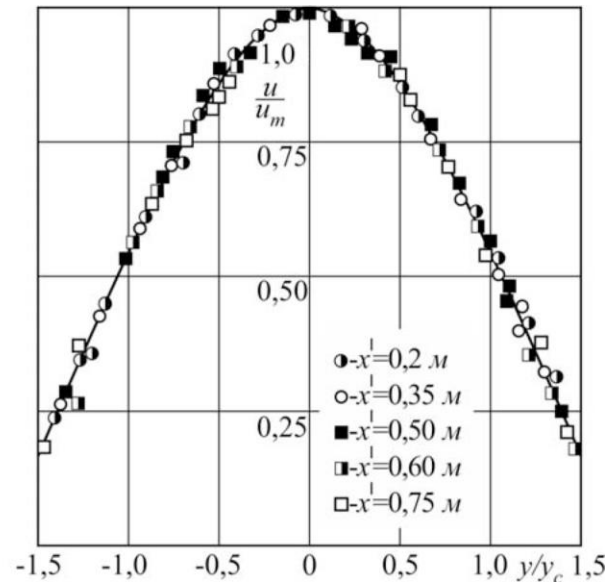


Рисунок 7.26 – Безрозмірні  
профілі швидкостей  
на основній ділянці струмини

Подібність безрозмірних профілів спостерігається і у вісесиметричних струминах. З цього випливає, що безрозмірні профілі швидкостей є універсальними і можуть бути представлені так:

$$\frac{u}{u_m} = f_1\left(\frac{y}{b}\right) \quad (7.133)$$

для перерізу з поточною висотою  $b$  плоскої струмини та

$$\frac{u}{u_m} = f_2\left(\frac{r}{R}\right) \quad (7.134)$$

для перерізу з поточним радіусом  $R$  вісесиметричної струмини ( $y$  і  $r$  – поточні поперечні координати).

Оскільки поточні значення висоти  $b$  плоскої струмини та радіуса  $R$  вісесиметричної струмини залежать від поздовжньої координати  $x$ , то, відраховуючи цю координату від полюса  $P$ , у загальному випадку маємо  $b = a_1x$  і  $R = a_2r$  (де  $a_1$  і  $a_2$  – сталі величини). Тоді безрозмірні профілі швидкостей (7.133) і (7.134) можуть бути представлені так:

$$\frac{u}{u_m} = f_1\left(\frac{y}{a_1 x}\right) = f_3\left(\frac{y}{x}\right), \quad (7.135)$$

$$\frac{u}{u_m} = f_2\left(\frac{r}{a_2 x}\right) = f_4\left(\frac{r}{x}\right). \quad (7.136)$$

Тобто лінії  $u/u_m$  є проміннями, що виходять з полюса струмини. На рисунку 7.27 наведені такі лінії для плоскої та вісесиметричної струмин. Причому для обох випадків дослідні точки потрапляють на одні й ті самі проміні.

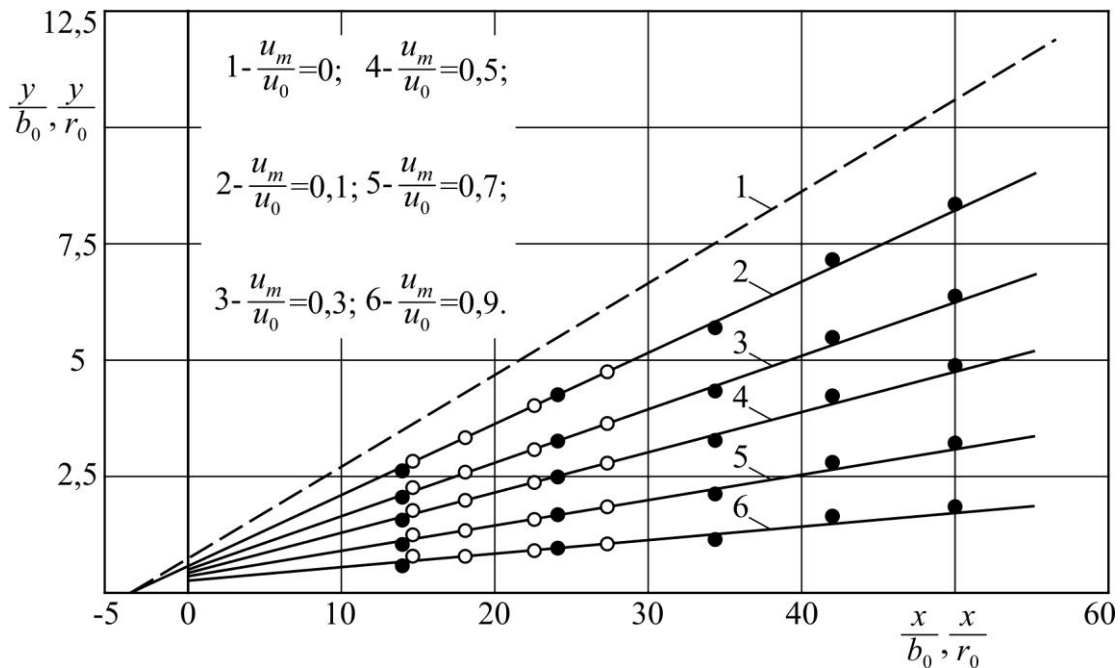


Рисунок 7.27 – Лінії рівних значень безрозмірних швидкостей  $u/u_m$  у затоплених плоскій і вісесиметричній струминах:

- – плоска струмина, за даними Г. Трюпеля
- – вісесиметрична струмина, за даними Е. Фертмана

### 7.3.2 Плоскі вільні затоплені струмини

Застосуємо до вільної плоскої затопленої струмини одиничної товщини закон збереження імпульсу, аналогічно тому, як це зроблено у пункті 7.1.3 для пограничного шару. Течію вважатимемо усталеною, а рідину – нестисливою. Виділимо лініями 1–2–3–4 контрольний об’єм (рисунок 7.28). Крізь переріз 1–2 до об’єму вноситься кількість руху

$$K_{1-2} = \int_0^{b_1} \rho u_1^2(y) dy, \quad (7.137)$$

а крізь переріз 3–4 виноситься

$$K_{3-4} = \int_0^{b_2} \rho u_2^2(y) dy. \quad (7.138)$$



Крізь границі об'єму 2–3 і 1–4 в напрямі течії імпульсу не переноситься. Вважається, що тиск у будь-якій точці вільної струмини є незмінним (це припущення, як засвідчують досліди, досить грубе, але воно суттєво спрощує розгляд задачі та врешті решт не призводить до помилкових результатів). Таким чином, нехтуючи дією масових сил, для плоскої струмини закон збереження імпульсу може бути записаний

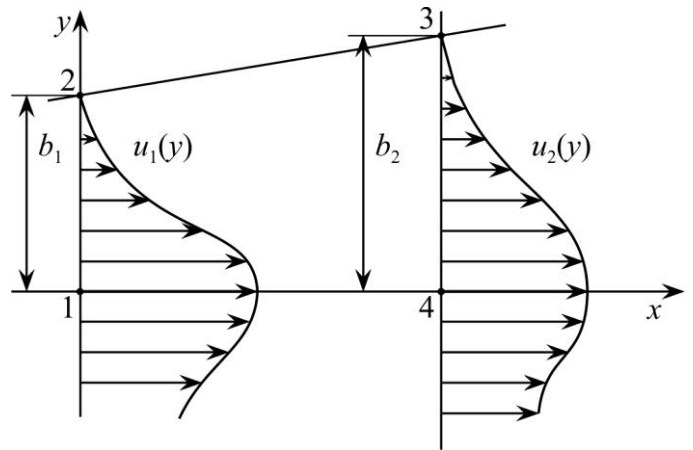


Рисунок 7.28 – До закону збереження імпульсу в плоскому струминному пограничному шарі

$$\int_0^b \rho u_1^2(y) dy = \int_0^b \rho u_2^2(y) dy = \text{const}. \quad (7.139)$$

Оскільки формула (7.139) справедлива для будь-яких перерізів струмини, то воно справедливо і для вихідного перерізу сопла чи отвору, з якого відбувається витікання. Тоді формула (7.139) може бути записана по-іншому:

$$\rho u_0^2 b_0 = \int_0^b \rho u^2(y) dy, \quad (7.140)$$

де  $b_0$  – половина ширини сопла;

$u(y)$  – закон розподілу швидкостей у пограничному шарі довільного перерізу струмини на основній її ділянці.

Вираз (7.140) можна представити і у безрозмірній формі

$$\frac{b}{b_0} \int_0^1 \left( \frac{u}{u_0} \right)^2 d\left( \frac{y}{b} \right) = 1, \quad (7.141)$$

або

$$\frac{b}{b_0} \left( \frac{u_m}{u_0} \right)^2 \int_0^1 \left( \frac{u}{u_m} \right)^2 d\left( \frac{y}{b} \right) = 1. \quad (7.142)$$

Очевидно, що з урахуванням рівняння (7.133) інтеграл в останньому рівнянні має дорівнювати сталій величині. Цю величину можна визначити, якщо скористатися рівнянням розподілу швидкостей в пограничному шарі  $u = f(y)$ . Одним з них є поліном третього ступеня

$$\frac{u}{u_m} = 1 - 3 \left( \frac{y}{b} \right)^2 + 2 \left( \frac{y}{b} \right)^3. \quad (7.143)$$

Широко відома також *формула Шліхтінга* для *аеродинамічного сліду*, що виникає за твердим тілом, яка є прийнятною також і для струминного пограничного шару

$$\frac{u}{u_m} = \left[ 1 - \left( \frac{y}{b} \right)^{1,5} \right]^2. \quad (7.144)$$

У дещо іншому вигляді

$$\frac{u}{u_m} = \left[ 1 - \left( \frac{y - y_{\text{я}}}{\delta} \right)^{1,5} \right]^2 \quad (7.145)$$

вона може використовуватися для струминного пограничного шару на початковій ділянці ( $\delta = (b - y_{\text{я}})$ ) – товщина цього пограничного шару;  $y_{\text{я}}$  – координата границі ядра струмини (рисунок 7.29).

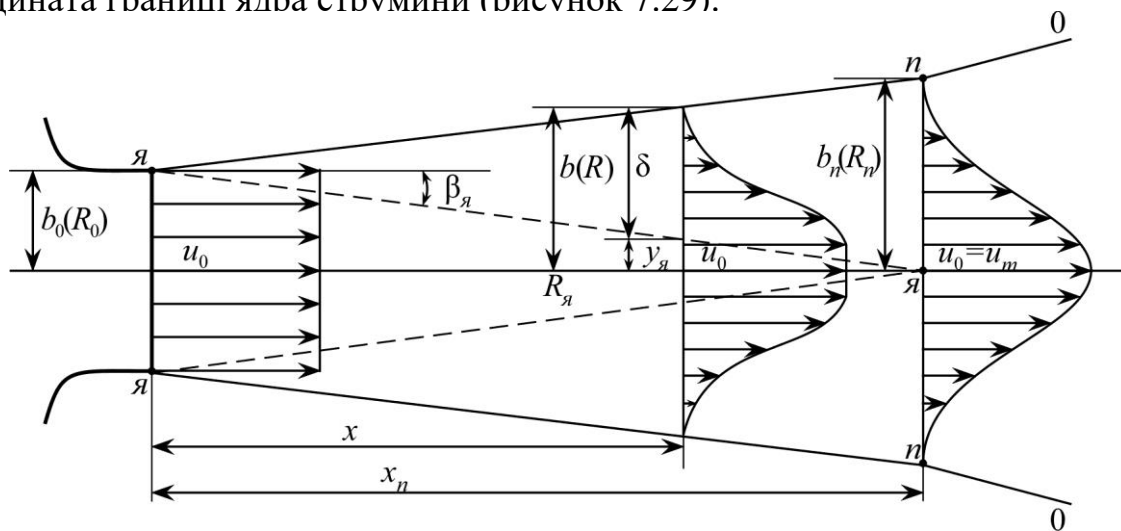


Рисунок 7.29 – Пограничний шар на початковій ділянці струмини

Таким чином, скориставшись, наприклад формулою (7.143), легко отримати числове значення інтеграла в рівнянні (7.142)

$$\int_0^1 \left( \frac{u}{u_m} \right)^2 d \left( \frac{y}{b} \right) = \int_0^1 \left[ 1 - 3 \left( \frac{y}{b} \right)^2 + 2 \left( \frac{y}{b} \right)^3 \right]^2 d \left( \frac{y}{b} \right) = 0,371. \quad (7.146)$$

Отже,

$$\frac{b}{b_0} \left( \frac{u_m}{u_0} \right)^2 = 2,7. \quad (7.147)$$

Звідки

$$u_m = \sqrt{\frac{2,7 u_0^2 b_0}{b}}. \quad (7.148)$$

Враховуючи, що

$$b = a_1 x = \text{tg } \beta_0 (x_0 + x') = 0,22(x_0 + x'), \quad (7.149)$$

дістаємо

$$u_m = \sqrt{\frac{2,7 u_0^2 b_0}{0,22(x_0 + x')}} = 3,5u_0 \sqrt{\frac{b_0}{(x_0 + x')}}. \quad (7.150)$$

Це означає, що швидкість на осі основної ділянки плоскої струмини  $u_m$  зменшується пропорційно корню квадратному відстані від полюса  $x$ .

Якщо рівняння (7.141) переписати для вихідного перерізу сопла і перерізу, в якому закінчується початкова ділянка,

$$\frac{b_n}{b_0} \int_0^1 \left(\frac{u}{u_0}\right)^2 d\left(\frac{y}{b_n}\right) = 1, \quad (7.151)$$

то

$$b_n = \frac{b_0}{\int_0^1 \left(\frac{u}{u_0}\right)^2 d\left(\frac{y}{b_n}\right)} = \frac{b_0}{0,371} = 2,7b_0. \quad (7.152)$$

Теоретичний аналіз і дослідні дані вказують на те, що на початковій ділянці як плоскої, так і вісесиметричної струмин нарощення товщини струминного пограничного шару  $\delta$  відбувається за лінійною залежністю  $\delta = 0,27x'$ . Тоді з урахуванням формули (7.152) і того, що в кінцевому перерізі початкової ділянки  $b_n = \delta_n$ , може бути встановлена проста залежність для координати, де закінчується початкова і починається перехідна ділянка (або основна, якщо існуванням перехідної знехтувати)

$$x'_n = \frac{2,7b_0}{0,27} = 10b_0. \quad (7.153)$$

Вище зазначалося, що витрата вздовж струмини є змінною за рахунок захоплення рідини із зовнішнього середовища. Очевидно, що витрата  $Q$ , котра приходить на одиницю товщини плоскої струмини, складається з витрати в ядрі  $Q_{\text{я}}$  і струминному пограничному шарі  $Q_n$

$$Q_{\text{ноч}} = Q_{\text{я}} + Q_n = 2 \left( u_0 y_{\text{я}} + \int_{y_{\text{я}}}^b u(y) dy \right). \quad (7.154)$$

При інтегруванні можна скористатися як формулою Шліхтінга (7.145), так і поліномом (7.143), котрий справедливий для струминного пограничного шару на початковій ділянці. Обидві формули не є строгими теоретичними та від того описують розподіл швидкостей з деякою огріхою. Це, зрозуміло, має позначитися і на точності тих залежностей, котрі будуть виводитися на їх підставі. Залежності, виведені з використанням формули (7.143), краще відповідають дослідним даним. Тому скористаємося поліномом.

Враховуючи, що на початковій ділянці  $u_m = u_0$ , рівняння (7.154) перепишемо так:

$$Q_{поч} = 2u_0 \left( y_я + \int_{y_я}^b \left[ 1 - 3 \left( \frac{y - y_я}{\delta} \right)^2 + 2 \left( \frac{y - y_я}{\delta} \right)^3 \right] dy \right). \quad (7.155)$$

Зробимо таку заміну змінних:  $\frac{y - y_я}{\delta} = z$ . Тоді  $dy = \delta dz$ ,  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = 1$ .

Отже,

$$Q_{поч} = 2u_0 \left( y_я + \delta \int_0^1 [1 - 3z^2 + 2z^3] dz \right), \quad (7.156)$$

а після інтегрування

$$Q_{поч} = 2u_0 (y_я + 0,5\delta). \quad (7.157)$$

Координата  $y_я = b_0 - x' \operatorname{tg} \beta_я$  (див. рисунок 7.29),  $\delta = 0,27x'$ . Тоді

$$Q_{поч} = 2u_0 (b_0 - x' \operatorname{tg} \beta_я + 0,5 \cdot 0,27x') = 2u_0 [b_0 - x'(\operatorname{tg} \beta_я - 0,135)]. \quad (7.158)$$

З рівняння (7.153) видно, що  $\operatorname{tg} \beta_я = 0,1$ . Відтак,

$$Q_{поч} = 2u_0 (b_0 + 0,035x'), \quad (7.159)$$

або поділивши на витрату через сопло, що приходить на одиницю його ширини,  $Q_0 = 2u_0 b_0$ , дістаємо закон зміни витрати вздовж початкової ділянки плоскої струмини у безрозмірному виді

$$\frac{Q_{поч}}{Q_0} = 1 + 0,035 \frac{x'}{b_0} \quad (7.160)$$

(якщо використати в формулі (7.154) не рівняння (7.143), а (7.145), то в останній формулі замість коефіцієнта 0,035 буде 0,022).

Витрата на основній ділянці

$$Q_{осн} = 2u_m \int_0^b \left[ 1 - 3 \left( \frac{y}{b} \right)^2 + 2 \left( \frac{y}{b} \right)^3 \right] dy = 2bu_m \int_0^1 [1 - 3z^2 + 2z^3] dz = bu_m, \quad (7.161)$$

( $\frac{y}{b} = z$ ,  $dy = b dz$ ,  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = 1$ ). А у безрозмірній формі, враховуючи рівняння (7.149) і (7.150),

$$\frac{Q_{осн}}{Q_0} = \frac{bu_m}{2b_0u_0} = \frac{3,5u_0\sqrt{b_0} \cdot 0,22(x_0 + x')}{2b_0u_0\sqrt{(x_0 + x')}} = 0,385 \sqrt{\frac{x_0 + x'}{b_0}}. \quad (7.162)$$

Очевидно, що у перехідному перерізі від початкової ділянки до основної ( $x' = x'_n$ ) формули (7.160) і (7.162) мають давати одне й те саме значення витрати. Тому

$$1 + 0,035 \frac{x'_n}{b_0} = 0,385 \sqrt{\frac{x_0 + x'_n}{b_0}}, \quad (7.163)$$

а з урахуванням рівняння (7.153)

$$1,35 = 0,385 \sqrt{\frac{x_0}{b_0} + 10}. \quad (7.164)$$

Звідки отримуємо залежність для полюсної відстані

$$x_0 = 2,29b_0. \quad (7.165)$$

### 7.3.3 Вісесиметричні вільні затоплені струмини

Застосувавши для вільної затопленої вісесиметричної струмини закон збереження імпульсу, легко дістати

$$\iint_{A_1} \rho u_1^2 dy = \iint_{A_2} \rho u_2^2 dy, \quad (7.166)$$

або у циліндричній системі координат ( $dA = r dr d\theta = 2\pi r dr$ )

$$2\pi \int_0^{R_1} \rho u_1^2(r) r dr = 2\pi \int_0^{R_2} \rho u_2^2(r) r dr, \quad (7.167)$$

де  $R_1$  і  $R_2$  – радіуси зовнішніх границь струмин у відповідних перерізах.

Для вихідного перерізу круглого сопла і довільного перерізу струмини

$$\pi R_0^2 \rho u_0^2 = 2\pi \int_0^R \rho u^2(r) r dr, \quad (7.168)$$

або у безрозмірному вигляді

$$2 \frac{R^2}{R_0^2} \int_0^1 \left( \frac{u}{u_0} \right)^2 \frac{r}{R} d\left( \frac{r}{R} \right) = 1, \quad (7.169)$$

$$2 \left( \frac{u_m}{u_0} \right)^2 \frac{R^2}{R_0^2} \int_0^1 \left( \frac{u}{u_m} \right)^2 \frac{r}{R} d\left( \frac{r}{R} \right) = 1. \quad (7.170)$$

Відповідно до рівняння (7.143) епюра швидкостей на основній ділянці вісесиметричної струмини

$$\frac{u}{u_m} = 1 - 3\left(\frac{r}{R}\right)^2 + 2\left(\frac{r}{R}\right)^3, \quad (7.171)$$

а в струминному пограничному шарі на початковій ділянці

$$\frac{u}{u_m} = 1 - 3\left(\frac{r - R_g}{\delta}\right)^2 + 2\left(\frac{r - R_g}{\delta}\right)^3. \quad (7.172)$$

Тоді формула (7.170) для основної ділянки набирає вигляду

$$2\left(\frac{u_m}{u_0}\right)^2 \frac{R^2}{R_0^2} \int_0^1 \left[1 - 3\left(\frac{r}{R}\right)^2 + 2\left(\frac{r}{R}\right)^3\right]^2 \frac{r}{R} d\left(\frac{r}{R}\right) = 1. \quad (7.173)$$

Нескладно дістати, що інтеграл у формулі (7.173) дорівнює 0,0857. Тоді

$$\left(\frac{u_m}{u_0}\right)^2 \frac{R^2}{R_0^2} = 5,83. \quad (7.174)$$

З урахуванням того, що  $R = 0,22(x_0 + x')$ ,

$$u_m = u_0 \frac{R_0}{R} 2,41 = 10,9u_0 \frac{R_0}{x_0 + x'}. \quad (7.175)$$

Отже, швидкість на осі основної ділянки вісесиметричної струмини  $u_m$  зменшується пропорційно відстані від полюса.

Запишемо рівняння (7.170) для вихідного перерізу сопла і перерізу, де закінчується початкова ділянка,

$$2\left(\frac{u_m}{u_0}\right)^2 \frac{R_n^2}{R_0^2} \int_0^1 \left(\frac{u}{u_m}\right)^2 \frac{r}{R_n} d\left(\frac{r}{R_n}\right) = 1, \quad (7.176)$$

або

$$2\left(\frac{u_m}{u_0}\right)^2 \frac{R_n^2}{R_0^2} 0,0857 = 1. \quad (7.177)$$

Звідки товщина пограничного шару в перехідному перерізі ( $u_m = u_0$ )

$$R_n = 2,42R_0, \quad (7.178)$$

а координата перехідного (від початкової ділянки до основної) перерізу

$$x'_n = 8,96R_0. \quad (7.179)$$

Витрата на початковій ділянці вісесиметричної струмини

$$\begin{aligned}
 Q_{поч} &= \pi R_{я}^2 u_0 + 2\pi \int_{R_{я}}^R u(r) r dr = \\
 &= \pi R_{я}^2 u_0 + 2\pi u_m \int_{R_{я}}^R \left[ 1 - 3 \left( \frac{r - R_{я}}{\delta} \right)^2 + 2 \left( \frac{r - R_{я}}{\delta} \right)^3 \right] r dr.
 \end{aligned}
 \tag{7.180}$$

Після заміни змінних  $(z = \frac{r - R_{я}}{\delta}, dz = \frac{dr}{\delta}, r = z\delta + R_{я}, z_1 = 0, z_2 = 1)$ , дістаємо

$$\begin{aligned}
 Q_{поч} &= \pi R_{я}^2 u_0 + 2\pi u_0 \delta \int_0^1 (1 - 3z^2 + 2z^3)(z\delta + R_{я}) dz = \\
 &= \pi R_{я}^2 u_0 + 2\pi u_0 \left( \delta^2 \frac{3}{20} + \frac{1}{2} \delta R_{я} \right).
 \end{aligned}
 \tag{7.181}$$

Відносна витрата

$$\frac{Q_{поч}}{Q_0} = \frac{\pi R_{я}^2 u_0 + \pi \delta^2 u_0 \frac{6}{20} + \delta R_{я}}{\pi R_0^2 u_0} = \frac{R_{я}^2 + 0,3\delta^2 + \delta R_{я}}{R_0^2}.
 \tag{7.182}$$

$R_{я} = R_0 - x' \operatorname{tg} \beta_{я} = R_0 - 0,112x'$  (як видно з формули (7.179),  $\operatorname{tg} \beta_{я} = 0,112$ ),  $\delta = 0,27x'$ .

Після нескладних перетворень

$$\frac{Q_{поч}}{Q_0} = 1 + 0,046 \frac{x'}{R_0} + 0,0042 \left( \frac{x'}{R_0} \right)^2.
 \tag{7.183}$$

Витрата на основній ділянці вісесиметричної струмини

$$Q_{осн} = 2\pi u_m \int_0^R \left( 1 - 3 \left( \frac{r}{R} \right)^2 + 2 \left( \frac{r}{R} \right)^3 \right) r dr = 0,3u_m \pi R^2.
 \tag{7.184}$$

Приймаючи, що  $R = 0,22(x_0 + x')$ ,

$$Q_{осн} = 0,3u_m \pi [0,22(x_0 + x')]^2 = 0,0145u_m \pi (x_0 + x')^2.
 \tag{7.185}$$

З урахуванням формули (7.175) відносна витрата

$$\frac{Q_{осн}}{Q_0} = \frac{0,0145u_m \pi (x_0 + x')^2}{\pi R_0^2 u_0} = \frac{0,0145(x_0 + x')^2}{R_0^2} 2,41 \frac{R_0}{R} = 0,159 \frac{(x_0 + x')}{R_0}.
 \tag{7.186}$$

Порівнявши вирази (7.183) та (7.186) за умови  $x' = x'_n$  і з урахуванням формули (7.179), дістаємо

$$x_0 = 2,05R_0. \quad (7.187)$$

Значення відносних полюсних відстаней як для плоскої (7.165), так і для вісесиметричної струмин (7.187) добре підтверджуються дослідними даними, представленими на рисунку 7.27.

Важливо зауважити, що отримані співвідношення для плоских та вісесиметричних струмин справедливі тільки при рівномірному розподіленні швидкостей на виході з сопла або насадка і порівняно невеликій степені турбулентності потоку.

### 7.3 ПРИКЛАДИ ЗАДАЧ ДО РОЗДІЛУ 7

1. В перерізі турбулентного пограничного шару, що знаходиться на відстані  $l = 2$  м від передньої кромки плоскої пластини, котра обтікається повітряним потоком, на підставі вимірювань епюри швидкостей визначена величина товщини втрати імпульсу  $\delta^{**} = 0,003085$  м. Визначити середнє по довжині значення місцевого коефіцієнта тертя  $C_f$ .

Порівнявши рівняння (7.37) і (7.53), запишемо

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} = \frac{c_f}{2}.$$

Розділивши змінні та проінтегрувавши,

$$\delta^{**} = \frac{1}{2} \int_0^l c_f dx.$$

Середнє по пластині значення місцевого коефіцієнта тертя

$$C_f = \frac{1}{l} \int_0^l c_f dx,$$

або

$$C_f l = \int_0^l c_f dx.$$

Тоді

$$C_f = \frac{2\delta^{**}}{l} = \frac{2 \cdot 0,003085}{2} = 0,003085.$$

Такого самого результату можна дійти, якщо скористатися рівняннями (7.37), (7.65) і (7.66).

2. Як зміниться сила опору тертя плоскої пластини довжиною  $l = 2$  м, котра обтікається повітряним потоком ( $\nu = 1,51 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ ) зі швидкістю  $u_\infty = 50 \text{ м/с}$ , якщо після обробки її початкова шорсткість  $k = 2 \text{ мм}$  зменшилася у 200 разів?

Число Рейнольдса



$$\text{Re}_l = \frac{u_\infty l}{\nu} = \frac{50 \cdot 2}{1,51 \cdot 10^{-5}} = 6,62 \cdot 10^6.$$

Параметр

$$\frac{l}{k} = \frac{2 \cdot 10^3}{2} = 10^3.$$

З графіка на рисунку 7.6 бачимо, що поверхня пластини є гідравлічно шорсткою. Тому або з графіка, або з рівняння (7.73) дістаємо

$$C_{m,u} = \left( 1,89 + 1,62 \lg \frac{l}{k} \right)^{-2,5} = \left( 1,89 + 1,62 \lg \frac{2 \cdot 10^3}{2} \right)^{-2,5} = 8,45 \cdot 10^{-3}.$$

Після обробки поверхні

$$\frac{l}{k_o} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 200}{2} = 2 \cdot 10^5.$$

З графіка на рисунку 7.6 бачимо, що тепер поверхня пластини є гідравлічно гладкою. Тому або з графіка, або з формули (7.67) дістаємо

$$C_m = \frac{0,0307}{\text{Re}_l^{\frac{1}{7}}} = \frac{0,0307}{(6,62 \cdot 10^6)^{\frac{1}{7}}} = 3,26 \cdot 10^{-3}.$$

Таким чином, після обробки опір пластини зменшився у

$$\frac{C_{m,u}}{C_m} = \frac{8,45 \cdot 10^{-3}}{3,26 \cdot 10^{-3}} = 2,59 \text{ рази.}$$

3. Визначити поперечну силу, а також коефіцієнт підйомної (поперечної) сили  $C_y$ , що діє на циліндр з діаметром  $d = 0,5$  м і довжиною  $l = 2$  м, який обертається навколо своєї осі з частотою  $\omega = 20 \text{ с}^{-1}$  та обтікається плоским потенціальним повітряним потоком ( $\rho_n = 1,24 \text{ кг/м}^3$ ) зі швидкістю  $u_\infty = 45 \text{ м/с}$ . Скільки критичних точок знаходиться на поверхні циліндра?

Обтікання циліндра, що обертається навколо своєї осі, плоским потенціальним потоком аналогічне циркуляційному обтіканню, для якого справедлива формула Жуковського (7.106).

Швидкість на поверхні циліндра

$$u = \omega \frac{d}{2}.$$

Відповідно до формули (3.56) циркуляція швидкості

$$\Gamma = \pi u d = \pi \omega \frac{d^2}{2} = 3,14 \cdot 20 \frac{0,5^2}{2} = 7,85 \text{ м}^2/\text{с}.$$

Таким чином, поперечна сила

$$F_y = l \rho u_\infty \Gamma = l \rho u_\infty \pi \omega \frac{d^2}{2} = 2 \cdot 1,24 \cdot 45 \cdot 3,14 \cdot 20 \frac{0,5^2}{2} = 876,1 \text{ Н}.$$

Коефіцієнт підйомної сили можна визначити з рівняння (7.82), якщо зважити, що характерна площа  $A = ld$ ,

$$C_y = \frac{2F_y}{\rho_n u_\infty^2} = \frac{2F_y}{ld \rho_n u_\infty^2} = \frac{2 \cdot 876,1}{2 \cdot 0,5 \cdot 1,24 \cdot 45^2} = 0,698.$$

Оскільки

$$\Gamma = 7,85 \text{ м}^2/\text{с} < 4\pi u_\infty \frac{d}{2} = 4 \cdot 3,14 \cdot 45 \frac{0,5}{2} = 141,3 \text{ м}^2/\text{с},$$

то на поверхні циліндра дві критичні точки, а обтіканню відповідає рисунок 7.13,а.

4. Визначити швидкість висхідного потоку повітря ( $\rho_n = 1,20 \text{ кг/м}^3$ ), під дією якого кулеподібна тверда частинка, густина якої  $\rho_c = 1300 \text{ кг/м}^3$ , а діаметр  $d = 1,5 \text{ мм}$ , знаходиться у стані рівноваги.

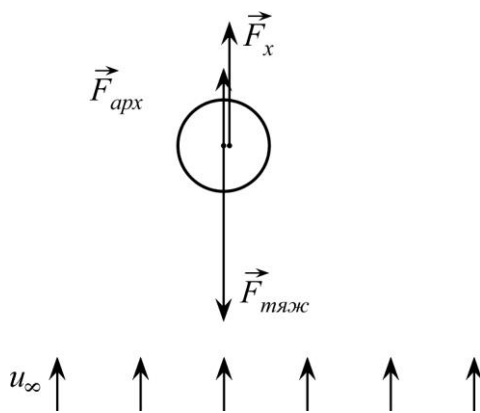


Рисунок 7.30 – До задачі 4

Швидкість потоку  $u_\infty$ , при якій зависла частинка знаходиться у стані рівноваги, тобто коливається на одному рівні, не переміщуючись в підсумку ні вгору, ні вниз, називають *швидкістю витання*. На таку частинку діють три сили:

тяжіння

$$F_{тяж} = mg = \rho_c \frac{\pi d^3}{6} g,$$

Архімедова

$$F_{арх} = \rho_n g V = \rho_n g \frac{\pi d^3}{6}$$

і сила лобового опору

$$F_x = C_x A \frac{\rho_n u_\infty^2}{2} = C_x \frac{\pi d^2}{4} \frac{\rho_n u_\infty^2}{2}.$$

Баланс цих сил

$$F_x = F_{тяж} - F_{арх},$$

Або

$$C_x \frac{\pi d^2}{4} \frac{\rho_n u_\infty^2}{2} = (\rho_c - \rho_n) g \frac{\pi d^3}{6}.$$

Звідки швидкість витання

$$u_\infty = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{(\rho_c - \rho_n) g d}{\rho_n C_x}} = \frac{1,15}{\sqrt{C_x}} \sqrt{g d \frac{(\rho_c - \rho_n)}{\rho_n}}.$$

Всі величини в останньому рівнянні відомі, окрім коефіцієнта лобового опору. Як видно з графіка на рисунку 7.15,  $C_x$  сферичного тіла є складною функцією числа Рейнольдса. Аналіз графіка дозволяє представити цю залежність у степеневому вигляді

$$C_x = \frac{a}{\text{Re}^n},$$

причому значення коефіцієнтів для різних діапазонів числа Рейнольдса різні. Вони представлені у таблиці 7.1. При  $\text{Re} < 1$  наведена вище формула точно збігається з теоретичною формулою Стокса.

Таблиця 7.1 – Коефіцієнти для визначення  $C_x$

Re	0–1	1–50	50–10 <sup>3</sup>	10 <sup>3</sup> –2·10 <sup>5</sup>
a	24	25	4	0,45
n	1	0,75	0,3	0

Оскільки  $\text{Re}$  визначити неможливо, то для розв'язання задачі скористаємося методом послідовних наближень. Задамося довільним значенням швидкості, наприклад  $u_{\infty 1} = 5 \text{ м/с}$ . Тоді

$$\text{Re}_1 = \frac{u_{\infty 1} d}{\nu} = \frac{5 \cdot 0,0015}{1,51 \cdot 10^{-5}} = 497$$

(оскільки задана густина повітря відповідає його температурі 20 °С, то приймаємо кінематичну в'язкість  $\nu = 1,51 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ , що також відповідає цій температурі).

Коефіцієнт лобового опору, що відповідає  $\text{Re}_1 = 497$ , можна відшукати за графіком, а можна скористатись формулою і коефіцієнтами з таблиці 7.1

$$C_{x1} = \frac{4}{\text{Re}_1^{0,3}} = \frac{4}{497^{0,3}} = 0,621.$$

Швидкість

$$u_{\infty 2} = \frac{1,15}{\sqrt{C_{x1}}} \sqrt{gd \frac{(\rho_c - \rho_n)}{\rho_n}} = \frac{1,15}{\sqrt{0,621}} \sqrt{9,81 \cdot 0,0015 \frac{(1300 - 1,2)}{1,2}} = 5,82 \text{ м/с}.$$

Далі, повторюючи розрахунки, дістаємо  $\text{Re}_2 = 579$ ;  $C_{x2} = 0,593$ ;  $u_{\infty 3} = 5,96 \text{ м/с}$ .  
 $\text{Re}_3 = 592$ ;  $C_{x3} = 0,589$ ;  $u_{\infty 4} = 5,98 \text{ м/с}$ .  $\text{Re}_4 = 593$ ;  $C_{x4} = 0,589$ ;  $u_{\infty 5} = 5,98 \text{ м/с}$ . Оскільки значення швидкості витання далі не змінюється, то розрахунки закінчуємо.

Скориставшись балансом сил, отриманий результат легко перевірити

$$0,589 \frac{3,14 \cdot 0,0015^2}{4} \frac{1,2 \cdot 5,98^2}{2} \approx (1300 - 1,2) 9,81 \frac{3,14 \cdot 0,0015^3}{6}.$$

Отже, швидкість витання кулеподібної твердої частинки  $u_{\infty} = 5,98 \text{ м/с}$ .

5. Визначити висоту димової труби електростанції  $H$ , при якій тверді частинки попелу густиною  $\rho_c = 2000 \text{ кг/м}^3$  і діаметром  $d = 0,1 \text{ мм}$ , котрі містяться в диму густиною  $\rho_d = 1,23 \text{ кг/м}^3$  і в'язкістю  $\nu = 1,45 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ , випадають на землю на відстані  $l = 1500 \text{ м}$ . Швидкість вітру прийняти  $v_w = 10 \text{ м/с}$ , властивості диму і швидкість осадження вважати незмінними.

Частинка попелу рухається в горизонтальному напрямі зі швидкістю вітру  $v_w$  і у вертикальному зі швидкістю осадження  $v_{oc}$ . Оскільки  $v_{oc}$  є незмінною, то сила тяжіння зрівноважується архімедовою силою і силою лобового опору, а отже, справедливий баланс сил з попередньої задачі

$$C_x \frac{\pi d^2}{4} \frac{\rho_d u_{oc}^2}{2} = (\rho_q - \rho_d) g \frac{\pi d^3}{6}.$$

Звідки

$$u_{oc} = \frac{1,15}{\sqrt{C_x}} \sqrt{gd \frac{(\rho_q - \rho_d)}{\rho_d}}.$$

Оскільки  $Re$  невідоме, то для розв'язання задачі скористаємося методом послідовних наближень. Задамося довільним значенням швидкості осадження, наприклад

$$u_{oc1} = 1 \text{ м/с.}$$

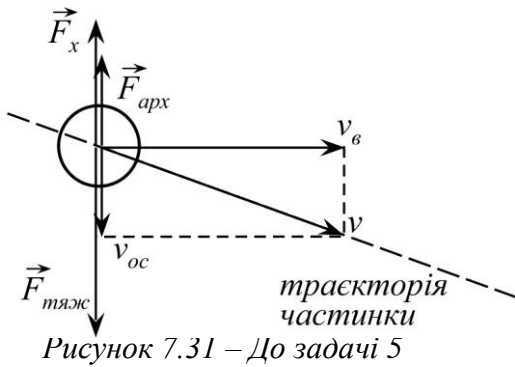


Рисунок 7.31 – До задачі 5

Тоді

$$Re_1 = \frac{u_{oc1} d}{\nu} = \frac{1 \cdot 0,0001}{1,45 \cdot 10^{-5}} = 6,90;$$

$$C_{x1} = \frac{25}{Re_1^{0,75}} = \frac{25}{6,90^{0,75}} = 5,87;$$

$$u_{oc2} = \frac{1,15}{\sqrt{C_{x1}}} \sqrt{gd \frac{(\rho_q - \rho_d)}{\rho_d}} = \frac{1,15}{\sqrt{5,87}} \sqrt{9,81 \cdot 0,0001 \frac{(2000 - 1,23)}{1,23}} = 0,599 \text{ м/с.}$$

Далі, повторюючи розрахунки, дістаємо  $Re_2 = 4,13$ ;  $C_{x2} = 8,63$ ;  $u_{oc3} = 0,494 \text{ м/с}$ .  
 $Re_3 = 3,41$ ;  $C_{x3} = 9,96$ ;  $u_{oc4} = 0,460 \text{ м/с}$ .  $Re_4 = 3,17$ ;  $C_{x4} = 10,5$ ;  $u_{oc5} = 0,448 \text{ м/с}$ .  $Re_5 = 3,09$ ;  
 $C_{x5} = 10,7$ ;  $u_{oc6} = 0,443 \text{ м/с}$ .  $Re_6 = 3,06$ ;  $C_{x6} = 10,8$ ;  $u_{oc7} = 0,441 \text{ м/с}$ .  $Re_7 = 3,04$ ;  $C_{x7} = 10,8$ ;  
 $u_{oc8} = 0,441 \text{ м/с}$ . Оскільки значення швидкості осадження далі не змінюється, то розрахунки закінчуємо.

Задана відстань від димової труби долається за час

$$t = \frac{l}{v_g} = \frac{1500}{10} = 150 \text{ с.}$$

За цей час частинка попелу повинна впасти з висоти  $H$  на землю. Відтак, необхідна висота труби

$$H = v_{oc} t = 0,441 \cdot 150 = 66,2 \text{ м.}$$

6. Визначити кут атаки крила літака і необхідну потужність його двигуна, якщо сумарна площа крил  $A_{кр} = 23 \text{ м}^2$ , площа міделевого перерізу фюзеляжа  $A_f = 3,5 \text{ м}^2$ , а коефіцієнт лобового опору фюзеляжа  $C_{xf} = 0,1$  (підйомною силою фюзеляжа знехтувати). Коефіцієнт корисної дії двигуна  $\eta = 0,7$ . Маса літака  $m = 25 \text{ т}$ . Він летить на незмінній висоті зі сталою швидкістю  $v = 382 \text{ км/год}$ . Поляра профілю крила представлена на рисунку 7.20, густина повітря  $\rho = 1,26 \text{ кг/м}^3$ .

Для того щоб літак тримався у повітрі, необхідна рівність  $F_{тяжс} = F_y$ , або

$$mg = C_y A_{кр} \frac{\rho v^2}{2}.$$

Звідки

$$C_y = \frac{2mg}{A_{кр}\rho v^2} = \frac{2 \cdot 25 \cdot 10^3 \cdot 9,81}{23 \cdot 1,26 \left( \frac{382 \cdot 10^3}{3600} \right)^2} = 1,5.$$

З рисунку 7.20 бачимо, що цьому значенню коефіцієнта підйомної сили відповідає кут атаки  $\alpha \approx 10^\circ$  і коефіцієнт лобового опору  $C_x \approx 0,09$ . Отже, сила лобового опору

$$F_x = (C_x A_{кр} + C_{xf} A_f) \frac{\rho v^2}{2} = (0,09 \cdot 23 + 0,1 \cdot 3,5) \frac{1,26 \left( \frac{382 \cdot 10^3}{3600} \right)^2}{2} = 17,2 \text{ кН}.$$

Таким чином, необхідна потужність двигуна

$$N = \frac{F_x v}{\eta} = \frac{17,2 \cdot 10^3}{0,7} \frac{382 \cdot 10^3}{3600} = 2,61 \text{ МВт}.$$

7. Крізь коноїдальне сопло радіусом  $R_0 = 50$  мм під дією надлишкового тиску  $P_n = 300$  Па в атмосферу витікає повітря ( $\rho = 1,21$  кг/м<sup>3</sup>). Вважаючи розподіл швидкостей на виході з сопла рівномірним, визначити радіуси струмини, швидкості на її осі та витрати на відстанях від зрізу сопла  $x_1' = 300$  мм і  $x_2' = 600$  мм.

Відповідно до формули (6.131) швидкість на виході із сопла

$$u_0 = \varphi \sqrt{\frac{2P_n}{\rho}} = 0,98 \sqrt{\frac{2 \cdot 300}{1,21}} = 21,8 \text{ м/с}.$$

Тоді витрата

$$Q_0 = \varepsilon \pi R_0^2 u_0 = 1 \cdot 3,14 \cdot 0,05^2 \cdot 21,8 = 0,171 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Оскільки координата перехідного перерізу

$$x_n' = 8,96 R_0 = 8,96 \cdot 0,05 = 448 \text{ мм} > x_1' = 300 \text{ мм},$$

і

$$x_n' = 448 \text{ мм} < x_2' = 600 \text{ мм},$$

то перший переріз знаходиться на початковій ділянці, а другий – на основній.

У першому перерізі радіус струми дорівнює сумі товщини ядра і струминного пограничного шару

$$\begin{aligned} R_1 &= R_{я} + \delta_1 = R_0 - x_1' \operatorname{tg} \beta_{я} + 0,27 x_1' = R_0 + x_1' (0,27 - \operatorname{tg} \beta_{я}) = \\ &= R_0 + x_1' (0,27 - 0,112) = 50 + 300(0,27 - 0,112) = 97,4 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Витрата

$$Q_{поч} = Q_0 \left[ 1 + 0,046 \frac{x'}{R_0} + 0,0042 \left( \frac{x'}{R_0} \right)^2 \right] = 0,171 \left[ 1 + 0,046 \frac{300}{50} + 0,0042 \left( \frac{300}{50} \right)^2 \right] = 0,244 \text{ м}^3/\text{с}.$$

У другому перерізі радіус струминного пограничного шару

$$R_2 = 0,22(x_0 + x_2') = 0,22(2,05 R_0 + x_2') = 0,22(2,05 \cdot 50 + 600) = 155 \text{ мм},$$

а витрата

$$Q_{осн} = 0,159Q_0 \frac{(x_0 + x')}{R_0} = 0,159Q_0 \frac{(2,05R_0 + x')}{R_0} = 0,159 \cdot 0,171 \frac{(2,05 \cdot 50 + 600)}{50} = 0,382 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Швидкості на осі струмнини в першому перерізі  $u_{m1} = u_0 = 21,8 \text{ м/с}$ , а в другому –

$$u_{m2} = u_0 \frac{R_0}{R} 2,41 = 21,8 \frac{50}{155} 2,41 = 16,9 \text{ м/с}.$$

## 8 ОСНОВИ ГІДРОДИНАМІЧНОЇ ТЕОРІЇ ЗМАЩУВАННЯ

Велике практичне значення для інженерної механіки мають задачі течії в'язкої рідини в напірних каналах складної форми. Так, між поверхнями деталей машин та механізмів, що труться, як правило знаходиться рухомий і дуже тонкий шар (порядку  $10^{-2} \dots 10^{-3}$  мм) в'язкої рідини. Завдяки такій малій товщині, не зважаючи на інколи досить великі швидкості, течія відбувається при малих числах Рейнольдса. Задачі розрахунку таких течій, наприклад змащувального шару рідини між шийкою валу і підшипником ковзання, складають основу *гідродинамічної теорії змащування*. Ці задачі розв'язуються шляхом інтегрування диференціальних рівнянь Нав'є-Стокса, в яких нехтовно малими вважають масові сили та сили інерції, а враховують тільки сили в'язкості та тиску.

### 8.1 ТЕЧІЯ В'ЯЗКОЇ РІДИНИ МІЖ ДВОМА СПІВВІСНИМИ ЦИЛІНДРАМИ, ЩО ОБЕРТАЮТЬСЯ

Розглянемо рух в'язкої рідини у кільцевому зазорі між двома циліндрами, що обертаються навколо спільної осі, котра збігається з віссю  $oz$  (рисунок 8.1). Внутрішній циліндр, радіусом  $R_1$ , обертається з кутовою швидкістю  $\omega_1$ , а зовнішній, радіусом  $R_2$ , – з кутовою швидкістю  $\omega_2$ . Течію вважатимемо двовимірною, усталеною і ламінарною, а рідину нестисливою.

Для задач, де течія має вісьову симетрію, зручно користуватися циліндричною системою координат, в якій *диференціальні рівняння нерозривності* (3.19) має вигляд

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_r}{r} = 0, \quad (8.1)$$

а система диференціальних рівнянь Нав'є-Стокса (4.38)

$$\left. \begin{aligned} F'_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left( \nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) &= \\ = \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} \\ F'_\theta - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \nu \left( \nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) &= \\ = \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} - \frac{u_r u_\theta}{r} \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \nabla^2 u_z &= \\ = \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{aligned} \right\}, \quad (8.2)$$

$$\text{де } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Оскільки канал, в якому відбувається рух, вісесиметричний, то лінії течії є концентричними колами. Отже,  $u_r = 0$ , а тиск не залежить від координати  $\theta$ . Крім того, для двовимірної течії  $u_z = 0$  і всі похідні по  $z$  також дорівнюють нулю. Тоді формула (8.1) скорочується до вигляду

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0, \quad (8.3)$$

а за умови нехтування масовими силами і силами інерції система (8.2) скорочується до вигляду

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} &= \frac{u_\theta^2}{r}; \\ \frac{d^2 u_\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_\theta}{dr} - \frac{u_\theta}{r^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

(часткові похідні замінені на повні з тієї причини, що параметри потоку залежать лише від координат  $r$ ).

Оскільки друге рівняння містить тільки одну змінну, то його можна розв'язувати незалежно від першого. Представивши швидкість  $u_\theta = r^k$ , друге рівняння (8.4) диференціюванням легко зводиться до вигляду

$$k(k-1)r^{k-2} + kr^{k-2} - r^{k-2} = 0. \quad (8.5)$$

Звідки

$$k^2 - 1 = 0, \quad (8.6)$$

тобто  $k = \pm 1$ .

Таким чином, загальним розв'язком є

$$u_\theta = \frac{C_1}{r} + C_2 r. \quad (8.7)$$

Щоб визначити сталі інтегрування, скористаємося такими граничними умовами: при  $r = R_1$   $u_{\theta 1} = \omega_1 R_1$ , а при  $r = R_2$   $u_{\theta 2} = \omega_2 R_2$ . Тоді

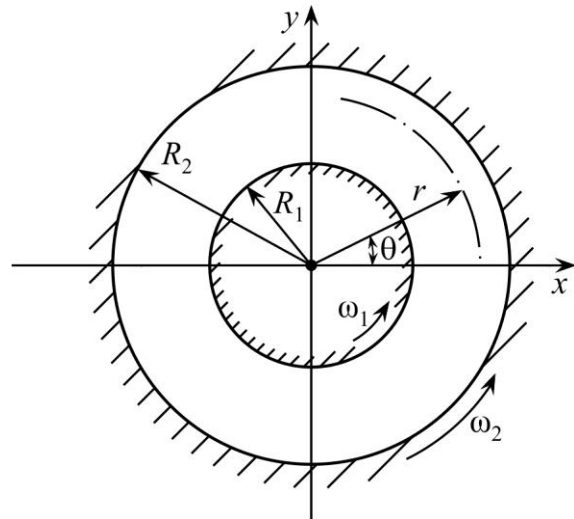


Рисунок 8.1 – Течія в'язкої рідини між співвісними циліндрами, що обертаються



$$\left. \begin{aligned} \omega_1 R_1 &= \frac{C_1}{R_1} + C_2 R_1 \\ \omega_2 R_2 &= \frac{C_1}{R_2} + C_2 R_2 \end{aligned} \right\} \quad (8.8)$$

Розв'язавши цю систему, дістанемо, що

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= R_1^2 R_2^2 \frac{\omega_1 - \omega_2}{R_2^2 - R_1^2} \\ C_2 &= \frac{\omega_2 R_2^2 - \omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \end{aligned} \right\}, \quad (8.9)$$

а рівняння (8.7) набирає вигляду

$$\begin{aligned} u_\theta &= \frac{1}{r} R_1^2 R_2^2 \frac{\omega_1 - \omega_2}{R_2^2 - R_1^2} + r \frac{\omega_2 R_2^2 - \omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} = \\ &= \frac{1}{R_2^2 - R_1^2} \left[ \frac{R_1^2 R_2^2 (\omega_1 - \omega_2)}{r} + r (\omega_2 R_2^2 - \omega_1 R_1^2) \right]. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Отриманий таким чином закон розподілу швидкостей в кільцевому зазорі є лінійним і дозволяє вивести формулу дотичних напружень. З цією метою розглянемо розподіл швидкостей, наприклад для випадку, коли  $\omega_1 < \omega_2$  (рисунок 8.2).

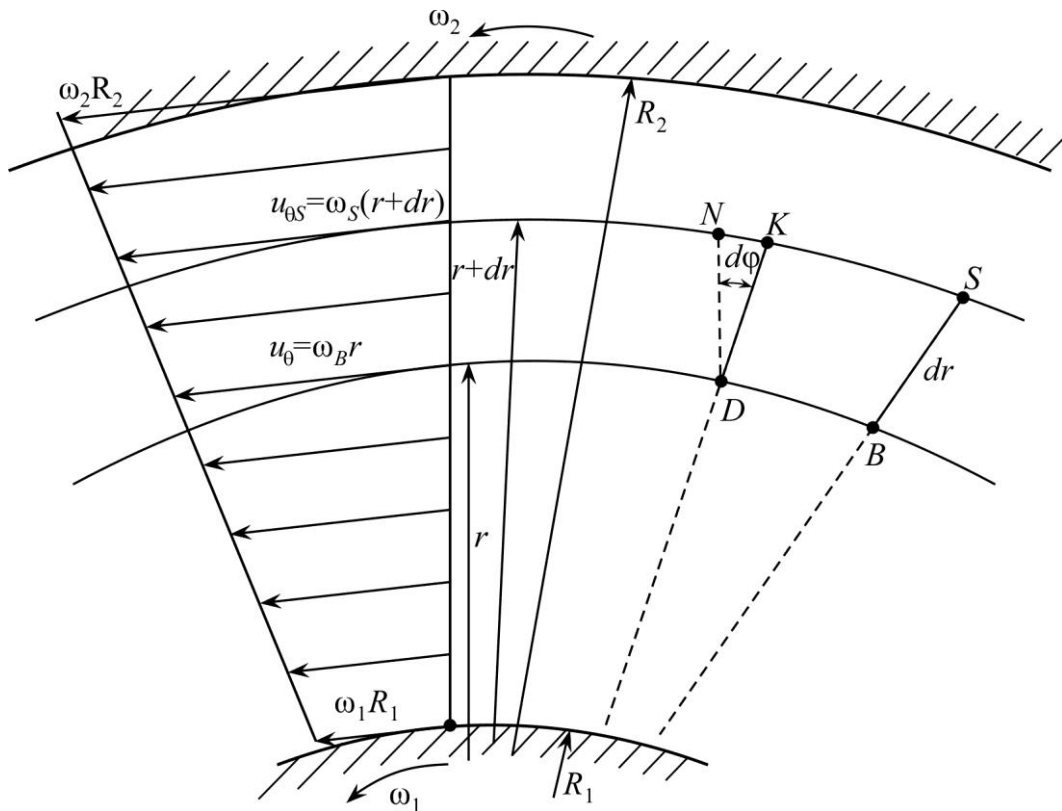


Рисунок 8.2 – Розподіл швидкостей в кільцевому зазорі

Виділимо в рухомій в'язкій рідині за допомогою двох циліндричних поверхонь з радіусами  $r$  і  $r + dr$  елементарно тонкий шар. Очевидно, що кутова швидкість на колі з радіусом  $r$  дорівнює  $\omega_B = \frac{u_\theta}{r}$ . Тоді кутова швидкість на колі з радіусом  $r + dr$  становитиме

$$\omega_S = \omega_B + \frac{d\omega_B}{dr} dr = \frac{u_\theta}{r} + \frac{d}{dr} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) dr, \quad (8.11)$$

а довжина шляху, що пройде елементарна частинка по цьому колу за час  $dt$ ,

$$l_{SN} = \omega_S (r + dr) dt = \left[ \frac{u_\theta}{r} + \frac{d}{dr} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) dr \right] (r + dr) dt \quad (8.12)$$

(кривизною відрізків нехтуємо).

Якщо  $\omega_1 = \omega_2 = \text{const}$  і всі шари рідини обертаються з однаковою кутовою швидкістю  $\omega = \frac{u_\theta}{r}$ , то рідина рухається без деформації – як тверде тіло. Тоді за час  $dt$  частинка пройде шлях

$$l_{SK} = \omega (r + dr) dt = \frac{u_\theta}{r} (r + dr) dt. \quad (8.13)$$

Таким чином, як видно з рисунку, у випадку  $\omega_1 \neq \omega_2$  відбувається кутова деформація  $d\varphi$ , величина котрої залежить від відстані,

$$\begin{aligned} l_{KN} = l_{SN} - l_{SK} &= \left[ \frac{u_\theta}{r} + \frac{d}{dr} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) dr \right] (r + dr) dt - \frac{u_\theta}{r} (r + dr) dt = \\ &= \left[ r \frac{d}{dr} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) dr + \frac{d}{dr} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) dr dr \right] dt = r \frac{d}{dr} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) dr dt \end{aligned} \quad (8.14)$$

(величиною вищого порядку малості нехтуємо).

Вважаючи кутову деформацію невеликою,

$$d\varphi = \text{tg } d\varphi = \frac{l_{KN}}{dr} = r \frac{d}{dr} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) dt. \quad (8.15)$$

У пункті 1.2.4 на підставі аналізу деформації рідкої частинки дійшли висновку, що дотичні напруження пропорційні швидкості кутової деформації рідкої частинки. Отже, закон в'язкого тертя Ньютона (1.22) для рідкого тіла циліндричної форми можна записати так:

$$\tau = \mu \frac{d\varphi}{dt} = \mu r \frac{d}{dr} \left( \frac{u_\theta}{r} \right). \quad (8.16)$$

Підставляючи до рівняння (8.16) закон розподілу швидкостей (8.10), дістаємо

$$\begin{aligned}\tau &= \mu r \frac{1}{R_2^2 - R_1^2} \left[ \frac{d}{dr} \left( \frac{R_1^2 R_2^2 (\omega_1 - \omega_2)}{r^2} \right) + \frac{d}{dr} (\omega_2 R_2^2 - \omega_1 R_1^2) \right] = \\ &= \mu r \frac{1}{R_2^2 - R_1^2} \left[ -2 \frac{R_1^2 R_2^2 (\omega_1 - \omega_2)}{r^3} + 0 \right] = -2\mu \frac{R_1^2 R_2^2 (\omega_1 - \omega_2)}{(R_2^2 - R_1^2) r^2}.\end{aligned}\quad (8.17)$$

З рівняння (8.17) видно, що у міру наближення до поверхні зовнішнього циліндра дотичні напруження зменшуються.

Сила в'язкого тертя на циліндричній поверхні, довжина твірної котрої  $H$ , а радіус  $r$ ,

$$F_\mu = \tau 2\pi r H = -4\pi\mu H \frac{R_1^2 R_2^2 (\omega_1 - \omega_2)}{(R_2^2 - R_1^2) r}.\quad (8.18)$$

Сумарний момент цієї сили відносно осі обертання

$$M = F_\mu r = -4\pi\mu H \frac{R_1^2 R_2^2 (\omega_1 - \omega_2)}{R_2^2 - R_1^2},\quad (8.19)$$

як бачимо, не залежить від радіуса кола.

Якщо розглянути конкретний випадок змащування нерухомого підшипника ( $\omega_2 = 0$ ) і співвісної шийки вала та при цьому загальну товщину в'язкої рідини  $\delta = R_2 - R_1$  вважати малою, то сила

$$\begin{aligned}F_\mu &= -4\pi\mu H \omega_1 \frac{R_1^2 R_2^2}{(R_2^2 - R_1^2) r} = -4\pi\mu H \omega_1 \frac{R_1^2 (R_1 + \delta)^2}{[(R_1 + \delta)^2 - R_1^2] (R_1 + n\delta)} = -4\pi\mu H \omega_1 \times \\ &\times \frac{R_1^4 + 2R_1^3\delta + R_1^2\delta^2}{2R_1^2\delta + 2R_1 n\delta^2 + R_1 \delta^2 + n\delta^3} \approx -2\pi\mu H \omega_1 \frac{R_1^2}{\delta} = -2\pi\mu H R_1 \frac{u_{\theta 1}}{\delta} = -\mu A \frac{u_{\theta 1}}{\delta}\end{aligned}\quad (8.20)$$

(тут  $r = R_1 + n\delta$ , де  $0 < n < 1$ ; також вважалося, що  $R_1^4 \gg 2R_1^3\delta \gg R_1^2\delta^2$  та  $2R_1^2\delta \gg 2R_1 n\delta^2 \gg R_1 \delta^2 \gg n\delta^3$ ), а її момент

$$\begin{aligned}M &= -4\pi\mu H \omega_1 \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} = -4\pi\mu H \omega_1 \frac{R_1^2 (R_1 + \delta)^2}{(R_1 + \delta)^2 - R_1^2} = -4\pi\mu H \omega_1 \times \\ &\times \frac{R_1^4 + 2R_1^3\delta + R_1^2\delta^2}{2R_1 \delta + \delta^2} \approx -2\pi\mu H \omega_1 \frac{R_1^3}{\delta} = -2\pi\mu H R_1^2 \frac{u_{\theta 1}}{\delta} = -\mu A R_1 \frac{u_{\theta 1}}{\delta}\end{aligned}\quad (8.21)$$

( $R_1^4 \gg 2R_1^3\delta \gg R_1^2\delta^2$ ,  $2R_1 \delta \gg \delta^2$ ).

Наведені вище формули вперше були отримані М. П. Петровим. *Формули Петрова* (8.20) і (8.21) вказують на те, що сила тертя та її момент на відміну від залежностей для сухого тертя від зовнішнього навантаження на шийку валу не залежать, а визначаються, окрім геометричних параметрів, частотою обертання і величинами в'язкості та товщини шару змащувальної рідини. До робіт М. П. Петрова сила тертя в підшипниках визначалась за формулою  $F = fG$  (де  $f$  – коефіцієнт тертя, а  $G$  – зовнішнє навантаження), що не відповідало фізичній суті явища і спростовувалося дослідними даними. Слід відмітити, що формула (8.20) майже збігається із законом в'язкого тертя (1.20), тому формулу (1.22) інколи називають формулою Ньютона-Петрова.

Формули Петрова мають один суттєвий недолік, котрий викликаний умовами постановки задачі, а саме – умовою симетричності течії, яка відбувається між двома співвісними циліндрами. Співвісність обумовлює не тільки симетричність ліній течії відносно осі обертання, а й симетричність розподілу тиску по поверхням і внутрішнього, і зовнішнього циліндрів. Очевидним наслідком цього є те, що рівнодіюча сил тиску, як і сил в'язкого тертя, дорівнює нулю. Це означає, що підшипник не може нести ніякого зовнішнього навантаження. Відтак, застосування формул Петрова обмежується умовою відсутності зовнішнього (нормального до осі циліндричних поверхонь) навантаження.

## 8.2 ЗМАЩУВАННЯ ПЛОСКИХ ПОВЕРХОНЬ

Найпростішою задачею гідродинамічної теорії змащування, котра дає уяву про причини виникнення у рухомому тонкому шарі в'язкої рідини сили, що врівноважує зовнішнє навантаження, є задача про змащувальний шар між двома нахиленими одна до одної під малим кутом поверхнями (її називають *задачею про клиноподібний змащувальний шар*).

Нехай нижня пластина є горизонтальною і рухається зі швидкістю  $u_0$  у бік, протилежний осі  $ox$  (рисунок 8.3), а верхня, проекція котрої на цю вісь дорівнює  $l$ , нерухома. Як і в попередній задачі, течію вважатимемо двовимірною (оскільки ширина пластин  $H$  набагато більша за товщину зазору), усталеною і ламінарною, а рідину нестисливою.

Позначимо через  $h_0$  і  $h_1$  висоти вихідного і вхідного перерізів, а через  $h$  – його плинну висоту, причому

$$h = h_0 \left( 1 + k \frac{x}{l} \right), \quad (8.22)$$

де  $k = \frac{h_1 - h_0}{h_0} > 0$  – геометричний параметр;

$x$  – плинне значення поздовжньої координати.

Для умов даної задачі  $u_z = 0$  (течія двовимірною) і всі похідні за часом також дорівнюють нулю (течія усталена). Оскільки верхня пластина нахилена до нижньої під малим кутом ( $l \gg h_1 - h_0$ ), то  $u_x \gg u_y$ , тобто поперечною складовою швидкості змащувальної рідини можна знехтувати. З цієї самої причини  $\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}$ .

Таким чином, диференціальне рівняння Нав'є-Стокса (4.38) для даної задачі спрощується до вигляду

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (8.23)$$

а диференціальне рівняння нерозривності (3.19)

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \quad (8.24)$$

(враховані дві похідні, оскільки вони хоч і є малими, але мають один порядок).

Інтегрування першого рівняння системи (8.23) дає

$$u_x = \frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} y^2 + C_1 y + C_2. \quad (8.25)$$

Граничними є такі умови: при  $y = 0$   $u_x = -u_0$ , при  $y = h$   $u_x = 0$  і при  $x = 0$  та  $x = l$   $P = P_0$ , де  $P_0$  – зовнішній тиск (тиск поза клиноподібним змащувальним шаром). Тоді

$$\left. \begin{aligned} -u_0 &= C_2; \\ 0 &= \frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} h^2 + C_1 h + C_2 \end{aligned} \right\}. \quad (8.26)$$

Звідки

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{u_0}{h} - \frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} h \\ C_2 &= -u_0 \end{aligned} \right\}. \quad (8.27)$$

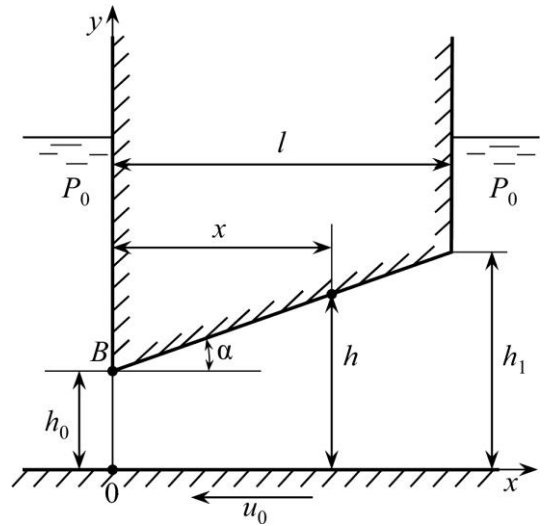


Рисунок 8.3 – Клиноподібний змащувальний шар

Підставляючи значення констант до формули (8.25), після елементарних перетворень дістаємо закон розподілу швидкостей у клиноподібному змашувальному шарі

$$u_x = \frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} y(y-h) - u_0 \left(1 - \frac{y}{h}\right). \quad (8.28)$$

Інтегрування сталості витрати вздовж шару

$$\int_0^h u_x dy = \text{const}. \quad (8.29)$$

Після підстановки рівняння (8.28) до (8.29) та інтегрування, дістаємо

$$\int_0^h \left[ \frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} y(y-h) - u_0 \left(1 - \frac{y}{h}\right) \right] dy = -\frac{1}{12\mu} \frac{dP}{dx} h^3 - u_0 \frac{h}{2} = \text{const}, \quad (8.30)$$

або

$$\frac{1}{6\mu} \frac{dP}{dx} h^3 + u_0 h = \text{const}. \quad (8.31)$$

З останньої граничної умови випливає, що в інтервалі поздовжньої координати від 0 до  $l$  має існувати таке значення  $x_m$ , при якому виконується умова  $\frac{dP}{dx} = 0$ . Якщо через  $h_m$  позначити висоту шару, де  $x = x_m$ , то з умови (8.31) матимемо

$$u_0 h_m = \text{const}. \quad (8.32)$$

Таким чином, порівнюючи останні два рівняння,

$$\frac{1}{6\mu} \frac{dP}{dx} h^3 + u_0 h = u_0 h_m. \quad (8.33)$$

Звідки

$$\frac{dP}{dx} = \frac{6\mu(u_0 h_m - u_0 h)}{h^3} = \frac{6\mu}{h^3} u_0 (h_m - h). \quad (8.34)$$

Друга похідна тиску по поздовжній координаті

$$\left( \frac{d^2 P}{dx^2} \right)_{x=x_m} = -\frac{6\mu}{h^3} u_0 \frac{dh}{dx}. \quad (8.35)$$

З рівняння (8.22) видно, що

$$\frac{dh}{dx} = \frac{h_0 k}{l} > 0. \quad (8.36)$$

Відтак,  $\frac{d^2 P}{dx^2} < 0$ , а отже, в точці  $x = x_m$  ( $h = h_m$ ) тиск досягає максимального значення.

Використавши рівняння (8.22), закон розподілу тиску (8.33) подамо так:

$$\frac{dP}{dx} = \frac{dP}{dh} \frac{dh}{dx} = \frac{dP}{dh} \frac{h_0 k}{l}. \quad (8.37)$$

Тоді закон розподілу тиску в поперечній до осі  $ox$  площині

$$\frac{dP}{dh} = \frac{\frac{dP}{dx}}{\frac{h_0 k}{l}} = \frac{\frac{6\mu}{h^3} u_0 (h_m - h)}{\frac{h_0 k}{l}} = \frac{6\mu u_0 (h_m - h) l}{h^3 h_0 k}. \quad (8.38)$$

Розділивши змінні та проінтегрувавши, дістаємо

$$P = \int_0^h \frac{6\mu u_0 (h_m - h) l}{h^3 h_0 k} dh = \frac{6\mu u_0 l}{h_0 k} \left( \int_0^h \frac{h_m}{h^3} dh - \int_0^h \frac{dh}{h^2} \right) = \frac{6\mu u_0 l}{h_0 k} \left( \frac{1}{h} - \frac{h_m}{2h^2} \right) + C \quad (8.39)$$

З граничної умови для тиску

$$\left. \begin{aligned} P_0 &= \frac{6\mu u_0 l}{h_0 k} \left( \frac{1}{h_0} - \frac{h_m}{2h_0^2} \right) + C \\ P_0 &= \frac{6\mu u_0 l}{h_0 k} \left( \frac{1}{h_1} - \frac{h_m}{2h_1^2} \right) + C \end{aligned} \right\}. \quad (8.40)$$

З урахуванням того, що  $h_1 = h_0(k+1)$ ,

$$\frac{1}{h_0} - \frac{h_m}{2h_0^2} = \frac{1}{h_0(k+1)} - \frac{h_m}{2h_0^2(k+1)^2}. \quad (8.41)$$

Звідки після нескладних перетворень

$$h_m = 2h_0 \frac{k+1}{k+2}. \quad (8.42)$$

Підставивши отримане значення  $h_m$  до першого рівняння системи (8.40), дістаємо

$$C = P_0 - \frac{6\mu u_0 l}{kh_0^2} \frac{1}{k+2}. \quad (8.43)$$

Тепер закон розподілу тиску (8.39) з урахуванням рівнянь (8.22), (8.42) і (8.43)

$$P = P_0 + \frac{6\mu u_0 l}{h_0 k} \left( \frac{1}{h} - \frac{h_m}{2h^2} \right) - \frac{6\mu u_0 l}{kh_0^2} \frac{1}{k+2} = P_0 + \frac{6\mu u_0 l}{h_0^2 k} \left( \frac{l}{l+kx} - \frac{1}{k+2} - \frac{k+1}{k+2} \frac{1}{(1+kx/l)^2} \right) = P_0 + \frac{6\mu u_0 l}{h_0^2 k} \left( \frac{l}{l+kx} - \frac{1}{k+2} - \frac{k+1}{k+2} \frac{l^2}{(l+kx)^2} \right). \quad (8.44)$$

Якщо скористатися формулами (8.42) і (8.22), то отримаємо рівність

$$2h_0 \frac{k+1}{k+2} = h_0 \left( 1 + k \frac{x_m}{l} \right), \quad (8.45)$$

з якої можна дістати просте рівняння для координати точки максимального тиску

$$x_m = \frac{l}{k+2}. \quad (8.46)$$

Сила тиску  $F$ , котра підтримує повзун з шириною  $H$ , виникає під дією різниці тисків  $P - P_0$ . Її величина

$$F = H \int_0^l (P - P_0) dx = H \frac{6\mu u_0 l}{h_0^2 k} \int_0^l \left( \frac{l}{l+kx} - \frac{1}{k+2} - \frac{k+1}{k+2} \frac{l^2}{(l+kx)^2} \right) dx. \quad (8.47)$$

Замінивши змінні ( $l+kx = y$ ,  $x = \frac{y-l}{k}$ ,  $dx = \frac{dy}{k}$ ,  $y_1 = l$  і  $y_2 = l(1+k)$ ),

після інтегрування дістаємо

$$F = H \frac{6\mu u_0 l^2}{h_0^2 k^2} \left[ \ln(1+k) - \frac{2k}{k+2} \right]. \quad (8.48)$$

Зворотна пропорціональність сили тиску, котра компенсує зовнішнє навантаження, квадрату товщини  $h_0$  засвідчує, що зростання цього навантаження приводить до зменшення  $h_0$  і відповідного збільшення  $F$ . Таким чином, за рахунок зміни товщини шару змащувальної рідини компенсація зовнішнього навантаження відбувається автоматично, шляхом своєрідної саморегуляції. Зрозуміло, що це відбувається тільки за умови руху нижньої пластини ліворуч або верхньої (повзуна) – праворуч (рисунок 8.3). Якщо поверхні нерухомі, то  $F = 0$ .

Легко показати, що

$$\frac{l}{k} = \frac{h_0}{\operatorname{tg} \alpha}. \quad (8.49)$$

$$F = H \frac{6\mu u_0}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \left[ \ln \left( 1 + \frac{l \operatorname{tg} \alpha}{h_0} \right) - \frac{\operatorname{Тоді} \frac{2 l \operatorname{tg} \alpha}{h_0}}{\frac{l \operatorname{tg} \alpha}{h_0} + 2} \right], \quad (8.50)$$



тобто сила залежить від кута нахилу між поверхнями.

Якщо з рівняння (8.48) взяти похідну по  $k$  і прирівняти її до нуля

$$\frac{dF}{dk} = H \frac{6\mu u_0 l^2}{h_0^2} \frac{d}{dk} \left[ \frac{\ln(1+k)}{k^2} - \frac{2}{k(k+2)} \right] = 0, \quad (8.51)$$

то в результаті цієї дії дістанемо

$$\ln(1+k) = \frac{k(5k^2 + 12k + 8)}{2(1+k)(2+k)^2}. \quad (8.52)$$

Розв'язок рівняння (8.52)  $k = 1,19$ . Можна переконатися, що  $\left( \frac{d^2 F}{dk^2} \right)_{k=1,19} < 0$ , а отже, цей розв'язок відповідає максимальному значенню сили тиску. Підставивши  $k = 1,19$  до рівняння (8.48), отримаємо формулу для максимальної сили

$$F_m = 0,16H\mu u_0 \frac{l^2}{h_0^2} = 0,16A\mu u_0 \frac{l}{h_0^2}, \quad (8.53)$$

а скориставшись рівнянням (8.46), легко визначити координату точки з максимальним тиском при  $k = 1,19$

$$x_m = 0,313l. \quad (8.54)$$

Момент сил тиску відносно точки  $B$  (рисунок 8.3)

$$M = H \cos \alpha \int_0^l (P - P_0) x dx = H \cos \alpha \frac{6\mu u_0 l}{h_0^2 k} \int_0^l \left( \frac{x l}{l+kx} - \frac{x}{k+2} - \frac{k+1}{k+2} \frac{x l^2}{(l+kx)^2} \right) dx. \quad (8.55)$$

Після застосування згаданої вище заміни змінних та інтегрування дістаємо

$$M = H \frac{6\mu u_0 l^3}{2h_0^2 k^3 (2+k)} \left[ k^2 + 6k - 2(3+2k) \ln(1+k) \right] \quad (8.56)$$

(оскільки кут  $\alpha$  малий, то вважатимемо, що  $\cos \alpha = 1$ ).

Тоді, використавши рівняння (8.48), легко визначити координату *центру тиску*

$$x_F = \frac{M}{F} = l \frac{k^2 + 6k - 2(3+2k) \ln(1+k)}{2k \left[ (2+k) \ln(1+k) - 2k \right]}. \quad (8.57)$$

У випадку  $k = 1,19$   $x_F = 0,423l$ , тобто рівнодіюча прикладена ближче до початку координат, що обумовлено характером розподілу тиску.

Скориставшись законом в'язкого тертя Ньютона і законом розподілу швидкостей в клиноподібному змащувальному шарі (8.28), визначимо в'язкісні дотичні напруження на поверхні нижньої (рухомої) пластини

$$\tau_0 = \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} y(y-h) - u_0 \left( 1 - \frac{y}{h} \right) \right] = \mu \frac{u_0}{h} - \frac{h}{2} \frac{dP}{dx}, \quad (8.58)$$

а з урахуванням рівнянь (8.22) і (8.44)

$$\tau_0 = \mu \frac{u_0}{h_0 \left( 1 + k \frac{x}{l} \right)} - \frac{1}{2} h_0 \left( 1 + k \frac{x}{l} \right) \frac{d}{dx} \left[ P_0 + \frac{6\mu u_0 l}{h_0^2 k} \left( \frac{l}{l+kx} - \frac{1}{k+2} - \frac{k+1}{k+2} \frac{l^2}{(l+kx)^2} \right) \right] = \mu \frac{u_0}{h_0} \left[ \frac{4l}{l+kx} - \frac{6(1+k)}{2+k} \frac{l^2}{(l+kx)^2} \right]. \quad (8.59)$$

Тоді сила в'язкого тертя на нижній пластині

$$\begin{aligned} F_\mu &= H \int_0^l \tau_0 dx = H \int_0^l \mu \frac{u_0}{h_0} \left[ \frac{4l}{l+kx} - \frac{6(1+k)}{2+k} \frac{l^2}{(l+kx)^2} \right] dx = \\ &= \mu l H \frac{u_0}{h_0} \left[ \frac{4}{k} \ln(1+k) - \frac{6}{2+k} \right]. \end{aligned} \quad (8.60)$$

Зокрема, при  $k = 1,19$

$$F_\mu = 0,754 H \mu u_0 \frac{l}{h_0} = 0,754 A \mu \frac{u_0}{h_0}. \quad (8.61)$$

Можна помітити, що ця формула відрізняється від отриманої у попередньому підрозділі формули Петрова (8.20) лише коефіцієнтом, котрий враховує змінність товщини шару.

Відношення максимальної сили тиску до відповідної сили в'язкого тертя

$$\frac{F_m}{F_\mu} = \frac{0,16 A \mu u_0 l h_0}{0,754 A \mu u_0 h_0^2} = 0,212 \frac{l}{h_0}. \quad (8.62)$$

Оскільки  $l \gg h_0$ , то сила тиску в клиноподібному змащувальному шарі набагато більша за силу в'язкого тертя.

З формули (8.28) видно, що швидкість  $u_x$  в деяких зонах шару змащувальної рідини може бути величиною позитивною – течія за деякого збігу параметрів може відбуватися у бік, зворотний швидкості  $u_0$ , тобто можуть виникати зворотні течії, котрі супроводжуються відривом рідини від твердої поверхні. Фізично це пояснюється характером розподілу тиску вздовж потоку. Для наочності на рисунку 8.4 наведений графік зміни тиску, відповідний до формули (8.44), з якого видно, що при  $x > x_m$  течія відбувається в умовах

зростання тиску. Подолання сил тиску і сил в'язкого тертя відбувається за рахунок кінетичної енергії. Ті рідкі частинки, котрі знаходяться ближче до верхньої (нерухомої) поверхні, мають менший запас цієї енергії та під дією сил тиску можуть рухатися у протилежний бік (рисунок 8.5), створюючи таким чином зворотну течію (природа цього явища аналогічна відриву пограничного шару, розглянутого в пункті 7.1.6).

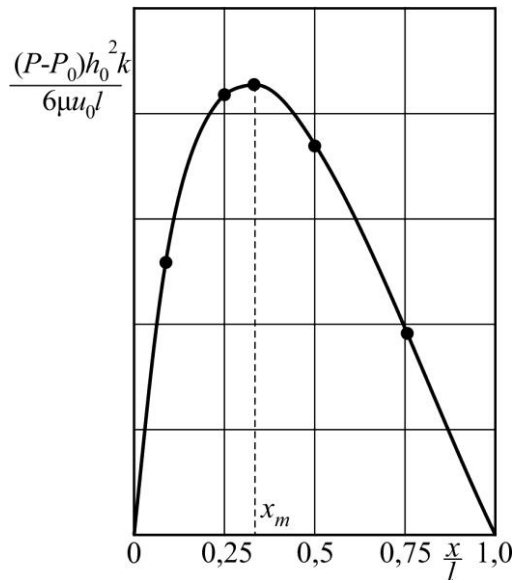


Рисунок 8.4 – Характер розподілу тиску вздовж клиноподібного змащувального шару

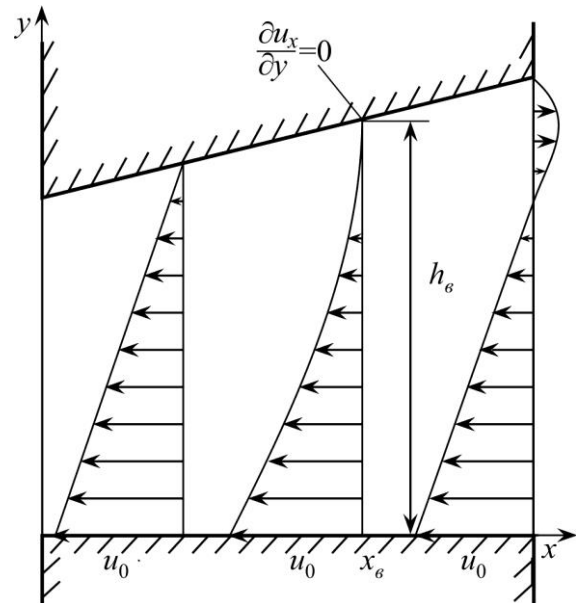


Рисунок 8.5 – Зворотна течія в клиноподібному змащувальному шарі

Координату точку відриву можна визначити з умови

$$\left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)_{y=h_g} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} y(y-h) - u_0 \left( 1 - \frac{y}{h} \right) \right]_{y=h_g} = 0 \quad (8.63)$$

Звідки

$$\frac{h_g}{2\mu} \frac{dP}{dx} + \frac{u_0}{h_g} = 0. \quad (8.64)$$

З урахуванням рівнянь (8.34), (8.22) і (8.46)

$$\frac{h_g}{2\mu} \frac{6\mu u_0}{h_g^3} (h_m - h_g) + \frac{u_0}{h_g} = 0, \quad (8.65)$$

$$h_g = \frac{3}{2} h_m, \quad (8.66)$$

$$x_g = l \frac{1+2k}{k(k+2)}, \quad (8.67)$$

де  $x_g$  – координата шару рідини, в якому починається відрив;  
 $h_g$  – товщина цього шару.

Останнє рівняння засвідчує таке: при  $k \leq 1$   $x_g \geq l$ , а отже, відриву не відбувається; при  $k > 1$ , тобто коли  $\operatorname{tg} \alpha > \frac{h_0}{l}$ , поблизу верхньої пластини відбувається відрив і зворотна течія. Зокрема, при  $k = 1,19$   $x_g = 0,89l$ .

Найбільшим значенням геометричного параметра  $k$ , при якому не відбувається зворотна течія і не порушується суцільність змащувального шару,  $k = 1$ . При цьому сила тиску

$$F_m = 0,159 A \mu u_0 \frac{l}{h_0^2} \quad (8.68)$$

і сила в'язкого тертя

$$F_\mu = 0,773 A \mu \frac{u_0}{h_0} \quad (8.69)$$

мало відрізняються від значень, що відповідають  $k = 1,19$ .

Таким чином, з розглянутого вище впливає важливий для всієї гідродинамічної теорії змащування висновок про природу підтримуючої сили: *при відносному русі двох нахилених одна до одної поверхонь (як це показано на рисунку 8.3) відбувається підтиснення змащувальної рідини ззовні у простір між цими поверхнями, що приводить до зростання тиску і виникнення поперечної сили  $F$ .*

Оскільки

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{6 \mu l u_0}{h_0^2 k} \left[ \frac{l}{l + kx} - \frac{1}{k + 2} - \frac{k + 1}{k + 2} \frac{l^2}{(l + kx)^2} \right] = 0, \quad (8.70)$$

то при  $k = 0$ , як це видно з рівняння (8.44), тиск між поверхнями  $P$  дорівнює зовнішньому  $P_0$  і  $F = 0$  (суворо кажучи, при  $k = 0$  підтримуюча сила дорівнюватиме архімедовій силі, але оскільки величина останньої неспівмірно менша за силу зовнішнього навантаження, то вважають, що  $F = 0$ ).

### 8.3 ТЕЧІЯ В'ЯЗКОЇ РІДИНИ МІЖ ДВОМА ЕКСЦЕНТРИЧНИМИ ЦИЛІНДРАМИ, ЩО ОБЕРТАЮТЬСЯ

З матеріалу підрозділу 8.1 впливає висновок: *при зовнішньому навантаженні співвісне розташування шийки вала і підшипника ковзання неможливе*. Тому більш точно гідродинамічному змащенню підшипника відповідає течія в'язкої рідини між двома ексцентрично розташованими циліндрами, що обертаються.

Розглянемо рух змащувальної рідини в тонкому шарі, котрий утворюється двома ексцентричними циліндричними поверхнями. Нехай

внутрішній циліндр (наприклад шийка вала), радіусом  $R_1$ , обертається зі сталою кутовою швидкістю  $\omega$ , а зовнішній (підшипник), радіусом  $R_2$ , – нерухомий (рисунок 8.6). Течію, як і у випадку співвісних циліндрів, вважатимемо двовимірною, усталеною і ламінарною, а рідину нестисливою.

Оскільки товщина змащувального шару  $h$  мала відносно до радіуса внутрішнього циліндра  $R_1$ , то кривизною його границь можна знехтувати і таким чином звести задачу до випадку плоского клиноподібного змащувального шару (таку задачу називають *задачею Зоммерфельда*). При цьому поздовжня координата  $x$  довільної точки  $B$  відраховується від нерухомої точки  $O$ , котра виділена в перерізі, де товщина  $h$  мінімальна, а поперечна  $y$  – від точки  $A$  по нормалі до кола. Відтак,  $x = OA = R_1\theta$  (де  $\theta$  – кут, що відраховується від лінії  $OO_1$  у бік, протилежний напрямку обертання).

При обраній системі координат граничні умови для швидкостей такі: при  $y = 0$   $u_x = -u_0$  (де  $u_0 = \omega R_1$  –

колова швидкість шийки вала), при  $y = h$   $u_x = 0$ . Вони точно збігаються з умовами для клиноподібного змащувального шару. Отже, для даної задачі справедливі співвідношення (8.28) і (8.34). Однак очевидно, що вигляд залежностей  $h$  від  $x$  і граничні умови для тиску є відмінними.

При малому значенні ексцентриситету  $e$  кут  $\theta$  близький до нуля і з трикутника  $O_1EO_2$  маємо

$$R_2 \approx R_1 + h + e \cos \theta, \quad (8.71)$$

або

$$h = \delta - e \cos \theta, \quad (8.72)$$

де  $\delta = R_2 - R_1$ .

З рисунку 8.6 також можна бачити, що  $\delta \geq e$ . Тому, ввівши у розгляд параметр  $\alpha = \delta/e$  ( $1 \leq \alpha \leq \infty$ ), формулу (8.72) подамо так:

$$h = e(\alpha - \cos \theta). \quad (8.73)$$

Пригадавши, що у загальному випадку

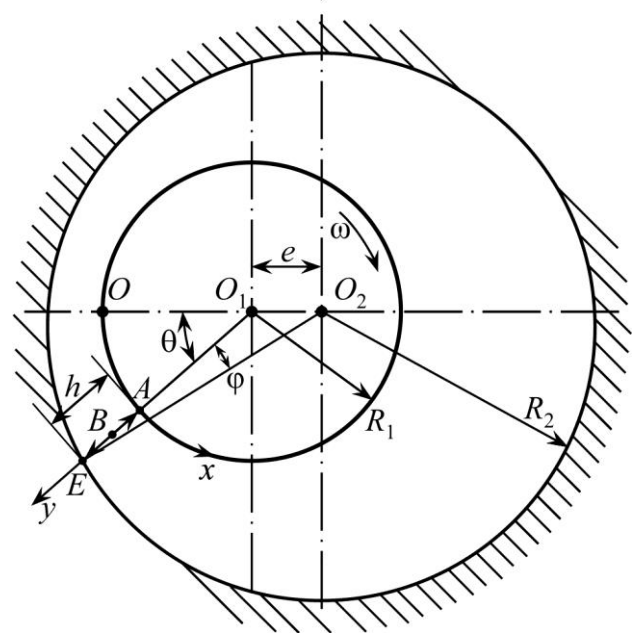


Рисунок 8.6 – Течія в'язкої рідини між ексцентричними циліндрами, що обертаються

$$\frac{dP}{dx} = \frac{1}{R_1} \frac{dP}{d\theta}, \quad (8.74)$$

формулу (8.34) перепишемо у такому вигляді:

$$\frac{dP}{dx} = \frac{6\mu}{h^3} u_0 (h_m - h) = \frac{1}{R_1} \frac{dP}{d\theta}, \quad (8.75)$$

або

$$\frac{dP}{d\theta} = 6\mu u_0 R_1 \left( \frac{h_m}{h^3} - \frac{1}{h^2} \right) = 6\mu u_0 R_1 \left( \frac{h_m}{e^3 (\alpha - \cos\theta)^3} - \frac{1}{e^2 (\alpha - \cos\theta)^2} \right). \quad (8.76)$$

Тоді можна записати

$$P(\theta) - P_0 = 6\mu u_0 R_1 \left( h_m \int_0^\theta \frac{d\theta}{h^3} - \int_0^\theta \frac{d\theta}{h^2} \right), \quad (8.77)$$

де  $P(\theta)$  – тиск у перерізі з довільним кутом  $\theta$ ;

$P_0$  – тиск у початковому перерізі (початковим вважатимемо переріз з мінімальним значенням  $h$ , де  $\theta = 0$ ).

Оскільки шар змащувальної рідини є замкнутим, то функція тиску від кута  $\theta$  є безперервною і періодичною. Ясно, що період дорівнює  $2\pi$ . Тоді  $P_0 = P(2\pi)$  і з формули (8.77) випливає

$$h_m \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{h^3} - \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{h^2} = 0. \quad (8.78)$$

Звідки, скориставшись універсальною тригонометричною підстановкою, можна визначити товщину шару, в якому тиск має максимальне значення,

$$h_m = \frac{\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{h^2}}{\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{h^3}} = \frac{\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{e^2 (\alpha - \cos\theta)^2}}{\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{e^3 (\alpha - \cos\theta)^3}} = e \frac{2\alpha(\alpha^2 - 1)}{2\alpha^2 + 1}. \quad (8.79)$$

З урахуванням цього закон розподілу тиску (8.76) перепишемо так:

$$\frac{dP}{d\theta} = \frac{6\mu u_0 R_1}{e^2} \left[ \frac{2\alpha(\alpha^2 - 1)}{2\alpha^2 + 1} \frac{1}{(\alpha - \cos\theta)^3} - \frac{1}{(\alpha - \cos\theta)^2} \right], \quad (8.80)$$

а рівняння (8.77) після підстановки до нього співвідношення (8.79) та інтегрування набирає вигляду

$$P(\theta) - P_0 = \frac{6\mu u_0 R_1}{e^2} \left[ \frac{2\alpha(\alpha^2 - 1)}{2\alpha^2 + 1} \int_0^\theta \frac{d\theta}{(\alpha - \cos\theta)^3} - \int_0^\theta \frac{d\theta}{(\alpha - \cos\theta)^2} \right] = \quad (8.81)$$

$$= \frac{6\mu u_0 R_1}{\delta^2} \frac{\alpha^2}{2\alpha^2 + 1} \frac{\sin\theta}{\alpha - \cos\theta} \left( 1 + \frac{\alpha}{\alpha - \cos\theta} \right).$$

Отримана формула дозволяє розраховувати тиск у довільному перерізі змащувального шару з точністю до  $P_0$ . Оскільки  $\alpha \geq 1$ , то  $(\alpha - \cos\theta)$  завжди є величиною позитивною і знак різниці  $P(\theta) - P_0$  визначається знаком  $\sin\theta$ . Так, при  $0 \leq \theta \leq \pi$   $P(\theta) - P_0 \geq 0$ , а при  $\pi \leq \theta \leq 2\pi$   $P(\theta) - P_0 \leq 0$ . Ясно також, що в перерізах, де  $\theta = 0$  і  $\theta = \pi$ ,  $P(\theta) = P_0$ . На рисунку 8.7 характер розподілу тиску зображено у вигляді полярної діаграми  $P(\theta) - P_0 = f(\theta)$ , з котрої видно, що тиск на поверхні шийки вала розподіляється нерівномірно, а отже, на відміну від течії між співвісними циліндрами, у цьому випадку виникає поперечна до осі вала сила тиску.

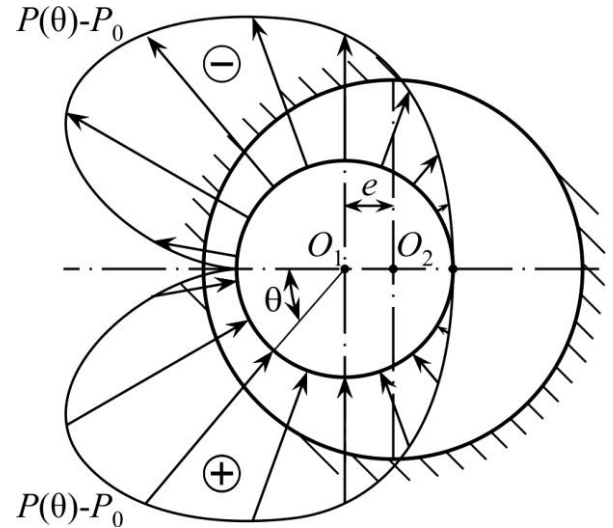


Рисунок 8.7 – Полярна діаграма розподілу тиску на поверхні шийки вала циліндричного підшипника ковзання

*Дотичні напруження на поверхні шийки вала*

$$\tau_0 = \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)_{y=0} = \mu \frac{u_0}{h} - \frac{h}{2} \frac{dP}{dx} = \mu \frac{u_0}{h} - \frac{h}{2R_1} \frac{dP}{d\theta}. \quad (8.82)$$

Використовуючи рівняння (8.80), останнє рівняння зводиться до вигляду

$$\tau_0 = \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)_{y=0} = \mu \frac{u_0}{h} - \frac{h}{2R_1} \left[ \frac{6\mu u_0 R_1}{e^2} \left( \frac{2\alpha(\alpha^2 - 1)}{2\alpha^2 + 1} \frac{1}{(\alpha - \cos\theta)^3} - \frac{1}{(\alpha - \cos\theta)^2} \right) \right] = \frac{2\mu u_0 \alpha}{\delta} \left( \frac{2}{\alpha - \cos\theta} - \frac{3\alpha(\alpha^2 - 1)}{(1 + 2\alpha^2)(\alpha - \cos\theta)^2} \right). \quad (8.83)$$

З формул (8.81) і (8.83) можна помітити, що для будь-якої пари точок  $A_1$  і  $A_2$  шийки вала, симетричних відносно лінії  $O_1O_2$  (рисунок 8.8), справедливі рівняння:

$$P(\theta) - P_0 = -[P(2\pi - \theta) - P_0], \quad (8.84)$$

$$\tau_0(\theta) = \tau_0(2\pi - \theta). \quad (8.85)$$

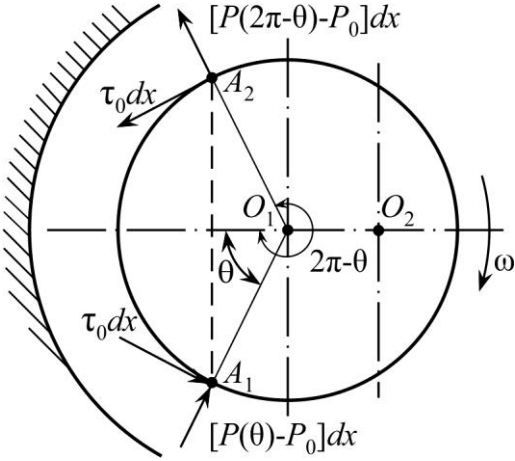


Рисунок 8.8 – Елементарні сили тиску і в'язкого тертя на поверхні шийки вала

Отже, сума проєкцій елементарних сил тиску і в'язкого тертя на лінію  $O_1O_2$  дорівнює нулю, а тому результуюча (підтримуюча) сила спрямована нормально до лінії осей циліндричних поверхонь.

Результуюча сила тиску на шийку вала з довжиною  $H$

$$\begin{aligned} F &= H \int_0^{2\pi} [P(\theta) - P_0] R_1 \sin \theta d\theta = \\ &= HR_1 \int_0^{2\pi} \left[ \frac{6\mu u_0 R_1}{\delta^2} \frac{\alpha^2}{2\alpha^2 + 1} \frac{\sin \theta}{\alpha - \cos \theta} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( 1 + \frac{\alpha}{\alpha - \cos \theta} \right) \right] \sin \theta d\theta = \frac{\alpha^2}{(2\alpha^2 + 1)\sqrt{\alpha^2 - 1}} \frac{6\mu A u_0 R_1}{\delta^2}, \end{aligned} \quad (8.86)$$

де  $A = 2\pi R_1 H$  – площа поверхні шийки вала.

Оскільки лінії дії елементарних сил тиску проходять через вісь внутрішнього циліндра, то момент сил тиску дорівнює нулю.

Результуюча сила в'язкого тертя

$$\begin{aligned} F_\mu &= H \int_0^{2\pi} \tau_0 R_1 d\theta = HR_1 \int_0^{2\pi} \left[ \frac{2\mu u_0 \alpha}{\delta} \left( \frac{2}{\alpha - \cos \theta} - \frac{3\alpha(\alpha^2 - 1)}{(1 + 2\alpha^2)(\alpha - \cos \theta)^2} \right) \right] d\theta = \\ &= \mu \frac{A u_0}{\delta} \frac{2\alpha(\alpha^2 + 2)}{(2\alpha^2 + 1)\sqrt{\alpha^2 - 1}}, \end{aligned} \quad (8.87)$$

а її момент

$$\begin{aligned} M &= H \int_0^{2\pi} \tau_0 R_1^2 d\theta = HR_1^2 \int_0^{2\pi} \left[ \frac{2\mu u_0 \alpha}{\delta} \left( \frac{2}{\alpha - \cos \theta} - \frac{3\alpha(\alpha^2 - 1)}{(1 + 2\alpha^2)(\alpha - \cos \theta)^2} \right) \right] d\theta = \\ &= \mu R_1 \frac{A u_0}{\delta} \frac{2\alpha(\alpha^2 + 2)}{(2\alpha^2 + 1)\sqrt{\alpha^2 - 1}}. \end{aligned} \quad (8.88)$$

Підтримуюча сила, що діє на шийку вала та компенсує зовнішнє навантаження  $G$ , у загальному випадку є сумою рівнодіючих сил тиску  $F$  і в'язкого тертя  $F_\mu$ . Але оскільки сила тиску, як видно з формули (8.86), має порядок  $\delta^{-2}$ , а сила в'язкого тертя  $\delta^{-1}$ , то зважаючи на малість  $\delta$ , вважають, що  $F \gg F_\mu$  і в'язкісною складовою нехтують ( $G = F$ ). Втім, можна стверджувати, що



саме завдяки дії сил в'язкого тертя енергія вала, що обертається, передається рідині. На відміну від, скажімо, руху рідини в трубах, де причиною течії та виникнення сил в'язкого тертя є створена різниця тиску, в клиноподібному змащувальному шарі нерівномірність тиску є наслідком течії в'язкої рідини в каналі змінної площі поперечного перерізу. Оскільки величина сили опору тертя залежить від кута  $\theta$ , то підведена до вала механічна енергія витрачається по-різному: там, де опір течії менший за підведену енергію, частина цієї енергії перетворюється в потенціальну енергію тиску (тиск збільшується), і навпаки – там, де на подолання опору течії витрачається більше енергії, ніж підводиться, цей опір долається за рахунок потенціальної енергії (тиск зменшується). Завдяки дії цього механізму своєрідної саморегуляції накопичення і перетворення енергії з одної форми в іншу, створюється нерівномірність розподілу тиску і виникає поперечна сила. Під дією цієї сили та сили в'язкого тертя вал знаходиться у «плаваючому» стані, тобто поверхні шийки вала і підшипника не дотикаються. При цьому вал зміщується по відношенню до осі підшипника вниз і у бік обертання, як це показано на рисунку 8.6.

Отримані вище співвідношення дозволяють визначити оптимальні умови роботи підшипників ковзання. Приймаючи до уваги формули (8.86) і (8.87), коефіцієнт тертя

$$f = \frac{F_{\mu}}{G} = \frac{F_{\mu}}{F} = \frac{\delta}{3R_1} \frac{2 + \alpha^2}{\alpha}. \quad (8.89)$$

Для визначення величини  $\alpha$ , при якому коефіцієнт тертя є мінімальним, прирівняємо до нуля похідну  $f$  по  $\alpha$

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\delta}{3R_1} \frac{2 + \alpha^2}{\alpha} \right) = \frac{\delta}{3R_1} \left( 1 - \frac{2}{\alpha^2} \right) = 0. \quad (8.90)$$

Оскільки легко бачити, що друга похідна є позитивною, то розв'язок рівняння (8.90)  $\alpha = \sqrt{2}$  відповідає мініимальному значенню коефіцієнта тертя. Причому

$$f_{\min} = \frac{\delta}{3R_1} \frac{2 + 2}{\sqrt{2}} = 0,943 \frac{\delta}{R_1}. \quad (8.91)$$

З урахуванням цього з формули (8.86) нескладно отримати значення колової швидкості  $u_0$ , а отже, і кутової швидкості обертання вала  $\omega$ , які при даному зовнішньому навантаженні  $G = F$  забезпечать мінімальне тертя,

$$u_0 = \frac{F\delta^2(1 + 2\alpha^2)\sqrt{\alpha^2 - 1}}{6\mu AR_1\alpha^2}. \quad (8.92)$$

Якщо ввести у розгляд параметр

$$\beta = \frac{\alpha^2}{(2\alpha^2 + 1)\sqrt{\alpha^2 - 1}}, \quad (8.93)$$

котрий відіграє роль коефіцієнта при силі тиску  $F$  і тому називається коефіцієнтом підтримуючої сили, то рівняння (8.86) перепишемо так:

$$F = \beta \frac{6\mu A u_0 R_1}{\delta^2}. \quad (8.94)$$

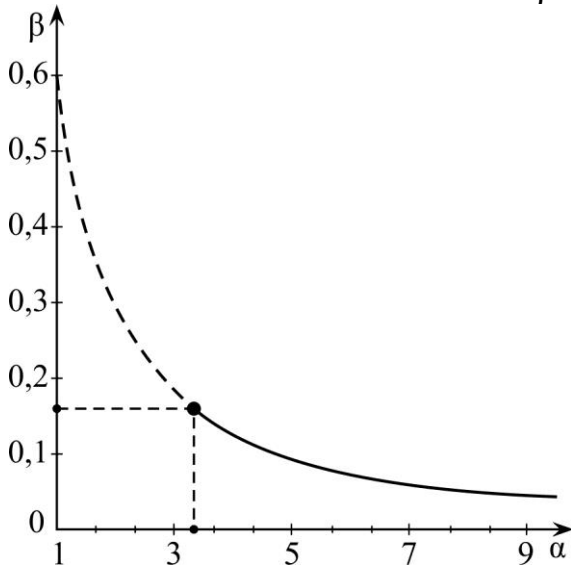


Рисунок 8.9 – Залежність коефіцієнта підтримуючої сили  $\beta$  від параметра  $\alpha$

З формул (8.93) і (8.94) видно, що при дуже малому навантаженні або, навпаки, при дуже великій колівій швидкості, величина  $\beta$  даного підшипника наближається до нуля, а значення  $\alpha$  – до нескінченності (рисунок 8.9). Нескладно також помітити, що абсолютне значення сили в'язкого тертя на поверхні шийки вала при її ексцентричному розташуванні в підшипнику відрізняється від  $F_\mu$  при співвісному обертанні (формула Петрова (8.20) лише числовим коефіцієнтом, котрий враховує ексцентричність поверхонь. Оскільки

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow \infty \\ e \rightarrow 0}} \frac{2\alpha(\alpha^2 + 2)}{(2\alpha^2 + 1)\sqrt{\alpha^2 - 1}} = 1, \quad (8.95)$$

то при  $e = 0$  формула (8.87) переходить у формулу Петрова для співвісних поверхонь. Таким чином, формулу Петрова можна розглядати як граничний випадок або нульового навантаження на вал, або необмежено великої частоти його обертання.

Якщо розглянути інший граничний випадок, коли коефіцієнт  $\alpha$  наближається до одиниці, то оскільки

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow 1 \\ e \rightarrow \delta}} \frac{\alpha^2}{(2\alpha^2 + 1)\sqrt{\alpha^2 - 1}} = \infty, \quad (8.96)$$

з формули (8.94) випливає, що або  $u_0 = 0$ , або  $G = \infty$ .

З рисунку 8.6 видно, що при  $2\pi > \theta > \pi$  течія відбувається в дифузійній частині каналу (верхня половина змащувального шару). Тому в частині цієї зони, як можна переконатися з формули (8.80) або рисунку 8.7, течія відбувається у бік зростання тиску, а швидкість при цьому зменшується і цим створюються умови для відриву змащувальної рідини від твердої поверхні. Очевидно, що, нехтуючи кривизною змащувального шару, умовою відриву можна вважати рівність (8.63), а координата і товщина шару, де цей відрив

відбудеться, визначається формулами (8.67) та (8.66). Тоді, скориставшись рівнянням (8.73),

$$\frac{3}{2}h_m = e(\alpha - \cos\theta_e), \quad (8.97)$$

а скориставшись формулою (8.79), дістаємо для кута відриву

$$\cos\theta_e = -\frac{\alpha^3 - 4\alpha}{2\alpha^2 + 1}. \quad (8.98)$$

Оскільки  $\cos\theta_e$  не може бути більшим від одиниці, то нерівність

$$\alpha^3 - 4\alpha > 2\alpha^2 + 1 \quad (8.99)$$

є умовою безвідривної течії. Її задовольняють значення  $\alpha > \alpha_e = 3,303$ . Тоді з формули (8.93) відповідний коефіцієнт підтримуючої сили  $\beta < 0,152$ , а з формули (8.94) колова швидкість, що відповідає умові суцільності змащувального шару, при заданих навантаженні, геометричних параметрах підшипника і в'язкості рідини

$$u_0 > 1,1 \frac{G\delta^2}{\mu AR_1}. \quad (8.100)$$

Ці граничні значення вперше були розраховані Л. С. Лейбензоном<sup>45</sup>. На рисунку 8.9 частина кривої, яка не відповідає умові безвідривності течії, зображена пунктиром (до речі, значення  $\alpha = \sqrt{2}$ , котре відповідає мінімальній величині коефіцієнта тертя, потрапляє у «неробочий» діапазон).

Отримані вище співвідношення для гідродинамічного змащування підшипника ковзання, виходячи з умов постановки задачі, справедливі тільки для випадку повного заповнення рідиною об'єму між поверхнями, що труться, і коли поверхні безпосередньо не дотикаються. Таке тертя називають *рідинним*, і воно є найкращім як з точки зору мінімізації механічних втрат енергії, так і з точки зору збереження тертьових поверхонь. При цьому  $f \approx 0,001 \dots 0,005$ . Якщо  $\alpha < 3,303$ , течія змащувальної рідини відривна, а тому виведені в цьому розділі розрахункові співвідношення застосовувати неможна. Тертя, при якому суцільність змащувального шару порушена і шийка вала та підшипник у деяких зонах дотикаються, називають *напіврідинним*. Зміна режиму рідинного тертя на напіврідинне може виникати при недостатньому подаванні масла або створенні умов, за яких порушується суцільність змащувального шару, тощо. Область переходу називають *граничним змащуванням*. Коефіцієнт напіврідинного тертя значно більший від рідинного, а отже, більші механічні втрати та

<sup>45</sup> Лейбензон Леонід Самуїлович (1879–1951) – видатний російський і радянський вчений – фахівець у галузі геофізики, теорії пружності, опору матеріалів, гідродинаміки, фільтрації газу і нафти. Працював на різних науково-педагогічних і адміністративних посадах, зокрема у 1934–1936 рр. був директором науково-дослідного інституту механіки Московського державного університету ім. М. В. Ломоносова, з 1943 р. академік АН СРСР.

тепловиділення. Тому зміна режиму тертя погіршує умови роботи підшипника і, особливо при великій частоті обертання валу, може призвести до виходу його з ладу.

Наступними за класифікацією є *напівсухе*, коли поверхні безпосередньо дотикаються на відносно довгих ділянках, а мастило на них знаходиться тільки у вигляді адсорбційної плівки, і *сухе* тертя.

Слід розуміти, що певну огріху в розрахунок змащувального шару підшипника ковзання вносить припущення про двовимірність течії. Насправді нерівномірність тиску спостерігається як по периметру циліндричних поверхонь, так і вздовж їх твірних. Ця нерівномірність залежить не тільки від так званих *краєвих ефектів*, а й від конкретного способу підвода мастила до тертьових поверхонь та можливого викривлення шийки вала.

Зазначимо, що точний розв'язок плоскої задачі гідродинамічного змащування з припущенням про нехтовну малість масових сил і сил інерції був даний М. Є. Жуковським і С. О. Чаплигіним<sup>46</sup>.

## 8.4 ПРИКЛАДИ ЗАДАЧ ДО РОЗДІЛУ 8

1. Нижня пластина клиноподібного змащувального шару рухається відносно верхньої зі швидкістю  $u_0 = 5$  м/с (див. рисунок 8.3). Визначити витрату мастила в'язкістю  $\mu = 0,1$  Па·с у цьому шарі, якщо його ширина  $H = 200$  мм, довжина  $l = 500$  мм, геометричний параметр  $k = 1$ , а зовнішнє навантаження  $G = 2$  кН.

З формули (8.68), приймаючи  $G = F_m$ , дістаємо, що висота вихідного перерізу

$$h_0 = \sqrt{\frac{0,159l^2 H \mu u_0}{G}} = \sqrt{\frac{0,159 \cdot 0,5^2 \cdot 0,2 \cdot 0,1 \cdot 5}{2 \cdot 10^3}} = 1,41 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Тоді за формулою (8.42) визначаємо висоту шару, де спостерігається максимум тиску,

$$h_m = 2h_0 \frac{k+1}{k+2} = 2 \cdot 1,41 \cdot 10^{-3} \frac{1+1}{1+2} = 1,88 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

---

<sup>46</sup> Чаплигін Сергій Олексійович (1869–1942) – видатний російський і радянський вчений у галузі механіки, математики, аеродинаміки, з 1929 р. академік АН СРСР, з 1928 по 1931 рр. директор-начальник Центрального аерогідродинамічного інституту (ЦАГІ) – найбільшого державного наукового авіаційного центру СРСР. З 1931 по 1941 рр. керував створенням аеродинамічної лабораторії ЦАГІ. У своїх перших наукових роботах Чаплигін започаткував вивчення газової динаміки (у її сучасному розумінні), у роботі «Про тиск плоскопаралельного потоку на перешкоди» (1910) шляхом використання теорії функції комплексної змінної він дав аналітичне виведення формули Жуковського для підйомної сили крила. У своїй фундаментальній праці «Теорія ґратчастого крила» (1914) заклав основи теорії обтікання ґраток лопатевих машин циркуляційним потоком. У співпраці з М. Є. Жуковським надрукував роботу «Про тертя в змащувальному шарі між шипом і підшипником» (1906), в якій дано точне розв'язання задачі про рух змащувального шару.

Оскільки при усталеній течії нестисливої рідини витрата однакова в будь-якому перерізі, то її зручно визначити в перерізі з висотою  $h_m$ , де  $dP/dx = 0$ . Відповідно до рівняння (8.30) витрата крізь шар шириною  $H$

$$Q = H \int_0^{h_m} u_x dy = -Hu_0 \frac{h_m}{2} = -0,2 \cdot 5 \frac{1,88 \cdot 10^{-3}}{2} = -9,4 \cdot 10^{-7} \text{ м}^3/\text{с}$$

(знак мінус означає, що мастило рухається у бік, протилежний напрямку осі  $ox$ ).

Порівнюючи останню формулу з рівнянням нерозривності  $Q = vA = vh_m H$ , нескладно помітити, що в шарі з максимальним значенням тиску і висотою  $h_m$  середньовитратна швидкість  $v$  дорівнює половині  $u_0$ .

2. Визначити момент і коефіцієнт тертя підшипника ковзання, навантаженого силою  $G = 40 \text{ кН}$ . Радіус і довжина шийки вала  $R_1 = 40 \text{ мм}$  і  $H = 100 \text{ мм}$ , частота обертання вала  $\omega = 20 \text{ с}^{-1}$ , зазор  $\delta = 5 \cdot 10^{-2} \text{ мм}$ , а в'язкість мастила  $\mu = 0,2 \text{ Па} \cdot \text{с}$ . Як зміняться умови тертя, якщо при інших незмінних умовах в'язкість зменшиться удвічі?

З формули (8.94), приймаючи  $G = F$ , дістаємо, що коефіцієнт підтримуючої сили

$$\beta = \frac{G\delta^2}{6\mu AR_1 u_0} = \frac{G\delta^2}{12\pi\mu R_1^3 H \omega} = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot (5 \cdot 10^{-5})^2}{12 \cdot 0,2 \cdot 3,14 \cdot 0,04^3 \cdot 0,1 \cdot 20} = 0,104.$$

З графіка на рисунку 8.9 визначаємо відповідне значення параметра  $\alpha = 4,8$  (течія мастила безвідривна). Тоді з формули (8.88) момент сил в'язкого тертя

$$M = \frac{2\alpha(\alpha^2 + 2)}{(2\alpha^2 + 1)\sqrt{\alpha^2 - 1}} \frac{2\pi\mu R_1^3 \omega H}{\delta} = \frac{2 \cdot 4,8(4,8^2 + 2)}{(2 \cdot 4,8^2 + 1)\sqrt{4,8^2 - 1}} \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 0,2 \cdot 0,04^3 \cdot 20 \cdot 0,1}{5 \cdot 10^{-5}} = 3,5 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

а з рівняння (8.89) коефіцієнт тертя

$$f = \frac{\delta}{3R_1} \frac{2 + \alpha^2}{\alpha} = \frac{5 \cdot 10^{-5}}{3 \cdot 0,04} \frac{2 + 4,8^2}{4,8} = 0,00217.$$

При зменшенні в'язкості удвічі коефіцієнт підтримуючої сили удвічі збільшиться –  $\beta = 0,208$ . З рисунку 8.9 бачимо, що течія мастила стає відривною. Щоб повернутися у безвідривний режим, необхідно, наприклад, відповідно до формули (8.100) зменшити навантаження до значення

$$G \leq \frac{H\mu AR_1 u_0}{1,1\delta^2} = \frac{2\pi H\mu R_1^3 \omega}{1,1\delta^2} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,04^3 \cdot 20}{1,1(5 \cdot 10^{-5})^2} = 29,2 \text{ кН}$$

або збільшити частоту обертання

$$\omega \geq \frac{1,1G\delta^2}{2\pi R_1^3 H \mu} = \frac{1,1 \cdot 40 \cdot 10^3 \cdot (5 \cdot 10^{-5})^2}{2 \cdot 3,14 \cdot 0,04^3 \cdot 0,1 \cdot 0,1} = 27,4 \text{ с}^{-1}.$$

## 9 ОСНОВИ ГАЗОВОЇ ДИНАМІКИ

Властивість *стисливості* характерна як для газів, так і для краплинних рідин. Однак якщо для зміни об'єму останніх необхідно прикласти значні зусилля, то гази змінюють густину порівняно легко.

При русі газів з відносно невеликими швидкостями (до 60...70 м/с) стисливість з прийнятною для практики точністю можна не враховувати і до газів застосовуються ті самі закони, що й для краплинних рідин. При великих швидкостях течії, порівняльних зі швидкістю звуку і більших за неї, стисливість суттєво впливає на закономірності течії, тому нею не можна нехтувати. Вивченням законів такої течії займається розділ гідромеханіки – *газова динаміка*.

### 9.1 ЗВ'ЯЗОК МІЖ ПАРАМЕТРАМИ ПРИ АДІАБАТИЧНІЙ ТЕЧІЇ ГАЗУ

Оскільки при течії стисливого газу змінюється його густина, виникає необхідність у додатковому рівнянні, яке пов'язувало б густину і тиск. Як було показано у пункті 1.2.1, для досконалого газу цей зв'язок встановлює *рівняння Клайперона*

$$\frac{P}{\rho} = RT, \quad (9.1)$$

де  $R$  – *газова стала*, яка залежить тільки від роду газу (для повітря  $R = 287,15$  Дж/(кг К)).

Як впливає із закону (9.1), зміна густини газу супроводжується зміною температури  $T$  або теплообміном з навколишнім середовищем. Тому для опису руху стисливого газу використовуються термодинамічні співвідношення. Газова динаміка, як правило, розглядає рух з великими швидкостями на коротких ділянках, а тому можна вважати, що газ не обмінюється теплом з навколишнім середовищем. У термодинаміці такий процес називають *адіабатичним*. Для нього

$$\frac{P}{\rho^k} = C, \quad (9.2)$$

де  $C$  – стала величина;

$k$  – *показник адіабати*, котрий дорівнює відношенню питомої теплоємності при незмінному тиску ( $C_P$ ) до питомої теплоємності при незмінному об'ємі ( $C_V$ )

$$k = \frac{C_P}{C_V}. \quad (9.3)$$

Згідно з формулою Майєра

$$R = C_P - C_V. \quad (9.4)$$

Тому легко встановити зв'язок між газовою сталою і показником адіабати

$$R = \frac{k-1}{k} C_P, \quad (9.5)$$

або

$$R = (k-1)C_V. \quad (9.6)$$

У термодинаміці добуток  $C_P T$  називають тепловою функцією, або *ентальпією*  $i$ . З урахуванням рівнянь (9.5) і (9.1) можна записати, що

$$i = C_P T = \frac{k}{k-1} RT = \frac{k}{k-1} \frac{P}{\rho}. \quad (9.7)$$

Якщо через «0» позначити деякі фіксовані значення тиску і густини, то згідно з формули (9.2) можна записати

$$\frac{P}{\rho^k} = \frac{P_0}{\rho_0^k}, \quad (9.8)$$

а використавши формулу (9.1), маємо співвідношення між параметрами при адіабатичній течії газу

$$\frac{P}{P_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^k = \left( \frac{T}{T_0} \right)^{\frac{k}{k-1}}; \quad (9.9)$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left( \frac{P}{P_0} \right)^{\frac{1}{k}} = \left( \frac{T}{T_0} \right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (9.10)$$

## 9.2 РІВНЯННЯ БЕРНУЛЛІ ДЛЯ АДІАБАТИЧНОЇ ТЕЧІЇ СТИСЛИВОГО ГАЗУ

Якщо густина рідини є змінною величиною, вид інтеграла Бернуллі визначається залежністю  $\rho$  від параметрів потоку. Принципово густина стисливої рідини може залежати від різних факторів, але якщо  $\rho$  залежить тільки від тиску, то такі середовища називають *баротропними*. Далі будемо розглядати тільки їх.

Як це було зроблено у пункті 4.1.2, прирівняємо ліву частину рівняння (4.12) до нуля

$$d \left( \frac{P}{\rho} + \frac{u^2}{2} - \Phi \right) = 0. \quad (9.11)$$

При інтегруванні рівняння (9.11) слід врахувати дві особливості. Перша полягає у тому, що густина газових середовищ мала і тому дією масових сил

(третьою складовою у дужках) без помітної шкоди для точності можна знехтувати. Друга – залежність густини від тиску, вид якої визначається характером термодинамічного процесу. Для адіабатичного процесу справедливий вираз (9.2). Тому

$$dP = Ck\rho^{k-1}d\rho, \quad (9.12)$$

або

$$\frac{dP}{\rho} = Ck\rho^{k-2}d\rho. \quad (9.13)$$

Проінтегруємо рівняння (9.11) з урахуванням цих зауважень

$$\int \left( \frac{dP}{\rho} + \frac{du^2}{2} \right) = Ck \int \rho^{k-2} d\rho + \frac{u^2}{2} = \text{const}. \quad (9.14)$$

Оскільки  $C = \frac{P}{\rho^k}$ , то

$$Ck \int \rho^{k-2} d\rho = \frac{P}{\rho^k} \frac{k}{k-1} \rho^{k-1} = \frac{P}{\rho} \frac{k}{k-1}. \quad (9.15)$$

Отже,

$$\frac{k}{k-1} \frac{P}{\rho} + \frac{u^2}{2} = \text{const}, \quad (9.16)$$

або з урахуванням формули (9.1)

$$\frac{k}{k-1} RT + \frac{u^2}{2} = \text{const}. \quad (9.17)$$

Вирази (9.16) і (9.17) є одними з можливих форм запису *рівняння Бернуллі для адіабатичної течії ідеального газу*. Останній вираз вказує на те, що при зростанні швидкості газового потоку його температура зменшується, а при гальмуванні – збільшується. Такий характер зміни параметрів течії пояснюється теплоізолюваністю процесу.

Враховуючи формулу (9.7), можна подати *рівняння Бернуллі у термодинамічній формі*

$$i + \frac{u^2}{2} = \text{const}, \quad (9.18)$$

яка зручна при розрахунках таких пристроїв, в котрих відсутня технічна робота, наприклад сопел.

Зауважимо, що якби розглядалась теплоізолювана течія газу з тертям, то і в цьому випадку рівняння (9.18) лишалося б справедливим. Дійсно, хоч на подолання сил тертя і була б витрачена частина механічної енергії, але вона пере-



творилась би у теплоту, що привело б до зростання внутрішньої енергії газу. Тому сума  $i + \frac{u^2}{2}$  лишається незмінною.

### 9.3 АДАБАТИЧНА ШВИДКІСТЬ ЗВУКУ. ЧИСЛО МАХА

Виключно важливе місце в газовій динаміці займає поняття про *швидкість звуку*, під якою розуміють швидкість поширення малих збурень, тобто швидкість поширення у просторі малих змін тиску і густини.

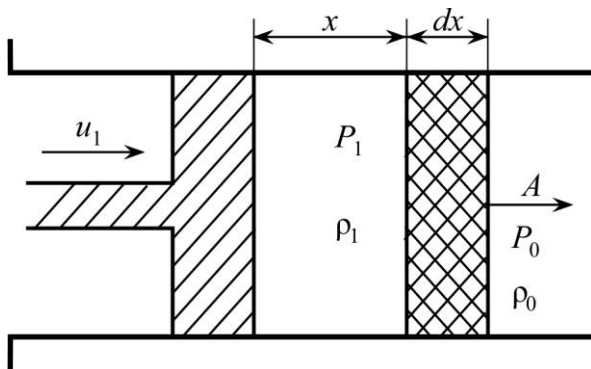


Рисунок 9.1 – До поняття про швидкість звуку

Розглянемо трубу незмінної площі  $A$ , заповнену нерухомим газом, тиск і густина якого  $P_0$  і  $\rho_0$  (рисунок 9.1). Якщо поршню надати раптове мале переміщення зі швидкістю  $u_1$ , то це приведе до згущення газу перед ним – тиск підвищиться на величину  $\Delta P = P_1 - P_0$ , а густина на  $\Delta \rho = \rho_1 - \rho_0$ . Збурення, викликане переміщенням поршня, поширюватиметься у газі з деякою швидкістю  $a$  і за деякий час охопить ділянку  $x$ , а за час  $dt$  – ще й відстань  $dx = a dt$ .

У момент часу  $t + dt$  в об'ємі завтовшки  $dx$  маса газу становить  $\rho_1 A dx = \rho_1 A a dt$ . Ця маса повинна дорівнювати сумі початкової маси  $\rho_0 A dx = \rho_0 A a dt$  і внесеної  $\rho_1 u_1 A dt$  (газ у зоні згущення рухається зі швидкістю  $u_1$ ), тобто

$$\rho_1 A a dt = \rho_0 A a dt + \rho_1 u_1 A dt, \quad (9.19)$$

або

$$\rho_1 a = \rho_0 a + \rho_1 u_1. \quad (9.20)$$

Згідно з законом збереження імпульсу для об'єму завтовшки  $dx$  можна записати

$$\frac{\rho_1 A dx u_1}{dt} = P_1 A - P_0 A, \quad (9.21)$$

або

$$\rho_1 a u_1 = P_1 - P_0. \quad (9.22)$$

Звідки

$$a = \frac{P_1 - P_0}{\rho_1 u_1}. \quad (9.23)$$

Скориставшись останнім виразом, рівняння (9.20) можна представити

$$\rho_1 a = \rho_0 a + \frac{P_1 - P_0}{a}, \quad (9.24)$$

або

$$a^2 = \frac{P_1 - P_0}{\rho_1 - \rho_0} = \frac{\Delta P}{\Delta \rho}. \quad (9.25)$$

Якщо зміни тиску  $\Delta P$  і густини  $\Delta \rho$  малі, то, переходячи до нескінченно малих, дістаємо

$$a = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}}. \quad (9.26)$$

Величина  $a$  – місцева швидкість поширення малих збурень. До числа найбільш широко спостережуваних явищ поширення малих збурень в краплинних рідинах і газах належить поширення звуку. Воно являє собою послідовні малі стиснення і розрядження. Тому швидкість  $a$  називають швидкістю звуку.

Усі міркування, завдяки яким виведена формула (9.26), справедливі для будь-якого пружного середовища. Тому вона виражає швидкість звуку для таких середовищ. Так, якщо рідина при малих стисненнях підпорядковується *закону Гука*, то згідно з формулою (1.12)

$$a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (9.27)$$

Якщо рідину розглядати як абсолютно нестисливу ( $\rho = \text{const}$ ), то з формули (9.26) випливає, що  $a = \infty$ . Це означає, що в такій рідині збурення поширюються з нескінченно великою швидкістю, тобто всяка мала зміна тиску в даній точці потоку миттєво відбивається в будь-якому іншому його місці. У ряді випадків, як це було показано в попередніх розділах, таке припущення може з достатньою для практики точністю прийматися при розрахунках. Але існує цілий клас задач, що розглядають рух газів з великими швидкостями, в яких стисливість обумовлює не тільки кількісно відмінні результати, але й якісно іншу поведінку потоків.

Згідно з формулою (9.26) швидкість звуку залежить від характеру процесу. Для адіабатичного процесу

$$\frac{dP}{d\rho} = Ck\rho^{k-1} = k \frac{P}{\rho}. \quad (9.28)$$

Отже, *адіабатична швидкість звуку*

$$a = \sqrt{k \frac{P}{\rho}}. \quad (9.29)$$

Оскільки далі будемо розглядати тільки адіабатичний процес, то швидкість  $a$  називатимемо просто швидкістю звуку.

Формула (9.29) вперше була виведена Лапласом. З урахуванням закону Клайперона її можна подати у вигляді

$$a = \sqrt{kRT}. \quad (9.30)$$

Таким чином, швидкість звуку в газі залежить тільки від його фізичних властивостей і температури.

Відношення швидкості газового потоку до швидкості звуку називається числом (критерієм) Маха<sup>47</sup>

$$M = \frac{u}{a}. \quad (9.31)$$

Число Маха – основний критерій подібності для течій газу, що відбуваються з великими швидкостями. Воно є мірою стисливості. Для доведення цього запишемо рівняння (9.11) без урахування масових сил у вигляді

$$\frac{dP}{\rho} + u du = 0 \quad (9.32)$$

і проведемо деякі перетворення

$$u du = -\frac{dP}{\rho} \frac{d\rho}{d\rho} = -a^2 \frac{d\rho}{\rho}. \quad (9.33)$$

Поділивши ліву і праву частини рівняння (9.33) на  $u^2$ , маємо

$$\frac{du}{u} = -\frac{a^2}{u^2} \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{1}{M^2} \frac{d\rho}{\rho}, \quad (9.34)$$

або

$$\frac{d\rho}{\rho} = -M^2 \frac{du}{u}. \quad (9.35)$$

Отже,  $M$  є своєрідним коефіцієнтом, що вказує на відносну зміну густини при зміні швидкості, тобто число Маха може бути мірою стисливості.

У кінетичній теорії газів показано, що швидкість звуку має той самий порядок, що й середня квадратична швидкість вільного пробігу молекул,

$$v_S = \sqrt{3RT}. \quad (9.36)$$

Порівнюючи з рівнянням (9.30), дістаємо

$$a = \sqrt{\frac{k}{3}} v_S. \quad (9.37)$$

Тому

---

<sup>47</sup> Мах Ернст (1838–1916) – видатний австрійський фізик і філософ, фахівець в галузі балістики, один із засновників газової динаміки; вивчав поширення ударних хвиль; першим довів, що ефект стисливості залежить від числа, що дорівнює відношенню швидкості потоку до швидкості звуку, яке названо його ім'ям. У філософії Мах був суб'єктивним ідеалістом, він стверджував, що навколишній світ – це лише наші відчуття, а тому задача науки – описувати саме ці відчуття.

$$M^2 = \frac{u^2}{\frac{k}{3} v_s^2}, \quad (9.38)$$

або

$$\frac{u^2}{v_s^2} = \frac{k}{3} M^2. \quad (9.39)$$

З цього випливає, що *квадрат числа Маха можна розглядати як величину, котра характеризує відношення кінетичних енергій спрямованого руху потоку до хаотичного («внутрішнього») руху газу*. При  $M > \sqrt{3/k}$  енергія спрямованого руху більша за енергію хаотичного, а при  $M < \sqrt{3/k}$  – навпаки.

З точки зору газової динаміки важливим є не стільки значення числа Маха, при якому зрівнюються енергії направленого і хаотичного рухів, скільки значення  $M = 1$ , якому відповідає рівність швидкостей потоку і поширення звуку. Якщо  $M < 1$ , потік називається *дозвуковим*, а якщо  $M > 1$  – *надзвуковим*. При  $M = 1$  швидкість потоку дорівнює місцевій швидкості звуку та її називають *критичною* ( $a_{кр}$ ).

Розрахунки, наведені далі, показують, що газовий потік можна вважати нестисливим, якщо  $M < 0,2$ ; похибка у визначенні тиску при цьому становитиме приблизно 1 %, а густини – 2 %. Для повітря ( $k = 1,4$ ;  $R = 287,15$  Дж/(кгК) при нормальних умовах ( $T = 288$  К)  $a = 340$  м/с і значенню  $M = 0,2$  відповідає  $u = 68$  м/с.

## 9.4 ІЗОЕНТРОПІЧНА ТЕЧІЯ СТИСЛИВОГО ГАЗУ

Як випливає з рівняння Бернуллі (9.17), течія стисливого газу завжди супроводжується перетвореннями теплоти, або теплообміном. Функцією, яка однозначно визначає теплові перетворення, є *ентропія*  $S$ , для котрої

$$dS = \frac{dq}{T}. \quad (9.40)$$

З формули (9.40) зрозуміло, що при підведенні до системи теплоти ( $dq > 0$ ) її ентропія зростає, і навпаки – якщо теплота відводиться ( $dq < 0$ ), то ентропія зменшується. Течія в'язкого газу навіть без теплообміну із зовнішнім середовищем відбувається в умовах  $dq > 0$ , оскільки завдяки тертю частина механічної енергії переходить у тепло. Але якщо розглядати теплоізолюваний процес руху ідеального газу, то ентропію можна вважати величиною незмінною. Тому адиабатичну течію ідеального газу розглядають як *ізоентропічний процес*.

### 9.4.1 Ізоентропічні співвідношення.

*Зведена швидкість і газодинамічні функції*

У потоці завжди можуть існувати точки або області, в яких швидкість газу дорівнює нулю. Прикладом може стати випадок обтікання циліндра (пункт

7.2.2). Точки, в яких  $u = 0$ , називають *критичними*, а параметри в них – *параметрами гальмування* ( $P_*$ ,  $\rho_*$ ,  $i_*$ ,  $a_*$ ,  $T_*$ ).

Рівняння Бернуллі, записане в термодинамічній формі, вказує на те, що *при адіабатичній течії сума питомої ентальпії та питомої кінетичної енергії є незмінною*. Отже, при гальмуванні відбувається збільшення ентальпії за рахунок кінетичної енергії.

У критичних точках

$$i_* = i + \frac{u^2}{2}. \quad (9.41)$$

Величину  $i_*$  називають ентальпією загальмованого газу.

З урахуванням формули (9.7) останню формулу можна подати у такому вигляді:

$$T_* = T + \frac{u^2}{2C_p}. \quad (9.42)$$

Остання складова має розмірність температури і називається *динамічним підвищенням температури*. Тому, гальмування газу приводить до так званого аеродинамічного нагріву, під яким розуміють нагрів до температури, вищої за температуру потоку.

Це явище слід брати до уваги, наприклад, при вимірюванні температури газового потоку. Коли його швидкість відносно невелика (кінетична енергія мала відносно до тепломісткості), то динамічне підвищення температури також невелике і його величиною можна нехтувати. Але при швидкостях, близьких до швидкості звуку і більших за неї, кінетична енергія стає співмірною з тепломісткістю, і тому температура загальмованого газу досить помітно відрізняється від температури потоку, що рухається.

Зменшення кінетичної енергії газу і відповідне підвищення його температури може відбуватися або від стиснення, що має місце в критичних точках, або від тертя в пограничному шарі. У першому випадку, якщо знехтувати відводом тепла, процес можна вважати оборотним. Це означає, що у випадку надання газу можливості розширитися його параметри набудуть початкових (до гальмування) значень. Процес гальмування в пограничному шарі є не оборотним, оскільки для того щоб частинки газу знов набули початкової швидкості, необхідно самочинне перетворення теплового руху молекул в упорядкований рух, а це відповідно до законів термодинаміки неможливо.

Використовуючи параметри гальмування, рівняння (9.16) і (9.17) можна подати у такому вигляді:

$$\frac{k}{k-1} \frac{P_*}{\rho_*} = \frac{k}{k-1} \frac{P}{\rho} + \frac{u^2}{2}; \quad (9.43)$$

$$\frac{k}{k-1}RT_* = \frac{k}{k-1}RT + \frac{u^2}{2}; \quad (9.44)$$

$$\frac{a_*^2}{k-1} = \frac{a^2}{k-1} + \frac{u^2}{2}, \quad (9.45)$$

де  $a_*$  – швидкість звуку в загальмованому газі.

З рівняння (9.44) випливає, що

$$\frac{T_*}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} \frac{u^2}{kRT} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2. \quad (9.46)$$

Скориставшись отриманими раніше співвідношеннями між параметрами при адіабатичній течії (9.9) і (9.10) та (9.45), маємо

$$\frac{P_*}{P} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{k}{k-1}}; \quad (9.47)$$

$$\frac{\rho_*}{\rho} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{k-1}}; \quad (9.48)$$

$$\frac{a_*}{a} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (9.49)$$

Таким чином, відношення будь-якого параметра газового потоку до відповідного параметра гальмування залежить тільки від числа Маха.

У газовій динаміці параметрам гальмування надають дещо більшого значення, ніж параметрам у точках, де потік не рухається. Навіть якщо у потоці нема критичних точок, параметрами гальмування користуються при розрахунках як параметрами, котрі мав би газ, якщо його загальмували без необоротних перетворень механічної енергії.

Раніше вже зазначалося, що швидкість потоку, яка дорівнює місцевій швидкості звуку, називається критичною ( $u = a = a_{кр}$ ). Так само *критичними* називаються і параметри потоку ( $T_{кр}$ ,  $P_{кр}$ ,  $\rho_{кр}$ ,  $i_{кр}$ ), які відповідають цій швидкості. Цілком зрозуміло, що критичній швидкості відповідає число Маха, яке дорівнює одиниці. Тому співвідношення для критичних параметрів можна легко дістати з формул (9.46)–(9.49):

$$\frac{T_*}{T_{кр}} = 1 + \frac{k-1}{2} = \frac{k+1}{2}; \quad (9.50)$$

$$\frac{P_*}{P_{кр}} = \left(1 + \frac{k-1}{2}\right)^{\frac{k}{k-1}} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k}{k-1}}; \quad (9.51)$$

$$\frac{\rho_*}{\rho_{кр}} = \left(1 + \frac{k-1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}}; \quad (9.52)$$

$$\frac{a_*}{a_{кр}} = \sqrt{\frac{k+1}{2}}. \quad (9.53)$$

Отже, для даного ізоентропічного потоку співвідношення параметрів гальмування і критичних параметрів є величиною незмінною, яка залежить від фізичних властивостей газу (показника адіабати). Для будь-якого газу завжди  $k > 1$ , тому критична швидкість завжди менша за швидкість звуку в загальмованому середовищі.

Оскільки ліва частина в рівнянні (9.45) є величиною незмінною, то збільшення швидкості потоку приводить до зниження швидкості звуку  $a$ . Теоретично швидкість потоку може досягти такого граничного значення, при якому  $a = 0$ . Така швидкість є *максимальною швидкістю газового потоку*  $u_{\max}$ . Її величина

$$u_{\max} = a_* \sqrt{\frac{2}{k-1}}. \quad (9.54)$$

З формул (9.29) і (9.30) випливає, що швидкість звуку може обернутися в нуль лише при витіканні газу в порожнечу, тобто в абсолютний вакуум ( $P = 0$ ,  $T = 0$ ,  $i = 0$ ). При максимальній швидкості течії вся теплова енергія молекул перетворюється в кінетичну енергію направлено руху. Фізично  $u_{\max}$  недосяжна і є теоретичною границею для швидкості газу. Крім того, з наближенням швидкості потоку до  $u_{\max}$  розрядженість газу стає досить великою і тому до потоку не можна застосувати рівняння стану ідеального газу Клайперона і рівняння енергії у відомій для нас формі.

Максимальну швидкість можна зв'язати з критичною, якщо зіставити рівняння (9.53) з (9.54)

$$u_{\max} = a_{кр} \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}. \quad (9.55)$$

Становить також певний інтерес зв'язок між швидкістю звуку і критичною швидкістю. Для його встановлення перепишемо рівняння (9.45) з урахуванням залежності  $a_*$  від  $a_{кр}$  (9.53):

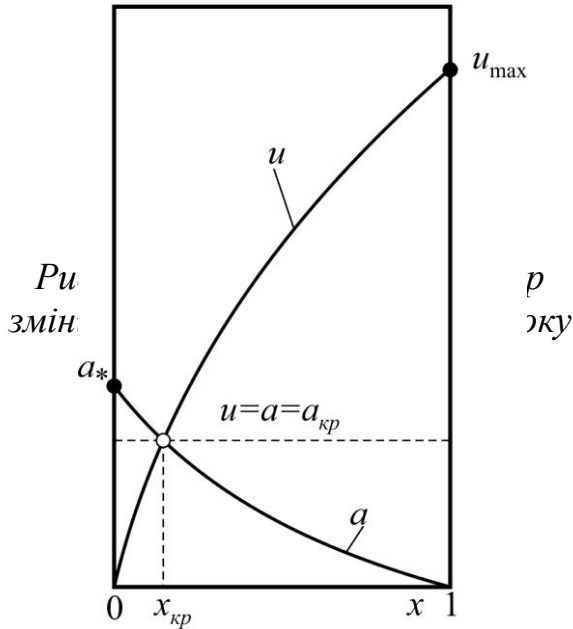
$$\frac{a_{кр}^2}{2} \frac{k+1}{k-1} = \frac{a^2}{k-1} + \frac{u^2}{2}, \quad (9.56)$$

звідки

$$a^2 = \frac{k+1}{2} a_{кр}^2 - \frac{k-1}{2} u^2. \quad (9.57)$$

Якісний характер зміни розглянутих швидкостей подано на рисунку 9.2. Якщо на початку деякого уявного каналу ( $x = 0$ ) газовий потік не рухається

( $u = 0$ ), то швидкість звуку найбільша і дорівнює  $a_*$ , а якщо в кінці цього каналу ( $x = 1$ ) підтримується абсолютний вакуум, то  $u = u_{\max}$  і  $a = 0$ . Зрозуміло, що точка перетину двох кривих буде відповідати критичній швидкості  $a_{кр}$ .



У газовій динаміці часто використовують безрозмірне подання розрахунквих формул. Для цього, крім числа Маха, вводиться поняття *зведеної швидкості*

$$\lambda = \frac{u}{a_{кр}}. \quad (9.58)$$

Рисунок 9.2 – Якісний характер зміни швидкостей газового потоку

Враховуючи, що  $a_{кр}$  залежить від  $a_*$ , яка згідно з рівнянням (9.45) характеризує повну питому енергію потоку, зведена швидкість характеризує відношення між кінетичною і повною енергіями.

Зв'язок між  $\lambda$  і  $M$  можна встановити, якщо кожену складову рівняння (9.56) розділити на  $u^2$ ,

$$\frac{k+1}{2(k-1)} \frac{a_{кр}^2}{u^2} = \frac{a^2}{u^2} \frac{1}{k-1} + \frac{1}{2}, \quad (9.59)$$

або

$$\frac{k+1}{k-1} \frac{1}{2\lambda^2} = \frac{1}{M^2} \frac{1}{k-1} + \frac{1}{2}. \quad (9.60)$$

Здійснивши перетворення, дістаємо

$$M^2 = \frac{2}{k+1} \frac{\lambda^2}{1 - \frac{(k-1)\lambda^2}{k+1}}, \quad (9.61)$$

або

$$\lambda^2 = \frac{M^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \frac{k+1}{2}. \quad (9.62)$$



Можна відмітити, що при  $M = 1$   $\lambda = 1$ , а при  $M \rightarrow \infty$  зведена швидкість прагне до цілком визначеної границі. Дійсно, аналіз показує, що при  $M \rightarrow \infty$   $u \rightarrow u_{\max}$ . Тоді

$$\lambda \rightarrow \frac{u_{\max}}{a_{кр}} \rightarrow \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}. \quad (9.63)$$

Користуючись залежністю (9.61), формули (9.46)–(9.49) можна подати у такому вигляді:

$$\frac{T}{T_*} = 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 = \tau(\lambda), \quad (9.64)$$

$$\frac{P}{P_*} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}} = \pi(\lambda), \quad (9.65)$$

$$\frac{\rho}{\rho_*} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}} = \varepsilon(\lambda), \quad (9.66)$$

$$\frac{a}{a_*} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (9.67)$$

де  $\tau(\lambda)$ ,  $\pi(\lambda)$ ,  $\varepsilon(\lambda)$  – газодинамічні функції.

Вони встановлюють однозначний зв'язок відносних параметрів потоку зі зведеною швидкістю і мають важливе прикладне значення, оскільки заздалегідь розраховані та зведені у таблиці ці функції дають змогу суттєво скоротити обчислювальну роботу. У таблиці 9.1 наведені значення газодинамічних функцій для повітря ( $k = 1,4$ ).

Таблиця 9.1 – Газодинамічні функції

$\lambda$	$\tau$	$\pi$	$\varepsilon$	$q$	$M$
0,00	1,0000	1,0000	1,0000	0	0
0,10	0,9983	0,9942	0,9959	0,1571	0,0914
0,20	0,9933	0,9768	0,9834	0,3102	0,1830
0,30	0,9850	0,9485	0,9630	0,4557	0,2760
0,40	0,9733	0,9097	0,9346	0,5897	0,3701
0,50	0,9583	0,8616	0,8991	0,7091	0,4663
0,60	0,9400	0,8053	0,8567	0,8109	0,5649
0,70	0,9183	0,7422	0,8082	0,8924	0,6668
0,80	0,8933	0,6738	0,7543	0,9518	0,7727
0,90	0,8650	0,6019	0,6959	0,9879	0,8833
1,00	0,8333	0,5283	0,6340	1,0000	1,0000
1,10	0,7983	0,4546	0,5994	0,9880	1,1239
1,20	0,7600	0,3827	0,5035	0,9531	1,2566
1,30	0,7183	0,3142	0,4374	0,8969	1,4002
1,40	0,6733	0,2505	0,3720	0,8216	1,5575
1,50	0,6250	0,1930	0,3088	0,7307	1,7321
1,60	0,5733	0,1427	0,2489	0,6282	1,9290
1,70	0,5183	0,1003	0,1934	0,5187	2,1555
1,80	0,4600	0,0660	0,1435	0,4075	2,4227
1,90	0,3983	0,0399	0,1002	0,3002	2,7481
2,00	0,3333	0,0214	0,0642	0,2024	3,1622
2,10	0,2650	0,0096	0,0361	0,1198	3,7240
2,20	0,1933	0,0032	0,0164	0,0570	4,5674
2,30	0,1183	0,00057	0,00482	0,0175	6,1033
2,40	0,0400	$0,128 \cdot 10^{-4}$	0,00032	0,0012	10,957
2,4495	0	0	0	0	$\infty$

#### 9.4.2 Витікання газу крізь звужуюче сопло.

##### Формула Сен-Венана-Ванцеля

Розглянемо витікання газу з резервуара крізь конічне звужуюче сопло (рисунок 9.3). Розміри резервуара будемо вважати набагато більшими за розміри отвору. Це дозволяє нехтувати швидкістю газу в резервуарі, а отже, параметри в ньому вважатимемо параметрами гальмування. Параметри зовнішнього середовища у вихідному перерізі сопла, площа котрого  $A_1$ , позначимо  $P_1$ ,  $\rho_1$ ,  $u_1$ ,  $T_1$ .

Якщо швидкість витікання вважати великою, а довжину сопла малою, то теплообміном газу з навколишнім середовищем можна нехтувати і процес течії розглядати як адіабатичний.

Визначимо вигляд залежності для масової витрати крізь сопло. Для цього запишемо рівняння Бернуллі стосовно двох перерізів, один з яких проходить через резервуар, а другий – через вихідний переріз сопла,

$$\frac{k}{k-1} \frac{P_*}{\rho_*} = \frac{k}{k-1} \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{u_1^2}{2}. \quad (9.68)$$

Розв'язок відносно швидкості дає

$$\begin{aligned} u_1 &= \sqrt{\frac{2k}{k-1} \left( \frac{P_*}{\rho_*} - \frac{P_1}{\rho_1} \right)} = \\ &= \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{P_*}{\rho_*} \left( 1 - \frac{\rho_* P_1}{P_* \rho_1} \right)}. \end{aligned} \quad (9.69)$$

Користуючись зв'язком між параметрами при адіабатичному процесі (9.9) і (9.10), можна записати

$$\frac{P_1 \rho_*}{P_* \rho_1} = \frac{P_1}{P_*} \left( \frac{P_*}{P_1} \right)^{\frac{1}{k}} = \left( \frac{P_1}{P_*} \right)^{\frac{k-1}{k}}. \quad (9.70)$$

Тоді формула (9.69) набирає вигляду

$$u_1 = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{P_*}{\rho_*} \left[ 1 - \left( \frac{P_1}{P_*} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]}, \quad (9.71)$$

або з урахуванням формули (9.29)

$$u_1 = a_* \sqrt{\frac{2}{k-1} \left[ 1 - \left( \frac{P_1}{P_*} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]}. \quad (9.72)$$

Останні два вирази є різновидами формули Сен-Венана<sup>48</sup>-Ванцеля<sup>49</sup> для швидкості витікання газу.

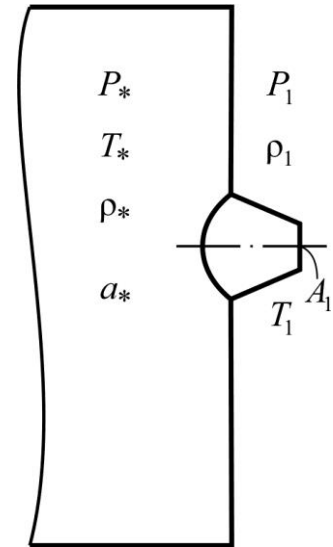


Рисунок 9.3 – Резервуар з конічним звужуючим соплом

<sup>48</sup> Сен-Венан Адемар Жан-Клод Барре (1797–1886) – французький математик, механік, інженер. Побудував теорію крутіння і вигину призматичного стрижня і сформулював принцип пом'якшення граничних умов, вивів рівняння течії рідини під її поверхнею, які носять його ім'я.

<sup>49</sup> Ванцель П'єр Лоран (1814–1848) – французький математик, професор прикладної механіки Політехнічної школи (Франція). Відомий низкою цікавих праць у галузі математичних задач, механіки, аеродинаміки.

Переходячи до масової витрати, маємо

$$Q_m = \rho_1 A_1 u_1 = \rho_1 A_1 \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{P_*}{\rho_*} \left[ 1 - \left( \frac{P_1}{P_*} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]}. \quad (9.73)$$

Оскільки

$$\rho_1 = \rho_* \left( \frac{P_1}{P_*} \right)^{\frac{1}{k}}, \quad (9.74)$$

то з формулою (9.73) можна здійснити такі перетворення:

$$\begin{aligned} Q_m &= A_1 \sqrt{\frac{2k}{k-1} \left( \frac{P_1}{P_*} \right)^{\frac{2}{k}} P_* \rho_* \left[ 1 - \left( \frac{P_1}{P_*} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]} = A_1 \sqrt{\frac{2k}{k-1} P_* \rho_* \left[ \left( \frac{P_1}{P_*} \right)^{\frac{2}{k}} - \left( \frac{P_1}{P_*} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]} = \\ &= A_1 \sqrt{\frac{2k}{k-1} P_* \rho_* \left[ \beta^{\frac{2}{k}} - \beta^{\frac{k+1}{k}} \right]}, \end{aligned} \quad (9.75)$$

де  $\beta = \frac{P_1}{P_*}$ .

Очевидно, що при незмінних  $P_*$  і  $\rho_*$  масову витрату визначає величина в квадратних дужках. Згідно з формулою (9.75)  $Q_m = 0$  при  $\beta = 0$  і  $\beta = 1$ , а отже, функція має екстремум між цими точками. Позначимо відповідне екстремуму відношення тисків через  $\beta_{кр}$ , для якого

$$\frac{d}{d\beta} \left[ \beta_{кр}^{\frac{2}{k}} - \beta_{кр}^{\frac{k+1}{k}} \right] = 0. \quad (9.76)$$

Звідки

$$\frac{2}{k} \beta_{кр}^{\frac{2}{k}-1} = \frac{k+1}{k} \beta_{кр}^{\frac{k+1}{k}-1}, \quad (9.77)$$

або

$$\beta_{кр} = \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}. \quad (9.78)$$

Порівнявши отриманий результат з формулою (9.51), доходимо висновку, що

$$\beta_{кр} = \frac{P_{кр}}{P_*}, \quad (9.79)$$

а отже, максимальна масова витрата у вихідному перерізі сопла встановлюється при критичних параметрах. Це означає, що газ рухається зі швидкістю, що дорівнює місцевій швидкості звуку. При цьому критичне співвідношення тисків  $\beta_{кр}$ , як випливає з рівняння (9.78), залежить тільки від фізичних властивостей газу (показника адиабати). Так, для повітря  $\beta_{кр} = 0,528$ .

Максимальна, або критична масова, витрата

$$Q_M^{кр} = \rho_{кр} a_{кр} A_1 = A_1 \sqrt{k \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} P_* \rho_*}. \quad (9.80)$$

Відношення довільної витрати до критичної називається *зведеною витратою*. Її можна дістати, скориставшись формулами (9.29), (9.52), (9.53) та (9.57),

$$q = \frac{\rho_1 u_1}{\rho_{кр} a_{кр}} = \sqrt{\frac{2}{k-1} \left( \frac{k+1}{2} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} - \beta^{\frac{2}{k}} \left[ 1 - \beta^{\frac{k-1}{k}} \right]}. \quad (9.81)$$

Використовуючи ще й рівняння (9.66), зведену витрату можна подати через зведену швидкість

$$q = \left( \frac{k+1}{2} \right)^{\frac{1}{k-1}} \lambda \left( 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (9.82)$$

Графік залежності зведеної витрати від відношення тисків  $\beta$  для повітря поданий на рисунку 9.4. Цілком природно, що при  $\beta = 1$  масова витрата дорівнює нулю і зниження  $\beta$  веде до зростання  $q$ , а отже, і  $Q_M$ . Однак при переході  $\beta$  через  $\beta_{кр}$  згідно з рівнянням (9.81) масова витрата повинна зменшуватися (пунктирна частина графіка), тобто зменшення тиску за соплом повинно привести до зменшення і витрати, що суперечить суті створеної дії. Досвід показує, що при  $\beta > \beta_{кр}$  формула (9.81) дає реальну картину зміни  $q$ , а при  $\beta < \beta_{кр}$  будь-яке зниження тиску за соплом до зміни масової витрати не приводить ( $q = 1$ ).

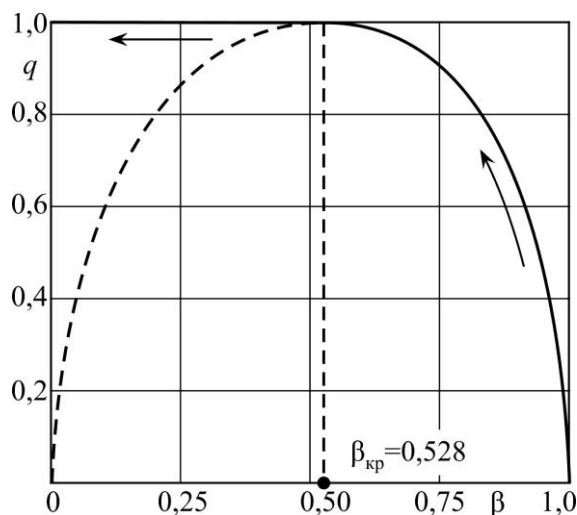


Рисунок 9.4 – Залежність зведеної витрати від відношення тисків

Щоб усвідомити фізичну сутність незмінності масової витрати, слід пригадати, що зміна тиску за соплом є малим збуренням, котре поширюється зі швидкістю звуку. При  $\beta > \beta_{кр}$  швидкість газу у вихідному перерізі сопла менша за швидкість звуку, зміна зовнішнього тиску проникає в середину сопла і обумовлює

відповідну зміну перепаду тиску, під дією котрого відбувається витікання. При  $\beta = \beta_{кр}$   $u_1 = a_{кр}$ , і в перерізі сопла встановлюється так званий звуковий бар'єр, через котрий зміни зовнішнього тиску проникнути не можуть, оскільки частинки газу рухаються з тією самою швидкістю вниз по течії, з якою вверх по течії поширюється хвиля зниження тиску. У зв'язку з цим при  $\beta < \beta_{кр}$  тиск у вихідному перерізі сопла лишається незмінним ( $P_{кр}$ ), а тому не змінюється і масова витрата.

З вищенаведеного випливають два важливі висновки. Перший полягає у тому, що формулу Сен-Венана-Ванцеля можна використовувати лише при  $\beta > \beta_{кр}$ . При цьому не слід забувати, що мова йшла про ідеальний газ; течія реального в'язкого газу буде супроводжуватися дією сил тертя, а тому його масова витрата буде дещо меншою за розраховану за формулою (9.75). Другий висновок полягає у тому, що *в звичайному звужуючому соплі не можна досягнути надзвукової швидкості витікання, яку б різницю тиску не створили.*

#### 9.4.3 Закон обертання дії. Сопло Лаваля

Рівняння нерозривності для газового потоку в кінцевій (гідравлічній) формі має вигляд

$$Q_m = \rho u A = \text{const.} \quad (9.83)$$

Якщо при умові незмінності масової витрати його спочатку прологарифмувати, а потім продиференціювати, то дістанемо

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dA}{A} = 0. \quad (9.84)$$

Підставляючи до рівняння (9.84) рівняння (9.35) і виконавши прості перетворення, можемо записати формулу

$$\frac{du}{u} (M^2 - 1) = \frac{dA}{A}, \quad (9.85)$$

яка носить ім'я П'єра Анрі Гюгоніо<sup>50</sup> і виражає так званий *закон обертання дії*.

Ця формула досить зручна для аналізу характеру зміни швидкості при русі газу в трубі змінного перерізу. Якщо  $M < 1$ , то величина в дужках від'ємна, тому в розширеній трубі ( $dA > 0$ ) потік сповільнюється ( $du < 0$ ), а в звужуючій ( $dA < 0$ ) – прискорюється ( $du > 0$ ). Отже, дозвуковий газовий потік поводить себе аналогічно потоку нестисливої рідини.

Якщо  $M > 1$ , то величина в дужках додатна. У цьому випадку в розширеній трубі ( $dA > 0$ ) потік прискорюється ( $du > 0$ ), а в звужуючій ( $dA < 0$ ) – сповільнюється ( $du < 0$ ). Цей парадоксальний на перший погляд результат по-

<sup>50</sup> Гюгоніо (Югоніо) П'єр Анрі (1851–1887) – видатний французький математик і механік, фахівець в галузі балістики та один із засновників газової динаміки, автор фундаментальних робіт у галузі ударних хвиль, зокрема 1885 року отримав рівняння ударної хвилі (ударної адіабати), відоме як рівняння Гюгоніо-Ранкіна. Ці результати опубліковані були уже після смерті вченого.

яснюється тим, що при розширенні газу густина сильно зменшується і добуток  $\rho A$  в рівнянні (9.83), незважаючи на зростання площі, все ж зменшується, що приводить до зростання  $u$ . Отже, надзвуковий потік поводить себе протилежно дозвуковому.

Якщо  $M = 1$ , то не відбувається розривної течії ( $du = \infty$ ) тільки за умови  $dA = 0$ . Тобто за умови досягнення дозвуковим потоком в деякому екстремальному перерізі ( $dA = 0$ ) критичних параметрів ( $M = 1$ ) похідна швидкості по довжині каналу може мати кінцеве значення. Це означає можливість переходу в критичному перерізі дозвукового потоку в надзвуковий. При цьому критичний переріз повинен бути мінімальним, оскільки у протилежному випадку дозвуковий потік вздовж труби буде уповільнюватися і тому ніяк не зможе досягти критичної швидкості.

Отже, на підставі розглянутого можна зробити виключно важливий висновок: *перехід через швидкість звуку неможливий при однобічній дії на потік; щоб дозвуковий потік розігнати до надзвукової швидкості, необхідно спочатку звужувати канал, а потім його розширювати, тобто змінити характер дії на потік з боку стінок каналу.* При цьому в мінімальному перерізі повинні бути досягнуті критичні параметри. Іншими словами, *перехід через швидкість звуку можливий, тільки якщо в критичному перерізі змінити характер дії на потік.* У цьому полягає закон обертання дії. Пристрій, який реалізує сформульований закон, називається *соплом Лавалю*<sup>51</sup>. Схематично воно показане на рисунку 9.5, де також наведені графіки, котрі характеризують зміну тиску і швидкості вздовж поздовжньої координати (1 – випадок, коли в екстремальному перерізі сопла (горлі сопла) критичні параметри не досягнуті; 2 – випадок, коли в горлі сопла  $M = 1$ ).

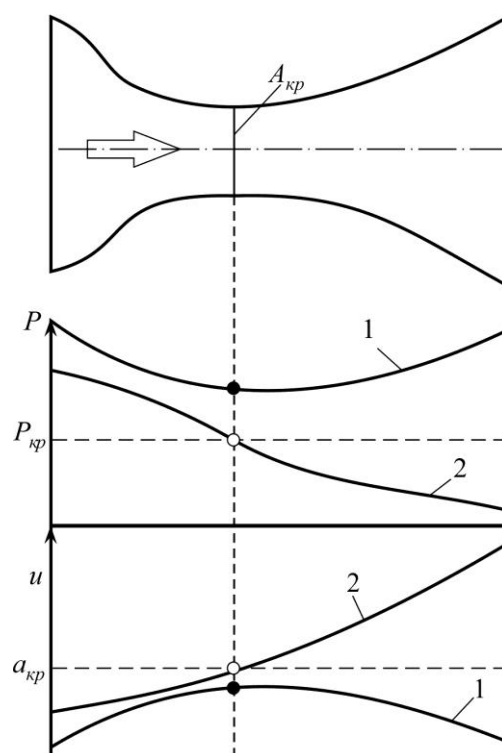


Рисунок 9.5 – Характер зміни параметрів вздовж сопла Лавалю

<sup>51</sup> Лаваль Карл Густав Патрік (1845 – 1913) – видатний шведський інженер і винахідник. За своє життя Лаваль запатентував 93 винаходи, зокрема центрифугу для розділення суміші рідин за густиною (сепаратор), доїльний апарат, але всевітнє визнання винахіднику принесло сопло для досягнення надзвукової швидкості, яке застосовується у різних галузях техніки та носить його ім'я.

Площу поперечного перерізу сопла можна визначити, звернувшись до рівняння нерозривності. Тоді з урахуванням рівнянь (9.81) і (9.82)

$$\frac{A_1}{A_{\text{ср}}} = \frac{\rho_{\text{ср}} a_{\text{ср}}}{\rho_1 u_1} = \frac{1}{q} = \left( \frac{k+1}{2} \right)^{\frac{1}{k-1}} \frac{1}{\lambda} \left[ \left( 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right) \right]^{\frac{1}{k-1}} \quad (9.86)$$

або, скориставшись формулами (9.48), (9.49), (9.52) та (9.53),

$$\frac{A_1}{A_{\text{ср}}} = \frac{1}{M} \left[ \frac{2}{k+1} \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}}, \quad (9.87)$$

де  $A_1$  – площа довільного перерізу сопла.

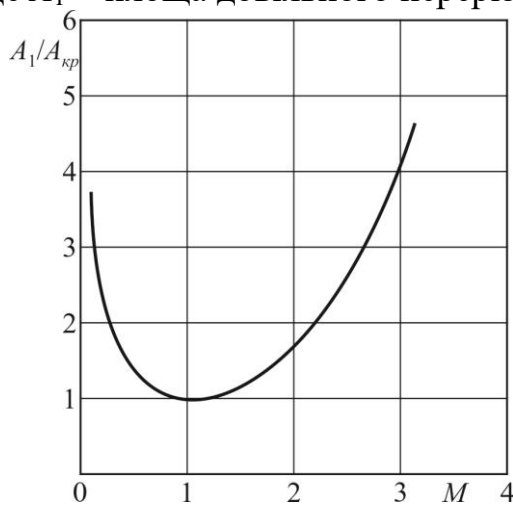


Рисунок 9.6 – Залежність  $A_1/A_{\text{ср}} = f(M)$  для повітря

Графік залежності  $A_1/A_{\text{ср}} = f(M)$  для повітря представлений на рисунку 9.6. Він підтверджує той факт, що в дозвуковому потоці для збільшення числа Маха площу перерізу слід зменшувати, а у надзвуковому навпаки – збільшувати.

При виведенні наведених вище формул потік розглядався як одновимірний і нев'язкий, теплопередача через стінки вважалася повністю відсутньою. Це звичайно є спрощенням, а тому практичні розрахунки з використанням цих формул дають деяку похибку.

На завершення зауважимо, що для отримання надзвукового потоку, крім сопла Лавалю, можуть використовуватися і так звані витратні, теплові, механічні та деякі інші сопла.

## 9.5 ПОШИРЕННЯ МАЛИХ ЗБУРЕНЬ У ГАЗОВОМУ ПОТОЦІ. КОСИЙ СТИБОК ЗГУЩЕННЯ

Якщо джерело малих збурень знаходиться в нерухомому середовищі, то ці збурення поширюються у просторі у вигляді хвиль, фронт яких має форму сфери. На плоскому рисунку їх можна зобразити як концентричні кола з центром у джерелі збурень  $A$  (рисунок 9.7). Як вже відмічалось, ці малі збурення поширюються зі швидкістю звуку і при нерухомому джерелі цей процес буде проходити однаково у всіх напрямках.



Характер поширення збурень змінюється у потоці, що рухається (або у нерухомому середовищі при рухомому джерелі збурень). Це пов'язано з тим, що хвилі зносяться потоком, при цьому в напрямі вектора швидкості потоку збурення поширюються зі швидкістю  $(a + u)$ , а у протилежному –  $(a - u)$ . На рисунку 9.8 для різних значень числа Маха потоку наведена картина поширення хвиль малих збурень. Очевидно, що при  $u \geq a$  збурення можуть поширюватися тільки в напрямі потоку.

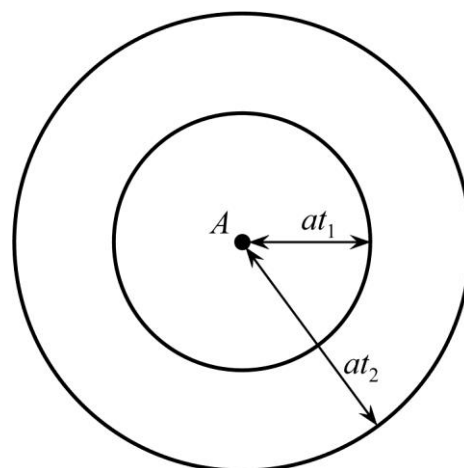


Рисунок 9.7 – Поширення малих збурень в нерухомому середовищі

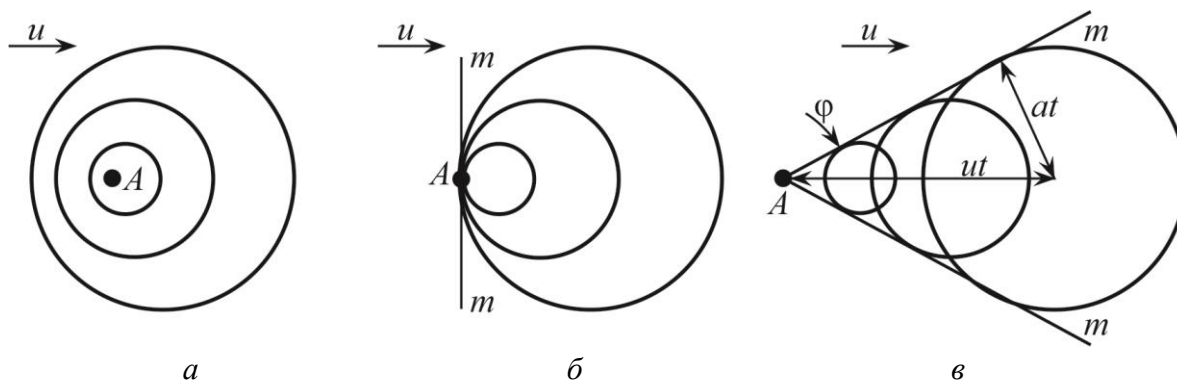


Рисунок 9.8 – Поширення малих збурень у рухомому середовищі:  
 $a - u < a, M < 1$ ;  $б - u = a, M = 1$ ;  $в - u > a, M > 1$

Лінія  $Am$  є границею між збуреною і незбуреною частинами потоку. Оскільки у даному випадку розглядаються малі збурення, то лінію називають *границею слабких збурень (слабкою хвилею, характеристикою або лінією Маха)*. З рисунку 9.8 випливає, що

$$\sin \varphi = \frac{at}{ut} = \frac{1}{M}, \quad (9.88)$$

( $\varphi$  називають *кутом Маха*).

Розглянемо плоский надзвуковий потік, що рухається вздовж поверхні  $VAC$ , котра має злам на випуклий кут (рисунку 9.9). Обтікаючи цей кут, потік розширюється, а оскільки він надзвуковий, то це приводить до збільшення швидкості ( $u_2 > u_1$ ), зменшення тиску ( $P_2 < P_1$ ) і густини ( $\rho_2 < \rho_1$ ). Отже, точку  $A$  можна розглядати як джерело малих збурень. Лінія Маха  $Am$  розмежовує незбурену частину потоку, де швидкість незмінна і дорівнює  $u_1$  від збуреної. Лінія Маха  $Al$  є границею між збуреною областю, в якій швидкість потоку змінюється від  $u_1$  до  $u_2$ , і частиною потоку, в котрій швидкість вже не змінюється і дорівнює  $u_2$ .

Границі сектора збуреного потоку можна встановити, скориставшись формулою (9.88),

$$\varphi_1 = \arcsin \frac{1}{M_1}, \quad \varphi_2 = \arcsin \frac{1}{M_2}. \quad (9.89)$$

Таким чином, при обтіканні надзвуковим потоком випуклого кута поворот можна розглядати як послідовність слабких збурень, а зміна параметрів відбувається у секторі збурення поступово.

Якісно інший характер має обтікання надзвуковим потоком увігнутого кута (рисунок 9.10). Завдяки повороту стінки назустріч потоку його поперечний

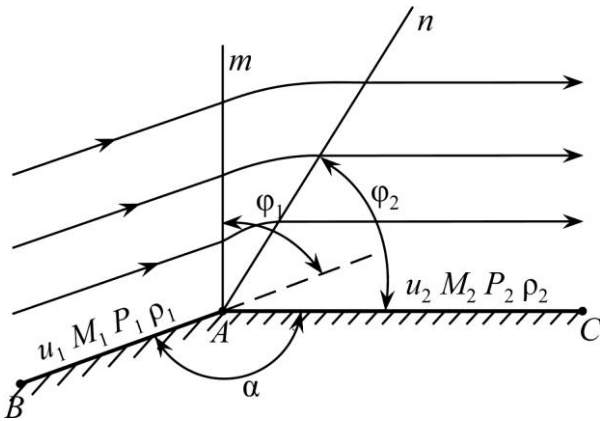


Рисунок 9.9 – Обтікання випуклого кута

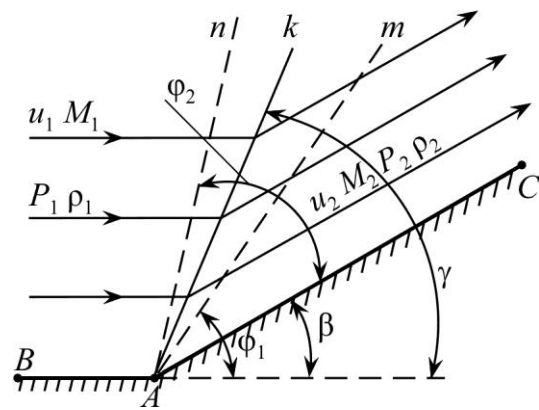


Рисунок 9.10 – Обтікання увігнутого кута

переріз зменшується, а тому  $u_2 < u_1$ ,  $M_2 < M_1$ ,  $P_2 > P_1$ ,  $\rho_2 > \rho_1$ . Скориставшись формулами (9.89), легко пересвідчитись, що  $\varphi_2 > \varphi_1$ . Тобто виходячи з рисунка процес збурення повинен починатися в області, де швидкість вже має величину  $u_2$ , а закінчуватися, де швидкість ще дорівнює  $u_1$ . Іншими словами, процес зміни параметрів повинен закінчитися раніше, чим початися. Зрозуміло, що фізично такий хід процесу абсолютно нереальний. Досвід показує, що при обтіканні надзвуковим потоком увігнутого кута виникає поверхня, при переході крізь котру потік змінює свої параметри стрибком. Цю поверхню називають *косим стрибком згущення*. Її розташування у просторі можна визначити за кутом

$$\gamma \approx \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2 + \beta). \quad (9.90)$$

Для усвідомлення фізичної природи стрибка згущення зазначимо, що розглянуті вище хвилі Маха належать до категорії так званих *слабких розривів*. Зміна параметрів потоку при обтіканні випуклого кута є послідовно розташованими у просторі слабкими розривами. При обтіканні увігнутого кута ці слабкі розриви збігаються у просторі в одну поверхню. Тому стрибок згущення є *сильним розривом*, котрий виникає завдяки взаємному накладанню (підсумовуванню) слабких розривів. Процес згущення відбувається на дуже

малій ділянці шляху потоку, яка має порядок довжини вільного пробігу молекул.

## 9.6 ПРЯМИЙ СТРИБОК ЗГУЩЕННЯ. УДАРНА АДІАБАТА

Поверхня розриву, перпендикулярна до вектора швидкості, називається *прямим стрибком згущення*.

Розглянемо надзвуковий потік з параметрами  $u_1, P_1, T_1, \rho_1$ , що адіабатично рухається в каналі, показаному на рисунку 9.11.

Внаслідок гальмування газу виникає прямий стрибок згущення, за яким параметри потоку  $u_2, P_2, T_2, \rho_2$ .

Встановимо зв'язок між швидкостями газу  $u_1$  та  $u_2$ . Для цього скористаємося законами збереження маси, імпульсу і енергії, записаними для перерізів потоку до і після стрибка.

Рівняння нерозривності, враховуючи, що товщина стрибка дуже мала ( $A_1 = A_2 = A$ ), приймає вигляд

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2. \quad (9.91)$$

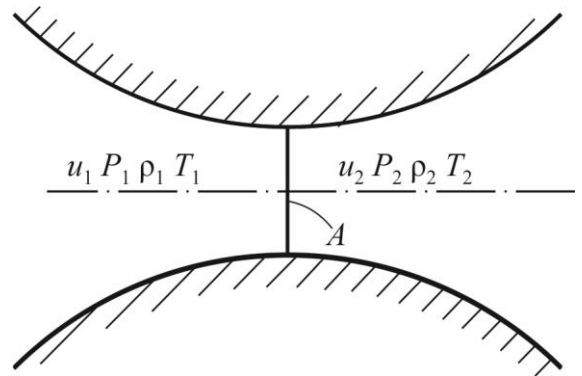


Рисунок 9.11 – Прямий стрибок згущення

Нехтуючи дією масових сил і сил тертя, рівняння кількості руху можна записати у вигляді

$$P_2 - P_1 = \rho_1 u_1^2 - \rho_2 u_2^2, \quad (9.92)$$

або

$$P_2 - P_1 = u_1 u_2 \left( \frac{\rho_1 u_1}{u_2} - \frac{\rho_2 u_2}{u_1} \right). \quad (9.93)$$

З урахуванням рівняння нерозривності (9.91)

$$P_2 - P_1 = u_1 u_2 \left( \frac{\rho_1 u_1}{u_2} - \frac{\rho_2 u_2}{u_1} \right) = u_1 u_2 (\rho_2 - \rho_1). \quad (9.94)$$

Скориставшись рівняннями (9.29) і (9.57), можна отримати вирази для  $P_1$  і  $P_2$  у вигляді:

$$P_1 = \frac{k+1}{2k} \rho_1 a_{кр}^2 - \frac{k-1}{2k} \rho_1 u_1^2 \quad (9.95)$$

і

$$P_2 = \frac{k+1}{2k} \rho_2 a_{кр}^2 - \frac{k-1}{2k} \rho_2 u_2^2. \quad (9.96)$$

Таким чином,

$$u_1 u_2 (\rho_2 - \rho_1) = \frac{k+1}{2k} a_{кр}^2 (\rho_2 - \rho_1) + \frac{k-1}{2k} (\rho_1 u_1^2 - \rho_2 u_2^2), \quad (9.97)$$

а після спрощення, використавши рівняння (9.92) та (9.94),

$$\frac{k+1}{2k} a_{кр}^2 = u_1 u_2 \left( 1 - \frac{k-1}{2k} \right) = \frac{k+1}{2k} u_1 u_2 \quad (9.98)$$

і нарешті,

$$a_{кр}^2 = u_1 u_2. \quad (9.99)$$

Отже, отримали виключно просту формулу (вона називається *формулою Прандтля*), яку, маючи на увазі формулу (9.58), можна подати і так:

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1. \quad (9.100)$$

З формули (9.99) очевидно, що швидкості  $u_1$  і  $u_2$  не можуть бути одночасно дозвуковими або надзвуковими, тобто одна з них завжди більша за  $a_{кр}$ , а друга – менша. При цьому з механізму виникнення стрибка згущення зрозуміло, що надзвуковою є  $u_1$ . Це дає нам право розглядати прямий стрибок згущення як форму переходу від надзвукової течії до дозвукової.

*Стрибок швидкості*

$$\Delta u = u_1 - u_2 = u_1 - \frac{a_{кр}^2}{u_1} = u_1 \left( 1 - \frac{1}{\lambda_1^2} \right). \quad (9.101)$$

*Стрибок тиску*

$$\Delta P = P_2 - P_1 = \rho_1 u_1^2 - \rho_2 u_2^2 = \rho_1 u_1 (u_1 - u_2) = \rho_1 u_1 \Delta u. \quad (9.102)$$

*Стрибок густини*

$$\begin{aligned} \Delta \rho &= \rho_2 - \rho_1 = \rho_1 \frac{u_1}{u_2} - \rho_1 = \rho_1 \left( \frac{u_1}{u_2} - 1 \right) = \\ &= \rho_1 \left( \frac{a_{кр}^2}{u_2^2} - 1 \right) = \rho_1 \left( \frac{1}{\lambda_2^2} - 1 \right) = \rho_1 (\lambda_1^2 - 1). \end{aligned} \quad (9.103)$$

І нарешті, скориставшись рівнянням енергії (9.17), *стрибок температури*

$$\begin{aligned}\Delta T = T_2 - T_1 &= \frac{k-1}{2kR}(u_1^2 - u_2^2) = \frac{k-1}{2kR}u_1^2 \left(1 - \frac{u_2^2}{u_1^2}\right) = \\ &= \frac{k-1}{2kR}u_1^2 \left(1 - \frac{a_{kp}^4}{u_1^4}\right) = \frac{k-1}{2kR}u_1^2 \left(1 - \frac{1}{\lambda_1^4}\right).\end{aligned}\quad (9.104)$$

Встановимо залежність густини від тиску в стрибку згущення. Для цього з формули (9.16) дістанемо

$$u_2^2 - u_1^2 = \frac{2k}{k-1} \left( \frac{P_1}{\rho_1} - \frac{P_2}{\rho_2} \right), \quad (9.105)$$

а з формул (9.91) і (9.92)

$$P_1 - P_2 = \rho_2 u_2^2 - \rho_1 u_1^2 = \rho_1 u_1 u_2 - \rho_1 u_1 u_1 = \rho_1 u_1 (u_2 - u_1). \quad (9.106)$$

Помноживши праву частину рівняння (9.106) на  $\frac{u_1 + u_2}{\rho_1 u_1}$ , а ліву – на рівне значення, представлене у вигляді

$$\frac{u_1 + u_2}{\rho_1 u_1} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{u_2}{\rho_1 u_1} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{u_2}{\rho_2 u_2} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}, \quad (9.107)$$

маємо

$$(P_1 - P_2) \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) = u_2^2 - u_1^2. \quad (9.108)$$

Порівнюючи рівняння (9.105) з (9.108),

$$(P_1 - P_2) \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) = \frac{2k}{k-1} \left( \frac{P_1}{\rho_1} - \frac{P_2}{\rho_2} \right). \quad (9.109)$$

Після нескладних математичних перетворень отримуємо

$$P_1 \left( \frac{2k}{(k-1)\rho_1} - \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) = P_2 \left( \frac{2k}{(k-1)\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right). \quad (9.110)$$

Привівши вираз до спільного знаменника і помноживши на  $(k-1)\rho_1\rho_2$ , дістаємо

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{(k+1)\rho_2 - (k-1)\rho_1}{(k+1)\rho_1 - (k-1)\rho_2} = \frac{(k+1)\frac{\rho_2}{\rho_1} - (k-1)}{(k+1) - (k-1)\frac{\rho_2}{\rho_1}}, \quad (9.111)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(k+1) + (k-1)\frac{P_1}{P_2}}{(k-1) + (k+1)\frac{P_1}{P_2}}. \quad (9.112)$$

Рівняння (9.112) називають *ударною адиабатою*, або *адиабатою Гюгоніо-Ранкіна*. Вона встановлює зв'язок між параметрами при прямому стрибку згущення і лишається справедливою для косоного стрибка.

На рисунку 9.12 наведені графіки, що характеризують зміну параметрів при переході через стрибок (лінія 1) і при ізоентропічній неперервній зміні тиску і густини (лінія 2)

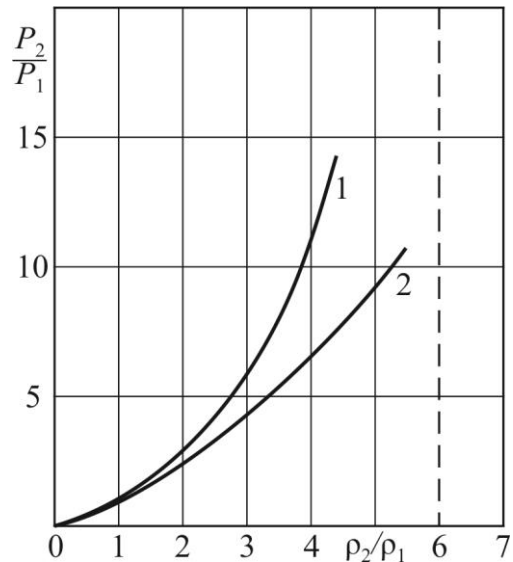


Рисунок 9.12 – Адиабати Гюгоніо і Пуассона

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^k. \quad (9.113)$$

Різниця між цими кривими полягає насамперед у тому, що для *ідеальної адиабати* (адиабати Пуассона<sup>52</sup>) співвідношення  $\rho_2/\rho_1$  може зростати необмежено при необмеженому зростанні  $P_2/P_1$ , а для ударної адиабати, як випливає з формули (9.112),

$$\lim_{P_2 \rightarrow \infty} \frac{\rho_2}{\rho_1} \rightarrow \frac{k+1}{k-1}, \quad (9.114)$$

тобто співвідношення густин асимптотично наближається до цілком визначеної величини (для повітря вона дорівнює шести).

З термодинаміки відомо, що для адиабатичного процесу ідеального газу зміна ентропії

$$S_2 - S_1 = \Delta S = \frac{R}{k-1} \ln \left[ \frac{P_2}{P_1} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^k \right]. \quad (9.115)$$

<sup>52</sup> Пуассон Сімеон-Дені (1781–1840) – видатний французький математик і фізик, член Паризької АН, почесний член Петербурзької АН, автор понад 300 наукових праць. Зокрема Пуассон першим записав рівняння аналітичної механіки у складових імпульсу, поширив рівняння Нав'є-Стокса на випадок течії стислої в'язкої рідини з урахуванням теплопередачі, розв'язав низку важливих задач теорії пружності. Пуассонові належать праці з інтегрального обчислення (інтеграл Пуассона), обчислення скінченних різниць (формула підсумовування Пуассона), теорії диференціальних рівнянь в часткових похідних, теорії ймовірностей, а також електростатиці і магнетизму, небесній механіці, теорії пружності.

З цього випливає, що при зміні параметрів за ідеальною адіабатою (9.113)  $\Delta S = 0$ , тобто ентропія лишається незмінною, тоді як при переході через стрибок згущення згідно з формулою (9.111)  $\Delta S > 0$ .

Таким чином, перехід через стрибок згущення не може розглядатися як ізоентропічний процес. Він супроводжується необоротним перетворенням механічної енергії в теплоту.

Якщо скориставшись рівнянням Клайперона, замінити у формулі (9.111) відношення густин відношенням температур і тисків, то можна отримати формулу

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{(k+1) \frac{P_2}{P_1} + (k-1) \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^2}{(k+1) \frac{P_2}{P_1} + (k-1)} \quad (9.116)$$

На рисунку 9.13 наведені графіки залежності відношення температур від тиску для ізоентропічної (1) і ударної (2) адіабат. З рисунка видно, що при стрибку згущення газ нагрівається більше, ніж при відповідній зміні тиску за ідеальною адіабатою.

Якщо записати рівняння Бернуллі для двох перерізів: до і після стрибка згущення

$$\frac{u_1^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{P_1}{\rho_1} = \frac{k}{k-1} RT_{1*}, \quad (9.117)$$

$$\frac{u_2^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{P_2}{\rho_2} = \frac{k}{k-1} RT_{2*}, \quad (9.118)$$

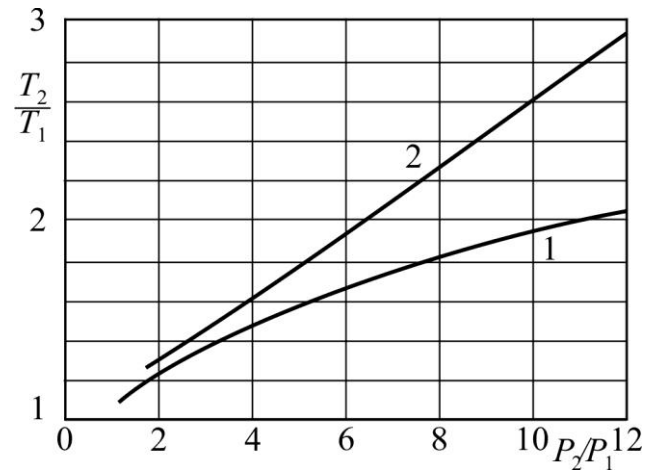


Рисунок 9.13 – Нагрів газу при ізоентропічному і ударному підвищеннях тиску

то з рівності їх лівих частин випливає рівність правих, а отже, при переході через стрибок згущення температура гальмування не змінюється ( $T_{1*} = T_{2*}$ ). Це пояснюється тим, що завдяки теплоізолюваності процесу повна питома енергія газу, котра визначається величиною  $T_*$ , лишається незмінною.

Наприкінці зауважимо, що виведення і підсумкове рівняння адіабати Гюгоніо формально справедливе як для  $\rho_2 > \rho_1$ , так і для  $\rho_2 < \rho_1$ , тобто не тільки для стрибка згущення, але й для стрибка розрядження. Але у останньому випадку ентропія процесу згідно з формулою (9.115) повинна убувати, що суперечить другому закону термодинаміки. Отже, виникнення стрибків

розрядження неможливе, що також доводиться аналізом механізму утворення хвиль згущення і розрядження.

## 9.7 ПРИКЛАДИ ЗАДАЧ ДО РОЗДІЛУ 9

1. Визначить залежність огріхи розрахунку тиску повітря в критичній точці потоку, пов'язаної з нехтуванням стисливістю, від числа Маха.

Тиск у критичній точці (тиск гальмування) без врахування стисливості визначається з рівняння Бернуллі для нестисливої рідини (масовими силами нехтуємо)

$$P_* = P + \frac{\rho u^2}{2},$$

а з урахуванням стисливості за формулою (9.47)

$$\frac{P_*}{P} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Приведемо останню формулу до більш зручного виду. Для цього розкладемо праву частину у ряд. Нагадаємо, що  $(1+x)^n$  при не цілому значенні  $n$  розкладається так:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots$$

Очевидно, що у нашому випадку  $n = \frac{k}{k-1}$  і  $x = \frac{k-1}{2} M^2$ . Тоді

$$\frac{P_*}{P} = 1 + \frac{k}{2} M^2 + \frac{k}{8} M^4 + \frac{k(2-k)}{48} M^6 + \dots = 1 + \frac{k}{2} M^2 \left(1 + \frac{1}{4} M^2 + \frac{2-k}{24} M^4 + \dots\right).$$

Винесений за дужки співмножник

$$\frac{k}{2} M^2 = \frac{k}{2} \frac{u^2}{a^2} = \frac{k}{2} \frac{u^2}{k \frac{P}{\rho}} = \frac{1}{P} \rho \frac{u^2}{2}.$$

Після підстановки його до попередньої формули маємо

$$\frac{P_*}{P} = 1 + \frac{1}{P} \rho \frac{u^2}{2} \left(1 + \frac{1}{4} M^2 + \frac{2-k}{24} M^4 + \dots\right),$$

або

$$P_* = P + \rho \frac{u^2}{2} \left(1 + \frac{1}{4} M^2 + \frac{2-k}{24} M^4 + \dots\right).$$

Для повітря  $k = 1,4$ . Тому

$$P_* = P + \rho \frac{u^2}{2} \left(1 + \frac{1}{4} M^2 + \frac{1}{40} M^4 + \dots\right) = P + \rho \frac{u^2}{2} (1 + \delta).$$

Порівнявши отриману формулу з формулою для нестисливого газу, бачимо, що стисливість враховується співмножником  $(1+\delta)$ . Отже, величину  $\delta$  можна розглядати як поправку



на стисливість, котра, як бачимо із попередньої формули, залежить тільки від числа Маха. Результати розрахунку цієї залежності представимо у таблиці 9.2.

Таблиця 9.2 – Поправка на стисливість

$M$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\delta, \%$	0,25	1,00	2,27	4,06	6,41	9,32	12,8	17,0	21,9	27,5

Таким чином, розрахунки підтверджують, що неврахування стисливості при визначенні тиску при  $M = 0,2$ , складає 1 %, а, скажімо, при  $M = 1,0$  – вже 27,5 %.

2. Визначить, при якому числі Маха повітряного потенціального потоку, що обтікає круглий циліндр, виникне хвильова криза. Температура потоку  $t_\infty = 100$  °C. Розподіл швидкостей біля циліндра вважати аналогічним розподілу в нестисливій рідині.

При надзвуковому обтіканні твердих тіл виникають додаткові втрати енергії, пов'язані з хвильовим опором. Цей опір виникає тоді, коли швидкість потоку досягає звукової, тобто критичної. Таке явище має назву хвильової кризи.

Як показано в пункті 7.2.2, при обтіканні потенціальним потоком кругового циліндра (див. рисунок 7.9) найбільша швидкість  $u = 2u_\infty$  спостерігається в точках  $M_1$  і  $M_2$  з координатами  $\theta = \pm \pi/2$  ( $u_\infty$  – швидкість потоку,  $\theta$  – полярний кут). Тому очевидно, що при зростанні  $u_\infty$  саме в цих точках може в першу чергу виникнути хвильова криза.

Запишемо рівняння Бернуллі для струминки, котра протікає по поверхні циліндра. Перший переріз обираємо перед циліндром, де швидкість становить  $u_\infty$ , другий – де швидкість максимальна і дорівнює  $2u_\infty$ .

$$\frac{k}{k-1}RT_\infty + \frac{u_\infty^2}{2} = \frac{k}{k-1}RT + \frac{4u_\infty^2}{2}.$$

Звідки

$$T = T_\infty - \frac{3(k-1)u_\infty^2}{2kR}.$$

Якщо найбільша швидкість, котра дорівнює  $2u_\infty$ , дорівнюватиме швидкості звуку

$$a = \sqrt{kRT},$$

то

$$T = T_\infty - \frac{3(k-1)}{2kR} \frac{kRT}{4} = T_\infty - \frac{3(k-1)T}{8}$$

і

$$T = \frac{T_\infty}{1 + \frac{3}{8}(k-1)} = \frac{273+100}{1 + \frac{3}{8}(1,4-1)} = 324 \text{ K}.$$

Швидкість потоку, що набігає,

$$u_\infty = \frac{1}{2} \sqrt{kRT} = \frac{1}{2} \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot 324} = 181 \text{ м/с}.$$

Швидкість звуку в потоці

$$a_{\infty} = \sqrt{kRT_{\infty}} = \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot (273+100)} = 387 \text{ м/с.}$$

Отже, число Маха, при якому настає хвильова криза,

$$M = \frac{u_{\infty}}{a_{\infty}} = \frac{181}{387} = 0,468.$$

3. Визначить значення зведеної швидкості  $\lambda_2$  і тиск повітря в перерізі «2» сопла Лавалю, де температура  $T_2 = 270 \text{ К}$ , якщо в перерізі «1» дозвукової його частини  $P_1 = 16 \cdot 10^5 \text{ Па}$ , температура гальмування  $T_{*1} = 401 \text{ К}$ , а зведена швидкість  $\lambda_1 = 0,6$ .

Визначить температуру в перерізі «3», де тиск дорівнює атмосферному  $P_a = 101 \text{ кПа}$ .

Повна питома енергія потоку визначається температурою, або тиском гальмування. Тому

$$T_{*1} = T_{*2} \quad \text{і} \quad P_{*1} = P_{*2}.$$

Тоді, скориставшись формулою (9.64), маємо

$$\tau(\lambda_2) = \frac{T_2}{T_{*2}} = \frac{T_2}{T_{*1}} = \frac{270}{401} = 0,6733.$$

З таблиці 9.1 дістаємо, що  $\lambda_2 = 1,4$ . Відтак, шуканий переріз знаходиться в надзвуковій частині сопла.

Згідно з рівнянням (9.65)

$$\pi(\lambda_2) = \frac{P_2}{P_{*2}} \quad \text{і} \quad \pi(\lambda_1) = \frac{P_1}{P_{*1}} = \frac{P_1}{P_{*2}}.$$

Тоді

$$P_2 = P_1 \frac{\pi(\lambda_2)}{\pi(\lambda_1)} = 16 \cdot 10^5 \frac{0,2505}{0,8053} = 4,98 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

Визначимо тепер температуру в перерізі «3».

$$\pi(\lambda_3) = \frac{P_3}{P_{*3}} = \frac{P_3}{P_{*1}},$$

або

$$\pi(\lambda_3) = \pi(\lambda_1) \frac{P_3}{P_1} = 0,8053 \frac{1,01}{16} = 0,05083.$$

З таблиць газодинамічних функцій знаходимо  $\lambda_3 \approx 1,855$ . Тоді  $\tau(\lambda_3) \approx 0,426$  і температура в перерізі «3»

$$T_3 = \tau(\lambda_3)T_{*3} = \tau(\lambda_3)T_{*1} = 0,426 \cdot 401 = 171 \text{ К.}$$

Отже, у перерізі «2» зведена швидкість  $\lambda_2 = 1,4$ , а тиск повітря  $P_2 = 4,98 \cdot 10^5 \text{ Па}$ . Температуру в перерізі «3»  $T_3 = 171 \text{ К}$ .

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Абрамович Г. Н. Прикладная газовая динамика / Г. Н. Абрамович. – 3-е изд., перераб. – М.: Наука, 1969. – 824 с.
2. Абрамович Г. Н. Теория турбулентных струй / Г. Н. Абрамович. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1960. – 715 с.
3. Альтшуль А. Д. Гидравлические сопротивления / А. Д. Альтшуль. – М.: Недра, 1970. – 216 с.
4. Альтшуль А. Д. Гидравлика и аэродинамика: учеб. для вузов / А. Д. Альтшуль, Л. С. Животовский, Л. П. Иванов. – М.: Стройиздат, 1987. – 414 с.
5. Альтшуль А. Д. Гидравлика и аэродинамика (основы механики жидкости): учеб. пособие для вузов / А. Д. Альтшуль, П. Г. Киселев. – 2-е изд. – М.: Стройиздат, 1975. – 323 с.
6. Башта Т. М. Гидравлика, гидравлические машины и гидравлические приводы: учеб. для вузов / Т. М. Башта, С. С. Руднев, Б. Б. Некрасов [и др.]. – М.: Машиностроение, 1970. – 504 с.
7. Большаков В. А. Гидравлика. Общий курс: учеб. для вузов / В. А. Большаков, В. Н. Попов. – К.: Вища шк., 1989. – 215 с.
8. Бутаев Д. А. Сборник задач по машиностроительной гидравлике / Д. А. Бутаев, З. А. Калмыкова, Л. Г. Подвидз [и др.]. – М.: Машиностроение, 1972. – 472 с.
9. Бутенко О. Г. Механіка рідини і нагнітачі: навч. посіб. / О. Г. Бутенко. – О.: Бахва, 2001. – 233 с.
10. Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа: пер. с англ. / М. Ван-Дайк. – М.: Мир, 1986. – 184 с.
11. Грабовский А. М. Гидромеханика и газовая динамика: сб. задач / А. М. Грабовский, К. Ф. Иванов, Г. М. Дунчевский. – К.: Вища шк., 1987. – 64 с.
12. Грабовський О. М. Гідравліка і нагнітачі: навч. посіб. / О. М. Грабовський, О. М. Цабієв. – К.: НМК ВО, 1992. – 316 с.
13. Дейч М. Е. Техническая газодинамика / М. Е. Дейч, А. Е. Зарякин. – 3-е изд., перераб. – М.: Энергоатомиздат, 1974. – 592 с.
14. Дейч М. Е. Гидрогазодинамика: учеб. пособие для вузов / М. Е. Дейч, А. Е. Зарякин. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 384 с.
15. Емцев Б. Т. Техническая гидромеханика: учеб. для вузов / Б. Т. Емцев. – 3-е изд., перераб. – М.: Машиностроение, 1987. – 440 с.
16. Киселев П. Г. Гидравлика. Основы механики жидкости / П. Г. Киселев. – М.-Л.: Госэнергоиздат, 1963. – 424 с.
17. Константинов Ю. М. Гидравлика: учеб. для вузов / Ю. М. Константинов. – 2-е изд., перераб. – К.: Вища шк., 1988. – 398 с.
18. Константинов Н. М. Гидравлика, гидрология, гидрометрия: учеб. для вузов. Ч. 1. Общие законы / Н. М. Константинов, Н. А. Петров, Л. И. Высоцкий. – М.: Высш. шк., 1987. – 304 с.

19. Краснов Н. Ф. Аэродинамика в вопросах и задачах: учеб. пособие для вузов / Н. Ф. Краснов, В. Н. Кошевой, А. Н. Данилов [и др.]. – М.: Высш. шк., 1985. – 759 с.
20. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа: учеб. для вузов / Л. Г. Лойцянский. – 6-е изд., перераб. – М.: Наука. Гл. ред. физ- мат. лит., 1987. – 840 с.
21. Луговский В. В. Гидромеханика / В. В. Луговский. – Л.: Судостроение, 1990. – 192 с.
22. Мхитарян А. М. Гидравлика и основы газодинамики / А. М. Мхитарян. – К.: Гостехиздат УССР, 1959. – 279 с.
23. Павленко В. Г. Основы механики жидкости / В. Г. Павленко. – Л.: Судостроение, 1988. – 240 с.
24. Повх И. Л. Техническая гидромеханика / И. Л. Повх. – 2-е изд., доп. – Л.: Машиностроение, 1976. – 504 с.
25. Рабинович Е. З. Гидравлика: учеб. пособие для вузов / Е. З. Рабинович. – М.: Недра, 1980. – 278 с.
26. Рауз Х. Механика жидкости для инженеров-механиков / Х. Рауз. – М.: Госэнергоиздат, 1958. – 368 с.
27. Смыслов В. В. Гидравлика и аэродинамика: учеб. для вузов; пер. с укр., перераб. и доп. / В. В. Смыслов. – К.: Вища шк., 1984. – 336 с.
28. Справочник по гидравлике / под ред. В. А. Большакова. – 2-е изд., перераб. – К.: Вища шк., 1984. – 343 с.
29. Талиев В. Н. Аэродинамика вентиляции: учеб. пособие для вузов / В. Н. Талиев. – М.: Стройиздат, 1979. – 295 с.
30. Тарг С. М. Основные задачи теории ламинарных течений / С. М. Тарг. – М.-Л.: Гостехиздат, 1951. – 420 с.
31. Тепакс Л. А. Равномерное турбулентное движение в трубах и каналах / Л. А. Тепакс. – Таллин: «Валгус», 1975. – 255 с.
32. Фабрикант Н. Я. Аэродинамика / Н. Я. Фабрикант. – М.: Наука, 1964. – 814 с.
33. Чугаев Р. Р. Гидравлика / Р. Р. Чугаев. – Л.: Энергия, 1971. – 552 с.
34. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. – М.: Наука, 1969. – 742 с.