



**Universidad  
Nacional Politécnica  
de Odessa**



**Instituto Ucrainiano-Español**

**Óscar García-Dils Vega  
Serhii Hutyria**

**Ingeniería Eléctrica y Electrónica**  
**Fundamentos**  
**Apuntes de clase**

**Odessa, 2017**



Одеський національний  
політехнічний університет  
Українсько-іспанський  
навчально-науковий інститут



УДК 621.3(075) + 621.38(075)  
ББК 31.2я7+32.85я7  
G18

**Оскар Гарсія-Ділс Вега, Сергій Гутиря**

G18 Електротехніка та основи електроніки = Ingeniería Eléctrica y Electrónica Fundamentos: навч. посібник ісп. мовою / Оскар Гарсія-Ділс Вега, Сергій Гутиря / За ред. проф. С.С. Гутирі. – О.: Бахва, 2017. – 96 с.: іл.  
ISBN 978-966-8783-46-3

Навчальний посібник з навчальної компоненти "Електротехніка та основи електроніки" призначений для студентів технічного університету за спеціальностями 131 Прикладна механіка, 133 Галузеве машинобудування, 141 Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка, 152 Метрологія та інформаційно-вимірвальна техніка, 274 Автомобільний транспорт, які навчаються професійно-спрямованій іспанській мові. Викладено базові знання з теорії ланцюгів постійного струму, наведено всі електричні величини, що використовуються, та відповідні одиниці виміру. Розглянуто складові елементи електронних схем: резистор, конденсатор, котушка, діод і біполярний транзистор. Наведено приклади розв'язання низки задач, а також завдання для самостійної роботи студента. На початку кожної теми наведено словник технічних термінів іспанською, англійською, українською та російською мовами. Наприкінці посібника наведено бібліографію сучасної навчальної літератури з означеної компоненти.

Componente Educativo Libro de Texto «Ingeniería Eléctrica y Electrónica Fundamentos» está diseñado para estudiantes de la Universidad Técnica por especialidades 131 Mecánica Aplicada, 133 Ingeniería Industrial, 141 Ingeniería de Energía Eléctrica, Ingeniería Eléctrica y Electromecánica, 152 Equipos de Metrología y Medición de la Información, 274 Transportes Automotrices, que están capacitados en Español de Orientación Profesional. Ofrece al alumno una introducción a la teoría de circuitos en corriente continua, presentando las diversas magnitudes eléctricas, sus unidades, las teorías fundamentales que definen su comportamiento, así como introduce los diversos elementos que componen los circuitos electrónicos como son la resistencia, el condensador, la bobina, el diodo y el transistor bipolar. Se ofrecen una serie de problemas resueltos, así como tareas a completar por el alumno. Para mejorar la comprensión de los términos, al comienzo de cada lección se presenta un vocabulario técnico en los idiomas español, inglés, ucraniano y ruso. Al final de los apuntes encontraremos una extensa bibliografía.

УДК 621.3(075) + 621.38(075)  
ББК 31.2я7+32.85я7

ISBN 978-966-8783-46-3

© Бахва, ООО, 2017

## Índice

<b>Tema 1. Conceptos básicos</b> .....	5
1.0 Vocabulario técnico español-inglés-ucraniano-ruso .....	5
1.1 La Electrónica.....	5
1.2 Símbolos y unidades.....	5
1.3 Magnitudes eléctricas fundamentales.....	8
1.3.1 Carga eléctrica.....	8
1.3.2 Campo eléctrico.....	8
1.3.3 Tensión.....	10
1.3.4 Corriente.....	10
1.3.5 Potencia.....	12
1.4 Componentes, dispositivos y circuitos.....	14
1.5 Señales.....	16
1.5.1 Señal escalón.....	16
1.5.2 Señal exponencial.....	20
1.5.3 Señal sinusoidal.....	20
1.6 Leyes de Kirchhoff.....	22
1.7 Problemas para el trabajo independiente.....	24
<b>Tema 2. Circuitos resistivos</b> .....	25
2.0 Vocabulario técnico español-inglés-ucraniano-ruso .....	25
2.1 Concepto de resistencia.....	25
2.2 Análisis de circuitos resistivos por el método de nudos.....	29
2.3 Análisis de circuitos resistivos por el método de mallas.....	30
2.4 Concepto de circuito equivalente.....	31
2.5 Resistencias en serie. El divisor de tensión.....	32
2.6 Resistencias en paralelo. El divisor de corriente.....	33
2.7 Problemas para el trabajo independiente.....	36
<b>Tema 3. El condensador, la bobina y el transformador</b> .....	38
3.0 Vocabulario técnico español-inglés-ucraniano-ruso .....	38
3.1 El condensador.....	38
3.1.1 El condensador ideal.....	38
3.1.2 Principio físico de funcionamiento.....	39
3.1.3 Asociación de condensadores.....	41
3.2 Análisis de circuitos de resistencias y condensadores ( <i>RC</i> ).....	42
3.2.1 Respuesta de un condensador a señales en escalón.....	42
3.3 La bobina.....	48
3.3.1 La bobina ideal.....	48
3.3.2 Principio físico de funcionamiento.....	49
3.3.3 Asociación de bobinas en serie y en paralelo.....	50
3.4 Análisis de circuitos de resistencias y bobinas ( <i>RL</i> ).....	52
3.5 Linealidad y energía almacenada en condensadores y bobinas.....	54
3.6 Análisis circuitos de resistencias, bobinas y condensadores ( <i>RLC</i> ) de corriente continua, en régimen permanente.....	58
3.7 El transformador.....	61
3.7.1 Introducción.....	61

3.7.2 El transformador monofásico ideal.....	61
3.8 Problemas para el trabajo independiente.....	64
<b>Tema 4. El diodo. Circuitos con diodos.....</b>	<b>69</b>
4.0 Vocabulario técnico español-inglés-ucraniano-ruso .....	69
4.1 El diodo. Conceptos básicos.....	69
4.1.1 El diodo ideal.....	69
4.1.2 El diodo real.....	71
4.2 El diodo en continua y baja frecuencia.....	71
4.3 El diodo rectificador.....	73
4.3.1 Modelización del diodo rectificador.....	73
4.3.2. Aplicaciones del diodo rectificador.....	74
4.4 El diodo zener.....	76
4.4.1 Modelización del diodo zener.....	76
4.4.2 Aplicaciones del diodo zener.....	80
4.5 Problemas para el trabajo independiente.....	81
<b>Tema 5. El transistor bipolar.....</b>	<b>82</b>
5.0 Vocabulario técnico español-inglés-ucraniano-ruso .....	82
5.1 El transistor bipolar. Conceptos básicos.....	82
5.2 El transistor bipolar en continua y en baja frecuencia.....	85
5.2.1 Curvas características del transistor bipolar en emisor común.....	85
5.3 El transistor bipolar como interruptor.....	90
5.4 Problemas para el trabajo independiente.....	94
<b>Bibliografía general.....</b>	<b>95</b>

# Tema 1. Conceptos básicos

## 1.0 Vocabulario técnico español-inglés-ucraniano-ruso

Ingeniería (m)	engineering	інженерія	инженерия
Ingeniero (m) / Ingeniera (f)	engineer	інженер	инженер
Electrónica (f)	electronics	електроніка	электроника
Electricidad (f)	electricity	електрика	электричество
Electrotécnia (f)	electrical engineering	електротехніка	электротехника
Ingeniero eléctrico (m) / Ingeniera eléctrica (f)	electrical engineer	інженер- електрик	инженер- электрик
Ingeniero electronic (m) / Ingeniera electrónica (f)	electronics engineer	інженер- електронік	инженер- электроник
Semiconductor (m)	semiconductor	напівпровідник	полупроводник
Electrón (m)	electron	електрон	электрон
Campo eléctrico (m)	electric field	електричне поле	электрическое поле
Tensión (f)	tension	напруга	напряжение
Corriente (f)	current	струм	ток
Potencia (f)	power	потужність	мощность
Tiempo (m)	time	час	время
Circuito eléctrico (m)	electrical circuit	електричний ланцюг	электрическая цепь
Componente electronic (m)	electronic component	складна інтегральна схема	сложная интегральная схема
Interruptor (m)	switch	вимикач	выключатель
Generador (m)	generator	генератор	генератор
Alternador (m)	alternator	генератор змінного струму	генератор переменного тока
Batería (f)	battery	акумулятор	аккумулятор
Señal (f)	signal	сигнал	сигнал
Osciloscópio (m)	oscilloscope	осцилоскоп	осциллоскоп
Ley (f)	law	закон	закон
Símbolo (m)	symbol	символ	символ
Unidad (f)	unit	одиниця	единица

### 1.1 La Electrónica

La Electrónica es la parte de las Ciencias Físicas que se dedica a la conducción eléctrica en elementos semiconductores, a través de un gas o del vacío. La diferencia con la otra rama denominada Electricidad es pequeña, y ambas ramas están profundamente relacionadas. En la práctica, podemos decir que un circuito es electrónico, y no eléctrico, cuando funciona con tensiones e intensidades bajas (unos pocos voltios y con un consumo de pocos miliamperios), cuando se destina a aplicaciones de cálculo (informática), control automático o manejo de señales de radio (Fig. 1.1, 1.2).

## 1.2 Símbolos y unidades

En la tabla 1.1 se indican las magnitudes físicas más utilizadas en electrónica, y se incluyen sus símbolos y sus unidades. Estas magnitudes están referidas al SI.

Los valores numéricos que se utilizan en ingeniería electrónica suelen ocupar varios órdenes de magnitud. Por esto se suelen utilizar prefijos decimales que se anteponen a la unidad e indican la potencia de diez por la que se debe multiplicar la unidad. En la tabla 1.2 se indican los prefijos decimales más usuales. Nótese que corresponden a exponentes múltiplos de tres. Así por ejemplo:  $5 \cdot 10^{-3} A = 5 \text{ mA}$  y se lee 5 miliamperios;  $10 \cdot 10^9 \text{ Hz} = 10 \text{ GHz}$  y se lee 10 gigahercios.

**Tabla 1.1 Magnitudes eléctricas. Símbolos y unidades**

Magnitud	Símbolo	Unidad	Símbolo unidad
Carga	$Q$	culombio	$C$
Campo eléctrico	$E$	voltio por metro	$V/m$
Tensión	$V$	voltio	$V$
Corriente	$i$	amperio	$A$
Energía	$w$	julio	$J$
Potencia	$p$	vatio	$W$
Tiempo	$t$	segundo	$s$
Frecuencia	$f$	hercio	$Hz$
Pulsación o frecuencia angular	$\omega$	radián por segundo	$rad/s, s^{-1}$
Angulo de fase	$\varphi$	radián, grado	$rad, grad$
Resistencia	$R$	ohmio	$\Omega$
Impedancia	$Z$	ohmio	$\Omega$
Conductancia	$G$	siemens	$\Omega^{-1}$ o $S$
Admitancia	$Y$	siemens	$\Omega^{-1}$ o $S$
Capacidad	$C$	faradio	$F$
Inductancia	$L$	henrio	$H$
Flujo magnético	$\phi$	weber	$Wb$
Inducción magnética	$B$	tesla	$T$

**Tabla 1.2 Prefijos decimales más usuales**

Prefijo	Multiplicador	Símbolo prefijo
Exa	$10^{18}$	$E$
Peta	$10^{15}$	$P$
Tera	$10^{12}$	$T$
Giga	$10^9$	$G$
Mega	$10^6$	$M$
Kilo	$10^3$	$k$
mili	$10^{-3}$	$m$
micro	$10^{-6}$	$\mu$
nano	$10^{-9}$	$n$
pico	$10^{-12}$	$p$
femto	$10^{-15}$	$f$
atto	$10^{-18}$	$a$



Fig. 1.1 Aplicaciones de la electrónica

About 30 electric/electronic systems and more than 100 sensors



	<i>Sistema</i>	<i>Nº ss</i>
DTR	Distronic	3
ECT	Transmisión elctr.	9
RCU	Ctrl. techo solar	7
ABS	Antibloqueo frenos	4
ZV	Cierre centralizado	3
LWR	Ajuste dinam. faros	6
CDI	Ctrl. inyección	11
AAC	Climatizador	13
ABC	Ctrl. activo cuerpo	12
TPM	Press. neumaticos	11
ESP	Ctrl. estabilidad	14
PTS	Paridronic	12

Fig. 1.2 Aplicaciones de la electrónica a la industria del automóvil

## 1.3 Magnitudes eléctricas fundamentales

### 1.3.1 Carga eléctrica

La carga eléctrica es la cantidad de electricidad que posee un cuerpo. Hay dos tipos de carga eléctrica: positiva y negativa. Dos cuerpos que tengan carga del mismo signo se repelen, mientras que si su carga es de signo contrario se atraen (fig. 1.3).

En el Sistema Internacional de Unidades (SI) la unidad de carga eléctrica se denomina **culombio** (símbolo C). Un culombio corresponde a la carga de  $6,241\ 509 \times 10^{18}$  electrones.

La menor cantidad de carga que se encuentra en la naturaleza es la carga del electrón, cuyo valor,  $q_e$ , es  $-1,6 \cdot 10^{-19}$  C. La carga del protón es positiva y del mismo valor que la del electrón. Por tanto la carga eléctrica es una propiedad cuantizada. El valor de la carga eléctrica de un cuerpo, representada como  $q$  o  $Q$ , se mide según el número de electrones que posea en exceso o en defecto.

La fuerza que ejercen entre sí dos cargas eléctricas  $q$  y  $q'$ , separadas una distancia  $r$ , viene dada por la Ley de Coulomb, y su magnitud es:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q \cdot q'}{r^2} \quad (1.1)$$

Donde  $\epsilon$  es la permitividad dieléctrica del medio en el que están las cargas. Si el medio es el vacío, esta constante se denomina  $\epsilon_0$  y su valor es  $8,85 \cdot 10^{-12}$  F/m. En este caso el valor de  $(1/4\pi\epsilon_0)$  es  $9 \cdot 10^9$  V·m/C.

Cuando el signo de esta fuerza es positivo significa que las cargas se repelen, y cuando es negativo que se atraen.

**Para ampliar:** Todo cuerpo se compone de átomos, cada uno de los cuales posee igual número de electrones y protones. Los electrones poseen una carga negativa, y los protones una carga positiva. Estas cargas se contrarrestan unas a otras, para que el objeto resulte neutro (no cargado). Pero al frotar, por ejemplo, un peine o peineta sobre un chaleco los electrones saltan del chaleco al peine y éste se carga de electricidad estática. El peine pasa a tener más electrones que protones y se carga negativamente, mientras que el chaleco con más protones que electrones, se carga positivamente (fig. 1.4, 1.5).

*Las cargas eléctricas no se crean al frotar un cuerpo, sino que se trasladan.*

### 1.3.2 Campo eléctrico

El campo eléctrico en un punto del espacio es la fuerza de origen eléctrico que experimenta la unidad de carga eléctrica positiva en ese punto. Si en dicho punto hubiera una carga  $q$ , la fuerza ejercida por el campo eléctrico  $\vec{F}(x)$  sobre ella sería:

$$\vec{F}(x) = q \cdot \vec{F}(x) \quad (1.2)$$

Nótese que tanto la fuerza como el campo eléctrico son magnitudes vectoriales, definidas por un módulo, una dirección y un sentido. La unidad de campo eléctrico, es el newton por culombio (fig. 1.6).

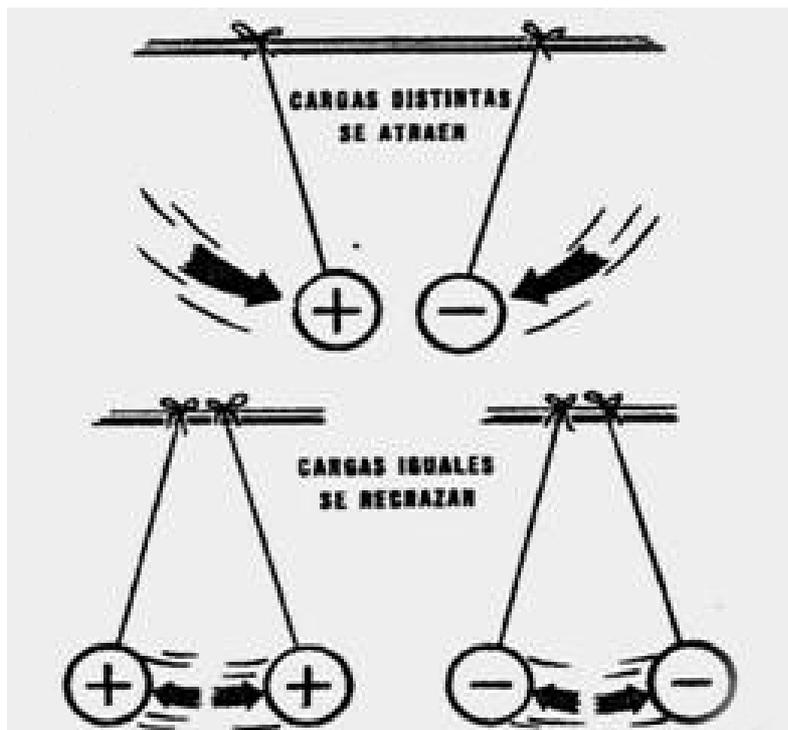


Fig. 1.3 Atracción y repulsión de cargas eléctricas



Fig. 1.4 Ámbar: Elektron, en griego

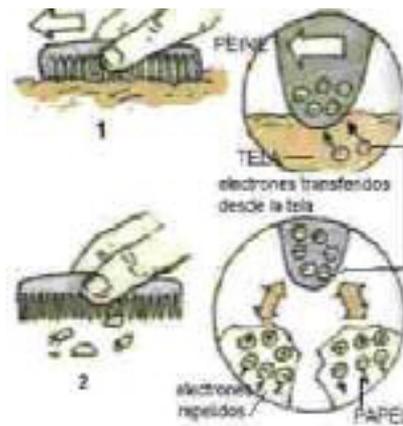


Fig. 1.5 Al frotar el peine se transfieren electrones al mismo, con lo cual se carga eléctricamente

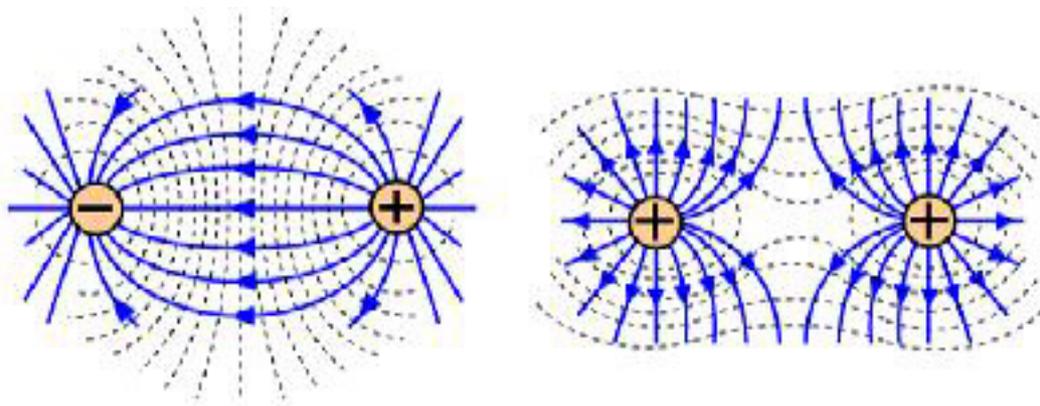


Fig. 1.6 Campo eléctrico originado por dos cargas de distinto signo (izquierda), y del mismo signo (derecha)

**Para ampliar:** Una carga eléctrica puntual  $q$  (carga de prueba) sufre, en presencia de otra carga  $q_1$  (carga fuente), una fuerza electrostática. Si eliminamos la carga de prueba, podemos pensar que el espacio que rodea a la carga fuente ha sufrido algún tipo de perturbación, ya que una carga de prueba situada en ese espacio sufrirá una fuerza.

La perturbación que crea en torno a ella la carga fuente se representa mediante un vector denominado campo eléctrico. La dirección y sentido del vector campo eléctrico en un punto vienen dados por la dirección y sentido de la fuerza que experimentaría una carga positiva colocada en ese punto: si la carga fuente es positiva, el campo eléctrico generado será un vector dirigido hacia afuera (a) y si es negativa, el campo estará dirigido hacia la carga (b), donde  $\vec{A}$  es el campo eléctrico (fig. 1.7).

### 1.3.3 Tensión

La tensión eléctrica en un punto  $A$  respecto a otro punto  $B$ , también denominada diferencia de potencial entre  $A$  y  $B$ , es el trabajo que hay que realizar sobre la unidad de carga eléctrica positiva situada en  $B$  para trasladarla hasta  $A$ , venciendo la fuerza ejercida sobre ella por el campo eléctrico:

$$V_{AB} = V_A - V_B = - \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (1.3)$$

Este trabajo es independiente del camino seguido por la carga para ir de  $B$  hacia  $A$ , ya que el campo eléctrico es conservativo. La unidad de tensión es el voltio (V). Por ello, también se suele utilizar el término "voltaje" para designar la tensión eléctrica, y se le representa por la letra  $v$ . La expresión anterior muestra que el campo eléctrico también se puede expresar en voltios por metro, que es la forma usada más habitualmente en electrónica. Igualando las dos expresiones del campo eléctrico, resulta:

$$1 \text{ voltio} = 1 \text{ newton} \cdot 1 \text{ metro} / 1 \text{ culombio} = 1 \text{ julio} / 1 \text{ culombio} \quad (1.4)$$

### 1.3.4 Corriente

Si dos puntos que tienen una diferencia de potencial se unen mediante un conductor, se producirá un flujo de electrones. Parte de la carga que crea el punto de mayor potencial se trasladará a través del conductor al punto de menor potencial y, en ausencia de una fuente externa (generador), esta corriente cesará cuando ambos puntos igualen su potencial eléctrico. Este traslado de cargas es lo que se conoce como corriente eléctrica (fig. 1.8).

La intensidad de la corriente eléctrica que circula por un conductor es la cantidad de carga eléctrica que atraviesa la sección del conductor por unidad de tiempo. Es una magnitud vectorial puesto que depende del sentido del movimiento de las cargas.

En el lenguaje habitual se suele llamar "corriente" a la intensidad de la corriente. Por convenio, se asigna a la corriente el sentido que tendría el movimiento de las cargas positivas en el conductor (fig. 1.9).

La unidad de intensidad de corriente eléctrica es el amperio (A):

$$1 \text{ amperio} = 1 \text{ culombio} / 1 \text{ segundo} \quad (1.5)$$

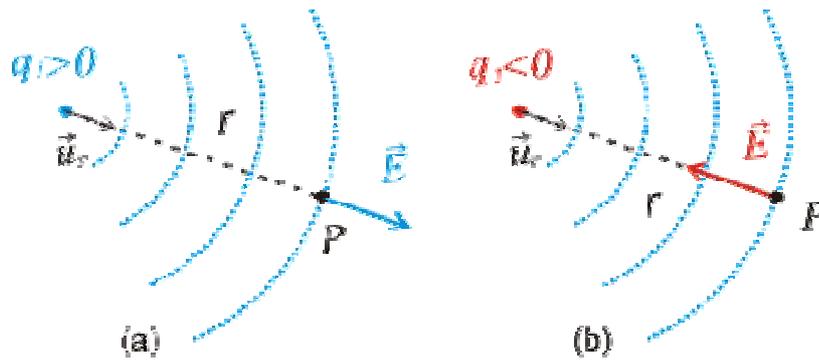


Fig. 1.7 Si la carga fuente es positiva, el campo eléctrico generado será un vector dirigido hacia afuera (a) y si es negativa, el campo estará dirigido hacia la carga (b), donde  $\vec{E}$  es el campo eléctrico

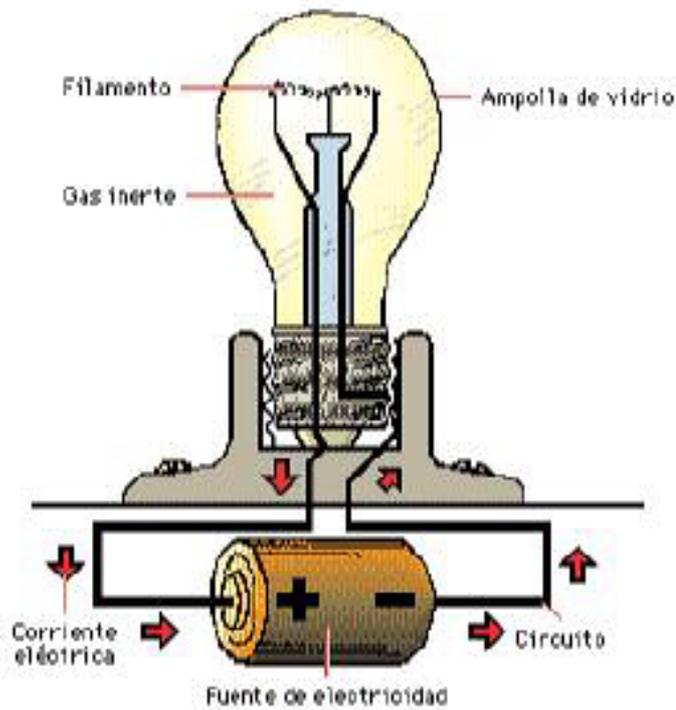


Fig. 1.8 Corriente eléctrica

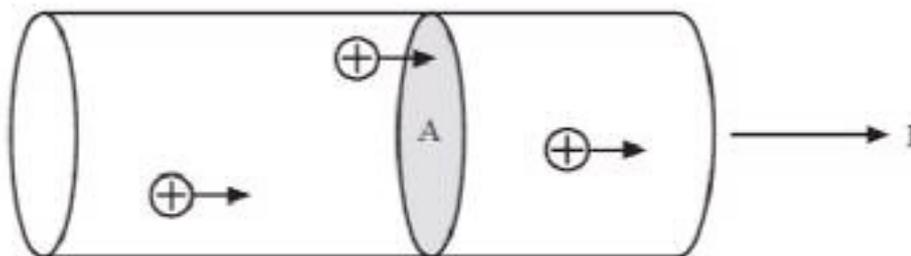


Fig. 1.9 Corriente por un conductor

### **Para ampliar: Analogía hidráulica**

Suele usarse una analogía para entender de forma sencilla e intuitiva los conceptos básicos de electricidad. Se supone un camino cerrado de tuberías en forma de círculo, compuesto por:

1. Agua: Son los electrones que se mueven para hacer algún trabajo.
2. Bomba propulsora de agua: En el equivalente eléctrico sería la fuente de voltaje, que ejerce presión sobre los electrones (agua). Si la bomba está apagada no fluye agua o electrones. Si la bomba está encendida hay una diferencia de presión (tensión) que mueve el agua (electrones).
3. Zona de la tubería muy estrecha. El agua tendrá dificultades para pasar por una tubería estrecha. Es el equivalente a la resistencia eléctrica, que impide el paso de electrones.

En el caso del voltaje debe existir un voltaje en A diferente al del punto B, se le llama diferencia de tensión a  $V_a - V_b = \Delta V$ . Si  $V_a$  es mayor que  $V_b$  habrá cierta tensión o desequilibrio en dichos puntos, se establecerá un campo eléctrico que moverá los electrones desde el punto A hacia el B. Como el campo eléctrico es conservativo debe existir un camino cerrado desde el punto A al B para que se produzca flujo eléctrico y trabajo en la carga (fig. 1.10, 1.11).

### **1.3.5 Potencia**

Imaginemos una carga  $q$  situada en un punto A que está a una tensión  $v$  respecto a un punto B (fig. 1.12). Esto significa que hemos tenido que entregar una energía  $w$  a la carga  $q$  para llevarla desde B hasta A. Cuando permitimos que la carga  $q$  se desplace, ésta volverá a B retornando la energía  $w$ . Por definición de tensión, la energía que retornará será  $w = q \cdot v$ . Si en un tiempo  $dt$  circulan por el circuito  $dq$  cargas, la energía que éstas retornarán en este  $dt$  será  $dw = dq \cdot v$ . Se denomina potencia,  $p$ , que entrega la corriente al circular entre A y B a la energía que entrega por unidad de tiempo:

$$p = \frac{dw}{dt} = \frac{dq \cdot v}{dt} = i \cdot v \quad (1.6)$$

Hay dispositivos electrónicos que dan energía a las cargas llevándolas a un punto de mayor potencial. Estos dispositivos se denominan fuentes o generadores. El generador no recibe potencia sino que la entrega. Por esto es importante definir la potencia entregada como el producto  $i \cdot v$  en donde  $i$  circula desde el punto de mayor tensión al de menor (fig. 1.13). En un generador la intensidad circula desde el punto de menor al de mayor tensión y, por tanto, a efectos de cálculo de potencia, se le asigna un signo negativo, dando lugar a una potencia recibida negativa, lo que debe interpretarse como potencia entregada a la corriente.

En la analogía, comentada anteriormente, entre un circuito eléctrico y un circuito hidráulico, la bomba hidráulica equivale al generador o fuente, el cual eleva las moléculas del líquido desde el "nivel base" hasta una altura determinada, incrementando su energía potencial. Esta energía es devuelta al mover el líquido las palas de la turbina.

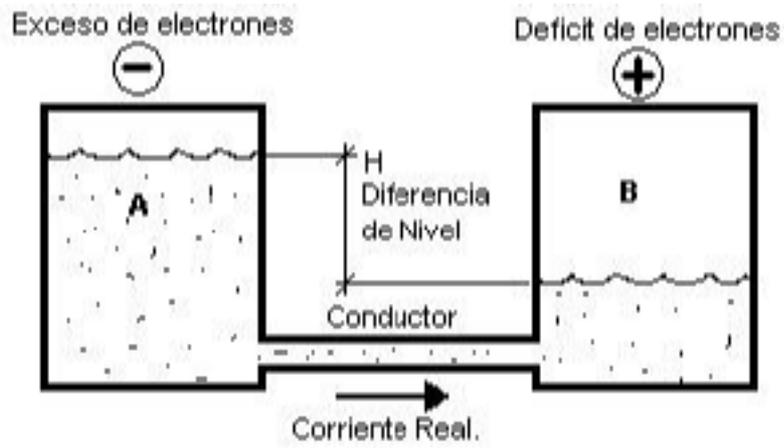


Fig. 1.10 Analogía hidráulica de la electricidad

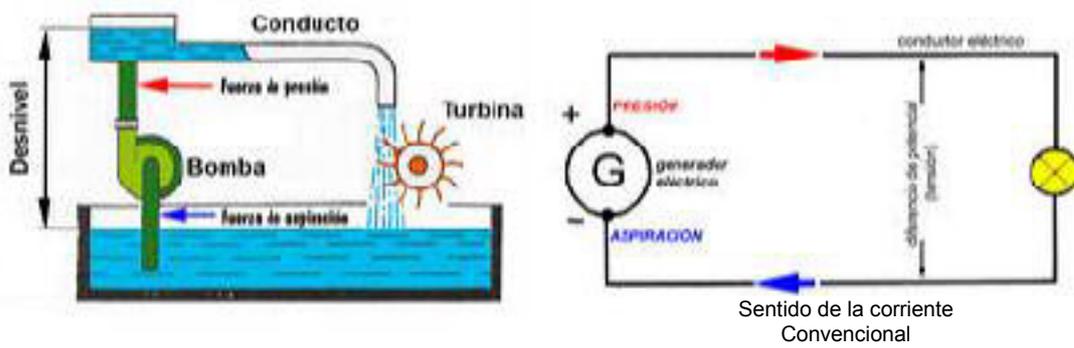


Fig. 1.11 Analogía hidráulica de la electricidad

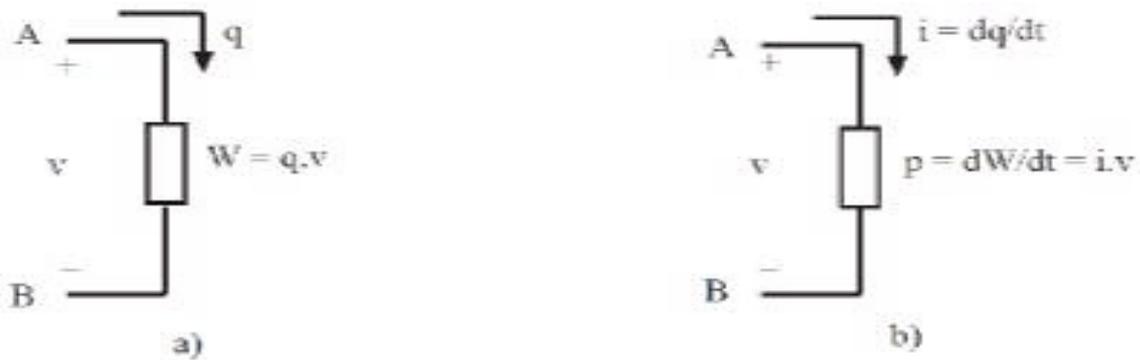


Fig. 1.12 a) Energía retornada por una carga;  
b) potencia retornada por una corriente

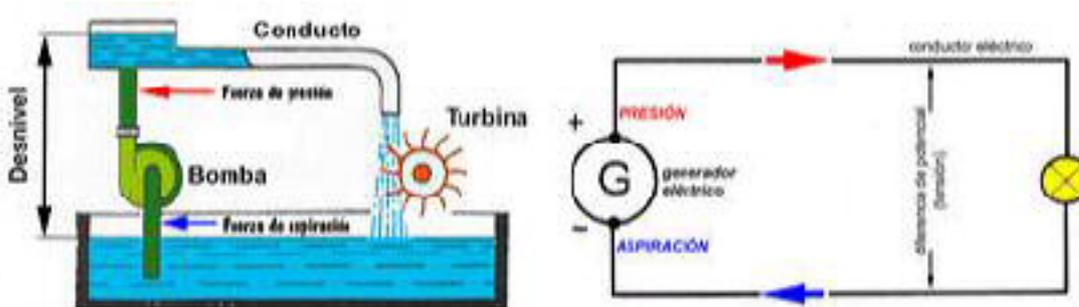


Fig. 1.13 Analogía hidráulica de la electricidad

## 1.4 Componentes, dispositivos y circuitos

En los circuitos, existen dos tipos de elementos, los activos y los pasivos. Los pasivos son los que consumen energía (resistencias, condensadores, bobinas, transistores, diodos, etc.), y existen los elementos activos que son las fuentes.

La electrónica es la disciplina que trata de la utilización de los componentes y de los circuitos electrónicos para realizar funciones especificadas. Un componente electrónico es un ente físico que presenta determinadas relaciones entre las magnitudes tensión y corriente en sus terminales. Un circuito consiste en la interconexión de componentes, generalmente mediante conductores, para realizar una función electrónica específica. Otro vocablo que aparece en la bibliografía técnica de significado similar al de componente es el de dispositivo. El significado preciso de estos vocablos es ambiguo y depende del contexto. En este texto los utilizaremos indistintamente para referirnos a entes físicos que realizan funciones elementales.

Los componentes, dispositivos y circuitos son entes físicos cuyo comportamiento suele ser complejo y difícil de representar con exactitud mediante parámetros concretos. Estudiarlos y analizarlos con pleno rigor, sin realizar ninguna aproximación, sería una tarea de enorme dificultad y, en muchos casos, de poca utilidad. Por esto, es esencial aproximar los dispositivos y circuitos mediante modelos simples, de fácil tratamiento matemático, que permitan obtener unos resultados razonablemente próximos a los reales. Denominaremos a estas aproximaciones elementos ideales, cuyo comportamiento es descrito por una función matemática, y que no tienen existencia real. Los componentes y dispositivos reales se aproximan, entonces, por uno o varios elementos ideales, y con ellos se analizan los circuitos electrónicos.

La interconexión de componentes para constituir un circuito se realiza normalmente mediante conductores (fig. 1.14). El conductor real suele ser un hilo metálico de determinado diámetro y longitud.

El elemento de circuito que utilizaremos para modelar este conductor será un "conductor ideal" que mantiene idéntica tensión en todos sus puntos con independencia de la corriente que lo atraviesa. Aunque en el conductor real la tensión varía ligeramente a lo largo de él cuando circula corriente, la aproximación de conductor ideal suele ser razonablemente precisa para la gran mayoría de los casos.

Otro elemento de interconexión es el **interruptor** (fig. 1.15), que se modela por un interruptor ideal. Este tiene dos estados: abierto y cerrado (en inglés OFF y ON respectivamente). Cuando está abierto equivale a la ausencia de un camino conductor entre sus dos terminales, y no circula corriente aunque se aplique a los terminales una diferencia de potencial (se supone que el vacío impide el paso de corriente). Cuando el interruptor está cerrado equivale a la presencia de un camino conductor entre sus terminales y se dice que existe un cortocircuito entre ellos.

Este comportamiento suele describirse mediante una gráfica denominada característica  $i-v$ . Una característica  $i-v$  es la representación en unos ejes cartesianos de la función  $i(v)$ : la corriente que circula para cada tensión aplicada entre terminales del dispositivo. Cuando el interruptor está abierto, la corriente será nula sea cual sea la tensión aplicada. Su característica  $i-v$  será el eje de abscisas (fig. 1.15 a). Cuando el interruptor está cerrado la tensión entre terminales será nula (la tensión entre los extremos de un conductor ideal es nula) sea cual sea la corriente por el interruptor (fig. 1.15 b).

Otros componentes electrónicos fundamentales son los **generadores o fuentes de tensión y de corriente**. Estas fuentes se utilizan en los circuitos electrónicos bien para suministrar energía eléctrica al circuito, bien para generar una señal (ver apartado 1.5), o bien para modelar algún dispositivo que entregue una señal o energía al circuito que se esté analizando. Ejemplos de estas fuentes son las pilas comerciales, las fuentes de alimentación de los equipos electrónicos, los generadores de funciones, etc (fig. 1.16).

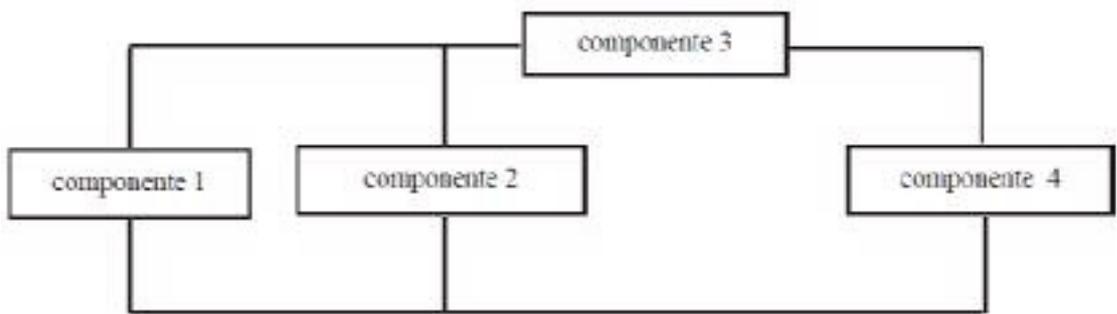


Fig. 1.14 Interconexión de dispositivos para formar un circuito (todos los puntos de un mismo conductor se suponen a idéntica tensión)

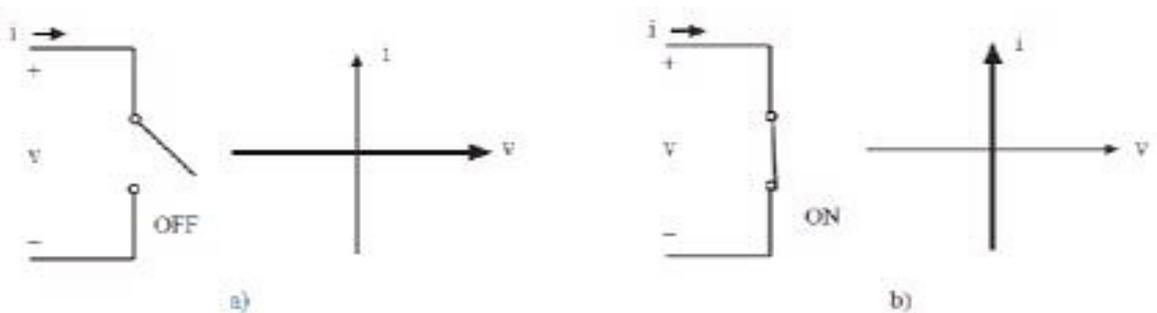


Fig. 1.15 Interruptor ideal: a) abierto; b) cerrado



Fig. 1.16 Fuentes de tensión reales, con comportamiento próximo a fuentes de tensión ideales

En el análisis de circuitos los generadores de corriente eléctrica se aproximan por dos tipos de fuentes ideales: las fuentes independientes de tensión y de corriente. Una **fuerza independiente de tensión ideal** es un elemento de circuito que mantiene entre sus terminales una tensión determinada con independencia de la corriente que la atraviesa. Su símbolo y su característica  $i-v$  se representan en la fig. 1.17. Nótese que cuando el valor de su tensión es constante se usa un símbolo distinto.

Una **fuerza independiente de corriente ideal** es un dispositivo electrónico que mantiene una determinada intensidad de corriente a través de sus terminales, con independencia del valor de la tensión entre ellos. Su símbolo y su característica  $i-v$  se presentan en la fig. 1.18.

## 1.5 Señales

Una señal es una magnitud física cuyo valor o variación contiene información. Los circuitos electrónicos procesan señales, las cuales se expresan normalmente mediante una tensión o una corriente que puede variar con el tiempo. Con frecuencia se denomina generador de señal a una fuente independiente de tensión o de corriente. La representación gráfica de una señal se suele denominar forma de onda.

Las señales reales pueden ser muy complejas y se suele recurrir a unas pocas señales simples, descritas mediante funciones sencillas, que permitan aproximar las señales reales, ya sea cada una por separado o bien mediante combinación de ellas. En este apartado se describen algunas señales básicas, como el escalón, la exponencial y la senoide, y otras que se obtienen a partir de ellas, como el pulso, la rampa, etc. Fig. 1.20 osciloscopio. Análisis de señales.

### 1.5.1 Señal escalón

La señal escalón viene descrita por la función:

$$v(t) = A \cdot u(t - t_0) \quad (1.7)$$

donde  $u(t)$  es la función escalón unidad y  $t_0$  el desplazamiento temporal. Para  $t$  menor que  $t_0$  la función vale cero y para  $t$  mayor o igual a  $t_0$  vale uno. La representación gráfica de  $v(t)$  se da en la fig. 1.21 a. Se denomina amplitud del escalón a la constante  $A$ . Una forma práctica de generar un escalón consiste en activar un interruptor, como se indica, por ejemplo, en la fig. 1.21 b. El escalón suele usarse para fijar el inicio de otras señales.

Combinando dos funciones escalón puede obtenerse una señal de amplio uso en electrónica: un pulso (fig. 1.22). Su valor es cero excepto para  $t_1 \leq t \leq t_2$ , en cuyo caso su valor es  $A$ . Se denomina duración del pulso a  $(t_2 - t_1)$ , y amplitud al valor de  $A$ . Matemáticamente esta función puede expresarse mediante:

$$v(t) = A \cdot u(t - t_1) - A \cdot u(t - t_2) \quad (1.8)$$

Cuando un pulso se repite en el tiempo la forma de onda resultante se denomina tren de pulsos.

Otra señal que puede obtenerse a través de la función escalón es la rampa. Esta forma de onda (fig. 1.23) está constituida por dos segmentos: para  $t < t_0$  su valor es nulo; a partir de  $t_0$  crece linealmente con el tiempo con una pendiente  $B$ . Su ecuación matemática es:

$$v(t) = B \cdot r(t - t_0) - B \cdot (t - t_0) \quad (1.9)$$

Combinando rampas y escalones pueden obtenerse señales triangulares y en diente de sierra como las representadas en la fig. 1.24.

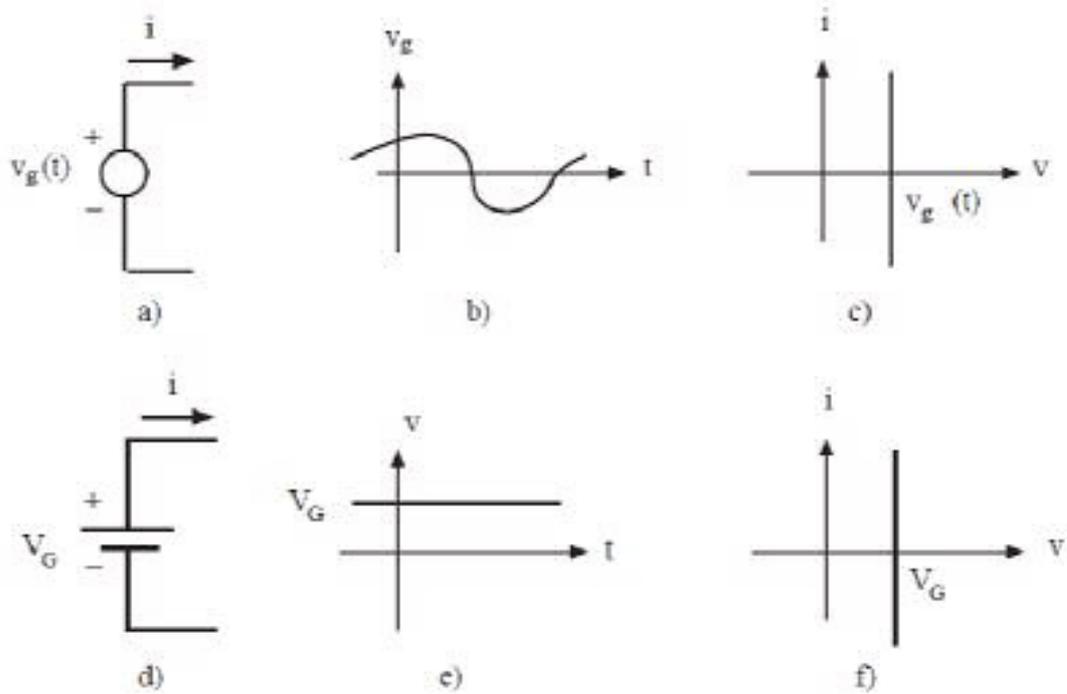


Fig. 1.17 Fuente independiente de tensión ideal (caso general):  
 a) símbolo; b) tensión en función del tiempo;  
 c) característica “corriente – tensión” del generador en un instante  $t$ .  
 Fuente de tensión constante: d) símbolo;  
 e) dependencia de la tensión con el tiempo; f) característica “corriente – tensión”

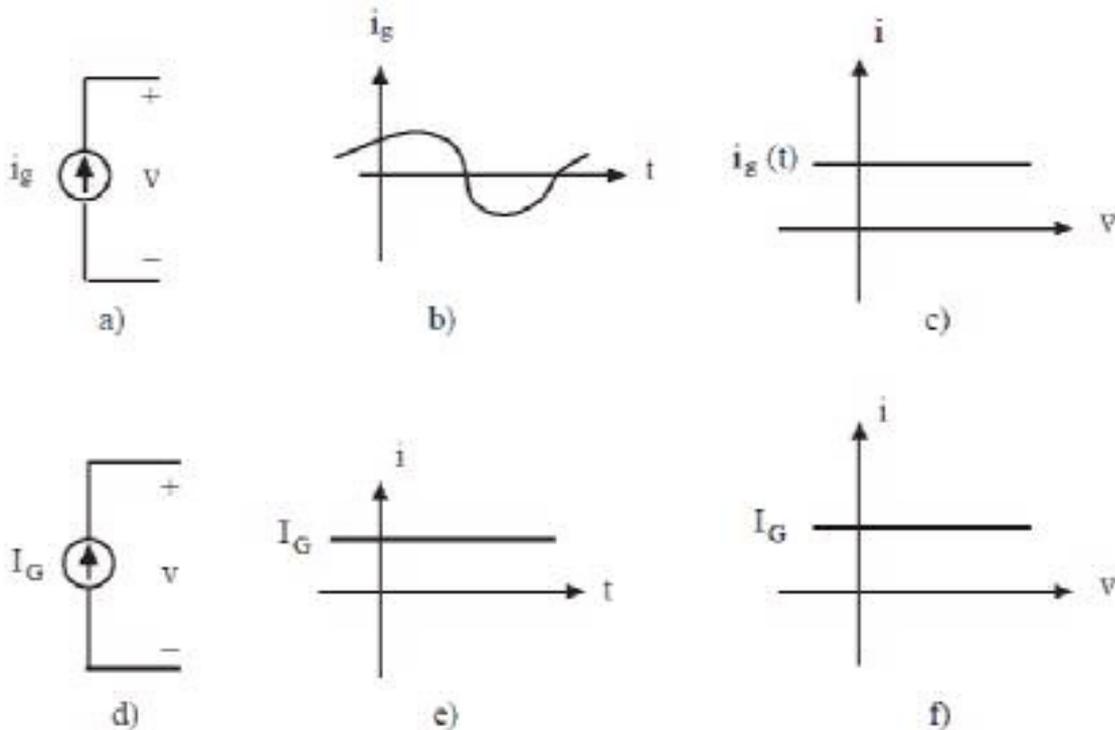


Fig. 1.18 Fuente independiente de corriente ideal (caso general):  
 a) símbolo; b) variación de la corriente con el tiempo;  
 c) característica “corriente – tensión” en el instante  $t$ .  
 Fuente de corriente constante: d) símbolo;  
 e) corriente en función del tiempo; f) característica “corriente – tensión”



Fig. 1.19 Fuente de corriente real, con un comportamiento próximo a una fuente de corriente ideal

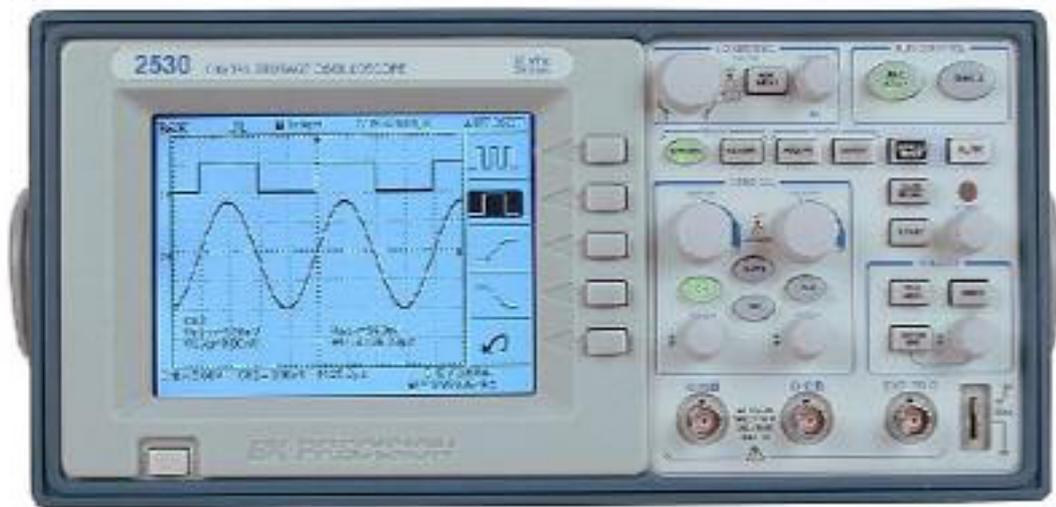


Fig. 1.20 Osciloscopio: análisis de señales

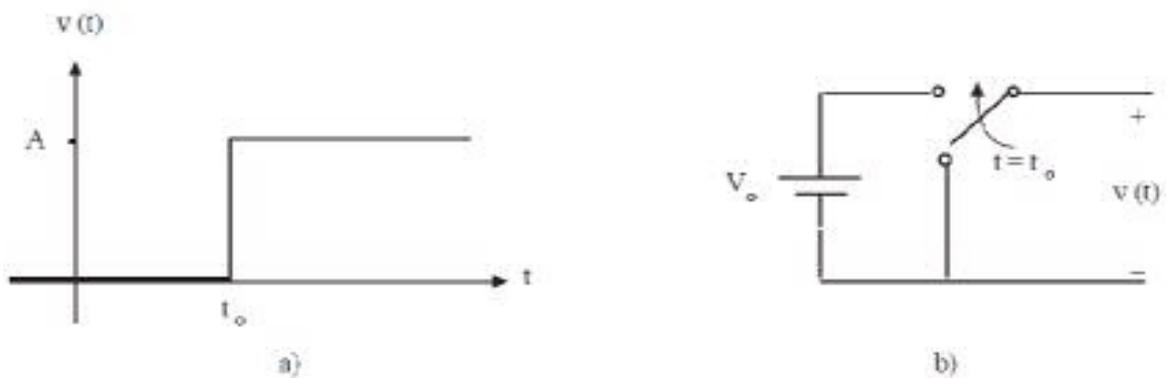


Fig. 1.21 a) Función escalón; b) generación de un escalón con un interruptor

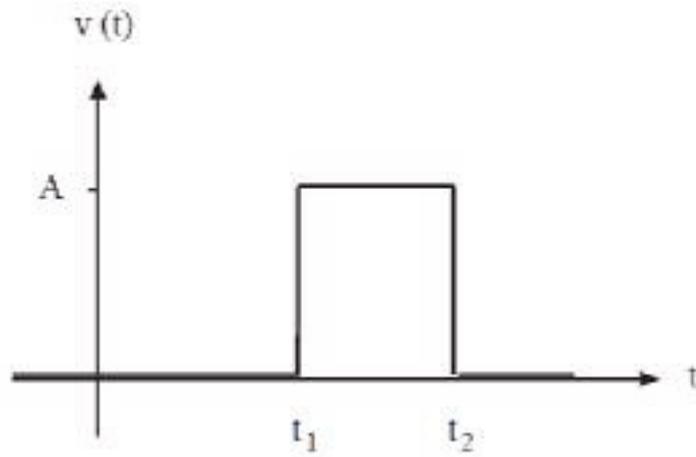


Fig. 1.22 Función pulso

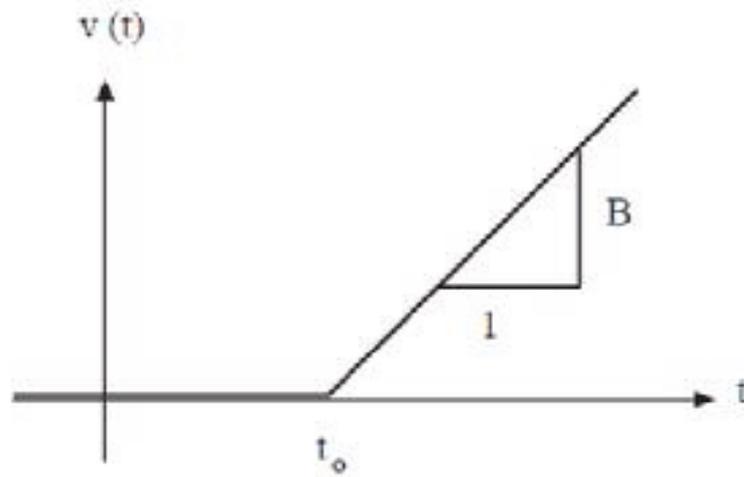


Fig. 1.23 Función rampa

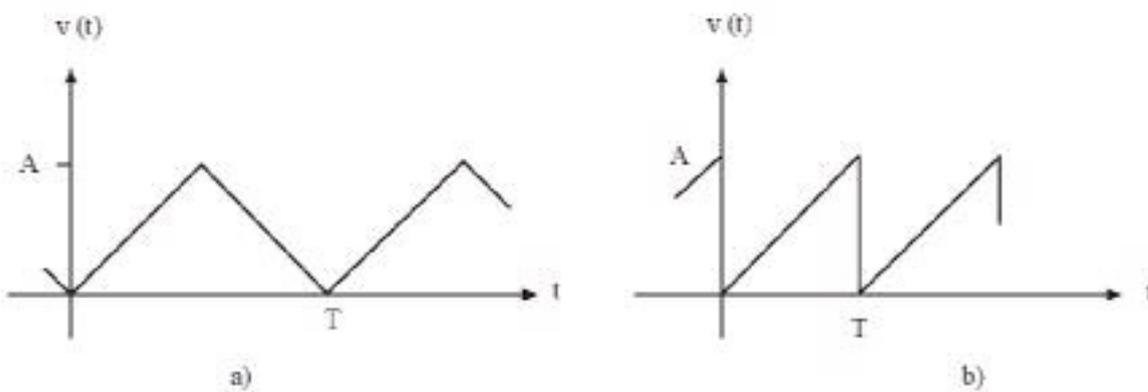


Fig. 1.24 a) Señal triangular; b) señal en diente de sierra

## 1.5.2 Señal exponencial

La señal exponencial viene dada por la ecuación:

$$v(t) = Au(t) \cdot e^{-t/\tau} \quad (1.10)$$

El parámetro  $A$  es el valor inicial de la exponencial (cuando  $t=0$ ). El parámetro  $\tau$  se denomina constante de tiempo, tiene unidades de tiempo y determina la rapidez con la que la función tiende a cero. Su representación gráfica se da en la fig. 1.25.

## 1.5.3 Señal sinusoidal

Una senoide, también denominada senoide, es una señal que responde a una de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} v(t) &= A \sin(\omega t + \varphi) \\ v(t) &= A \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (1.11)$$

donde  $A$  se denomina amplitud o valor de pico de la senoide,  $\omega$  pulsación o frecuencia angular y  $\varphi$  ángulo de fase. El ángulo de fase se mide en grados o en radianes, y la pulsación en grados por segundo o radianes por segundo. Recuérdese que la función coseno no es más que la función seno desfasada 90 grados.

La senoide es una función periódica, lo que significa que un valor determinado se repite de forma cíclica cada  $T$  segundos (fig. 1.26) para cualquier valor entero de  $n$ :

$$v(t + nT) = v(t) \quad (1.12)$$

La constante  $T$  se denomina período de la función, y por tanto de la senoide, y se mide en segundos. A su inversa se la denomina frecuencia, se la representa por  $f$ , y es el número de períodos o ciclos que se dan en un segundo. Su valor viene dado en ciclos por segundo o hercio ( $Hz$ , en honor del científico *Hertz*). La variable  $\omega$ , que aparece en la expresión anterior, se denomina pulsación de la senoide y se relaciona con la frecuencia a través de la expresión siguiente:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (1.13)$$

No es más que la frecuencia expresada de forma angular, y su unidad es el radian por segundo ( $rad/s$  o  $s^{-1}$ ).

Se suele definir para las señales un valor medio y un valor eficaz en un cierto intervalo de tiempo. En las señales periódicas este intervalo de tiempo se toma de valor un período de la señal. El valor medio es el área encerrada entre la función y el eje de abscisas durante el intervalo  $T$ , dividida por  $T$ . Matemáticamente se expresa por:

$$V_m = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) \cdot dt \quad (1.14)$$

Obviamente, el valor medio de una senoide es cero, puesto que el área encerrada por los semiciclos positivos es igual al área encerrada por los semiciclos negativos (fig. 1.27 a). Para la forma de onda representada en la fig. 1.27 b su valor medio es:

$$V_m = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} A \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \cdot dt = \frac{2A}{\pi} \quad (1.15)$$

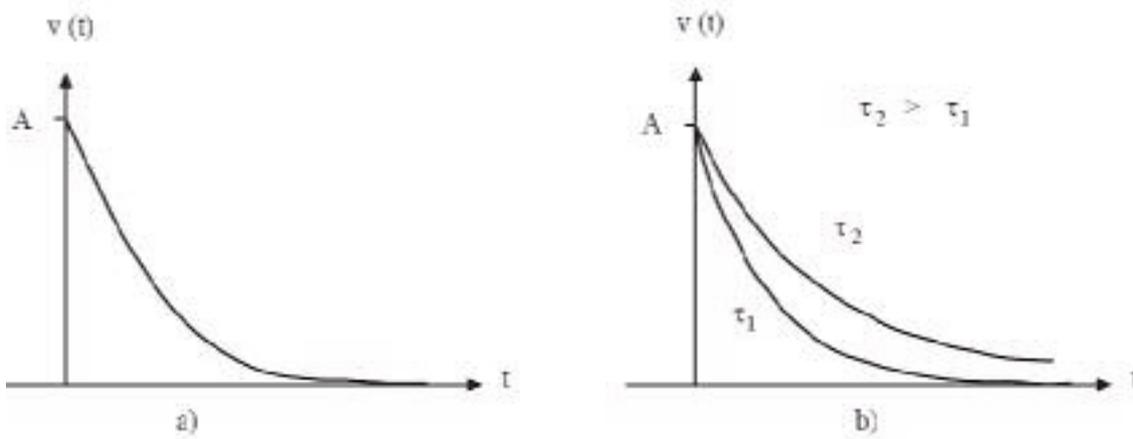


Fig. 1.25 a) Señal exponencial; b) Efecto del parámetro sobre la señal

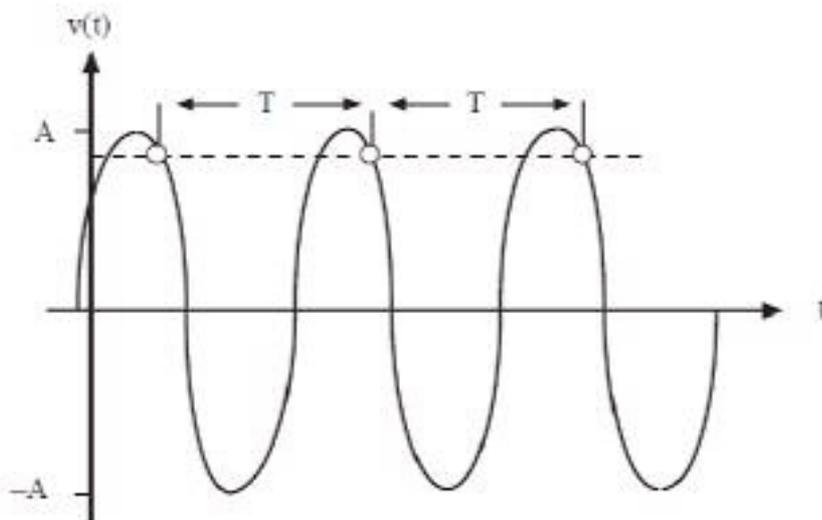


Fig. 1.26 Representación gráfica de una senoide

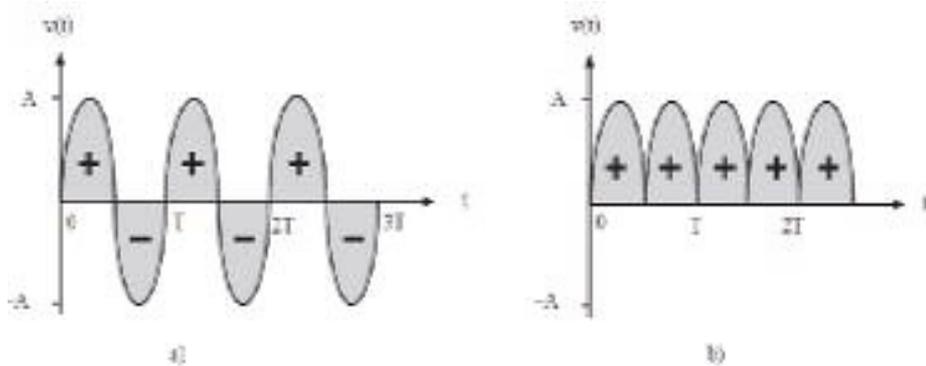


Fig. 1.27 Valor medio: a) para una senoide es nulo;  
b) para una senoide rectificada su valor es  $2A/\pi$

El valor eficaz de una señal (denominado en inglés r.m.s, iniciales de root mean square) es un valor de tensión o corriente que está relacionado con la potencia que transporta la señal y viene dado por:

$$V_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) \cdot dt} \quad (1.16)$$

Cuando la señal  $v(t)$  es una senoide resulta que su valor eficaz es:

$$V_{ef} = \frac{A}{\sqrt{2}} \quad (1.17)$$

Así, por ejemplo, la senoide de 220 V eficaces de la red eléctrica doméstica corresponde a una senoide de 311 V de amplitud ( $220\sqrt{2}$  V).

**Ejercicio de ejemplo.** Calcular los valores medio y eficaz de la señal cuadrada (fig. 1.28).

**Solución:** El valor medio de esta señal es cero, ya que el área encerrada por el primer semiciclo es igual y de signo contrario a la encerrada por el segundo semiciclo.

El valor eficaz es A: 
$$V_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \left( \int_0^{T/2} A^2 dt + \int_{T/2}^T A^2 dt \right)} = A$$

## 1.6 Leyes de Kirchhoff

Cuando se interconectan varios componentes para formar un circuito se cumplen un conjunto de relaciones entre las corrientes y las tensiones del circuito denominadas leyes de Kirchhoff. En un circuito se denomina nudo al punto de interconexión de dos o más componentes, y *malla* a todo camino cerrado que contenga dos o más nudos. Las leyes que debe cumplir todo circuito son: *la ley de Kirchhoff de corrientes*, también denominada *ley de nudos*, y *la ley de Kirchhoff de tensiones*, o *ley de mallas*.

La **ley de Kirchhoff de corrientes** establece que *la suma de las corrientes entrantes a un nudo debe ser igual a la suma de las corrientes que salen de él*. Es decir, la suma algebraica de las corrientes en un nudo debe ser nula. De no cumplirse esta ley, podría darse una acumulación infinita de cargas en algún nudo del circuito, y otro nudo debería actuar como una fuente infinita de cargas eléctricas.

Aplicando esta ley, por ejemplo, en el nudo 2 de la fig. 1.29 establece:

$$i_B = i_C + i_D \quad (1.18)$$

La **ley de Kirchhoff de tensiones** establece que *la suma algebraica de las diferencias de tensión a lo largo de una malla cualquiera del circuito, recorrida en un mismo sentido, debe ser nula*. La justificación física de esta ley se debe a que la diferencia de potencial entre dos puntos del circuito es independiente del camino recorrido para ir de un punto al otro.

Puesto que no se conocen a priori los signos de las diferencias de tensión entre los terminales de cada componente (ni los sentidos de las corrientes), se asigna arbitrariamente un signo a cada una de ellas, tal como se indica en la fig. 1.29. Al recorrer la malla en un determinado sentido, si se va de una marca "-" a una marca "+" se asigna signo positivo a esta diferencia de tensión y se dice que se trata de una "subida" de tensión. Si, por el contrario, se va desde "+" a "-" se dice que hay una "caída" de tensión y se le asigna signo negativo. Así, por ejemplo, para la malla a del circuito anterior:

$$(+v_A) + (-v_B) + (-v_C) = 0 \quad (1.19)$$

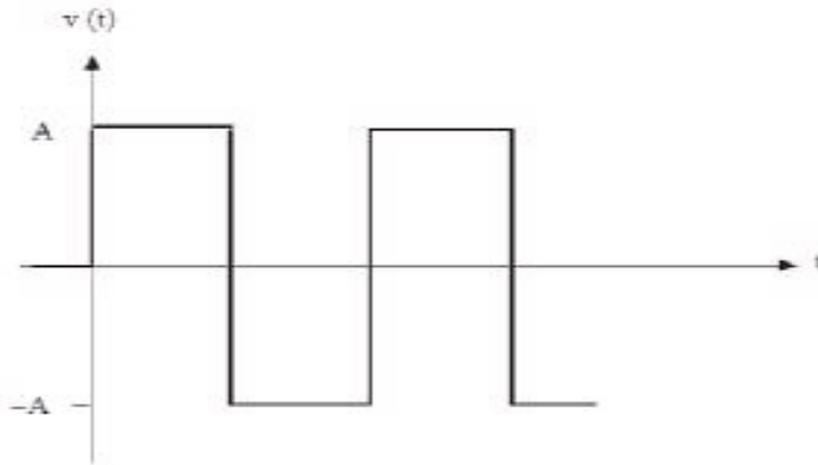


Fig. 1.28 Señal cuadrada

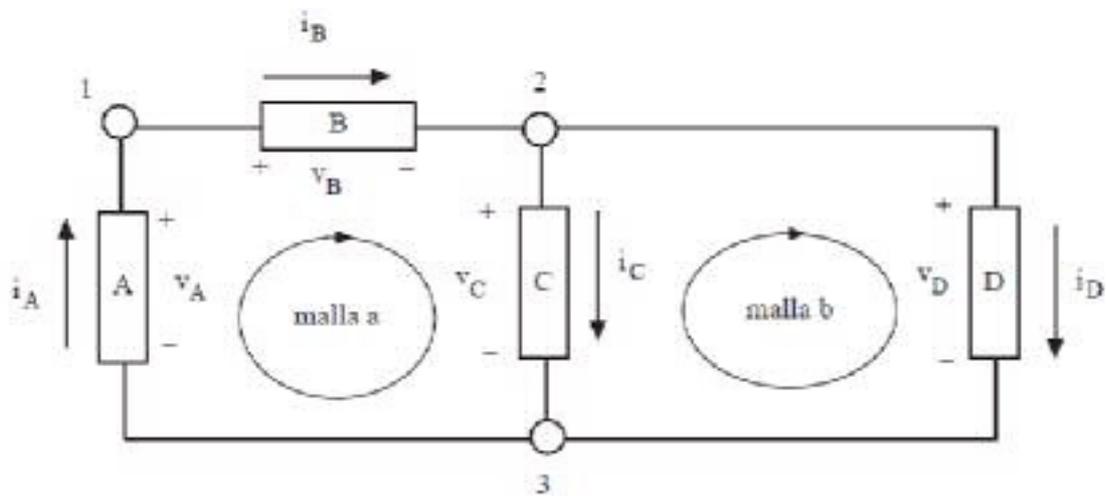


Fig. 1.29 Circuito formado por la interconexión de los componentes A, B, C y D. (el circuito contiene los nudos 1, 2 y 3, y las mallas a y b)

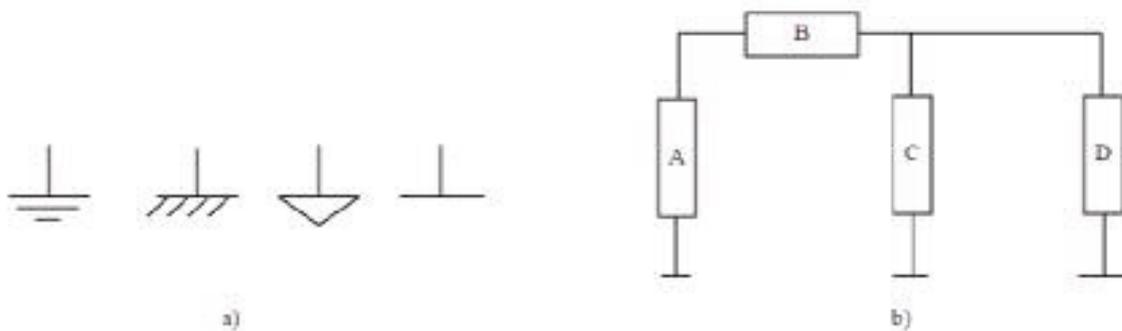


Fig. 1.30 a) Símbolos usados para el terminal de masa;  
b) Esquema de circuito en el que se indican los puntos conectados a masa (todos estos puntos están interconectados)

La tensión es una magnitud que se define entre dos puntos, al igual que la altura en el campo gravitatorio. Por esto es conveniente señalar al potencial de un punto como potencial de referencia, y expresar las tensiones de los demás puntos como diferencias respecto al potencial del punto de referencia.

Al punto seleccionado se le conoce con el nombre de "masa" y se le identifica con uno de los símbolos indicados en la fig. 1.30 a. Para simplificar el dibujo del circuito "se conectan" a masa todos los puntos que están a la tensión de referencia y se supone que todos ellos están unidos entre sí a través del conductor de "masa" que no se acostumbra a dibujar (fig. 1.30 b).

## **1.7 Problemas para el trabajo independiente**

### **Cuestiones:**

- a) Dibuja la señal  $v-t$  de una fuente compuesta por una batería de coche.
- b) Dibuja la señal  $v-t$  de una fuente compuesta por la red eléctrica doméstica.
- c) ¿Cuál es la tensión eficaz de la red eléctrica doméstica en Ucrania, España y USA?
- d) ¿Cuál es la amplitud, tensión eficaz y frecuencia de la red eléctrica doméstica en Ucrania, España y USA?

## Tema 2. Circuitos resistivos

### 2.0 Vocabulario técnico español-inglés-ucraniano-ruso

Resistencia (f)	resistor	резистор	резистор
Línea (f)	line	лінія	линия
Lineal (adj.)	linear	лінійний	линейный
Curva (f)	curve	вигин	изгиб
Exponencial (adj.)	exponential	експонентний	экспоненциальный
Solución (f)	solution	розв'язання	решение
Método (m)	method	метод, спосіб	метод, способ
Ejemplo (m)	example	приклад, зразок	пример, образец
Conexión en serie (m)	connection in series	послідовне з'єднання	последовательное соединение
Conexión en paralelo (m)	connection in parallel	паралельне з'єднання	параллельное соединение
Frecuencia (f)	frequency	частота	частота

### 2.1 Concepto de resistencia

Todos los componentes electrónicos presentan algún tipo de relación entre la tensión aplicada a sus terminales y la corriente que los atraviesa. En el capítulo anterior, se vio que la característica “corriente-tensión” de una fuente independiente de tensión continua ideal era una recta vertical que representaba el comportamiento de la fuente: mantener una tensión constante entre terminales con independencia de la corriente que circula. Se denominan *elementos resistivos* a los elementos que disipan energía y que cumplen que la relación entre la tensión que se aplica a sus terminales y la corriente que los atraviesa pueda ser representada por una gráfica en los ejes cartesianos “corriente-tensión” (fig. 2.1). Esta gráfica está limitada a los cuadrantes primero y tercero ya que la potencia que disipan es positiva.

Como se verá en los próximos capítulos muchos componentes y dispositivos electrónicos (resistencias, diodos, transistores,...) se comportan como elementos resistivos en determinados ámbitos de operación. Sin embargo, no todos los elementos de circuito son resistivos. Por ejemplo, en los condensadores, la tensión entre terminales es proporcional a la integral de la corriente, mientras que en los inductores, la tensión es proporcional a la derivada de la corriente. El objetivo de este capítulo es estudiar uno de estos elementos resistivos denominado *resistencia*, y los circuitos en los que interviene conjuntamente con los elementos vistos en el capítulo anterior.

La *resistencia lineal ideal* es un elemento de circuito cuya característica  $i$ - $v$  es una recta que pasa por el origen (fig. 2.2 b). Analíticamente esta recta viene dada por la ecuación:

$$i = \frac{v}{R} \quad (2.1)$$

donde  $R$ , denominada resistencia, es la inversa de la pendiente de la recta, y es constante y positiva. A esta ecuación se la conoce como *ley de Ohm*: la caída de tensión entre los terminales de la resistencia es proporcional a la corriente que la atraviesa. Su símbolo circuital, el signo de la tensión  $v$ , y el sentido de la corriente  $i$ , se representan en la fig. 2.2 a.

Una interpretación física del concepto de resistencia está implícito en su propio nombre: dificultad al paso de una comente. Cuando se aplica una tensión entre los terminales, a mayor resistencia menor corriente, y viceversa. Obsérvese en la

característica  $i-v$  de la resistencia que es un dispositivo simétrico ya que si se invierte el sentido de  $i$  también se invierte el de  $v$ . Nótese también que cuando la resistencia es nula la característica  $i-v$  es una línea vertical que coincide con el eje de ordenadas. Por esto, un interruptor cenado, que en el capítulo anterior se vio que se comporta como un cortocircuito, se puede modelar por una resistencia de valor cero. Asimismo, cuando la resistencia es infinita, su característica  $i-v$  coincide con el eje de abscisas, por lo que un interruptor abierto, que se comporta como un circuito abierto, puede modelarse por una resistencia de valor infinito (fig. 2.3, 2.4).

La unidad de resistencia es el *ohmio* ( $\Omega$ ). De la expresión (2.1) resulta:

$$1 \text{ ohmio} = 1 \text{ voltio} / 1 \text{ amperio} \quad (2.2)$$

A la inversa de la resistencia se la denomina *conductancia*, e indica la facilidad al paso de corriente. Se la identifica con la letra  $G$  y su unidad es el inverso del ohmio ( $\Omega^{-1}$ ), que se denomina *siemens* (S):

$$i = Gv \quad (2.3)$$

Cuando una corriente atraviesa una resistencia, ésta absorbe energía del circuito y la convierte en calor. Este fenómeno se denomina *efecto Joule* y la potencia convertida en calor recibe el nombre de *potencia disipada* por la resistencia  $P_R$ , donde se ha hecho uso de la ley de Ohm:

$$P_R = iv = i^2R = \frac{v^2}{R} \quad (2.4)$$

El significado físico del valor eficaz de una señal en el intervalo de tiempo de 0 a  $T$  es fácil de entender, si se considera una señal  $v(t)$ . La potencia media que entrega a una resistencia  $R$  en un tiempo  $T$  es:

$$P_m = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{(v(t))^2}{R} dt = \frac{1}{R} \left[ \frac{1}{T} \int_0^T (v(t))^2 dt \right] \quad (2.5)$$

Por definición, el valor eficaz sería el valor de una tensión constante que entregara a la resistencia  $R$  la misma potencia durante el tiempo  $T$ :

$$P_m = \frac{1}{R} V_{ef}^2 \quad (2.6)$$

**Ejercicio de ejemplo:** Determinar la potencia que disipa una resistencia de  $100 \Omega$  cuando se aplica entre sus terminales una tensión de  $15 \text{ V}$ . ¿Cuál es el valor de la corriente que atraviesa la resistencia?

**Solución:**

$$P_R = \frac{v^2}{R} = \frac{15^2}{100} = 2,25 \text{ W}; \quad i = \frac{v}{R} = \frac{15}{100} = 150 \text{ mA}$$

La mayoría de dispositivos reales presentan efectos resistivos. Así por ejemplo, un conductor real presenta una variación de tensión entre sus extremos cuando es atravesado por una corriente. Un interruptor real cenado también presenta una cierta resistencia entre sus terminales. Sin embargo, su valor es muy pequeño y se suele despreciar frente al resto de resistencias del circuito.

La *resistencia lineal real* es un dispositivo cuya característica  $i-v$  se puede aproximar por una recta dentro de unos ciertos márgenes de corriente y tensión, y por tanto se puede aproximar por una resistencia ideal entre dichos márgenes (fig. 2.5).

Existen en el mercado dispositivos electrónicos resistivos no lineales. Entre ellos destacan los *termistores NTC* y *PTC*, cuyo valor resistivo depende de la temperatura, y los *varistores*, cuyo valor resistivo depende de la tensión aplicada entre terminales.

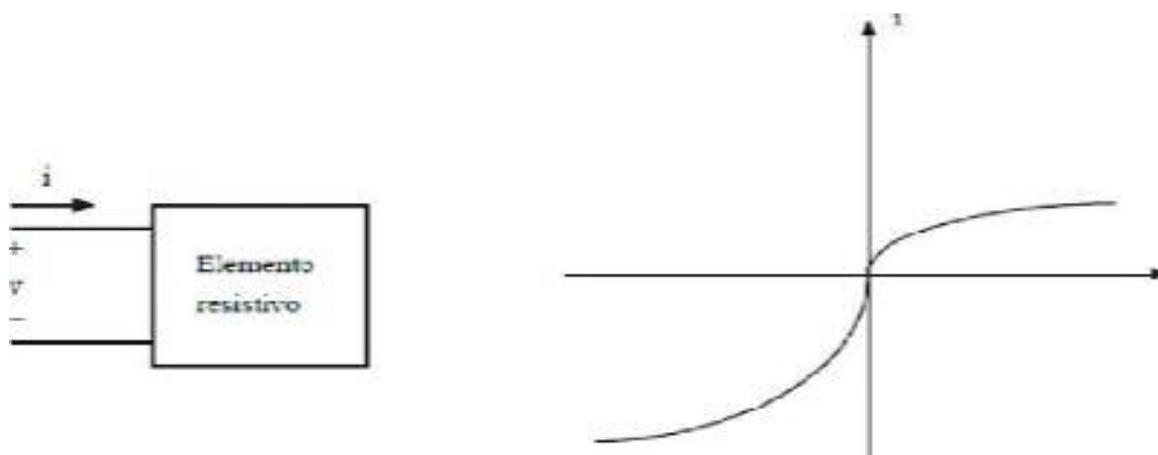


Fig. 2.1 Ejemplo de característica " $i-v$ " de un elemento resistivo

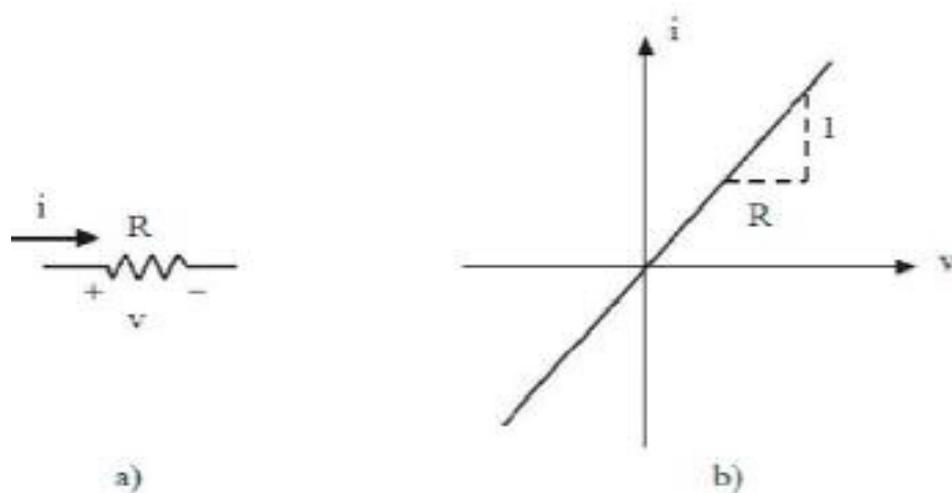


Fig. 2.2 a) Símbolo de la resistencia, sentido de la corriente y signo de la caída de tensión;  
b) característica " $i-v$ " de la resistencia



Fig. 2.3 Resistencia

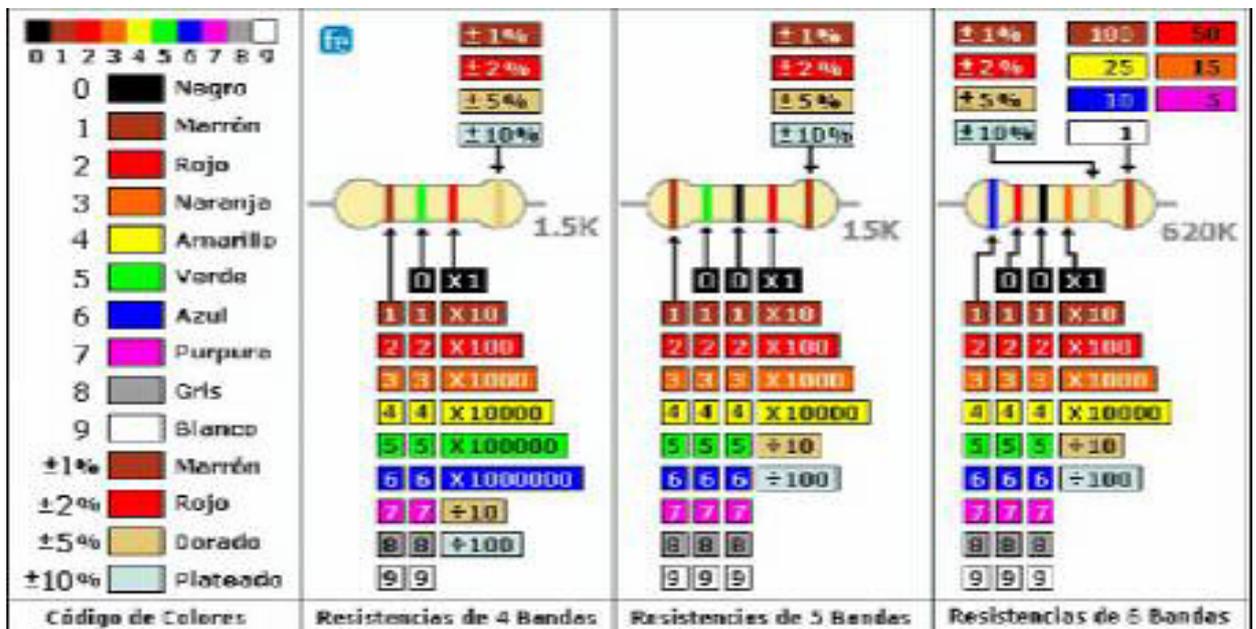


Fig. 2.4 Valores de una resistencia y su tolerancia



Fig. 2.5 Estufa con resistencia eléctrica (izq.),  
y línea de transporte en alta tensión (der.)

En el primer caso la generación de calor por efecto *Joule* es deseado, en el segundo caso dicho fenómeno representa pérdidas de energía no deseadas

## 2.2 Análisis de circuitos resistivos por el método de nudos

Analizar un circuito consiste en calcular las tensiones en todos sus nudos y las corrientes que circulan por sus elementos. Hay varios métodos para analizar un circuito. El *método de nudos* es un procedimiento sistemático para analizar circuitos que consiste en aplicar a sus nudos la ley de Kirchhoff de corrientes.

Supóngase por el momento que el circuito sólo tenga resistencias y generadores independientes de corriente. Para resolverlo por el método de análisis por nudos se seguirá el siguiente procedimiento:

1. Se asigna a un nudo el potencial de referencia (cero). A cada uno de los restantes nudos se le asigna una tensión respecto al nudo de referencia. Estas tensiones serán las incógnitas que se deberán determinar.

2. Se expresa para cada nudo, excepto para el de referencia, la ley de Kirchhoff de corrientes. Si en el circuito hay  $n$  nudos resultarán  $n-1$  ecuaciones. Para ello se asigna a cada elemento, de forma arbitraria, un vector de corriente, y se escriben las ecuaciones de Kirchhoff en función de estas corrientes.

3. Se escribe cada una de las corrientes desconocidas en las ecuaciones anteriores en función de las tensiones de los nudos, haciendo uso de la ley de Ohm. Estas ecuaciones deben respetar el signo de la caída de tensión y el sentido de la corriente tal como se indica en la fig. 2.2 a.

4. Se resuelve el sistema de ecuaciones resultante para hallar las tensiones de los nudos.

5. A partir de las tensiones de los nudos se hallan las variables deseadas del circuito. Cuando el valor numérico de una de las corrientes sea negativo, indica que el sentido real de esta corriente es contrario al que hemos arbitrariamente asignado en el apartado 2.

**Ejercicio de ejemplo:** Aplicando el método de análisis por nudos, hallar la corriente que circula por la resistencia  $R_3$ , en el circuito de la fig. 2.6 a.

Notar que el circuito de la fig. 2.6 b es eléctricamente igual al de la 2.6 a, como la tensión de un conductor es la misma en todos sus puntos, todos los conductores unidos a un nudo están a la tensión del nudo.

### **Solución:**

1. El circuito contiene cuatro nudos. La tensión de referencia ha sido asignada al nudo 0. Las tensiones en los nudos 1, 2 y 3 han sido designadas como  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$ , tal como se indica en la fig. 2.6 b.

2. La ley de Kirchhoff de corrientes conduce a las siguientes ecuaciones:

$$\text{Nudo 1} \rightarrow i_{g1} = i_a + i_b$$

$$\text{Nudo 2} \rightarrow i_{g2} + i_a = i_c$$

$$\text{Nudo 3} \rightarrow i_b = i_{g2} + i_d$$

3. Las corrientes desconocidas de las ecuaciones anteriores (es decir, todas excepto las de los generadores) se expresan, aplicando la ley de Ohm, de la siguiente forma:

$$i_a = \frac{v_1 - v_2}{R_1}; \quad i_b = \frac{v_1 - v_3}{R_2};$$

$$i_c = \frac{v_2 - 0}{R_4}; \quad i_d = \frac{v_3 - 0}{R_2}$$

4. Sustituyendo las expresiones del punto 3 en las ecuaciones del punto 2 resulta un sistema de tres ecuaciones con las tres incógnitas  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$ . Por ejemplo, si los valores numéricos de las cuatro resistencias fueran todos de  $1 \Omega$  el sistema de ecuaciones resultante sería:

$$\begin{aligned} 2v_1 - v_2 - v_3 &= i_{g1}; \\ -v_1 + 2v_2 &= i_{g2}; \\ v_1 - 2v_3 &= i_{g2} \end{aligned}$$

Téngase en cuenta que los coeficientes de las tensiones en estas ecuaciones tienen dimensiones  $\Omega^{-1}$ . Una vez resuelto el sistema se obtiene:

$$v_1 = i_{g1} \quad v_2 = \frac{1}{2}(i_{g1} + i_{g2}) \quad v_3 = \frac{1}{2}(i_{g1} - i_{g2})$$

5. La corriente que circula por  $R_3$  puede calcularse a partir de  $v_3$ :

$$i_{R3} = i_d = \frac{v_3}{R_3} = v_3 = \frac{1}{2}(i_{g1} - i_{g2})$$

## 2.3 Análisis de circuitos resistivos por el método de mallas

Otro método sistemático para analizar circuitos es el método de mallas, que se basa en la aplicación de la ley de tensiones de Kirchhoff a cada una de las mallas de un circuito. A efectos de simplicidad, se elegirán las mallas que no contengan ningún componente en su interior. A cada malla se le asigna una "comente de malla". Por cada componente de circuito circulará una comente que será la suma algebraica de las comentes de malla que afecten al componente en cuestión. Supóngase, por el momento, que el circuito sólo tiene generadores de tensión. El procedimiento que se seguirá para analizarlo por el método de mallas es el siguiente:

1. Se asigna a cada malla del circuito sin componentes internos una "comente de malla". Estas serán las incógnitas que se deberán calcular.

2. Se expresa para cada malla la ley de Kirchhoff de tensiones, recorriéndola según el sentido indicado por la comente de malla. Habrá tantas ecuaciones como mallas. Para ello se asigna a cada componente, de forma arbitraria, una caída de tensión, y se escriben las ecuaciones de Kirchhoff en función de estas caídas de tensión.

3. Se escribe la tensión entre los terminales de cada resistencia en función de las corrientes de malla que circulan por dicho componente, aplicando la ley de Ohm. La corriente total que atraviesa la resistencia es la suma algebraica de las comentes de malla que circulan a través de esta resistencia, asignando a una corriente de malla el signo positivo si su sentido es de "+" a "-" en la caída de tensión, y negativo en caso contrario.

4. Se resuelve el sistema de ecuaciones resultante para hallar las comentes de malla.

5. A partir de las corrientes de malla se hallan las variables deseadas del circuito. Si el valor numérico de una caída de tensión en una resistencia es negativo, significa que su polaridad es contraria a la que se le ha asignado en el punto 2.

**Ejercicio de ejemplo:** En el circuito de la fig. 2.7 a hallar la tensión en el punto A respecto a masa.

**Solución:**

1. Como se indica en la fig. 2.7 b, el circuito tiene tres sin componentes internos a las que se les asigna las corrientes  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$ .

2. Las ecuaciones de malla son:

$$\text{malla 1} \rightarrow v_{g1} = v_{R1} + v_{R3};$$

$$\text{malla 2} \rightarrow v_{g2} + v_{R1} = v_{R2};$$

$$\text{malla 3} \rightarrow v_{R3} = v_{g2} + v_{R4}$$

3. Las diferencias de tensión en los componentes del circuito son, según la ley de Ohm:

$$v_{R1} = R_1(i_1 - i_2);$$

$$v_{R2} = R_2 i_2;$$

$$v_{R3} = R_3(i_1 - i_3);$$

$$v_{R4} = R_4 i_4$$

4. Sustituyendo las expresiones del punto 3 en las ecuaciones del punto 2 se obtiene un sistema de tres ecuaciones con las incógnitas  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$ . Si los valores de todas las resistencias fueran de  $1 \Omega$ , las ecuaciones resultantes serían:

$$i_1 = v_{g1}; \quad i_2 = \frac{1}{2}(v_{g1} + v_{g2}); \quad i_3 = \frac{1}{2}(v_{g1} - v_{g2})$$

5. La tensión en el punto A se calcula a partir de las corrientes de malla:

$$v_A = v_{R3} = R_3(i_1 - i_3) = \frac{R_3}{2}(v_{g1} + v_{g2})$$

Cuando el circuito contiene generadores de corriente, el procedimiento acabado de exponer debe ser modificado puesto que la tensión entre los terminales de un generador de corriente no es una cantidad predefinida: se ajusta a lo que demanda el circuito a fin de que se cumplan las leyes de Kirchhoff. De forma similar a lo que ocurría en el análisis por nudos cuando en el circuito aparecía un generador de tensión, en el análisis por mallas un generador de corriente permite eliminar como incógnita una corriente de malla, y obliga a considerar como nueva incógnita la tensión entre los terminales del mismo.

## 2.4 Concepto de circuito equivalente

Considérese el circuito de la fig. 2.8 a encerrado dentro de una "caja negra", que permite que aparezcan al exterior únicamente los dos terminales A y B. Cualquier otra "caja negra" que contenga un circuito de dos terminales, y que a través de medidas de corriente y tensión en dichos terminales sea indistinguible de la anterior, se dice que es equivalente a la primera.

Imagínese que la segunda caja contiene el circuito de la fig. 2.8 b. Para intentar distinguir las dos cajas negras se podría conectar entre los dos terminales de salida

una fuente de tensión de valor variable y medir para cada tensión la corriente que circula por los terminales (fig. 2.9).

La corriente  $i$ , de entrada a la caja  $A$ , será la suma de las corrientes que circulan por las resistencias de  $2 \Omega$  y  $8 \Omega$ :

$$i = \frac{v - 10}{2} + \frac{v}{8} = \frac{v}{1,6} - 5$$

mientras que para la caja  $B$  la corriente de entrada será:

$$i = \frac{v - 8}{1,6} = \frac{v}{1,6} - 5$$

de donde resulta idéntica corriente para ambas cajas, cualquiera que sea el valor de  $v$ .

Lo mismo sucedería si se conectara entre los terminales de salida una fuente de comente de valor variable y se midiera la tensión entre terminales. Las dos cajas resultan eléctricamente indistinguibles, y en consecuencia se dice que son equivalentes. El concepto de circuito equivalente se usa extensamente en electrónica para describir el funcionamiento de dispositivos. En estos casos se dice que el dispositivo se comporta como su circuito equivalente y son por tanto intercambiables. También se usa para simplificar circuitos.

## 2.5 Resistencias en serie. El divisor de tensión

Se dice que dos resistencias están en serie cuando comparten un nudo común al cual no hay conectado ningún otro elemento. En consecuencia la contente que las atraviesa es la misma. En la fig. 2.10 a se representan las resistencias  $R_1$  y  $R_2$  conectadas en serie. Aplicando la ley de tensiones de Kirchhoff resulta:

$$V_G = iR_1 + iR_2 = i(R_1 + R_2) \quad (2.7)$$

En la fig. 2.10 b se presenta un circuito equivalente de las dos resistencias conectadas en sene, lina única resistencia de valor  $R_s$ . En efecto, la ley de tensiones de Kirchhoff aplicada a este segundo circuito establece que:

$$V_G = iR_3 \quad (2.8)$$

e identificando con (2.7) resulta:

$$R_s = R_1 + R_2 \quad (2.9)$$

Cuando en lugar de dos resistencias hay  $n$  resistencias en serie, su circuito equivalente es una resistencia de valor la suma de todas ellas.

Considérese el circuito de la fig. 2.11. La tensión que aparece en los terminales de salida  $A$  y  $B$  es mía fracción de la tensión  $v_g$ . Por esta razón se denomina a este circuito *divisor de tensión*. Cuando la corriente de salida por el terminal  $A$  es nula ( $i_0=0$ ), la tensión entre  $A$  y  $B$  puede calcularse de la siguiente forma:

$$v_0 = iR_2 = \frac{v_g}{R_1 + R_2} R_2 = v_g \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (2.10)$$

Obsérvese que el factor que multiplica a  $v_g$  en la última expresión es inferior a la unidad.

## 2.6 Resistencias en paralelo. El divisor de corriente

Se dice que dos resistencias están conectadas en paralelo cuando las dos están conectadas a los mismos nudos. En consecuencia, la tensión entre sus terminales es la misma. En la fig. 2.12 a se representan dos resistencias conectadas en paralelo. Aplicando análisis de nudos al circuito de la fig. 2.12 a, obtenemos

$$v_g = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2} = v \left[ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right] \quad (2.11)$$

En el circuito de la fig. 2.12 b se representa el circuito equivalente de dos resistencias conectadas en paralelo, una resistencia de valor  $R_p$ . Analizando por nudos este circuito, resulta:

$$i_g = \frac{v}{R_p} \quad (2.12)$$

Identificando (2.11) con (2.12) resulta que la inversa de la resistencia equivalente de dos resistencias conectadas en paralelo es la suma de las inversas de dichas resistencias:

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (2.13)$$

Esta expresión puede extenderse al caso de  $n$  resistencias en paralelo: la inversa de la resistencia equivalente es la suma de las inversas de las resistencias. En el caso de que hubiera *sólo dos* resistencias en paralelo, la expresión (2.13) puede presentarse de otra forma:

$$R_p = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \quad (2.14)$$

La resistencia equivalente es el producto dividido por la suma de las dos resistencias. Esta última expresión no es generalizable al caso de *más de dos* resistencias en paralelo.

Al circuito de la fig. 2.12 a se le denomina también *divisor de corriente*. La corriente  $i_g$  que llega al nudo se divide entre la que circula por  $R_1$  y la que circula por  $R_2$ . Esta última corriente,  $i_2$ , será  $v/R_2$ , y teniendo en cuenta (2.9) resulta:

$$i_2 = i_g \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (2.15)$$

que se puede enunciar diciendo que la corriente que circula por una rama es la corriente que entra al nudo, dividida por la suma de las resistencias de las dos ramas, y multiplicada por la resistencia de la otra rama.

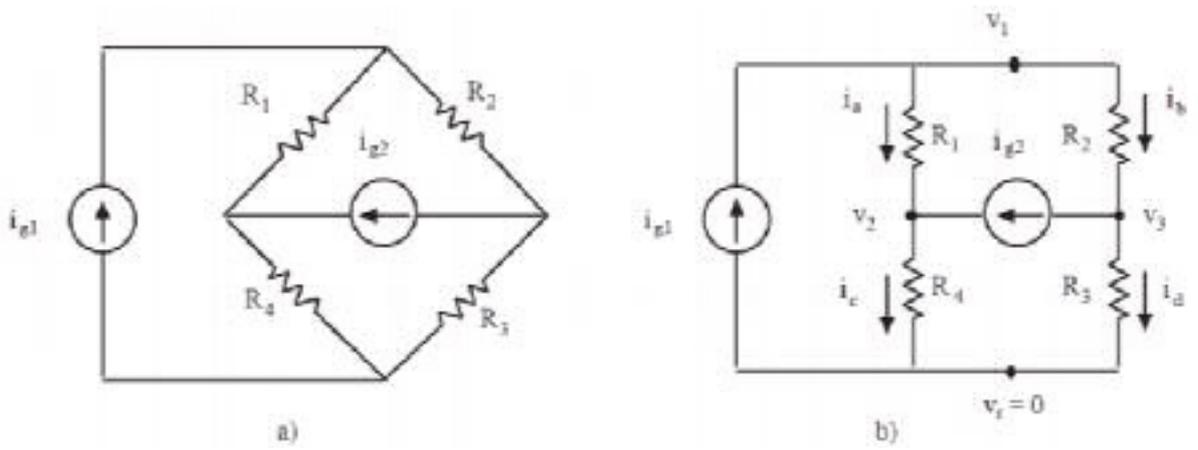


Fig. 2.6 a) Circuito del ejemplo 2.2; b) tensiones y corrientes en el circuito

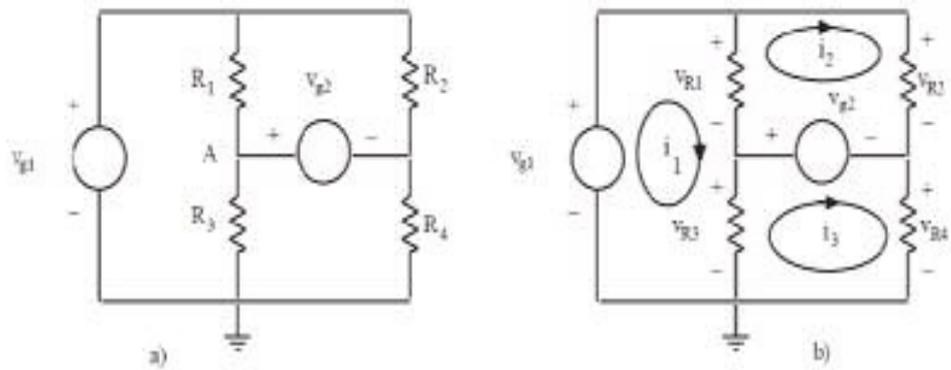


Fig. 2.7 a) Circuito del ejemplo 2.3; b) tensiones y corrientes para el análisis

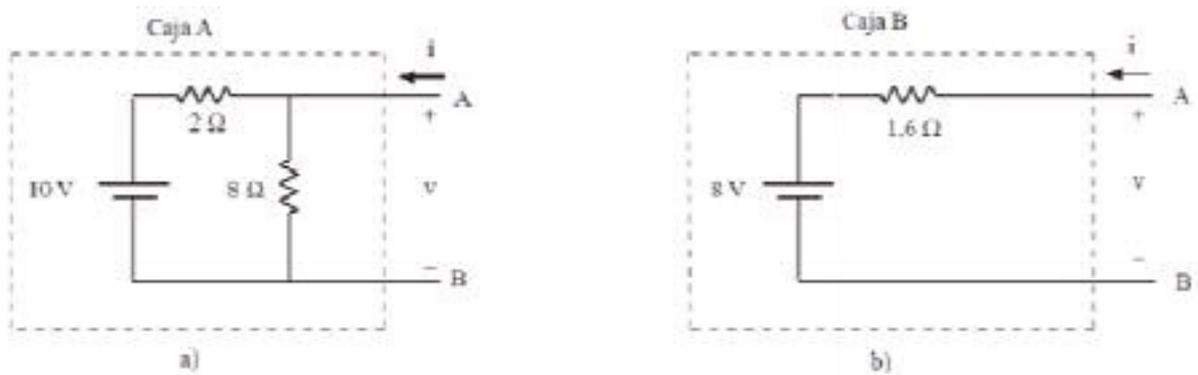


Fig. 2.8 Circuitos equivalentes encerrados en "cajas negras"

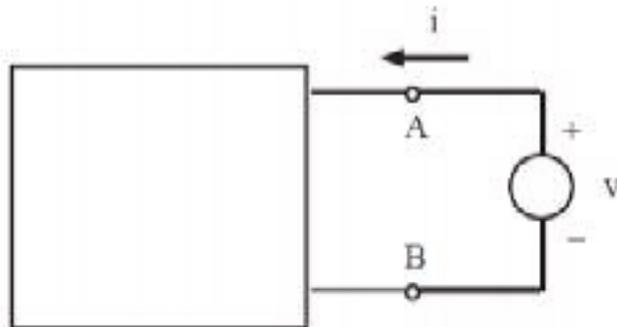


Fig. 2.9 Medida de la característica "i-v" de una "caja negra"

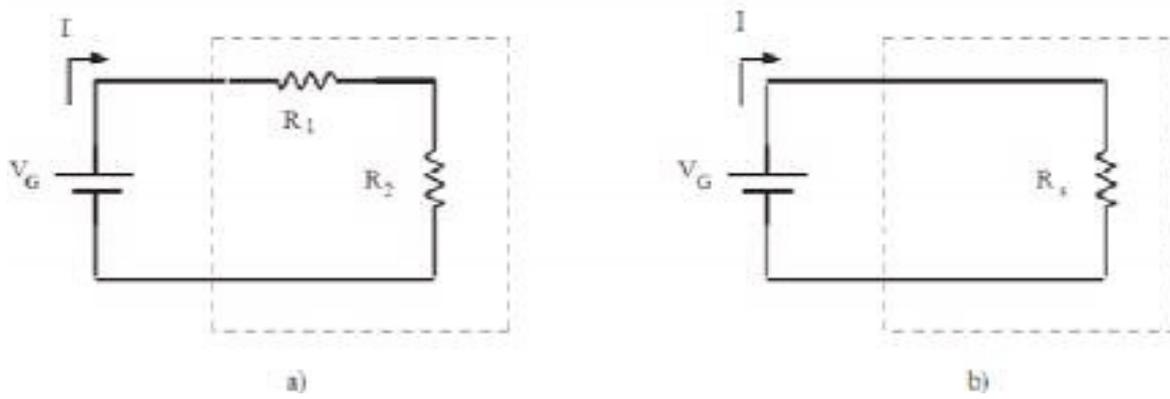


Fig. 2.10 a) Conexión de  $R_1$  y  $R_2$  en serie; b) resistencia equivalente

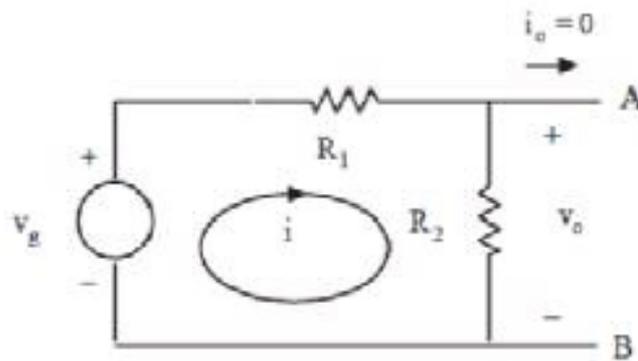


Fig. 2.11 Divisor de tensión

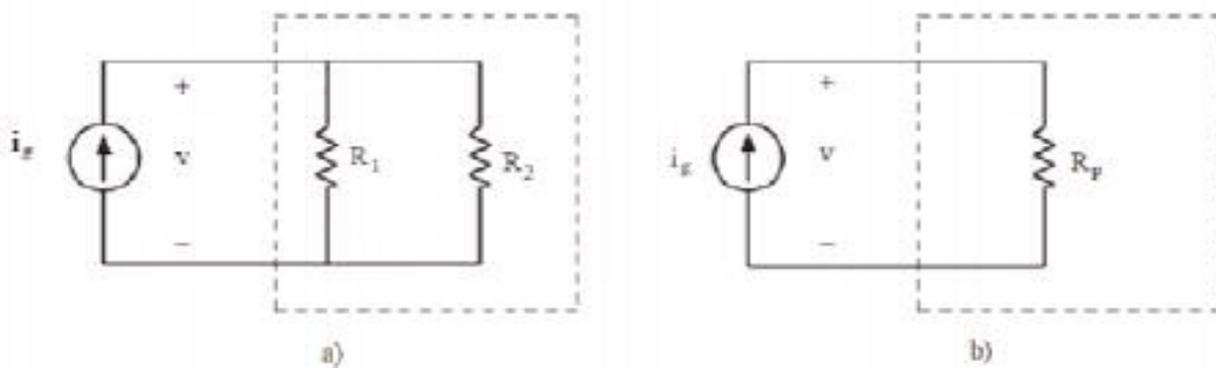


Fig. 2.12 a) Conexión en paralelo de  $R_1$  y  $R_2$ ; b) resistencia equivalente

## 2.7 Problemas para el trabajo independiente

**Ejercicio 2.1:** ¿Cuál es la máxima corriente que puede circular a través de una resistencia de  $100 \Omega$  si ésta puede disipar una potencia máxima de  $0,5 \text{ W}$ ?

¿Cuál será la máxima tensión que se puede aplicar entre sus terminales?

**Solución:**  $i_{\max} \cong 71 \text{ mA}; v_{\max} \cong 7,1 \text{ V}$

**Ejercicio 2.2:** Calcular la resistencia equivalente de:

a) dos resistencias iguales en paralelo;

b)  $n$  resistencias iguales en paralelo.

**Solución:**

a) Aplicando (2.11), si  $R_1=R_2=R$ , resulta  $R_p=R/2$ ;

b) Aplicando (2.10), resulta  $R_p=R/n$

**Ejercicio 2.3:** Calcular el valor aproximado de la resistencia equivalente de dos resistencias  $R_1$ , y  $R_2$  en paralelo, si  $R_2$  es mucho mayor que  $R_1$ .

**Solución:**  $R_p \cong R_1$

**Ejercicio 2.4:** ¿Que valor debe tener  $R_2$  en el divisor de corriente de la fig. 2.12 a si se desea que la corriente que la atraviesa sea la décima parte de la que entra al nudo?

**Solución:**  $R_2 = 9 R_1$

**Ejercicio 2.5:** Aplicando la ley de Ohm, determinar el parámetro desconocido en cada caso planteado en la fig 2.13.

**Ejercicio 2.6:** Obtener las tensiones e intensidades en cada elemento para el circuito de la fig. 2.14

**Ejercicio 2.7:** Plantear las ecuaciones de nudos (fig. 2.15)

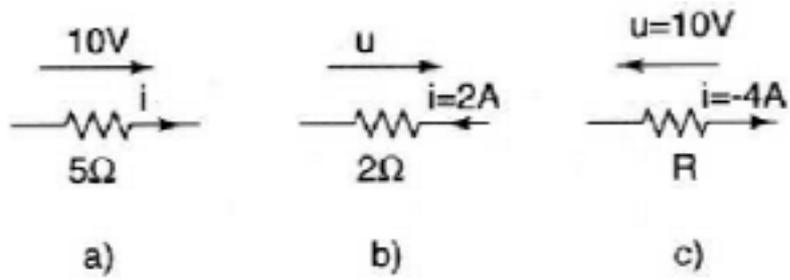


Fig. 2.13 Los datos para el ejercicio 2.5

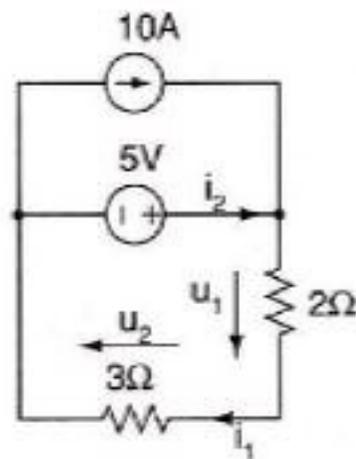


Fig. 2.14 Circuito para el ejercicio 2.6

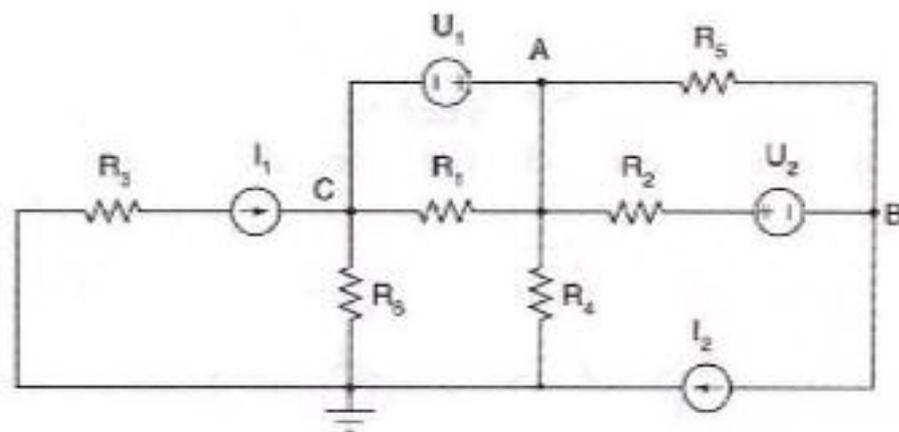


Fig. 2.15 Circuito para el ejercicio 2.7

# Tema 3. El condensador, la bobina y el transformador

## 3.0 Vocabulario técnico español-inglés-ucraniano-ruso

Condensador (m)	capacitor	конденсатор	конденсатор
Almacenar (verb.)	accumulate	акумулявати	аккумулировать
Energía (f)	energy	енергія	энергия
(Condensador) ideal (adj.)	ideal	ідеальний	идеальный
(Condensador) real (adj.)	real	реальний	реальный
Análisis (m)	analysis	аналіз	анализ
Bobina (f)	coil	дросель	дроссель
Campo magnético (m)	magnetic field	магнітне поле	магнитное поле
Transformador (m)	transformer	трансформатор	трансформатор

### 3.1 El condensador

El condensador es un componente electrónico que tiene la propiedad de almacenar carga eléctrica. La tensión entre sus terminales es proporcional a la carga almacenada. A consecuencia de esta propiedad, la corriente que circula a través de él es proporcional a la derivada de la tensión entre sus terminales. Por tanto, a diferencia de los elementos resistivos, su característica no puede representarse en los ejes de coordenadas corriente-tensión. El condensador real suele aproximarse por un elemento de circuito denominado condensador ideal, que se define a continuación (fig. 3.1).

#### 3.1.1 El condensador ideal

El *condensador ideal* es un elemento de circuito que tiene la propiedad de almacenar energía en forma de campo eléctrico, cuando se acumula una carga eléctrica en su interior. Si la carga que almacena es  $q$ , la tensión entre sus dos terminales,  $v_c$ , viene dada por:

$$v_c = \frac{q}{C} \quad (3.1)$$

La constante de proporcionalidad  $C$  se denomina *capacidad*. La unidad de capacidad es el *faradio* ( $F$ ). De acuerdo con (3.1):

$$1 \text{ faradio} = 1 \text{ culombio} / 1 \text{ voltio} \quad (3.2)$$

es decir, un faradio es la capacidad de un condensador que presenta entre sus terminales una tensión de un voltio cuando la carga que almacena es de un culombio. El símbolo circuital del condensador se representa en la fig. 3.2 a. En la fig. 3.2 b se representa un dibujo esquemático de un tipo de condensador: *el condensador plano*. Este condensador está constituido por dos placas conductoras de igual área  $A$ , separadas por un aislante o dieléctrico, de espesor  $d$  y permitividad  $\epsilon$ . Además de éste, existen otros tipos de condensadores, tales como los cilíndricos, esféricos,... constituidos también por dos placas conductoras (de forma cilíndrica, esférica,...) separadas por un aislante.

Recordando la definición de intensidad  $i = \frac{dq}{dt}$  y derivando los dos miembros de la expresión (3.1), se halla una expresión alternativa:

$$i_c = C \frac{dv_c}{dt} \quad (3.3)$$

donde  $i_c$  es la corriente que entra al condensador. Esta expresión pone de manifiesto dos propiedades muy importantes de un condensador:

– la tensión  $v_c$  entre sus terminales no puede variar de forma discontinua. Si lo hiciera, la expresión (3.2) indicaría que debería circular una corriente de valor infinito, que no existe en el mundo real;

– cuando la tensión  $v_c$  se hace constante, el condensador se comporta como un circuito abierto, puesto que  $i_c$  es nula.

En las expresiones (3.1) y (3.3) hay que tener en cuenta que los signos de  $q$ ,  $i_c$  y  $v_c$ , son los indicados en la fig. 3.2.

**Ejercicio de ejemplo:** Calcular la carga almacenada en un condensador de  $1 \mu F$  si la tensión entre terminales es de  $5 V$ .

**Solución:** La carga almacenada por el condensador será  $q=Cv_c$ . Sustituyendo valores numéricos resulta:  $q = 1 \cdot 10^{-6} \cdot 5 = 5 \cdot 10^{-6} C$ .

### 3.1.2 Principio físico de funcionamiento

El principio físico del condensador se basa en que la carga almacenada en las placas del condensador crea un campo eléctrico entre dichas placas, el cual origina una diferencia de potencial entre ellas. Consideremos la fig. 3.3. Una corriente  $i$  inyecta cargas positivas a la placa superior del condensador. El aislante entre placas les impide el paso a la placa inferior, y obliga a que queden almacenadas en dicha placa. Estas cargas almacenadas en la placa superior originan un campo eléctrico que "expulsa" cargas positivas de la placa inferior (ley de Coulomb) y por tanto "carga" a la placa inferior con una carga igual y de signo contrario a la almacenada en la placa superior. Las cargas positivas expulsadas de la placa inferior circulan por el terminal inferior y dan continuidad a la corriente: la corriente que sale del terminal inferior es igual a la que entra por el superior. El campo eléctrico entre placas provoca que éstas estén a diferente potencial. Nótese también que en el condensador hay neutralidad global de carga: la carga de la placa superior es igual y de signo contrario a la de la placa inferior.

En un condensador plano se demuestra que el campo eléctrico entre placas vale aproximadamente  $\left| \vec{E} \right| = \frac{\rho F}{\rho l}$ , donde  $\sigma$  es la densidad superficial de carga en la placa ( $q/A$ ) y  $\epsilon$  la permitividad del aislante.

El espesor de este aislante es  $d$ , que se supone igual a la separación entre placas. Por tanto la diferencia de potencial entre placas será  $v_c = \left| \vec{E} \right| d$  y sustituyendo el campo eléctrico dado por la expresión anterior resulta:

$$v_c = \frac{\sigma}{\epsilon} \cdot d = \frac{q}{A \cdot \epsilon} \cdot d = \frac{q}{A \cdot \frac{\epsilon}{d}} = \frac{q}{C} \quad (3.4)$$

La capacidad del condensador plano, por tanto, viene dada por:

$$\tilde{N} = \frac{A \cdot \rho l}{d} \quad (3.5)$$

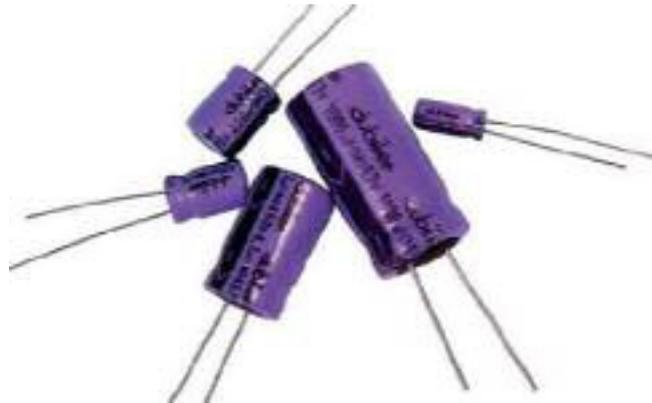


Fig. 3.1 Condensadores comerciales

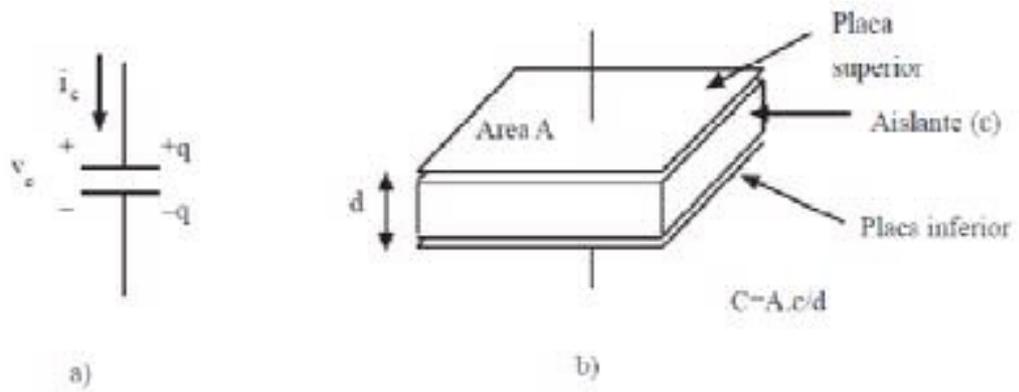


Fig. 3.2 a) Símbolo circuital del condensador; b) estructura de un condensador plano

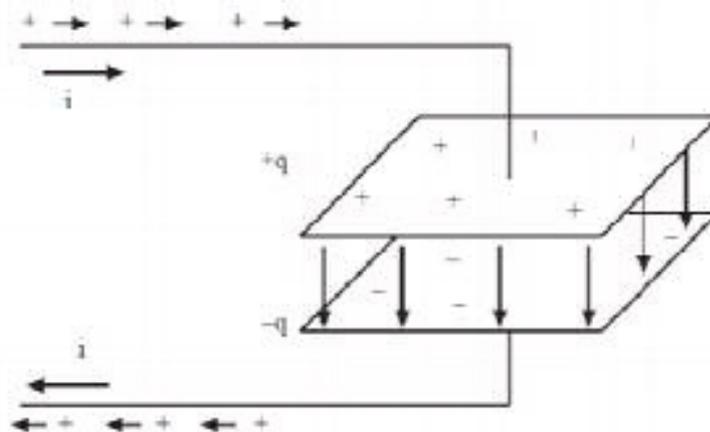


Fig. 3.3 Almacenamiento de cargas y campo eléctrico en un condensador

### 3.1.3 Asociación de condensadores

De forma similar a lo que ocurría con las resistencias, a veces los condensadores aparecen en un circuito conectados en serie o en paralelo. También en este caso pueden ser sustituidos por condensadores equivalentes. Consideremos la fig. 3.4 a, en la que los condensadores  $C_1$  y  $C_2$  aparecen conectados en paralelo.

La tensión entre terminales es  $v$ , por lo que la carga inyectada al conjunto de los dos condensadores, suponiendo que ambos estaban inicialmente descargados, es:

$$q = q_1 + q_2 = vC_1 + vC_2 = v(C_1 + C_2) \quad (3.6)$$

El condensador de la fig. 3.4 b, con una tensión  $v$  entre terminales, tiene una carga almacenada de  $q = vC_{eq}$ .

Para que este último condensador sea equivalente a los dos conectados en paralelo se requiere que para la misma tensión entre terminales tenga la misma carga inyectada. Comparando las dos expresiones anteriores es inmediato verificar que debe cumplirse que:

$$\tilde{N}_{eq} = C_1 + C_2 \quad (3.7)$$

Es decir, cuando dos condensadores están conectados en paralelo equivalen a uno cuya capacidad es la suma de las capacidades. Esta expresión puede generalizarse al caso de  $n$  condensadores conectados en paralelo: el valor de la capacidad equivalente es la suma de todas las capacidades.

En la fig. 3.5 a se representan los condensadores  $C_1$  y  $C_2$ , que se suponen inicialmente descargados, conectados en serie. La corriente que circula por ambos condensadores es la misma, por lo que las cargas que almacenan también lo son. Por tanto, la tensión entre terminales será:

$$v = v_1 + v_2 = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} = q \left[ \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right]$$

En el condensador de la fig. 3.5 b la relación entre la tensión y la carga es  $v = \frac{q}{C_{eq}}$ .

Para que sean equivalentes, a igualdad de tensión debe haber igualdad de carga almacenada, lo cual implica que:

$$\frac{1}{\tilde{N}_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (3.5)$$

es decir, y generalizando para dos o más condensadores, la inversa de la capacidad equivalente de varias capacidades conectadas en serie es la suma de las inversas de todas ellas.

Obsérvese que estas reglas de equivalencia son "contrarias" a las que rigen para las resistencias. La regla para condensadores en paralelo es análoga a la de resistencias en serie y viceversa.

Los condensadores ideales aproximan el comportamiento de los condensadores reales.

En particular hay que destacar que un condensador real puede deteriorarse si se aplica entre sus terminales una tensión superior a un valor límite denominada *tensión máxima de trabajo*.

### 3.2 Análisis de circuitos de resistencias y condensadores (RC)

El análisis de circuitos que contienen resistencias y condensadores se basa en la aplicación de las leyes de Kirchhoff, al igual que en los circuitos puramente resistivos. La única diferencia estriba en que los condensadores presentan una dependencia diferencial entre la tensión y la corriente en lugar de la relación de proporcionalidad que regía en el caso de las resistencias. Esta dependencia diferencial da lugar a ecuaciones en las que aparecen la incógnita y sus derivadas, motivo por el cual se denominan *ecuaciones diferenciales*.

La resolución de las ecuaciones diferenciales requiere el conocimiento de técnicas matemáticas específicas que no pueden ser desarrolladas en un texto de electrónica básica como éste. Para aquellos lectores que no las conozcan, y para evitar aplazar el estudio a un primer nivel de estos circuitos a la espera que las adquieran, daremos una breve descripción del procedimiento que se debe seguir sin pretender con ello suplir la adquisición rigurosa de dichos conocimientos.

En este capítulo sólo resolveremos circuitos que originan un tipo determinado de ecuaciones diferenciales: las de primer orden con coeficientes constantes, es decir, aquellas que están formadas por una combinación lineal de la variable y su primera derivada. Existen, por supuesto, circuitos que dan lugar a ecuaciones diferenciales más complicadas, los cuales no serán estudiados por el momento.

#### 3.2.1 Respuesta de un condensador a señales en escalón

Consideremos el circuito de la fig. 3.6, en el que el interruptor se cierra en el instante  $t=0$ . El condensador está inicialmente descargado ( $q(0)=0$ ), por lo que al cerrar el interruptor el condensador iniciará un proceso de *carga*. La señal que se aplica al conjunto R-C es un escalón de tensión. Se suele denominar a este análisis *respuesta al escalón*.

Para  $t \geq 0$  la ecuación de Kirchhoff de la malla es:

$$V_a = i_c R + v_c \quad (3.6)$$

Esta ecuación contiene dos incógnitas:  $i_c$  y  $v_c$ . Para resolverla hace falta una ecuación extra que relacione  $i_c$  y  $v_c$ . Se puede optar por utilizar la ecuación (3.2) o la ecuación (3.6). En el primer caso resulta una ecuación en que la incógnita es  $v_c$ . En el segundo caso la incógnita es  $i_c$ . Resolveremos las dos opciones:

$$V_a = R\tilde{N} \frac{dv_c}{dt} + v_c \quad (3.7)$$

que es una *ecuación diferencial en  $v_c$* . A diferencia de las ecuaciones algebraicas, la solución de una ecuación diferencial es una función de la variable respecto a la que se deriva. En este caso la solución será la función  $v_c(t)$ .

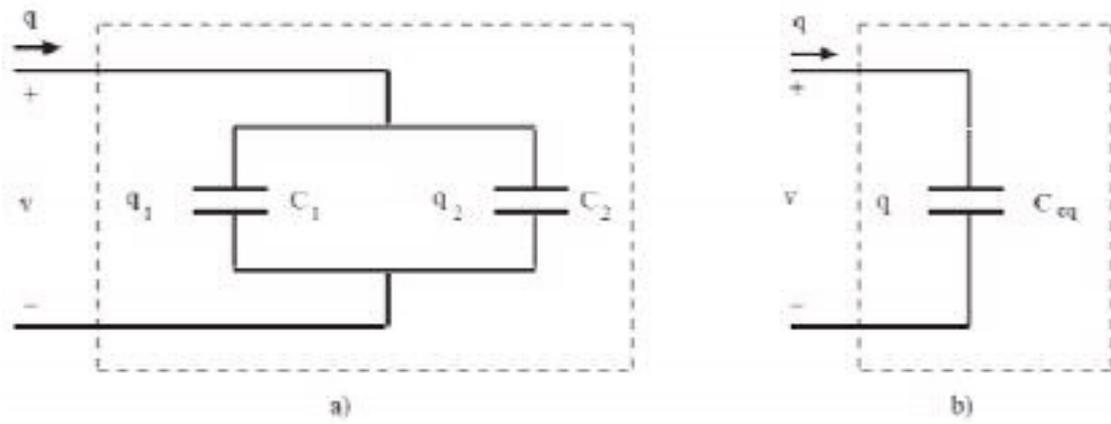


Fig. 3.4 a) Condensadores conectados en paralelo; b) condensador equivalente

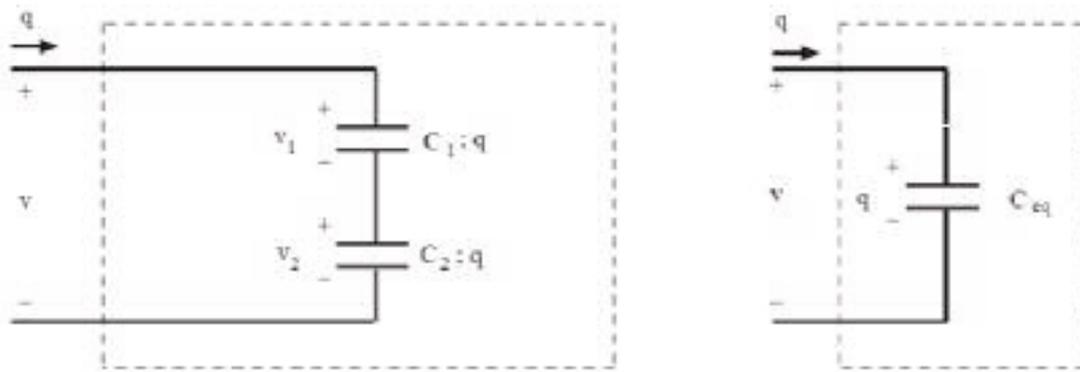


Fig. 3.5 a) Condensadores conectados en serie; b) condensador equivalente

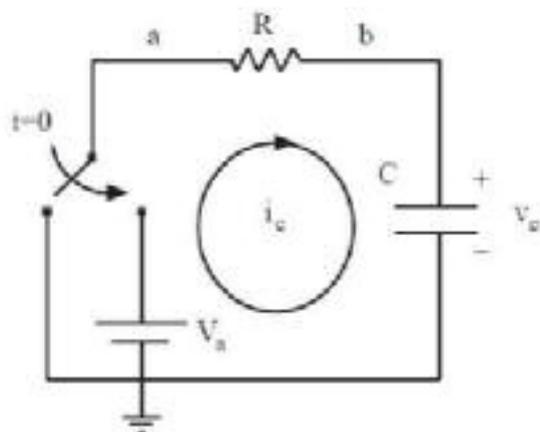


Fig. 3.6 Circuito de carga de un condensador a través de una resistencia

El *procedimiento* que se debe seguir *para resolver este tipo* de ecuaciones diferenciales es el siguiente:

1. Escribir la ecuación de forma estándar: los términos que contienen la incógnita y sus derivadas se escriben en el primer miembro de la igualdad. El resto de los términos en el segundo miembro:

$$R\tilde{N} \frac{dv_c}{dt} + v_c = V_a \quad (3.8)$$

2. Hallar la solución general de la ecuación homogénea. La ecuación homogénea es la constituida por el primer miembro de (3.8) igualado a cero:

$$R\tilde{N} \frac{dv_c}{dt} + v_c = 0 \quad (3.9)$$

Para resolver esta ecuación se ensaya una solución del tipo  $v_c = e^{at}$ , y se determina el parámetro  $a$  para que sea solución. Sustituyendo esta expresión y su derivada en (3.9), resulta:

$$R\tilde{N}_e^{at} a + e^{at} = 0 \Rightarrow e^{at} (aRC + 1) = 0 \quad (3.10)$$

Para que  $e^{at}$  sea solución se requiere que se cumpla (3.10). Esta ecuación se cumplirá si  $e^{at}$  es nula, o si el paréntesis es nulo. La primera alternativa no es adecuada, puesto que implica técnicamente la solución trivial  $v_c = 0$ . Por el contrario, la segunda significa que:

$$a = -\frac{1}{RC} \quad (3.11)$$

que conduce a una solución no nula para  $v_c$ . La solución general de la ecuación homogénea viene dada por el producto de la exponencial por una constante arbitraria:

$$v_{ch} = K e^{-t/RC} \quad (3.12)$$

tal como puede verificarse sustituyendo esta expresión en (3.9).

Obsérvese que esta forma de resolver la ecuación homogénea no es en absoluto "caprichosa".

La ecuación (3.9) podría ser resuelta de forma directa sin más que reordenar sus términos:

$$\frac{dv_c}{v_c} = -\frac{dt}{RC} \quad (3.13)$$

Integrando ambos miembros de la igualdad:

$$\begin{aligned} \ln(v_c) &= k_1 - \frac{t}{RC}; \\ v_c &= e^{k_1} e^{-t/RC} = K e^{-t/RC} \end{aligned} \quad (3.14)$$

que es la solución obtenida por el procedimiento anterior. Nótese que para que pueda cumplirse (3.9) se requiere que  $v_c$  y su derivada sean funciones del mismo tipo. Si no lo fueran, no podría ser nula una combinación lineal de la función y su derivada. La función exponencial cumple esta propiedad.

3. Hallar *una* solución particular de la ecuación completa. Para este tipo de ecuación, en la que el segundo miembro de la igualdad es una constante, se prueba una solución del tipo  $v_c=B$ , siendo  $B$  una constante. Sustituyendo este valor en la ecuación completa resulta:

$$\begin{aligned} RC \cdot 0 + B &= V_a \\ B - V_a & \end{aligned} \quad (3.15)$$

Por tanto, la solución particular será:

$$v_{cp} = V_a \quad (3.16)$$

4. Formular la *solución matemática* de la ecuación diferencial. Esta solución se compone de la suma de la solución general de la ecuación homogénea más la solución particular:

$$v_c = v_{ch} + v_{cp} = Ke^{-t/RC} + V_a \quad (3.17)$$

En efecto, obsérvese que sustituyendo (3.17) en (3.8) se obtiene:

$$RC \frac{d(v_{ch} + v_{cp})}{dt} + (v_{ch} + v_{cp}) = \left[ RC \frac{dv_{ch}}{dt} + v_{ch} \right] + \left[ RC \frac{dv_{cp}}{dt} + v_{cp} \right] = V_a \quad (3.18)$$

que cumple la ecuación diferencial ya que el primer paréntesis es nulo, y el segundo vale  $V_a$ .

Es importante observar que hay infinitas soluciones matemáticas (expresiones que cumplen la ecuación): una para cada valor de  $K$ .

5. Hallar la *solución física*, es decir, escoger de entre todas las soluciones matemáticas la que tenga sentido físico. En este tipo de ecuaciones diferenciales, esta solución se halla haciendo que la solución matemática tome, para  $t=0$ , el mismo valor que el que impone el comportamiento físico del circuito. En el circuito que estamos analizando, el condensador estaba inicialmente descargado, por lo que en  $t=0$ :

$$v_c(0) = \frac{q(0)}{C} = 0 \quad (3.19)$$

Así pues, la expresión (3.17) para  $t=0$  debe tomar este valor:

$$Ke^0 + V_a = K + V_a = 0 \quad (3.20)$$

Por tanto, el valor que debe tomar  $K$  para que se cumpla esta condición inicial es:

$$K = -V_a \quad (3.21)$$

y la solución de la ecuación diferencial será:

$$V_c = -V_a e^{-t/RC} + V_a = V_a(1 - e^{-t/RC}) \quad (3.22)$$

La representación gráfica de la solución se da en la fig. 3.7 a. La solución (3.22) contiene dos términos: uno que se extingue al transcurrir el tiempo, que

consecuentemente se denomina *régimen transitorio*, y otro que permanece invariable después de extinguido el primero, y que se denomina *régimen permanente*. En este circuito, el régimen transitorio viene dado por una ley exponencial con una constante de tiempo dada por el producto de la resistencia por la capacidad. Después de unas pocas constantes de tiempo (de tres a cinco, según la precisión que se requiera) este término adquiere un valor despreciable.

El régimen transitorio permite dar "continuidad" a  $v_c$  para pasar desde su valor inicial (0 V) a su valor final ( $V_a$ ) (recuérdese que en un condensador  $v_c$  no puede cambiar de forma abrupta). El régimen permanente es  $V_a$ , que es invariable con el tiempo.

La corriente  $i_c$ , que carga al condensador, puede calcularse aplicando (3.2):

$$i_c = C \frac{dv_c}{dt} = \frac{V_a}{R} e^{-t/RC} \quad (3.23)$$

La representación gráfica de esta corriente se da en la fig. 3.7 b. Para  $t=0$  el valor de  $i_c$  es  $V_a/R$ , y cuando  $t$  es mucho mayor que  $RC$  tiende a cero. Así pues, el régimen permanente de un condensador excitado por una tensión continua equivale a un circuito abierto: una vez cargado el condensador a la tensión  $V_a$  impide el paso de corriente a través de él.

Estos resultados tienen una fácil interpretación física. La tensión en bornes del condensador es proporcional a su carga. Inicialmente ésta es nula, y por tanto también lo es la tensión en el punto "b" de la fig. 3.6. El punto "a" siempre está conectado (para  $t \geq 0$ ) a  $V_a$ . Por tanto, en el instante inicial la caída de tensión en  $R$  será  $V_a$ , y la corriente será, en consecuencia,  $V_a/R$ . Esta corriente empezará a cargar el condensador, y a medida que se cargue aumentará  $v_c$ , y por tanto la tensión del punto "b". La caída de tensión en la resistencia disminuirá y, por tanto, también disminuirá la corriente. Pero aunque disminuya, esta corriente seguirá cargando al condensador e incrementando  $v_c$ , lo que provocará una ulterior disminución de la corriente. El proceso llega a un punto estable cuando  $v_c$  alcanza el valor  $V_a$ . En estas condiciones la caída de tensión en la resistencia es nula, lo que implica una corriente nula, y al ser nula la corriente deja de incrementarse la carga en el condensador, y por tanto no varía  $v_c$ .

La segunda alternativa para resolver el circuito consistía en sustituir la ecuación (3.6). Esto conduce a la ecuación:

$$V_a = i_c R + \frac{q(0) + \int_0^T i_c dt}{C} \quad (3.24)$$

que resulta ser una ecuación integral en  $i_c$ .

La ecuación (3.24) la transformamos en diferencial derivando ambos miembros de la igualdad respecto al tiempo:

$$0 = R + \frac{di_c}{dt} + \frac{i_c}{C} \quad (3.25)$$

ya que  $V_a$  y  $q(0)$  son constantes. Multiplicando ambos miembros de la igualdad por  $C$  y aplicando el procedimiento descrito anteriormente para resolver una ecuación diferencial resulta, que es el mismo resultado que el hallado anteriormente.

Nótese que el valor inicial de  $i_c$  debe ser una vez cerrado el interruptor,  $i_c(0^+)$ , diferente de  $i_c(0^-)$ . Aplicando la ecuación (3.6) podemos hallar  $v_c$ :

$$v_c = \frac{1}{C} \int_0^T \frac{V_a}{R} e^{-t/RC} dt = -V_a e^{-t/RC} \Big|_0^T \quad (3.26)$$

$$v_c = V_a(1 - e^{-t/RC})$$

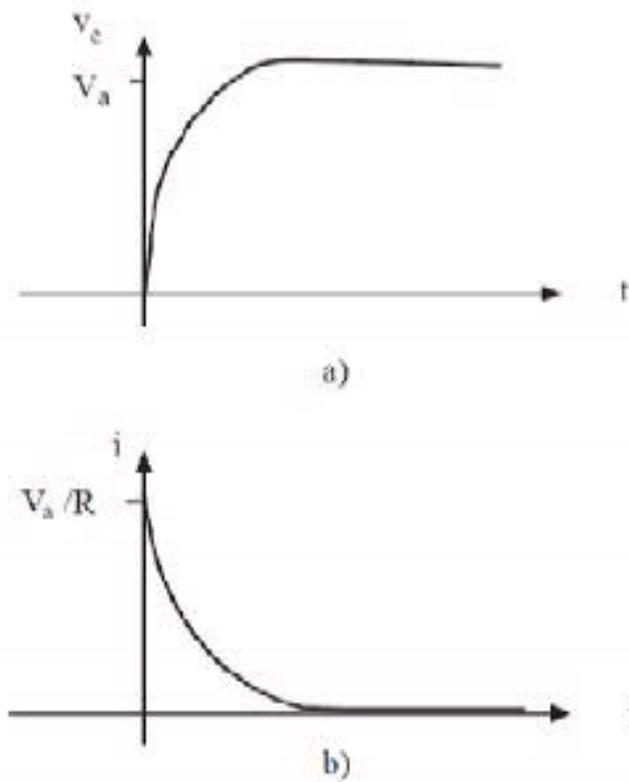


Fig. 3.7 Evolución de  $v_c$  en el circuito de la figura 3.5

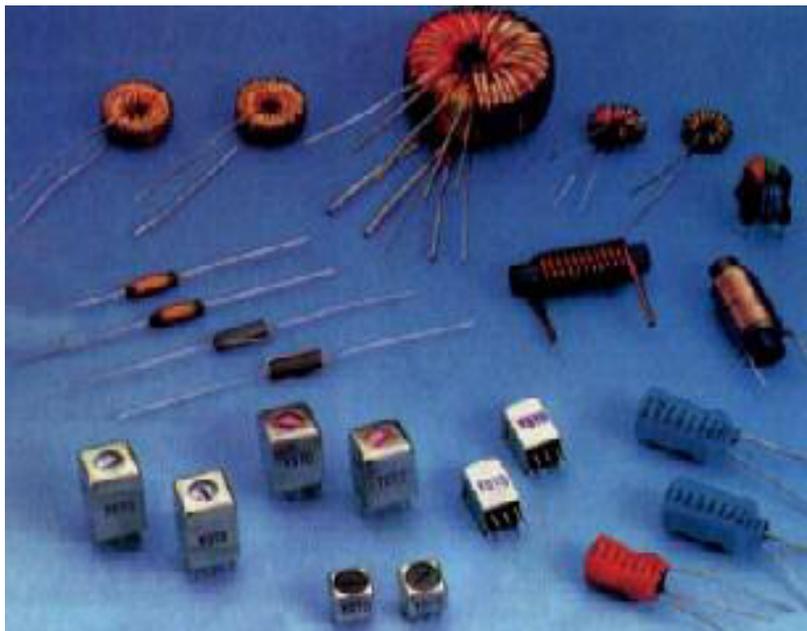


Fig. 3.8 Bobinas comerciales

### 3.3 La bobina

La bobina es un componente electrónico en el cual la relación entre la tensión en sus terminales y la corriente que circula por ella también sigue una ley diferencial. La expresión matemática de esta ley guarda una relación dual con la del condensador: se puede obtener una a partir de la otra sin más que cambiar corriente por tensión y capacidad por autoinducción. Por esta razón el tratamiento matemático de ambos elementos es muy similar (fig. 3.8).

#### 3.3.1 La bobina ideal

La *bobina ideal*, también llamada inductor ideal, es un elemento de circuito que tiene la propiedad de almacenar energía mediante la creación de un campo magnético, cuando circula una corriente a través de ella. A consecuencia de ello, la relación entre la corriente que la atraviesa y la caída de tensión entre sus terminales viene dada por:

$$v_L = L \frac{di_L}{dt} \quad (3.27)$$

La constante de proporcionalidad  $L$  se denomina coeficiente de autoinducción de la bobina, y su unidad es el *henrio* ( $H$ ). De acuerdo con (3.27) 1 henrio = 1 voltio x 1 segundo / 1 amperio, es decir, un henrio es el coeficiente de autoinducción de una bobina que presenta entre sus terminales una caída de tensión de un voltio cuando la corriente que la atraviesa varí o razón de un amperio cada segundo. En la fig. 3.9 se dan el símbolo de la bobina y los sentidos de  $i_L$  y de  $v_L$ .

**Ejercicio de ejemplo:** Calcular la caída de tensión que habría entre los terminales de una bobina ideal de  $2 \text{ mH}$  si la intensidad que la atraviesa fuera la señal triangular representada en la fig. 3.10 a.

**Solución:** En cada una de las rampas que forman la señal triangular, la corriente viene expresada por la ecuación de una recta. La derivada de la corriente será la pendiente de dicha recta. Para las rampas positivas la pendiente es  $\frac{3 \text{ mA}}{3 \text{ ms}}$ , es decir, 1 A/s. En estas rampas la tensión en bornes de la bobina será el producto de esta pendiente por  $L$ , es decir, 2 mV. Para las rampas negativas la pendiente, y por tanto  $v_L$ , toman los mismos valores pero con signo contrario. La forma de onda que toma  $v_L$  se representa en la fig. 3.10 b.

La expresión (3.27) pone de manifiesto dos propiedades muy importantes de la bobina.

– La corriente en una bobina no puede variar de forma discontinua. En efecto, si lo hiciera su derivada sería infinita, por lo que la tensión que se generaría entre sus terminales también lo sería, lo cual no ocurre en el mundo real.

– Cuando la corriente  $i_L$  tiene un valor constante, la bobina equivale a un cortocircuito, puesto que la caída de tensión en ella es nula.

Existe un símil hidráulico de la bobina que ilustra estas propiedades. En este símil, la bobina equivale a las palas de una turbina que poseen una determinada inercia. Se supone que las palas están situadas en el interior de la tubería del circuito

hidráulico y que no se extrae energía de la turbina. Supongamos inicialmente que las palas están en reposo y que no hay corriente hidráulica; es decir, que el líquido está en reposo. Cuando una bomba intente mover el líquido para producir una corriente, ésta sólo podrá circular poniendo en movimiento las palas de la turbina. Como éstas tienen inercia, su velocidad se incrementará de forma continua a partir de cero, haciendo que la corriente también aumente de forma continua a partir de cero. Cuando se alcance un régimen estacionario, las palas no opondrán resistencia a la corriente (situación equivalente al cortocircuito de la bobina en continua). Si se intenta cortar la corriente hidráulica, las palas de la turbina producirán una corriente debido a su inercia, manteniendo la continuidad de la velocidad de su movimiento y por tanto de la corriente que la atraviesa.

Puede obtenerse una expresión alternativa a (3.27) integrándola entre 0 y  $t$ :

$$i_L(t) = i_L(0) + \frac{\int_0^t v_L(t) \cdot dt}{L} \quad (3.28)$$

En esta expresión  $i_L(0)$  es la corriente que circula por la bobina en el instante inicial.

*Obsérvese que una bobina con una corriente inicial puede modelarse, mediante una fuente de intensidad constante, de valor  $i_L(0)$ , en paralelo con una bobina desactivada en el instante inicial.*

### 3.3.2 Principio físico de funcionamiento

El fundamento físico de este comportamiento tiene su origen en las fuerzas que ejercen entre sí las cargas eléctricas en movimiento. Además de la fuerza estática de Coulomb, dos cargas eléctricas en movimiento experimentan otra fuerza de origen "magnético". De forma similar a lo que se hacía para describir la fuerza electrostática, se puede imaginar que una carga en movimiento modifica el espacio que la rodea, creando un *campo magnético*  $B$ . Este campo magnético ejerce una fuerza  $F_m$  sobre otra carga eléctrica  $q$  que penetre en esta región del espacio con una velocidad  $v$ :

$$\vec{F}_m = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B} \quad (3.28)$$

Como una corriente eléctrica es un conjunto de cargas en movimiento, creará un campo magnético a su alrededor. Este campo magnético es proporcional al valor de la intensidad de la corriente.

Se define el flujo magnético de un campo  $B$  en una superficie perpendicular  $A$  como el producto:

$$\Phi = B \cdot A \quad (3.29)$$

Un alambre forma de espira abierta de área  $A$  "abraza" mi flujo magnético,  $\Phi$ , dado por (3.29). Faraday estableció que si el flujo magnético que abrazaba esta espira variaba con el tiempo, aparecía una diferencia de potencial entre sus extremos de valor (fig. 3.11):

$$v_{fr} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (3.30)$$

Una bobina está formada por un alambre "enrollado" sobre un núcleo formando  $N$  espiras en serie (fig. 3.12). La corriente que circula por un hilo crea un campo magnético. Dentro del arrollamiento existe, pues, un campo  $B$  que es proporcional a la corriente y al número de espiras, debido a la adición de los campos magnéticos creados por cada espira. Suponiendo que este campo es perpendicular a las espiras, el flujo en cada una de ellas viene dado por el producto del campo por el área de la espira. Si este flujo varía con el tiempo, creará una diferencia de tensión  $v_\epsilon$  en cada espira, con lo que se obtiene una diferencia total de tensión  $v_L$  entre los terminales de la bobina igual a la suma de las tensiones en cada espira, ya que éstas están en serie. La variación del flujo en las espiras de la bobina se debe a la variación del campo magnético. Como que el campo magnético es proporcional a la corriente que atraviesa la bobina, resulta que  $v_L$  es proporcional a la variación de la corriente en la bobina:

$$v_L = N \frac{d}{dt} = N \frac{d\Phi}{dt} (kNi) = kN^2 \frac{di}{dt} = L \frac{di}{dt}$$

donde  $L$  es la constante  $kN^2$  que aparece en la expresión anterior.

La constante de proporcionalidad  $k$  depende de la sección de la bobina  $S$ , de la longitud del circuito magnético  $l$ , y de la permeabilidad  $\mu$  del material que constituye el núcleo sobre el que se enrolla la bobina  $k = \frac{\mu S}{l}$ .

Se remite al estudiante a la consulta de textos básicos de electricidad y magnetismo para la profundización en estos conceptos.

### 3.3.3 Asociación de bobinas en serie y en paralelo

En algunos casos las bobinas se pueden encontrar en un circuito conectadas en serie o en paralelo, en cuyo caso el conjunto de ellas puede ser sustituido por una bobina equivalente. En la fig. 3.13 a se presentan las bobinas  $L_1$  y  $L_2$ , conectadas en serie y construidas de forma que el campo magnético creado por una no afecte a la otra. Suponiendo que la corriente inicial de cada una de las bobinas sea nula, es obvio que la caída de tensión del conjunto de ellas es:

$$v = v_1 + v_2 = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} = (L_1 + L_2) \frac{di}{dt}$$

por lo que equivalen a una bobina de valor suma de las dos:

$$L_{eq} = L_1 + L_2 \quad (3.31)$$

En la fig. 3.13 b se muestran las bobinas  $L_1$  y  $L_2$  conectadas en paralelo. En este caso, suponiendo también nulas las corrientes iniciales:

$$i = i_1 + i_2 = \frac{1}{L_1} \int_0^T v dt + \frac{1}{L_2} \int_0^T v dt = \left[ \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right] \int_0^T v dt$$

por lo que para la bobina equivalente,  $L_{eq}$ , se cumplirá:

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \quad (3.32)$$

(Obsérvese que estas reglas de equivalencia son análogas a las que rigen para el caso de resistencias).

Las bobinas ideales aproximan dispositivos reales en un cierto margen de operación. Sus características y limitaciones son descritos.

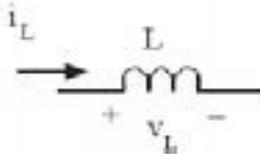


Fig. 3.9 Símbolo de la bobina ideal y signos de  $v_L$  e  $i_L$

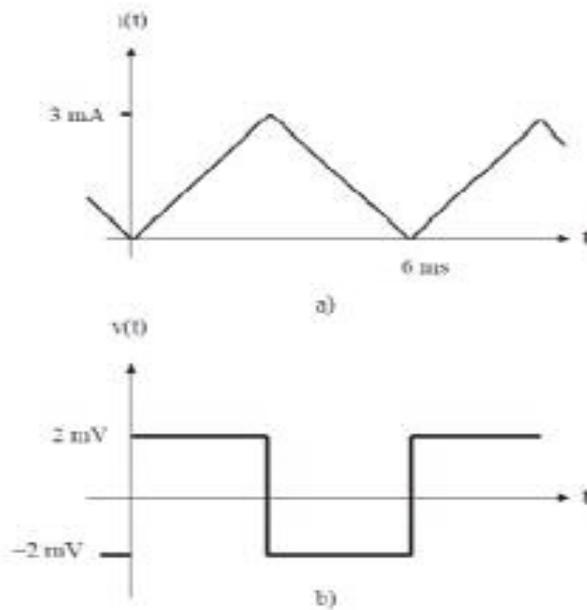


Fig. 3.10 a) Forma de onda de la corriente del ejemplo 3.1;  
b) tensión en bornes de la bobina

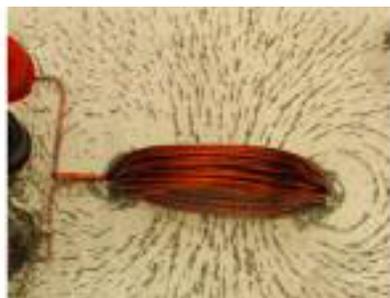


Fig. 3.11 Campo magnético en torno a una bobina por la que circula corriente

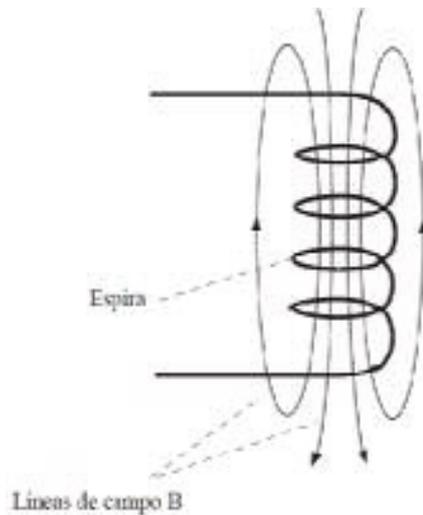


Fig. 3.12 Bobina en la que se indican las líneas de campo magnético

### 3.4 Análisis de circuitos de resistencias y bobinas (RL)

El análisis de circuitos  $RL$  es similar al realizado para circuitos  $RC$ . Esta similitud proviene del hecho de que las leyes que regulan el comportamiento de condensadores y de bobinas, las ecuaciones (3.2) y (3.26), son duales: se puede obtener una expresión a partir de la otra si se cambian  $i_c$  por  $v_L$ ,  $v_c$  por  $i_L$ , y  $C$  por  $L$ . Por tanto, el tratamiento matemático de los circuitos  $RL$  es idéntico al de los circuitos  $RC$ , por lo que en este apartado pondremos el énfasis en el significado físico de los resultados obtenidos.

Consideren el circuito de la fig. 3.14, en el que se pretende *activar una bobina* por la que no circulaba corriente antes de cerrar el interruptor. Al cerrar el interruptor el generador de tensión  $V_a$  "intentará" hacer circular una corriente por el circuito, pero, como se ha visto anteriormente, la bobina impide un cambio discontinuo de la corriente. Para evitar este cambio que intenta la fuente  $V_a$ , la bobina genera una tensión  $v_L$  del valor adecuado para asegurar la continuidad de la corriente. En este caso el valor "adecuado" de  $v_L$  es  $V_a$ . De esta forma la corriente que circula a través de  $R$  será nula, puesto que en sus extremos  $a$  y  $b$  (fig. 3.14) hay la misma tensión.

La expresión (3.26) implica que si  $v_L$  toma el valor  $V_a$ , la corriente presenta una derivada de valor  $v_L / L$ , por lo cual empieza a aumentar a partir de su valor nulo inicial. Pero la corriente sólo puede aumentar si disminuye la tensión en el terminal  $b$  de la resistencia, es decir, si disminuye  $v_L$ . Esta secuencia de acciones (continuidad y aumento de la corriente; disminución de  $v_L$ ) se va sucediendo hasta que se llega a una situación final estable, caracterizada por una corriente constante y una  $v_L$  nula. Este valor nulo de la tensión en la bobina provoca que la corriente final en el circuito sea  $V_a/R$ . (Nótese que con excitación constante y una vez se alcanza el régimen permanente, la bobina equivale a un cortocircuito).

Este comportamiento descrito cualitativamente puede cuantificarse resolviendo la ecuación diferencial del circuito. La ecuación de malla establece que:

$$V_a = iR + v_L \quad (3.33)$$

ecuación que combinada con (3.26) o (3.27) conduce a una ecuación diferencial en  $v_L$  o en  $i$ . Eligiendo, por ejemplo, la segunda alternativa, tenemos

$$L \frac{di}{dt} + Ri = V_a;$$

$$i_h = Ke^{-tR/L};$$

$$i_p = \frac{V_a}{R};$$

$$i(0) = 0 \Rightarrow K = -\frac{V_a}{R}$$

y, por tanto, la solución es:

$$i = \frac{V_a}{R}(1 - e^{-tR/L}) \quad (3.34)$$

Aplicando (3.26), se halla la tensión  $v_L$

$$v_L = V_a e^{-tR/L} \quad (3.35)$$

Las expresiones (3.34) y (3.35) se representan en la fig. 3.15. b sérvese que este comportamiento coincide con el descrito cualitativamente, y que la constante de tiempo del proceso de activación de la bobina es  $L/R$ .

A continuación estudiaremos el proceso inverso: *la desactivación de una bobina*. Consideremos la fig. 3.16 que muestra un circuito que contiene una bobina que se supone inicialmente activada. Es decir, antes de cerrar el interruptor se supone que circula por la bobina una corriente  $i_0$ , la cual genera en la bobina un campo magnético que "almacena" la energía que posee dicho dispositivo. En  $t=0$  se acciona el conmutador conectando la bobina a una resistencia. Como se verá en las siguientes líneas, el campo magnético, y por tanto la corriente en la bobina, se extinguen de forma gradual. Por esto decimos que se desactiva la bobina. (Obsérvese en dicha figura que el sentido dado a la corriente de malla  $i$  es contrario al habitual a fin de mantener el signo que exige la continuidad de la corriente en la bobina).

El tratamiento matemático del circuito es simple. La ley de Kirchhoff de tensiones en la malla establece que:

$$v_L + iR = 0 \quad (3.36)$$

que combinada con (3.26) conduce a:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0 \quad (3.37)$$

La condición física inicial de este circuito es:

$$i(0) = i_0 \quad (3.38)$$

con lo que se obtiene como solución la expresión:

$$i(t) = i_0 e^{-tR/L} \quad (3.39)$$

que demuestra que la corriente inicial  $i_0$  se extingue de forma exponencial con una constante de tiempo  $L/R$ , y sin presentar cambios abruptos en su variación.

Derivando (3.39) puede obtenerse la tensión en bornes de la bobina:

$$v_L = -i_0 R e^{-tR/L} \quad (3.40)$$

Nótese que la tensión en la bobina presenta una discontinuidad en  $t=0$ . Antes de accionar el conmutador su valor era nulo. Una vez conmutado presenta un cambio abrupto a  $v_L$  y  $-R \cdot i_0$  con el objetivo de forzar en  $R$  una corriente de valor  $i_0$  que asegure la continuidad de la corriente.

**Ejercicio de ejemplo:** En el circuito de la fig. 3.17 el interruptor conmuta a la posición 2 después de haber permanecido en la posición 1 el tiempo suficiente como para haberse alcanzado el régimen permanente. Calcular el valor de  $v_r$  justo después de la conmutación.

**Solución:** En la posición 1 la batería de 10 V activa a la bobina a través de la resistencia de 10 k $\Omega$ . con lo que se llega a un régimen permanente en el que la corriente es constante, por lo que la tensión en bornes de la bobina es nula (la bobina equivale a un cortocircuito). El valor de esta corriente, que circula por la bobina en el sentido de arriba hacia abajo, será, por tanto:

$$i = \frac{10 \text{ V}}{10 \text{ k}\Omega} = 1 \text{ mA}$$

Cuando el interruptor conmuta a la posición 2, debe haber continuidad de la corriente en la bobina. Por tanto, se generará una  $v_L$  tal que asegure dicha continuidad de corriente. Esta corriente inicial de 1 mA circulará a través de la resistencia de 5 k $\Omega$  en el sentido de abajo hacia arriba. Por tanto, la tensión  $v_r$ , será:

$$v_r = -5 \text{ k}\Omega \cdot 1 \text{ mA} = -5 \text{ V}$$

### 3.5 Linealidad y energía almacenada en condensadores y bobinas

Los condensadores y bobinas ideales, con condiciones iniciales nulas, son elementos lineales. Su linealidad proviene del carácter lineal del operador matemático de derivación. En efecto, se cumple:

$$\frac{d(k_1 u_1 + k_2 u_2)}{dt} = k_1 \frac{d(u_1)}{dt} + k_2 \frac{d(u_2)}{dt} \quad (3.41)$$

Esta propiedad de la derivada implica que las dependencias funcionales entre la tensión y la corriente dadas por (3.2) y (3.26) son lineales. Por tanto, los circuitos que además de fuentes independientes, fuentes dependientes lineales y resistencias ideales contengan condensadores y bobinas ideales serán lineales, y se les podrá aplicar las técnicas de análisis propias de los circuitos lineales (superposición, equivalentes de Thévenin y Norton,...). Esta propiedad no suele aplicarse en el análisis temporal llevado a cabo en este capítulo. Si se aplicara, la "resistencia" equivalente sería una expresión matemática complicada de derivadas e integrales en función del tiempo. Sin embargo, sí que se aplica con profusión cuando se resuelven los circuitos usando la transformada de Laplace, tema que escupa al contenido de este texto básico.

Cuando los condensadores y bobinas tienen condiciones iniciales no nulas deben considerarse a éstas como excitaciones independientes. En efecto, supongamos un condensador con una carga inicial  $q(0)$  y que estuviera excitado con unos generadores independientes de corriente  $i_1$  e  $i_2$ . La expresión (3.6) establece:

$$v_c = \frac{q(0)}{C} + \frac{1}{C} \int_0^T (i_1 + i_2) \cdot dt \quad (3.42)$$

considera a  $q(0)$  como una excitación independiente, la expresión 3.42 muestra que  $v_c$  puede calcularse como la superposición de tres componentes: las producidas por  $i_1$  e  $i_2$  (suponiendo el condensador descargado) y la debida a la carga inicial  $q(0)$ .

Los condensadores y bobinas ideales son elementos que almacenan energía. Para ilustrar este concepto, consideremos el encuito de la figura 3.18. En este circuito

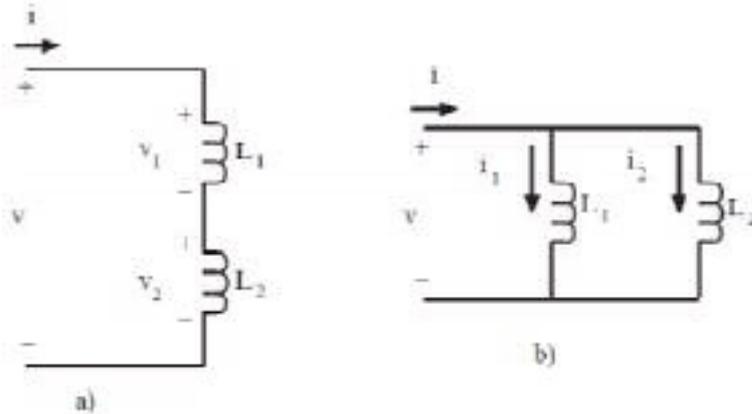


Fig. 3.13 Asociación de bobinas: a) en serie; b) en paralelo

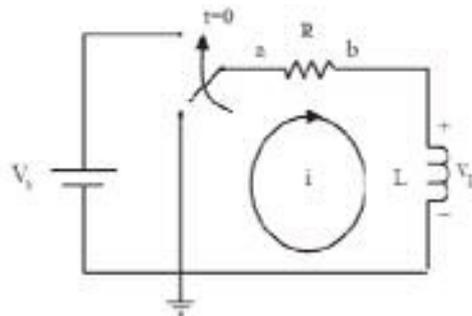


Fig. 3.14 Activación de una bobina a través de una resistencia

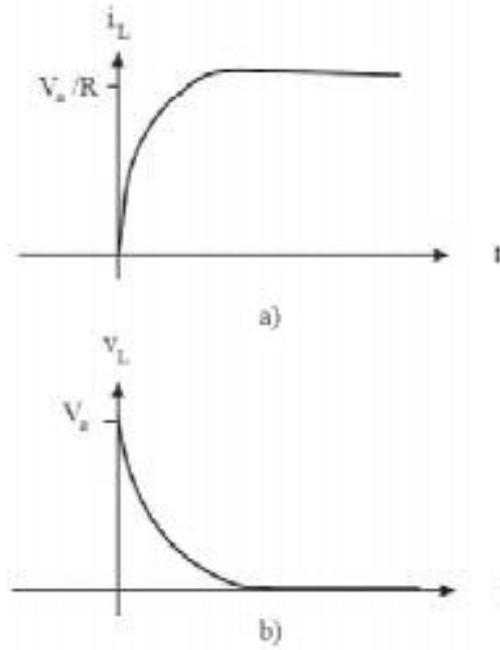


Fig. 3.15 Corriente y tensión en el circuito de la figura 3.14

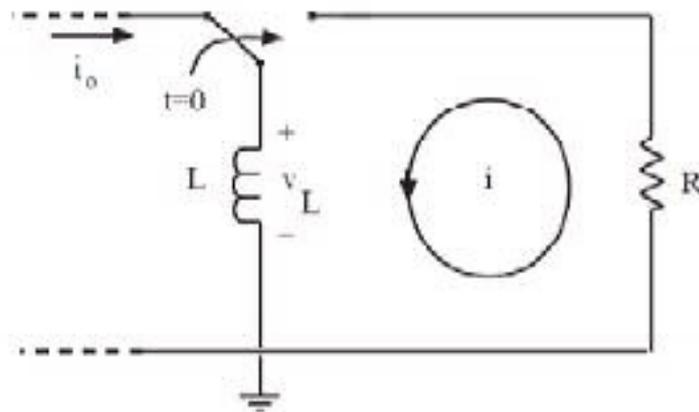


Fig. 3.16 Desactivación de una bobina a través de una resistencia

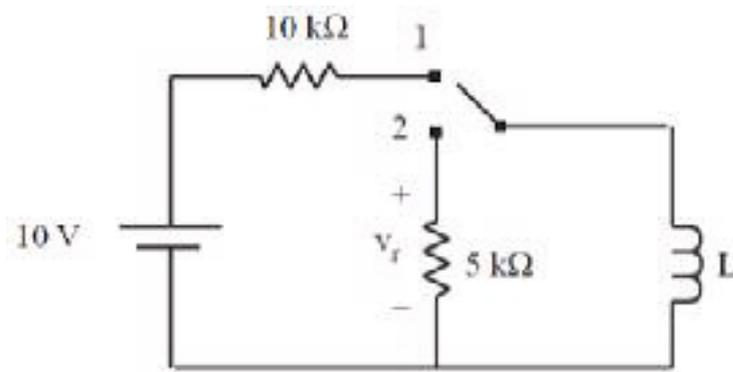


Fig. 3.17 Circuito del ejemplo 3.2

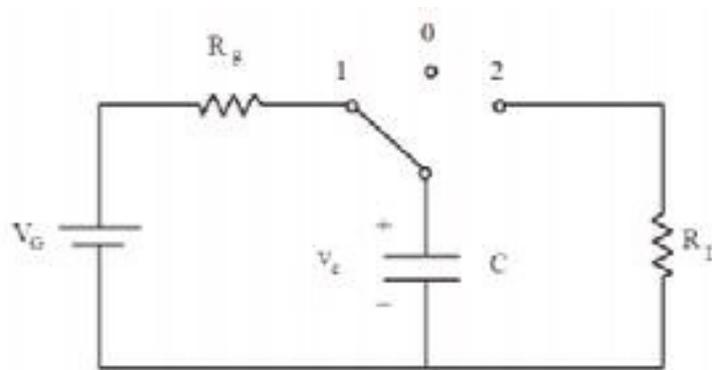


Fig. 3.18 Almacenamiento y posterior entrega de energía por el condensador

el conmutador pasa de la posición 0 a la posición 1 en  $t=0$ . Permanece en esta posición durante un tiempo suficiente para que el condensador, que estaba inicialmente descargado, se cargue completamente. En este proceso de carga el condensador ha almacenado energía proveniente del generador  $V_G$ . Una vez cargado el condensador conmutamos a la posición 2. En esta posición el condensador se descarga sobre la resistencia  $R_L$ , la cual disipa en forma de calor la energía que le entrega el condensador. Se trata de calcular, en primer lugar, la energía que el condensador ha absorbido de  $V_G$ , y, después, la que el condensador ha entregado a  $R_L$ .

La energía absorbida por el condensador desde el generador será:

$$W_C = \int_0^{\infty} p \cdot dt = \int_0^{\infty} i_c v_c \cdot dt = \int_0^{\infty} (C - \frac{dv_c}{dt}) v_c \cdot dt = \frac{1}{2} C v_c^2 \Big|_0^{V_G} = \frac{1}{2} C V_G^2 \quad (3.43)$$

puesto que  $v_c(0)$  es nula por estar el condensador inicialmente descargado, y se supone que cuando el tiempo tiende a infinito la tensión en bornes del condensador es  $V_G$ .

En el proceso de descarga del condensador sobre  $R_L$  se usa la variable  $t_1$  a fin de simplificar las expresiones matemáticas. Se supone que el condensador está inicialmente cargado a  $V_G$  y que en  $t=0$  se inicia su descarga a través de  $R_L$ . La energía que disipa esta resistencia será:

$$W_R = \int_0^{\infty} i^2 R_L \cdot dt = \int_0^{\infty} \left[ \frac{V_G}{R_L} e^{-t/CR_L} \right]^2 R_L \cdot dt = \frac{1}{2} CV_G^2 \quad (3.44)$$

en donde se ha utilizado la expresión de la corriente de descarga de un condensador sobre una resistencia.

Comparando las expresiones (3.43) y (3.44) observa que  $W_C$  es igual que  $W_R$ . Esto significa que toda la energía que ha absorbido el condensador del generador  $V_G$  la ha cedido a la resistencia  $R_L$ . El condensador, pues, *no disipa energía, sólo la almacena*. La energía que almacena un condensador cargado a una tensión  $V_0$  es:

$$W_c = \frac{1}{2} CV_0^2 \quad (3.45)$$

Un comportamiento similar se produce con la bobina ideal. La energía almacenada por una bobina por la que circula una corriente  $I_0$  viene dada por:

$$W_L = \frac{1}{2} LI_0^2 \quad (3.46)$$

Esta energía también puede ser entregada a un componente que se conecte a la bobina. En el proceso de intercambio de energía la bobina ideal no disipa potencia: toda la energía que absorbe la entrega. Nótese finalmente la relación dual en las expresiones (3.45) y (3.46).

**Ejercicio de ejemplo:** Considerar el circuito de la fig. 3.18, sustituyendo el condensador por la bobina. Calcular la energía que una bobina ideal, inicialmente desactivada, absorbe de la fuente independiente de tensión  $V_G$ , y luego la energía que esta bobina entrega a una resistencia  $R_L$ .

**Solución:** 
$$W_L = W_R = \frac{1}{2} L \cdot \left[ \frac{V_G}{R_g} \right]^2$$

### 3.6 Análisis de circuitos de resistencias, bobinas y condensadores (RLC) de corriente continua, en régimen permanente

En general, para el análisis de un circuito eléctrico es preciso resolver un sistema de ecuaciones integro-diferenciales. Considérese el ejemplo de la fig. 3.19, en el que un circuito serie formado por una resistencia y una bobina es alimentado por una fuente de tensión constante a través de un interruptor.

Planteando la Ley de Kirchhoff de Tensiones resulta:

$$u_g = i \cdot R + L \frac{di}{dt}$$

que reorganizada para resolver la correspondiente ecuación diferencial queda,

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} \cdot i = \frac{u_g}{L}$$

La solución completa de la ecuación de primer orden anterior será, asumiendo  $i(0)=0$ :

$$i(t) = -A \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + B$$

donde el término  $-A \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$  corresponde a la solución de la ecuación homogénea,

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} \cdot i = 0$$

El otro sumando corresponde a la solución particular de la ecuación de primer orden completa.

La solución de la ecuación homogénea contiene términos exponenciales decrecientes, por lo que al cabo de un cierto tiempo pueden desprejarse. A esta respuesta se le denomina *régimen transitorio del sistema*.

La solución particular, en general, es del mismo tipo que las fuentes de excitación, por lo que en el caso de tratarse de corriente continua, las tensiones e intensidades del circuito serán también continuas. A esta respuesta se le llama *régimen permanente*.

Según lo anterior, puede decirse que en un circuito de corriente continua, una vez alcanzado el régimen permanente, un *condensador* se comportará como un circuito abierto, ya que si la tensión en sus extremos ( $u$ ) y su intensidad ( $i$ ) han de ser constantes, y además han de cumplir la ecuación de definición que las relaciona, resultará que:

$$i = C \cdot \frac{du}{dt} = 0$$

Dualmente, una bobina se comportará como un cortocircuito, puesto que siguiendo el mismo razonamiento resulta:

$$u = L \cdot \frac{di}{dt} = 0$$

En resumen, para calcular el régimen permanente de un circuito en el que todas las fuentes sean funciones continuas, se sustituyen los condensadores por circuitos abiertos y las bobinas por cortocircuitos.

A este respecto, han de considerarse las excepciones dadas en los circuitos de la fig. 3.20, que darían lugar a circuitos que contradicen leyes enunciadas con anterioridad.

**Ejercicio de ejemplo:** En el circuito de la fig. 3.21,  $E=10 \text{ V}$  y las cuatro resistencias son iguales.

Estando el interruptor  $K$  abierto y el circuito en régimen permanente, la lectura del amperímetro es de  $1 \text{ A}$ .

En  $t=0$ , cerramos el interruptor; la potencia generada por la fuente en  $t=\infty$  tiene el valor:

A.  $\frac{50}{3} \text{ W}$

C.  $10 \text{ W}$

E. Indeterminado

B.  $\frac{75}{4} W$

D.  $25 W$

F. Diferente

**Solución:**

Con  $K$  abierto y el circuito en régimen permanente, la red comporta, tal como se indica en la fig. 3.22. Por tanto:  $10 = (R + R + R/2)I \Rightarrow R = \frac{20}{5} = 4 \Omega$

Cerramos  $K$ , una vez alcanzado el régimen permanente, se verifica (fig. 3.23):

$$I' = \frac{10}{R} = \frac{10}{4} = 2,5 A.$$

La potencia  $P'$ , generada por la fuente es:

$$P' = 10 \cdot I' = 25 W.$$

Respuesta:  $D$

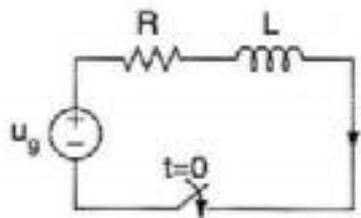


Fig. 3.19 Ejemplo de circuito  $RL$  serie

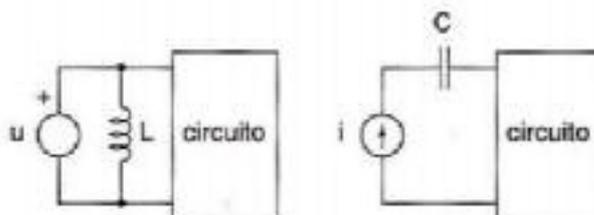


Fig. 3.20 Excepciones para equivalencias en régimen permanente

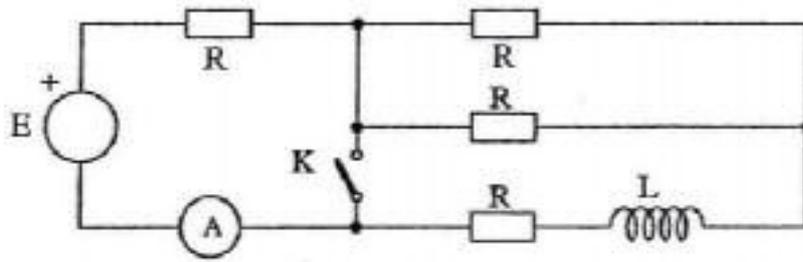


Fig. 3.21 Circuito del ejercicio de ejemplo

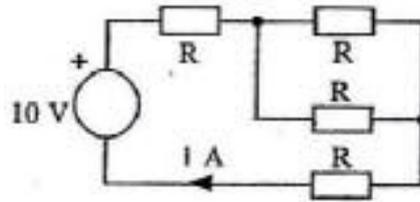


Fig. 3.22 Circuito del ejercicio de ejemplo con  $K$  abierto

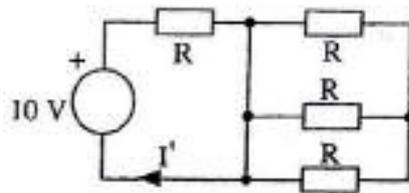


Fig. 3.23 Circuito del ejercicio de ejemplo con  $K$  cerrado

## 3.7 El transformador

### 3.7.1 Introducción

Se denomina transformador a un dispositivo eléctrico que permite aumentar o disminuir la tensión en un circuito eléctrico de corriente alterna, manteniendo la potencia. La potencia que ingresa al equipo, en el caso de un transformador ideal (esto es, sin pérdidas), es igual a la que se obtiene a la salida. Las máquinas reales presentan un pequeño porcentaje de pérdidas, dependiendo de su diseño y tamaño, entre otros factores.

El transformador es un dispositivo que convierte la energía eléctrica alterna de un cierto nivel de tensión, en energía alterna de otro nivel de tensión, basándose en el fenómeno de la inducción electromagnética. Está constituido por dos bobinas de material conductor, devanadas sobre un núcleo cerrado de material ferromagnético, pero aisladas entre sí eléctricamente. La única conexión entre las bobinas la constituye el flujo magnético común que se establece en el núcleo. El núcleo, generalmente, es fabricado bien sea de hierro o de láminas apiladas de acero eléctrico, aleación apropiada para optimizar el flujo magnético. Las bobinas o devanados se denominan primario y secundario según correspondan a la entrada o salida del sistema en cuestión, respectivamente.

El transformador monofásico es una máquina eléctrica constituida por dos circuitos eléctricos (*devanados o arrollamientos*) acoplados magnéticamente a través de un núcleo ferromagnético. Uno de los circuitos eléctricos, *devanado primario*, se conecta a la fuente de alimentación, mientras que el otro, *devanado secundario*, se conecta a la carga eléctrica a alimentar (fig. 3.24). El número de espiras del devanado primario es  $N_1$  y el del secundario es  $N_2$ .

### 3.7.2 El transformador monofásico ideal

En el análisis del transformador ideal se establecen los siguientes supuestos:

- los devanados carecen de resistencia eléctrica;
- la permeabilidad magnética del núcleo se considera infinita, de forma que la reluctancia magnética es cero y, por tanto, no existe dispersión de flujo;
- el núcleo carece de pérdidas por histéresis y por corrientes de Foucault.

#### **Funcionamiento en vacío**

Si se aplica la tensión alterna senoidal  $u_1 = \sqrt{2} \cdot U_1 \cdot \cos \omega t$  al devanado primario de un transformador (fig. 3.25), según la ley de Inducción de Faraday aparecerá un flujo en el núcleo cuyo valor, para las referencias adoptadas, es el siguiente:

$$u_1 \sim e_1 = N_1 \cdot \frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow \Phi = \frac{\sqrt{2} \cdot U_1}{\omega} \cdot \sin \omega t = \Phi_0 \cdot \sin \omega t$$

Por tanto, el valor eficaz de la f.e.m. (fuerza electromotriz) inducida en el devanado primario es:

$$E_1 = \frac{2f\Phi_0}{\sqrt{2}} \cdot N_1 \cdot f \cdot \Phi_0 = 4,44 \cdot N_1 \cdot \Phi_0$$

De igual forma, en el devanado secundario se inducirá una f.e.m, cuyo valor se calcula como sigue:

$$e_2 = N_2 \cdot \frac{d\Phi}{dt} = N_2 \cdot \frac{d\Phi}{dt} \cdot \cos \omega t$$

siendo su valor eficaz:

$$E_2 = 4,44 \cdot N_2 \cdot f \cdot \Phi_0$$

Comparando la f.e.m. primaria y la secundaria se obtiene la relación de transformación, que en el caso de transformadores monofásicos coincide con la relación de espiras:

$$\frac{U_1}{U_2} \sim \frac{E_1}{E_2} = \frac{4,44 \cdot N_1 \cdot f \cdot \Phi_0}{4,44 \cdot N_2 \cdot f \cdot \Phi_0} = \frac{N_1}{N_2} = m$$

Además,  $\bar{E}_1$  y  $\bar{E}_2$  están en fase.

#### **Funcionamiento en carga**

Si, en las condiciones del apartado anterior, se conecta una impedancia en el devanado secundario del transformador (fig. 3.26) por dicho devanado circulará una corriente  $\bar{I}_2$ .

A su vez, esta corriente provocará la circulación de otra corriente  $I_1$  por el devanado primario con objeto de que el flujo en el núcleo permanezca constante. Esto se puede comprobar aplicando la Ley de Hopkínson al circuito magnético en la situación de vacío (con el devanado secundario en circuito abierto) y en la situación de carga (con el devanado secundario alimentando una carga):

- en vacío, como la reluctancia se ha considerado nula, la intensidad que circula por el devanado primario es nula;
- en carga se tiene lo siguiente:

$$N_1 \cdot \bar{I}_1 - N_2 \cdot \bar{I}_2 = \mathfrak{R} \cdot \Phi$$

y como la reluctancia es nula ( $\mathfrak{R} = 0$ ),

$$N_1 \cdot \bar{I}_1 = N_2 \cdot \bar{I}_2$$

lo que implica que:

$$\frac{\bar{I}_1}{\bar{I}_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{m}$$

En consecuencia, cuando el transformador se encuentra en carga, por el devanado primario circula una intensidad  $\bar{I}_1$  que contrarresta el efecto de la intensidad  $\bar{I}_2$  para que el flujo en el núcleo permanezca constante. Además,  $\bar{I}_1$  e  $\bar{I}_2$  están en fase.

Como no se consideran las pérdidas en el transformador ideal, la potencia absorbida por el primario de la fuente se cede íntegramente por el devanado secundario a la carga.

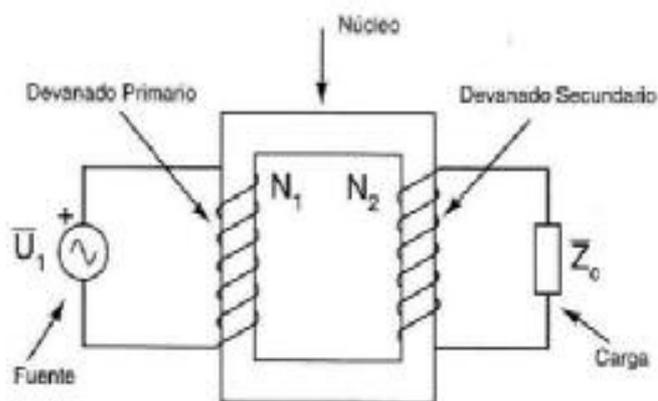


Fig. 3.24 Partes básicas de un transformador monofásico

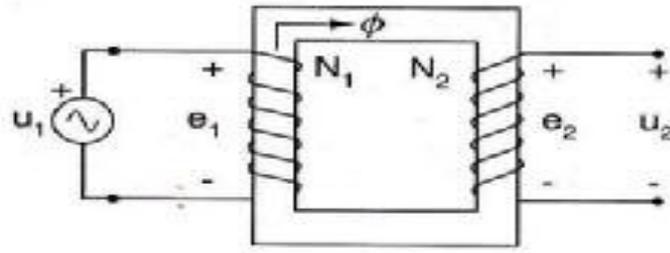


Fig. 3.25 Transformador ideal en vacío

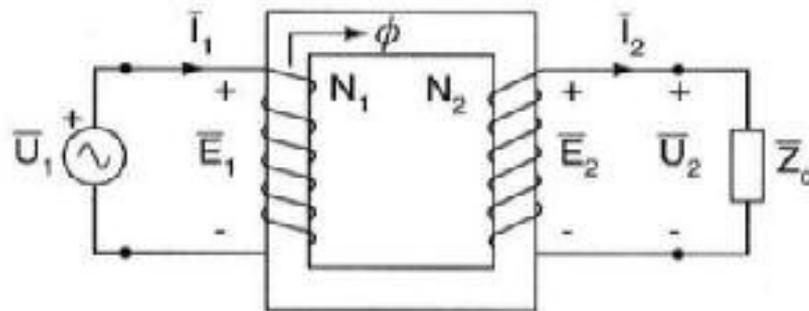


Fig. 3.26 Transformador ideal en carga

**Ejercicio de ejemplo:** ¿Cuál es la relación de transformación  $n$  de un transformador que convierte una tensión alterna de 110 V eficaces en otra de 220 V eficaces (fig. 3.27, 3.28, 3.29, 3.30)?

**Solución:** De acuerdo con  $n = \frac{v_2}{v_1} = \frac{220}{110} = 2$

El fundamento físico del comportamiento de este componente es el siguiente (fig. 3.31). Supongamos que el devanado 2 está en circuito abierto, por lo que  $i_2$  es nula. La corriente  $i_1$  crea un campo magnético  $B_1$  (proporcional al número de espiras del devanado 1) que es confinado en el interior del núcleo magnético sobre el que se realizan los dos devanados. El núcleo de un transformador, fabricado con un material v una forma determinados, tiene precisamente esta propiedad de confinamiento del campo magnético (idealmente, todas las "líneas" de campo están en el interior del núcleo y fuera de él no hay campo magnético). Este campo magnético es "abrazado"

por las espiras del devanado 1 y del devanado 2, y genera, de acuerdo a la ley de Faraday, una tensión entre terminales de cada devanado proporcional a su número de espiras:

$$v_{11} = k_1 N_1^2 \frac{di_1}{dt} \tag{3.47}$$

$$v_{21} = k_2 N_1 N_2 \frac{di_1}{dt}$$

El coeficiente  $k_2$  es  $K \cdot k_1$ , donde  $K$  es el coeficiente de acoplamiento entre las dos bobinas y cuyo valor suele ser algo inferior a uno debido a las pérdidas de confinamiento del campo magnético. La constante  $k_1$  tiene la misma expresión que en el caso del inductor ( $\mu S/1$ ). La influencia de la corriente que circula por la bobina 1 sobre la 2 se denomina *inducción mutua*, y al coeficiente  $k_2$ ,  $N_1$ ,  $N_2$  coeficiente de inducción mutua (normalmente designado con la letra  $M$ ).

### 3.8 Problemas para el trabajo independiente

**Ejercicio 3.1:** Hallar la capacidad equivalente del conjunto de condensadores de la fig. 3.32.

**Solución:**  $2 \mu F$ .

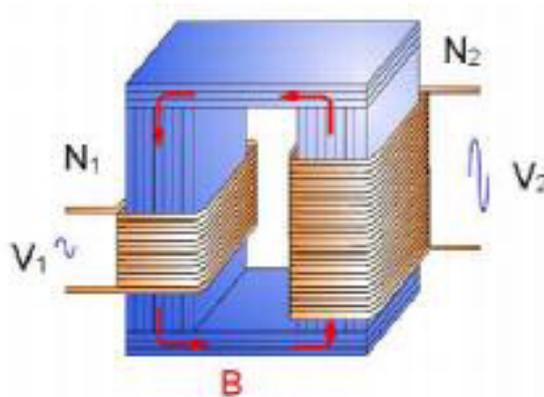


Fig. 3.27 Esquema de un transformador

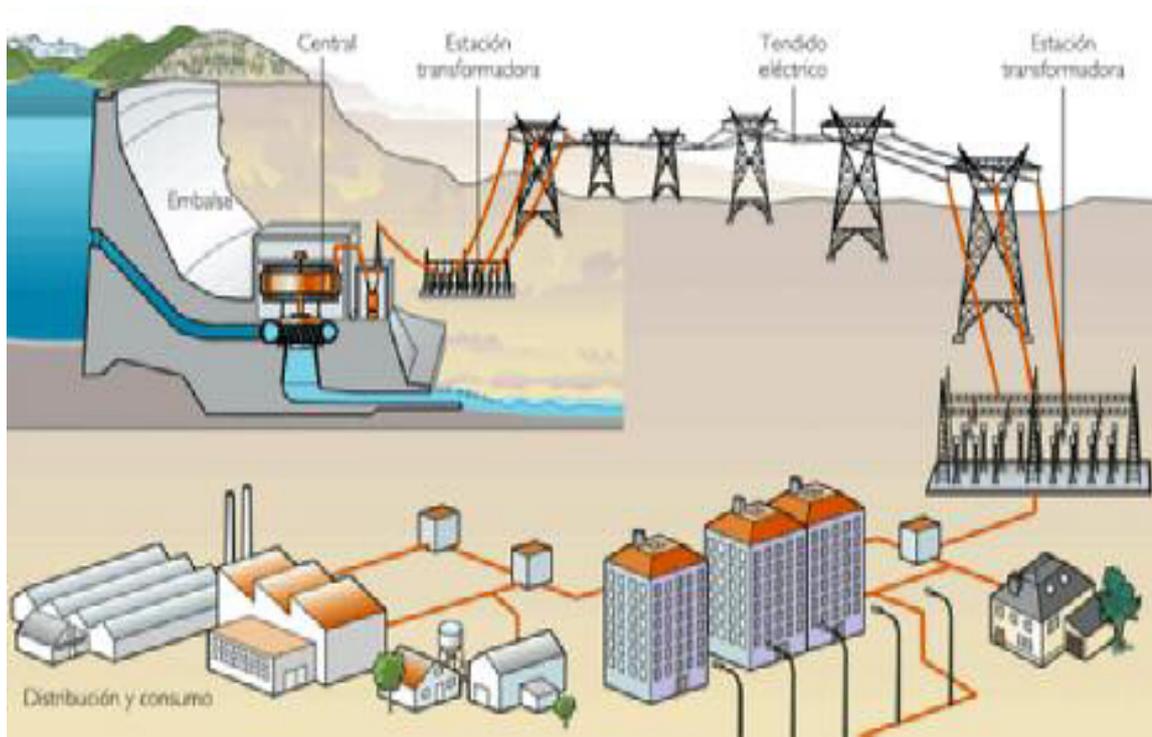


Fig. 3.28 Generación, transporte y distribución de la energía eléctrica



Fig. 3.29 Transformador intermedia 20 kV/230-400 V



Fig. 3.30 Subestación eléctrica

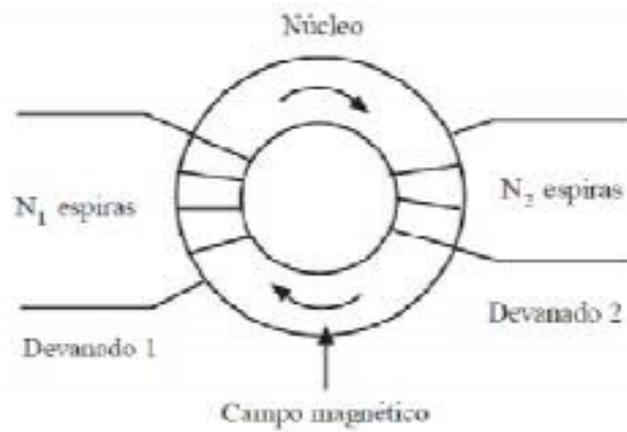


Fig. 3.31 Estructura física de un transformador

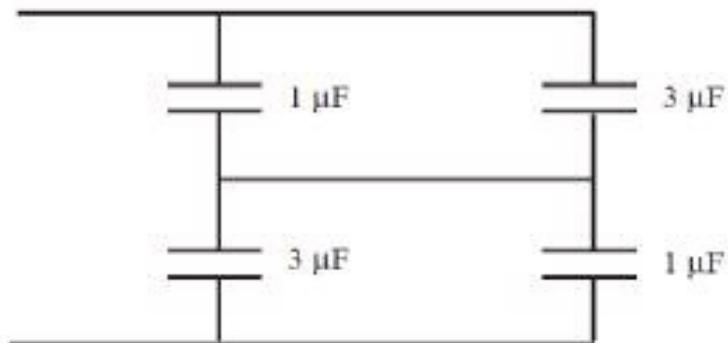


Fig. 3.32 Circuito del ejercicio 3.2

**Ejercicio 3.2:** Calcular la caída de tensión en una bobina de 3 mH, sabiendo que la intensidad viene dada por:

$$i = 3e^{-t/10^{-3}}$$

**Solución:**

$$v_L = -9e^{-t/10^{-3}} V$$

**Ejercicio 3.3:** Si la red de c.c. de la fig. 3.33 está en régimen permanente, son ciertas las siguientes proposiciones:

- A. La potencia generada por las fuentes es nula.
- B. La bobina se comporta como un cortocircuito.
- C. La energía almacenada por la bobina es nula.
- D. Son ciertas las respuestas A y B.
- E. Son ciertas las respuestas B y C.
- F. Todas las respuestas son ciertas.

**Ejercicio 3.4:** Si la red de c.c. de la fig. 3.34 está en régimen permanente, son ciertas las siguientes proposiciones:

- A. La potencia generada por las fuentes es nula.
- B. El condensador se comporta como un circuito abierto.
- C. La energía almacenada por el condensador es nula.
- D. Son ciertas las respuestas A y B.
- E. Son ciertas las respuestas B y C.
- F. Todas las respuestas son ciertas.

**Ejercicio 3.5:** Plantear las ecuaciones de malla para el circuito en régimen permanente de la fig. 3.35

**Ejercicio 3.6:** Un transformador (fig. 3.36) tiene  $N_1=40$  espiras en el arrollamiento primario y  $N_2=100$  espiras en el arrollamiento secundario. Calcular la FEM secundaria si se aplica una tensión de 48 V. Se considera que las pérdidas en el núcleo, los flujos de dispersión y en los arrollamientos son nulas.

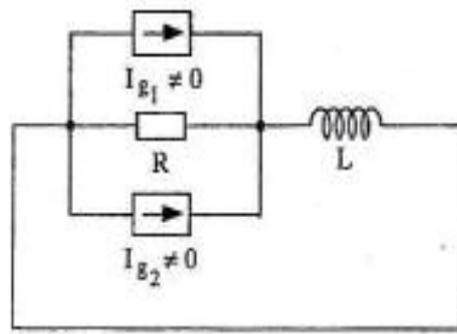


Fig. 3.33 Circuito del ejercicio 3.3

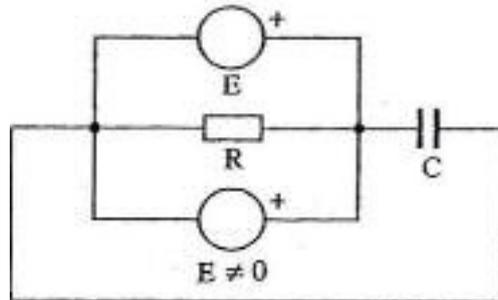


Fig. 3.34 Circuito del ejercicio 3.4

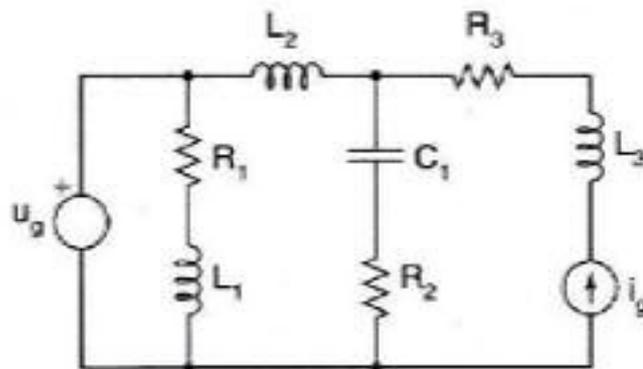


Fig. 3.35 Circuito del ejercicio 3.5

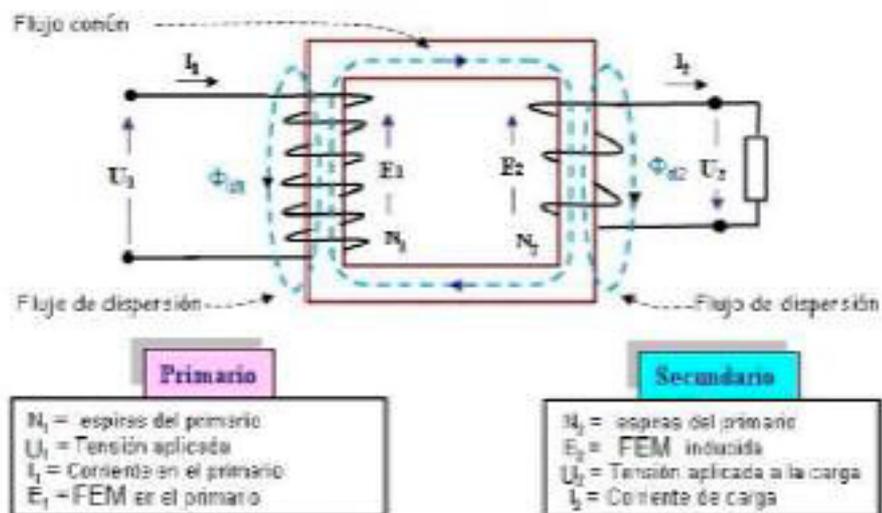


Fig. 3.36 Transformador del ejercicio 3.6

## Tema 4. El diodo. Circuitos con diodos

### 4.0 Vocabulario técnico español-inglés-ucraniano-ruso

Diodo (m)	diode	діод	диод
Rectificar (verb.)	rectify	випрямляти	выпрямлять
Corriente alterna (f)	alternating current	змінний струм	переменный ток
Corriente continua (f)	direct current	постійний струм	постоянный ток

### 4.1 El diodo. Conceptos básicos

El diodo es un dispositivo de dos terminales cuyo comportamiento no es lineal: deja pasar corriente en un sentido y la bloquea en sentido contrario. Este carácter no lineal hace que los circuitos que contienen diodos no sean lineales, por lo que no pueden ser analizados aplicando el método de superposición, ni reducirse a equivalentes de *Thévenin ni de Norton*.

El comportamiento del diodo puede ser aproximado por un elemento de circuito denominado diodo ideal, si bien algunas aplicaciones requieren el uso de modelos más complejos. En los siguientes apartados se presentarán el diodo ideal y algunos modelos que se aproximan mejor al comportamiento de los diodos fabricados con semiconductores.

#### 4.1.1 El diodo ideal

El *diodo ideal* es un elemento de circuito de dos terminales cuyo símbolo circuital y característica corriente-tensión se representan en la fig. 4.1. Uno de los terminales se denomina ánodo y el otro cátodo. Cuando el diodo conduce, la corriente circula en el sentido de ánodo a cátodo, sin caída de tensión entre ambos terminales. Se dice que está polarizado en *directa* y equivale a un cortocircuito. Cuando el ánodo es negativo respecto al cátodo el diodo bloquea la corriente y equivale a un circuito abierto. Se dice, en este caso, que el diodo está polarizado en *inversa*.

**Ejercicio de ejemplo 4.1:** En el circuito de la fig. 4.2 a la señal  $v_g$  tiene la forma indicada en fig. 4.2 b. Hallar la tensión  $v_0$ .

**Solución:** Por el contrario, entre  $t_1$  y  $t_2$  la tensión  $v_g$  es negativa, tendiendo a impulsar una corriente por el diodo en sentido cátodo a ánodo. El diodo está polarizado inversamente y se comporta en este caso como un circuito abierto. Como la corriente en la malla es nula, la tensión de salida, que es la caída en la resistencia, también lo es. Así pues, entre  $t_1$  y  $t_2$ ,  $v_0=0$ . Estos resultados se presentan en la fig. 4.3. Se dice que el diodo permite el "paso" de los semiciclos positivos, y bloquea los negativos. A este comportamiento se le llama efecto rectificador, el cual será analizado con mayor profundidad más adelante (fig. 4.4, 4.5).

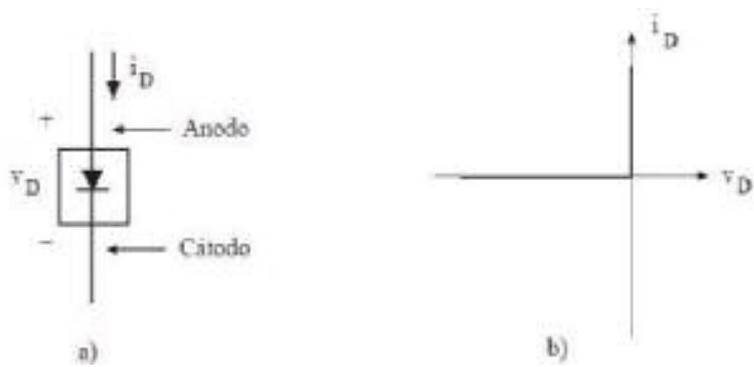


Fig. 4.1 a) Símbolo circuital del diodo ideal; b) característica "i-v"

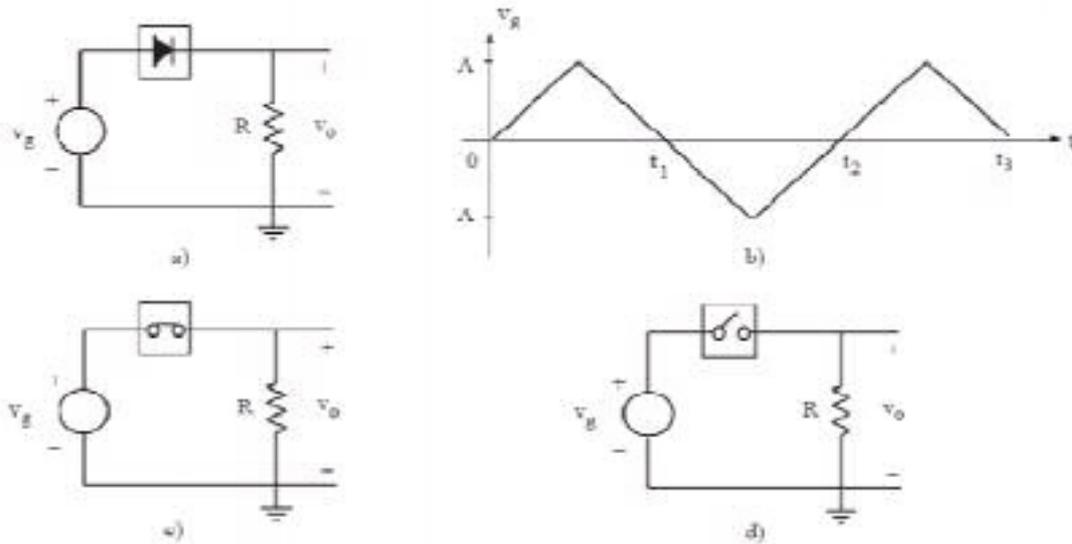


Fig. 4.2 a) Circuito rectificador de media onda; b) señal aplicada al circuito; c) circuito equivalente para los semiciclos positivos; d) *idem* para los negativos

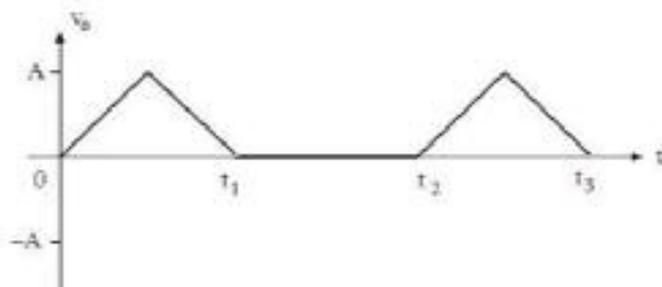


Fig. 4.3 Forma de onda de salida del circuito de la figura 4.2

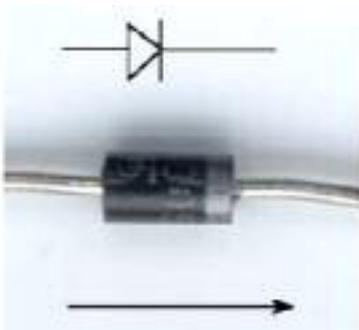


Fig. 4.4 Diodo y el sentido de paso de corriente



Fig. 4.5 Diodos luminosos o LED (Light-Emitting Diode)

### 4.1.2 El diodo real

Prácticamente todos los diodos que se usan actualmente en circuitos electrónicos están fabricados con semiconductores. Consisten en la "unión" de un semiconductor  $P$  y un semiconductor  $N$  (*diodo de unión PN*). Los semiconductores contienen cargas móviles positivas y negativas. Un semiconductor  $P$  es un semiconductor que tiene más cargas móviles positivas que negativas, mientras que el  $N$  tiene más cargas negativas que positivas. Cuando se aplica una tensión positiva al  $P$  respecto al  $N$  circula una corriente de valor elevado en el sentido de  $P$  a  $N$ , mientras que cuando la polaridad de la tensión se invierte, la corriente cambia de sentido y es casi nula. El semiconductor  $P$  constituye el ánodo del diodo y el  $N$  el cátodo.

Los diodos fabricados con semiconductores se comportan de acuerdo con la fig. 4.6 a. modelo de la fig. 4.6 b, c, en el cual la fuente dependiente  $I_d$  es función de la tensión aplicada  $v_D$  según una curva del tipo indicado en la fig. 4.6 d, y el valor del condensador  $C_D$  depende también de  $v_D$  (fig. 4.6 e). Este diodo, que denominaremos *diodo real*, presenta, por tanto, algunas diferencias significativas respecto al comportamiento del diodo ideal: incluye una capacidad  $C_D$ . En polarización directa la caída de tensión entre sus terminales no es nula (suele ser algo menor que 1 V para diodos de silicio). Cuando la polarización inversa supera el valor  $V_z$  el diodo deja de bloquear la corriente y permite el paso de una corriente elevada. Se dice, entonces, que el diodo opera en la *región de ruptura*, y se denomina a  $V_z$  *tensión de ruptura*. Obsérvese que  $V_z$  siempre tiene un valor negativo.

A pesar de las diferencias señaladas entre el diodo real y el diodo ideal, en muchas aplicaciones el diodo ideal aproxima aceptablemente el comportamiento del diodo real. Este suele ser el caso cuando los efectos capacitivos no son significativos (caso de señales lentas) y cuando no opera en la región de ruptura. Sin embargo, si el diodo trabaja con señales rápidas o si opera en la región de ruptura el diodo ideal no es adecuado para modelar el comportamiento real del diodo.

### 4.2 El diodo en continua y baja frecuencia

Cuando el circuito que contiene al diodo trabaja con "señales lentas", la capacidad  $C_D$  puede ignorarse. En efecto, como la corriente por un condensador es:

$$i_c = C \frac{dv}{dt}$$

cuando la tensión en bornes del diodo varía lentamente, la corriente por  $C_D$  será muy pequeña y, si es muy inferior a las corrientes significativas del circuito, podrá eliminarse el condensador  $C_D$  del modelo del diodo. Esta aproximación es exacta en continua, puesto que entonces la derivada de la tensión es nula, y no pasa corriente por el condensador. A medida que aumenta la "rapidez" de la señal, su derivada respecto al tiempo aumenta, haciendo incrementar la corriente por el condensador, hasta que llega un momento en que es tanto o más importante que la de la fuente dependiente y entonces se comete un error importante al eliminar  $C_D$ . Cuando puede eliminarse  $C_D$  se dice que el diodo opera en *modo estático*.

Los diodos trabajando con señales lentas presentan dos modos de utilización: la utilización como *diodo rectificador* o como *diodo zener*. En el primer caso, el diodo conduce en directa y bloquea la corriente en inversa. Es decir, se supone que  $V_z$  toma un valor tan negativo que nunca se alcanza. En el segundo, el diodo opera en un región de ruptura. Es decir, el margen de tensiones que se aplica al diodo contienen  $V_z$ . En los próximos apartados se describirán la modelización del diodo y las principales aplicaciones en estos dos modos de operación del diodo (fig. 4.7).

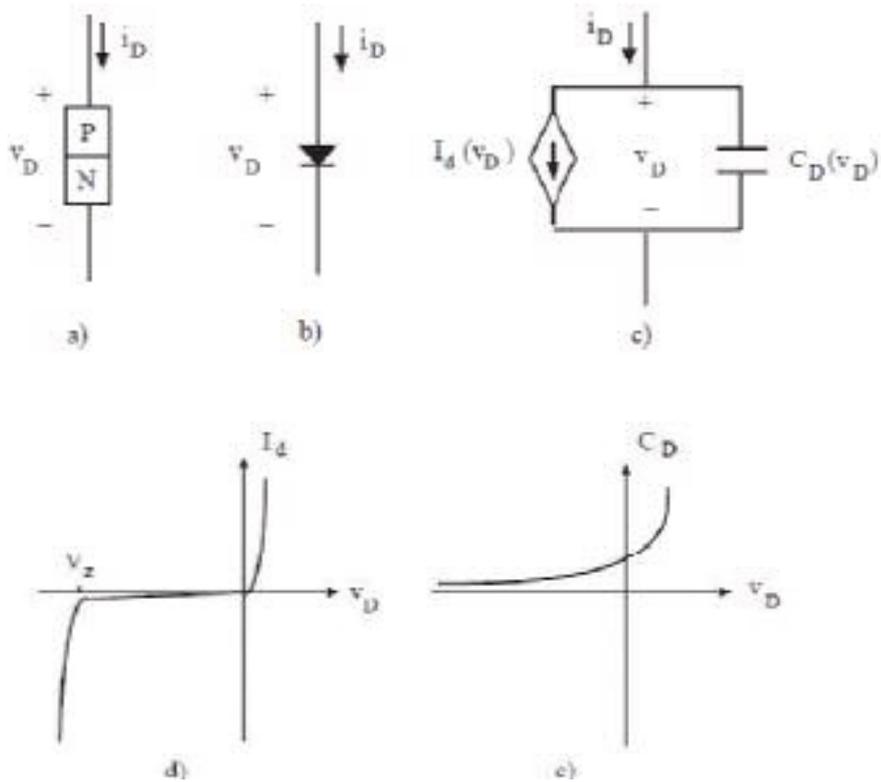


Fig. 4.6 a) Estructura física del diodo de unión *PN*; b) símbolo del diodo real; c) circuito equivalente; d) característica "corriente-tensión" en continua (fuente dependiente); e) dependencia de  $C_D$  con la tensión

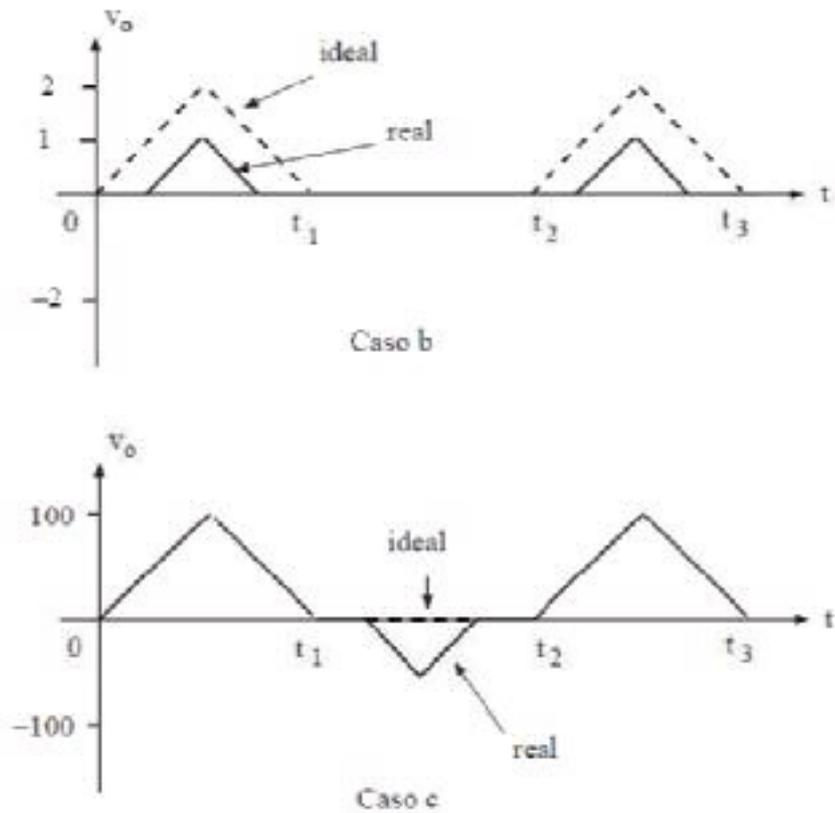


Fig. 4.7 Formas de onda de  $v_o$  del ejemplo 4.2: casos *b* y *c*

## 4.3 El diodo rectificador

En este apartado se explicarán los dos modelos que se utilizan para el diodo rectificador, el modelo exponencial y el modelo de tramos lineales. A continuación, las técnicas usadas para analizar circuitos con diodos y finalmente las principales aplicaciones del diodo rectificador.

### 4.3.1 Modelización del diodo rectificador

La característica  $I_d$  versus  $v_D$  del diodo real (fig. 4.6 d) considerando que  $V_z$  toma un valor tan negativo que nunca se alcanza, puede aproximarse de una forma analítica, que se denominará modelo exponencial del diodo, o por una forma gráfica, mediante dos tramos rectos, que se denominará modelo de tramos lineales.

#### a) Modelo exponencial del diodo

Una forma de aproximar la característica corriente tensión del diodo es mediante la ecuación (fig. 4.8):

$$i_d = I_s (e^{v_D / V_T} - 1) \quad (4.1)$$

que se conoce con el nombre de *ecuación del diodo*. El parámetro  $I_s$  se denomina corriente inversa de saturación del diodo, que suele tomar un valor muy pequeño (del orden de  $10^{-14}$  A para diodos de silicio),  $\eta$  es el *factor de idealidad*, que normalmente vale la unidad, y  $V_T$  se denomina *tensión térmica*, y su valor es:

$$V_T = \frac{KT}{q} \quad (4.2)$$

donde  $K$  es la constante de *Boltzman*,  $T$  – la temperatura de operación del diodo en *Kelvin*, y  $q$  – la carga del electrón. A temperatura ambiente  $T \cong 300$  K,  $V_T$  toma un valor de unos 25 mV.

#### b) Modelo del diodo por tramos lineales

Como se ha puesto de manifiesto, el modelo exponencial suele conducir a cálculos complicados y engorrosos. Por ello, cuando el modelo de diodo ideal es poco preciso para aproximar la característica  $i(v_D)$  de un diodo, y los efectos capacitivos no son significativos, suele recurrir se al modelo de *diodo aproximado por tramos lineales*, cuya característica  $i(v_D)$  y su modelo equivalente se presentan en la fig. 4.9. En este modelo la curva característica se aproxima por dos segmentos cuando conduce ( $i > 0$ ;  $v_D > V_Y$  siendo  $V_Y$  la tensión umbral), por un segmento de pendiente  $1/R_s$ ; cuando no conduce ( $i = 0$ ;  $v_D < V_Y$ ), por un segmento horizontal. La resistencia  $R_s$  se denomina *resistencia serie del diodo*.

Cuando el diodo conduce, la tensión entre sus terminales se aparta muy poco de la tensión umbral. En efecto, aproximando el diodo por su modelo exponencial y despreciando el término unidad en la ecuación, es inmediato hallar:

$$v_{D1} - v_{D2} = V_T \ln \frac{I_{d1}}{I_{d2}} \quad (4.3)$$

Si se toma  $I_{d1}=10 \cdot I_{d2}$  resulta que la tensión entre terminales del diodo sólo se ha incrementado en aproximadamente 0,06 V para hacer aumentar la corriente un orden de magnitud. Por esta razón, con frecuencia la resistencia  $R_s$  se toma de valor nulo, con lo que el tramo inclinado se convierte en vertical.

El modelo del diodo por tramos lineales se puede expresar mediante el circuito equivalente de la fig. 4.9 b. Cuando la tensión en el ánodo respecto al cátodo supera  $V_Y$  el diodo ideal  $D_1$  conduce y equivale a un cortocircuito. Entonces la tensión del ánodo respecto al cátodo será  $V_Y + i_D R_s$ , que gráficamente es el segmento de conducción directa del diodo. Cuando la tensión  $v_D$  es inferior a  $V_Y$  el diodo  $D_1$  equivale a un circuito abierto, impidiendo el paso de la corriente por esta rama. Cuando  $R_s$  se aproxima a cero y se toma  $V_Y$  nula, el modelo por tramos lineales se reduce al diodo ideal.

**Ejercicio de ejemplo:** Calcular la tensión de salida  $v_0$  en el circuito de la fig. 4.2 cuando  $v_g=10$  V usando para el diodo el modelo por tramos lineales con  $R_s=0$  y  $V_Y = 0,7$  V.

**Solución:** En la fig. 4.10 se ha sustituido el diodo por su circuito equivalente, en el que se ha considerado la resistencia  $R_s$  nula.

Como  $v_g=10$  V es mayor que  $V_r$  la corriente que atraviesa el diodo lo hace en sentido directo, por lo que el diodo ideal se comporta como un cortocircuito. Entonces es inmediato hallar que  $v_0=10-0,7=9,3$ .

### 4.3.2. Aplicaciones del diodo rectificador

#### a) Conversión de tensión alterna a tensión continua. Fuente de alimentación

Muchos equipos electrónicos requieren ser conectados, para poder realizar su función, a una fuente de tensión constante. Como la energía eléctrica suele distribuirse entre los usuarios en forma sinusoidal, hay que transformar esta forma de onda en otra de valor constante. El sistema electrónico que realiza esta función se denomina *fuentes de alimentación*. Los circuitos que realizan esta función suelen basarse en los cuatro bloques que se indican en la fig. 4.11. El primer bloque es un *transformador* que convierte la amplitud de la senoide al valor adecuado para poder obtener la tensión constante deseada a la salida de la fuente de alimentación. El segundo bloque *rectifica* la tensión alterna, es decir, su tensión de salida sólo presenta una polaridad, aunque su amplitud es variable. El tercer bloque *filtra* esta tensión unipolar, y proporciona una tensión aproximadamente constante en su salida. Y el cuarto bloque *estabiliza*  $v_0$  frente a cambios en la tensión alterna o en la carga. En este capítulo se presentarán de forma resumida los circuitos que realizan estas funciones.

El circuito rectificador más simple es el denominado *rectificador de media onda* y es el circuito de la fig. 4.2 a, que ha sido analizado en los ejemplos anteriores 4.1 y 4.2. Tiene la propiedad de permitir el paso de los semiciclos positivos, y de bloquear los negativos.

Existen otros circuitos rectificadores con varios diodos que permiten rectificar los dos ciclos de la senoide. Se trata de los *rectificadores de onda completa o de doble onda*, dos de cuyas versiones más extendidas se presentan en la fig. 4.12. El circuito (fig. 4.12 a) es el rectificador de doble onda con transformador de toma intermedia, y el (fig. 4.12 b) es el puente rectificador.

#### b) Detector de envolvente

Otra aplicación importante del diodo es como *detector de envolvente o demodulador* de una señal modulada en amplitud. Una señal modulada en amplitud es aquella que responde a la ecuación:

$$v_i(t) = V_{im} [1 + m(t)] \cos(\omega_p t) \quad (4.4)$$

en la que la amplitud de la senoide varía con el tiempo y lleva la señal de información  $m(t)$ , que se denomina moduladora. A esta amplitud de la función coseno, variable con el tiempo, se la denomina envolvente, y la señal sinusoidal de frecuencia  $\omega_p$  se la llama portadora. Usualmente la envolvente varía mucho más que la portadora. En la fig. 4.13 a a se representa una señal modulado en amplitud.

El objetivo del detector de envolvente es recuperar la señal  $m(t)$  a partir de la señal modulada en amplitud. El circuito que se usa es un rectificador de media onda seguido de un filtro de condensador. La principal diferencia en esta aplicación está en que en este caso el circuito debe ser capaz de seguir la envolvente, en lugar de proporcionar en la salida una tensión casi constante. Si la constante de tiempo fuera muy grande la salida no podría seguir a la envolvente. Por el contrario, si fuera muy pequeña, el condensador se descargaría muy deprisa y la salida tendería a la señal portadora rectificada, produciendo un rizado excesivo. Por esto, el detector de envolvente se diseña de forma que la constante de tiempo del circuito sea:

$$C \cdot R_L = \frac{1}{2\pi A_m f_m} \quad (4.5)$$

donde  $f_m$  se suele tomar como la frecuencia más elevada de la señal moduladora  $m(t)$ , que se supone sinusoidal y de amplitud  $A_m$ . De esta forma la salida puede seguir bien a la envolvente. Cuando la portadora es una señal de alta frecuencia este análisis debería ser modificado para tomar en consideración la capacidad del diodo  $C_D$ .

### c) Circuitos recortadores y circuitos fijadores de nivel

Los *circuitos recortadores*, también denominados limitadores de amplitud, se utilizan para eliminar la parte de la señal que se encuentre por encima, o por debajo, de un cierto nivel de referencia. En la fig. 4.14 se presentan dos circuitos recortadores.

El circuito (fig. 4.14 a) opera de la siguiente forma. Cuando la tensión  $v_i$  es positiva el diodo  $D_2$  siempre estará en inversa, ya que la corriente que tiende a impulsar  $v_i$  va en la dirección de cátodo a ánodo. Por tanto la rama  $D_2 - V_{B2}$  puede ignorarse cuando  $v_i$  sea positiva.

Para que el diodo  $D_1$  conduzca se requiere que  $v_0$  supere a  $V_{B1}$  en  $V_Y$ . Mientras  $v_0$  está por debajo de este valor  $D_1$  equivaldrá a un circuito abierto, y no circulará corriente por  $R$ , por lo que  $v_0 = v_i$ . Cuando el diodo  $D_1$  conduzca la salida estará limitada a  $V_{B1} + V_Y$ . Esto ocurrirá para valores de  $v_i$  mayores o iguales que  $(V_{B1} + V_Y)$ .

Cuando  $v_0$  se hace menor que  $(V_{B2} + V_Y)$  el diodo  $D_2$  conducirá y fijará la salida en este valor, tal como se indica en la fig. 4.14. Obsérvese que mientras  $v_i$  sea el diodo  $D_1$  estará en inversa y puede ignorarse esta rama del circuito.

El circuito, por tanto, recorta la señal de entrada limitándola a los valores que fijan las fuentes de tensión  $V_{B1}$  y  $V_{B2}$ . Se pueden obtener diversas variantes de este circuito básico sin más que cambiar la polaridad de las fuentes o la de los diodos.

El circuito recortador usando diodos zener de la fig. 4.14 b será descrito más adelante.

### e) El diodo como elemento de protección

La máxima tensión que se puede aplicar a la entrada de muchos circuitos integrados está limitada a unos pocos voltios. Conviene, por tanto, limitar la tensión máxima en la entrada del circuito. Una forma de conseguirlo es colocando en su entrada un recortador de tensión como el de la fig. 4.14. Cuando la tensión de entrada del circuito para funcionamiento normal es muy pequeña, como es el caso de un A.O. trabajando en la región lineal, pueden ponerse dos diodos de uso general tone

conectados en paralelo y con sentidos contrarios. Supongamos una entrada positiva. El diodo polarizado en inversa siempre estará cortado, y el otro equivaldrá laminen a un circuito abierto, y no afeciará al funcionamiento del circuito, mientras la tensión aplicada sea muy inferior a  $V_V$ . Cuando el valor aumente de forma anómala, empezará a conducir este segundo diodo limitando la tensión a un valor  $V_V$ . Para entradas negativas, el comportamiento de los diodos es simétrico al descrito.

Otra aplicación del diodo como elemento de protección es frecuente en circuitos con cargas inductivas como el representado en la fig. 4.15. En este circuito, si no existiera el diodo, al abrirse el interruptor se generaría una tensión muy elevada y negativa en bornes de la bobina, puesto que:

$$v_L = \frac{di_L}{dt}$$

y al existir camino de conducción cerrado  $i_L$  tendería a cero en un tiempo nulo. Esta tensión en la bobina (teóricamente de valor infinito) provocaría un arco voltaico entre los terminales del interruptor para mantener la corriente a través de ella. La repetición de esta chispa acabaría dañando el interruptor.

El diodo se conecta para proteger al interruptor. Cuando el interruptor está cerrado, el diodo está polarizado negativamente y su presencia no afecta al comportamiento del circuito. Cuando se abre el interruptor, la tensión negativa en bornes de la bobina lo polariza directamente, conduce, y permite que la bobina mantenga la continuidad de la corriente. Mientras el diodo conduce, la tensión entre sus terminales será  $V_V$  y evitará el arco en el interruptor. La corriente que circula por el par bobina-diodo se extingue progresivamente debido a la disipación de potencia en la bobina y diodo reales.

## 4.4 El diodo zener

Cuando la operación en la región de ruptura es básica en la aplicación del diodo suele denominársele *diodo zener*. El símbolo circuital del diodo zener es como el del diodo normal, completado con una especie de "z" en ni línea que representa el cátodo, tal como puede observarse en la fig. 4.16 a. En este apartado se describirá la modelización del diodo zener y algunos circuitos de aplicación que usan diodos zener.

### 4.4.1 Modelización del diodo zener

El diodo zener es un diodo normal en cuya operación interviene la región de ruptura. Por tanto, su modelización es una ampliación de la modelización del diodo rectificador para incluir la región de ruptura.

Aunque no acostumbra a usarse en análisis de circuitos con "lápiz y papel", un primer modelo del diodo zener consiste en completar el modelo exponencial con otra ecuación exponencial para polarización inversa.

El modelo más habitual de la región de ruptura consiste en añadir un nuevo tramo lineal al modelo del diodo rectificador por tramos lineales. Esto se consigue añadiendo en paralelo al conjunto  $D_1-R_s-V_V$  de la fig. 4.9 un circuito  $D_2-R_z-V_z$  tal como se muestra en la fig. 4.16 b. Este circuito añadido equivale en polarización directa a un circuito abierto, pero en inversa, cuando la polarización es superior a  $V_z$  el diodo  $D_2$  entra en conducción y el diodo zener se comporta como una fuente de tensión continua  $V_z$  en serie con la resistencia  $R_z$ . Con cierta frecuencia el valor de  $R_z$  es suficientemente pequeño como para que pueda ser aproximado por  $R_z=0$ .

El análisis de circuitos que contienen diodos zener es igual al de los circuitos con diodos rectificadores. Puede realizarse un análisis gráfico o un análisis por tramos lineales.

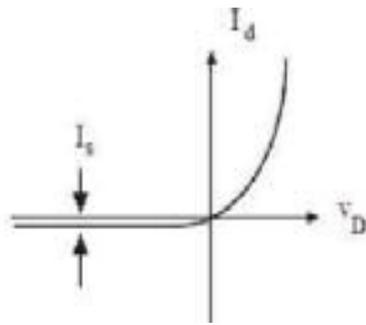


Fig. 4.8 Característica “corriente-tensión” del diodo exponencial

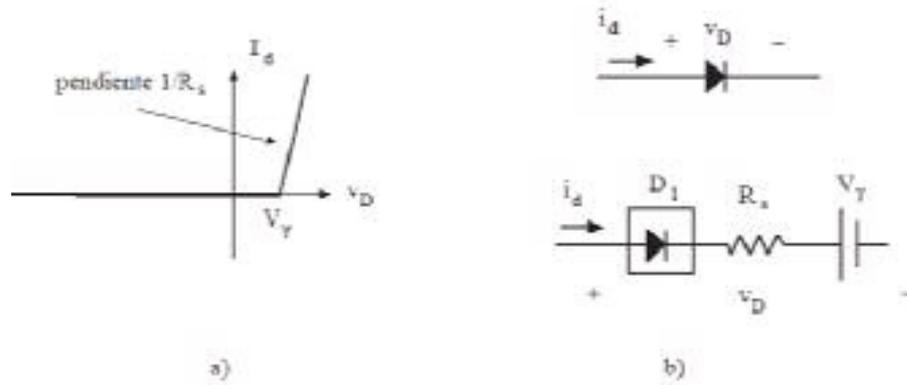


Fig. 4.9 Modelo del diodo por tramos lineales:  
a) Característica “corriente-tensión”; b) circuito equivalente con diodos ideales

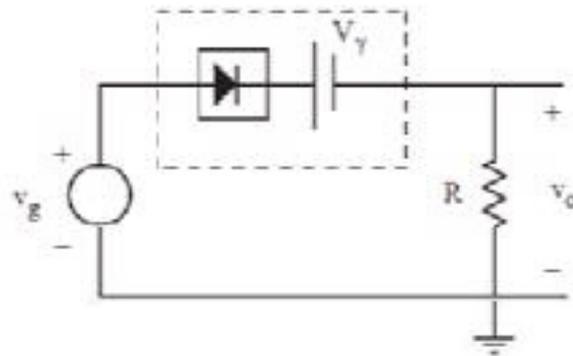


Fig. 4.10 Circuito del ejemplo 4.2

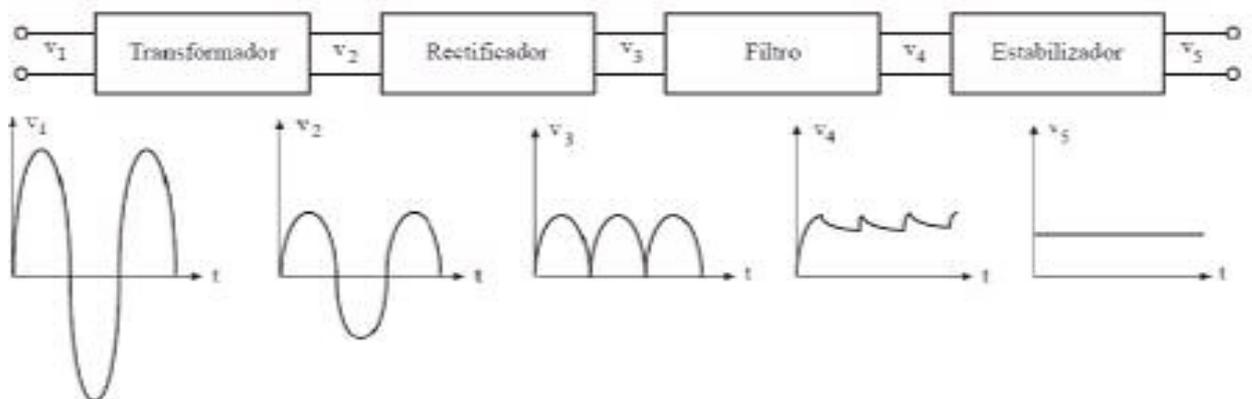


Fig. 4.11 Esquema de una fuente de alimentación

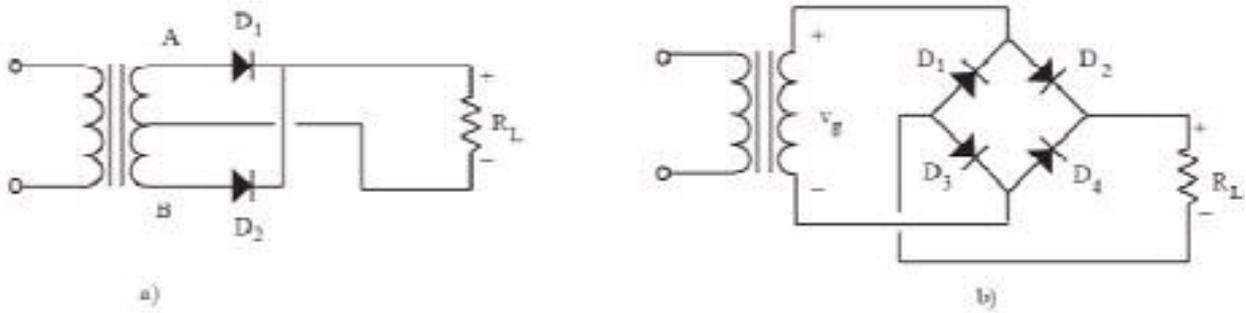


Fig. 4.12 Circuito rectificador de onda completa:  
 a) con transformador de toma intermedia; b) con puente de diodos

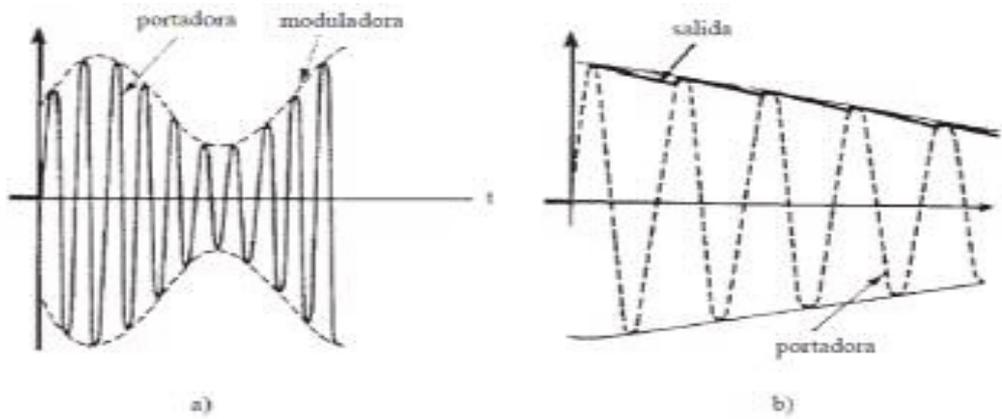


Fig. 4.13 a) Señal modulada en amplitud; b) salida del detector

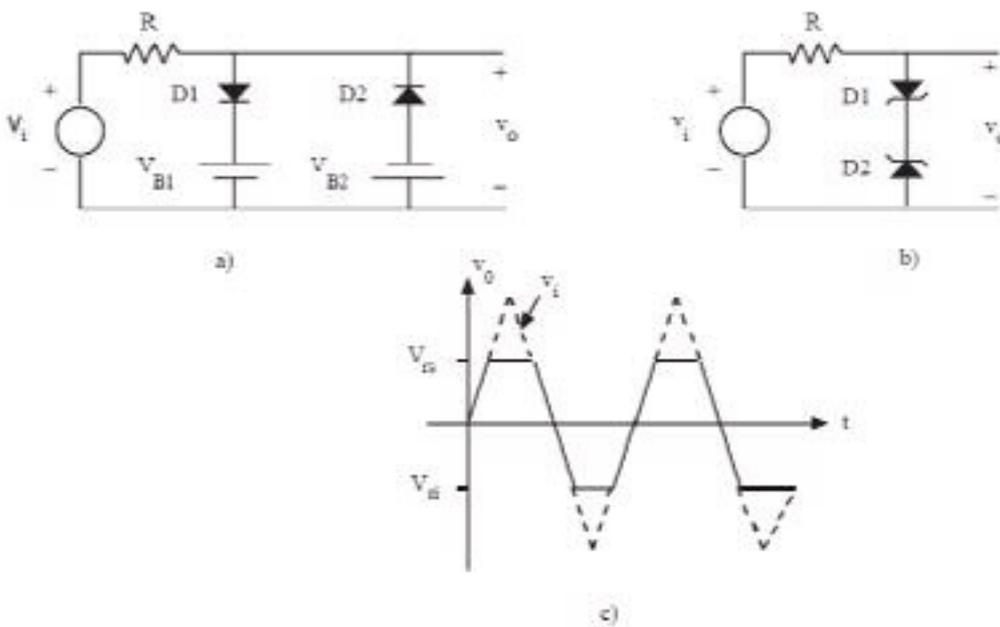


Fig. 4.14 Circuitos recortadores: a) con diodos y fuentes de tensión;  
 b) con diodos zener; c) forma de onda de salida.

Para el circuito:

a)  $V_{IS} = V_{B1} - V_Y$ ;  $V_{rI} = -(V_{B2} + V_Y)$ ; b)  $V_{IS} = V_Z + V_Y$ ;  $V_{rI} = -(V_Z + V_Y)$

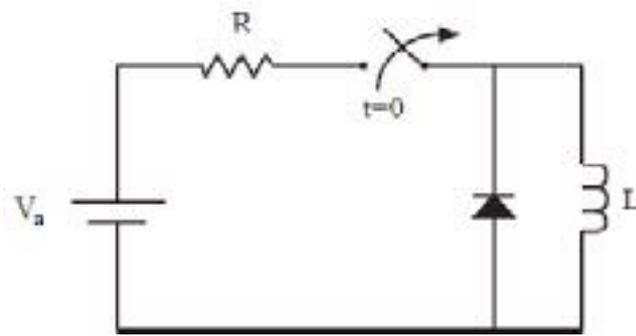


Fig. 4.15 El diodo como elemento de protección en circuitos inductivos

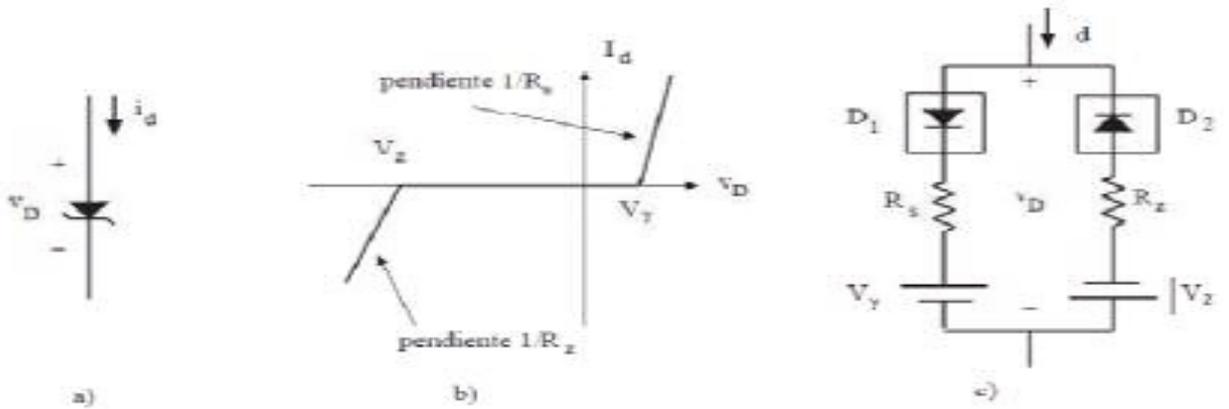


Fig. 4.16 a) Símbolo del diodo zener; b) curva “corriente-tensión”; c) modelización por tramos lineales

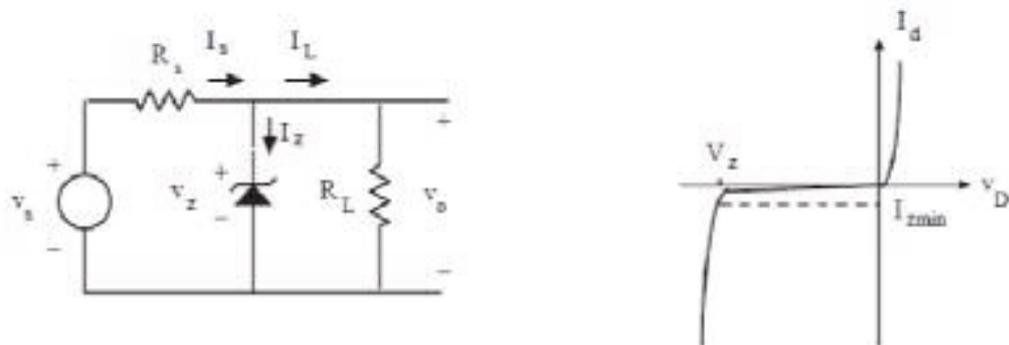


Fig. 4.17 Estabilizador de tensión con diodo zener

## 4.4.2 Aplicaciones del diodo zener

Un diodo zener es un diodo que ha sido diseñado para trabajar en la región de ruptura. Tal como se vio en el apartado 4.1, en la región de ruptura la característica  $i(v)$  cae casi verticalmente. Esto significa que aunque la corriente que atraviesa el diodo en inversa varíe mucho (pero siempre dentro de la región de ruptura). La tensión en sus terminales se mantiene a un valor casi constante  $V_z$ .

Considérese el cuanto de la fig. 4.17 en el que el generador independiente  $v_s$  suministra una tensión continua sin estabilizar. Frecuentemente será la tensión de salida del filtro de condensador. Se pretende obtener en la salida una tensión continua que mantenga su valor aunque varíen la resistencia de carga o  $v_s$  dentro de unos ciertos márgenes. El principio de funcionamiento es simple: se toma la salida entre terminales del zener, y se diseña el circuito para que este diodo siempre opere en la región de ruptura. Los cambios en la carga o en el generador provocarán variaciones en la corriente por el diodo pero siempre dentro de la región de ruptura. Como en la región de ruptura la característica es casi vertical, aunque haya grandes variaciones en la corriente, la variación de tensión en terminales del zener será pequeña.

El diseño del circuito parte de la identificación del caso más desfavorable. Se fuerza a que cuando por el diodo circule la corriente mínima ésta sea superior a un valor predeterminado que denominaremos  $I_{zmin}$ . Obsérvese que por la ley de corrientes de Kirchhoff  $I_z = I_s - I_L$ . La corriente por el diodo será mínima cuando  $I_s$  sea mínima y  $I_L$  sea máxima. Y esta situación se dará cuando  $v_s$  y  $R_L$  sean mínimas. Entonces resulta:

$$\begin{aligned} I_{smin} - I_{Lmax} &\geq I_{zmin} \\ \frac{V_{smin} - V_z}{R_s} - \frac{V_z}{R_{Lmin}} &\geq I_{zmin} \\ R_s &\leq \frac{V_{smin} - V_z}{I_{zmin} + V_z / R_{Lmin}} \end{aligned} \quad (4.6)$$

que proporciona el valor máximo de  $R_s$  que garantiza que siempre circula por el diodo una corriente inversa superior a  $I_{zmin}$ .

El diseño del circuito también debe determinar la potencia que debe ser capaz de disipar el diodo. Para ello debe calcularse  $I_{zmax}$ , la cual se dará cuando  $I_s$  sea máximo ( $V_s$  máxima) e  $I_L$  sea mínima:

$$\begin{aligned} I_{zmax} &= I_{smax} - I_{Lmin} \\ I_{zmax} &= \frac{V_{smax} - V_{zmax}}{R_s} - \frac{V_{zmax}}{R_{Lmax}} \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde se tiene en cuenta que el diodo presenta una resistencia  $R_z$  en la región de ruptura que hace incrementar  $V_z$ :

$$V_{zmax} = V_z + (I_{zmax} - I_{zmin}) \cdot R_z \quad (4.8)$$

Sustituyendo (4.7) en (4.8) se halla:

$$V_{zmax} = \frac{V_{smax} / R_s + V_z / R_z - I_{zmin}}{1/R_z + 1/R_s + 1/R_{Lmax}} \quad (4.9)$$

Y usando este valor en (4.7) puede calcularse  $I_{zmax}$ . Entonces la potencia que debe poder disipar el diodo,  $P_D$ , se calcula en el caso más desfavorable: cuando la corriente por él es máxima:

$$P_D \geq V_{zmax} I_{zmax} \quad (4.10)$$

Con este diseño queda garantizado que la máxima variación de la tensión de salida será:

$$\Delta V_{o\max} = V_{z\max} - V_z = (I_{z\max} - I_{z\min}) R_z \quad (4.11)$$

que será muy inferior a la variación de  $V_s$  si se elige un diodo con una resistencia  $R_z$  suficientemente pequeña.

## 4.5 Problemas para el trabajo independiente

### Cuestiones:

- a) ¿Qué diferencia importante hay entre el funcionamiento de un diodo normal y el funcionamiento de un diodo zener?
- b) Indica dos aplicaciones del diodo rectificador.
- c) Indica las ventajas respecto a eficiencia energética del LED en aplicaciones de iluminación en comparación con las lámparas incandescentes.

# Tema 5. El transistor bipolar

## 5.0 Vocabulario técnico español-inglés-ucraniano-ruso

Transistor (m)	transistor	транзистор	транзистор
Terminal (m)	connector – terminal	висновок	вывод
Emisor (m)	emitter or	емітер	эмиттер
Base (f)	base	база	база
Colector (m)	collector	колектор	коллектор
Entrada (f)	Input	введення	ввод
Salida (f)	output	виведення	вывод
Ganancia (f)	gain	посилення	усиление

## 5.1 El transistor bipolar. Conceptos básicos

El transistor bipolar de uniones, conocido también por *BJT* (siglas de su denominación inglesa *Bipolar Junction Transistor*), es un dispositivo de tres terminales denominados emisor, base y colector. La propiedad más destacada de este dispositivo es que aproxima una fuente dependiente de corriente: dentro de ciertos márgenes, la corriente en el terminal de colector es controlada por la corriente en el terminal de base. La mayoría de funciones electrónicas se realizan con circuitos que emplean transistores, sean bipolares o de efecto de campo, los cuales se estudiarán en el próximo capítulo. Ambos transistores son, por tanto, los dispositivos básicos de la electrónica moderna. En este capítulo se presentará el comportamiento del transistor bipolar en continua y en régimen dinámico, así como su utilización como interruptor y como amplificador de señales de pequeña amplitud.

La estructura física de un transistor bipolar consta de dos uniones *PN* dispuestas una a continuación de la otra. Entre los terminales de emisor y base hay una unión *PN*, denominada unión emisora, y entre los de base y colector otra unión *PN*, llamada unión colectora (fig. 5.1).

Hay dos tipos de transistores bipolares: el *NPN* y el *PNP*. Estos nombres proceden de la descripción de su estructura física. En el transistor *NPN* el emisor es un semiconductor tipo *N*, la base es tipo *P* y el colector es tipo *N*. La estructura física del transistor *PNP* es dual a la anterior cambiando las regiones *P* por regiones *N*, y las *N* por *P*. En la fig. 5.2 se representan estos tipos de transistores y sus símbolos respectivos. Obsérvese que en los símbolos de los transistores el terminal de emisor se distingue del de colector por incluir una flecha. Esta flecha va siempre en el sentido de *P* a *N*. Por esto es saliente en el *NPN* y entrante en el *PNP*. Aunque en esta figura, por simplicidad, se representa una estructura simétrica, la estructura real no lo es: los terminales de emisor y de colector no son intercambiables.

En una primera aproximación el transistor bipolar puede modelarse por el circuito representado en la fig. 5.3. La corriente de colector viene fijada por una fuente dependiente de corriente, cuyo valor es controlado por la corriente de base. Este modelo sólo se aproxima al transistor real cuando el sentido de la corriente de base es el indicado en la figura y la tensión entre los terminales de colector y de emisor es positiva para el *NPN* y negativa para el *PNP*. Nótese que la corriente de emisor es saliente para el *NPN* y entrante para el *PNP*, tal como sugieren sus símbolos. En ambos transistores, las corrientes de base y colector se suman para formar la corriente de emisor (las dos son entrantes para el *NPN* y salientes para el *PNP*). Este modelo

sumamente simplificado podría denominarse, por simetría con el diodo, "transistor idealizado".



Fig. 5.1 Transistor bipolar comercial

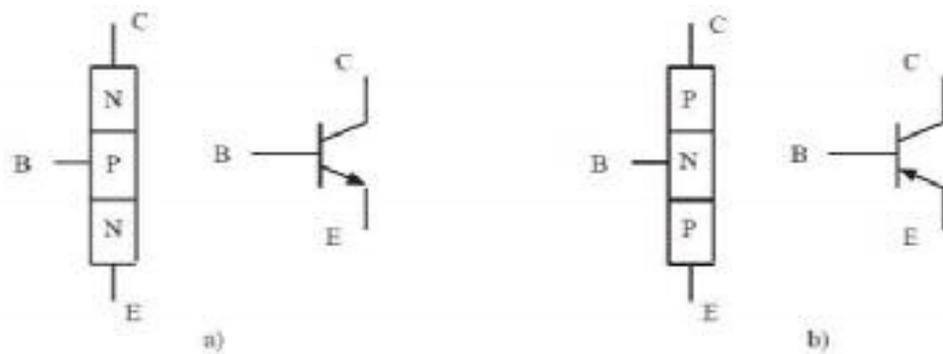


Fig. 5.2 Tipos y símbolos de bipolares:  
a) transistor *NPN*; b) transistor *PNP*

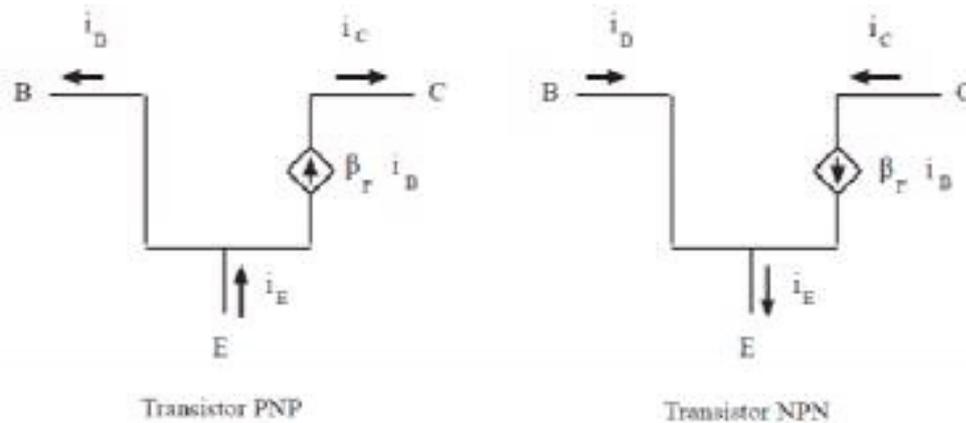


Fig. 5.3 Comportamiento idealizado del transistor bipolar

**Ejercicio de ejemplo:** Calcular las corrientes de emisor, base y colector en el circuito de la fig. 5.4, suponiendo que el transistor se comporta según el modelo idealizado de la fig. 5.3. Tomar  $V_{BB}=V_{CC}=10\text{ V}$ ;  $R_B=100\text{ k}\Omega$ ;  $R_C=500\ \Omega$ ;  $\beta_F=100$ .

**Solucion:** El circuito contiene un transistor NPN. La corriente de base es entrante y su valor es:

$$i_B = \frac{V_{BB}}{R_B} = 0,1\text{ mA}$$

La corriente de colector también es entrante y su valor es:

$$i_C = \beta_F i_B = 10\text{ mA}$$

El modelo idealizado es válido ya que la corriente de base es entrante y VCE es positiva:

$$V_{CE} = V_{CC} - i_C R_C = 10 - 5 = 5\text{ V}$$

Un modelo del transistor bipolar más aproximado a la realidad es el representado en la fig. 5.5. Como puede observarse, este modelo, para el transistor NPN, contiene un diodo entre base y emisor por el que circula una corriente  $I_{be}$ , otro diodo entre base y colector por el que circula una corriente  $I_{bc}$ , una fuente dependiente de valor  $(\beta_F I_{be} - \beta_R I_{bc})$  y dos condensadores  $C_e$  y  $C_c$ . Las constantes  $\beta_F$  y  $\beta_R$  son específicas de cada transistor y se denominan ganancia de corriente en emisor común, en funcionamiento directo e inverso respectivamente. Nótese que los sentidos de los diodos y de las corrientes en el transistor PNP son contrarios a los del transistor NPN. Las expresiones de las corrientes  $I_{be}$  e  $I_{bc}$  vienen dadas por:

<i>Transistor NPN</i>	$I_{be} = I_{se} (e^{V_{RF}/V_T} - 1)$	(5.1)
	$I_{bc} = I_{sc} (e^{V_{BC}/V_T} - 1)$	
<i>Transistor PNP</i>	$I_{eb} = I_{se} (e^{V_{EB}/V_T} - 1)$	
	$I_{cb} = I_{sc} (e^{V_{CR}/V_T} - 1)$	

Nótese que las tensiones de polarización de estos diodos tienen signos contrarios para el transistor NPN y el PNP. En estas ecuaciones  $V_T$  es la tensión térmica ( $V_T=KT/q$ ),  $I_{se}$  e  $I_{sc}$  son las corrientes inversas de saturación de los diodos del modelo de la fig. 5.5. Entre estas corrientes se cumple la siguiente relación:

$$I_{se} \beta_F = I_{sc} \beta_R = I_s \tag{5.2}$$

Los condensadores  $C_e$  y  $C_c$  son las capacidades asociadas a los diodos de emisor y colector respectivamente y tienen el mismo comportamiento que la capacidad  $C_D$  descrita en el capítulo anterior para el diodo. Los parámetros que determinan  $C_e$  y  $C_c$ , así como el parámetro  $I_s$ , son específicos de cada transistor. Valores típicos de algunos de estos parámetros son:  $\beta_F=100$ ,  $\beta_R=1$ ,  $I_s=10^{-16}\text{ A}$ . Obsérvese que al ser  $\beta_F$  mucho mayor que  $\beta_R$  el transistor no se comporta de forma simétrica.

Según las polarizaciones de los diodos de emisor y colector se dice que el transistor bipolar trabaja en determinados *modos o regiones de funcionamiento*, los cuales se indican en la tabla 5.1.

**Tabla 5.1 Regiones de funcionamiento del transistor bipolar**

		Unión emisora	
		Directa	Inversa
Unión colectora	Directa	Saturación	Inversa
	Inversa	Activa	Corte

Para el transistor *NPN* las uniones emisora y colectora están polarizadas en directa cuando  $V_{BE}$  y  $V_{BC}$  son positivas. Para el transistor *PNP* las dos uniones estarán en directa si las tensiones anteriores son negativas (es decir, si las tensiones  $V_{EB}$  y  $V_{CB}$  son positivas).

Con frecuencia, cuando el transistor bipolar aparece en un circuito electrónico, se dan unas conexiones típicas que se denominan *base común*, *emisor común* y *colector común*. En la configuración base común el terminal de base es común a la "entrada" y a la "salida", tal como se indica en la fig. 5.6. En la configuración emisor común, el terminal común es el emisor, y en colector común lo es el colector.

A no ser que se indique lo contrario, se considerará en adelante, por defecto, un transistor *NPN* (fig. 5.7, 5.8).

## 5.2 El transistor bipolar en continua y en baja frecuencia

Cuando el transistor trabaja con valores constantes de tensiones y corrientes o éstas varían muy lentamente, los condensadores  $C_e$  y  $C_c$  pueden despreciarse, tal como se hacía en el diodo, ya que por ellos o no circula corriente o ésta es muy pequeña. En este caso, el modelo del transistor bipolar se reduce a dos diodos y una filente dependiente.

Se iniciará este apartado describiendo las relaciones entre las tensiones y corrientes en un transistor bipolar trabajando en continua o baja frecuencia a través de las curvas características en emisor común. Después se presentará la metodología de análisis de circuitos con transistores a los que se aplican solamente fuentes de tensión o de corriente constantes.

### 5.2.1 Curvas características del transistor bipolar en emisor común

Considérese un transistor *NPN* en configuración de emisor común tal como se indica en la fig. 5.9. Se suele considerar que la entrada del transistor está formada por los terminales de base y emisor y su salida por los de colector y emisor. La relación que existe entre la corriente y la tensión de entrada ( $i_B$ ,  $V_{BE}$ ) suele darse en forma gráfica mediante las denominadas *curvas características de entrada*, y la relación entre la corriente y tensión de salida ( $i_C$ ,  $V_{CE}$ ) mediante las *curvas características de salida*. Como la entrada y salida del transistor son interdependientes, se acostumbra a representar las curvas de entrada para determinados valores de la tensión de salida  $V_{CE}$ , y las curvas de salida para distintos valores de la corriente de entrada  $i_B$ .

En la fig. 5.9 b se ha sustituido el transistor por su circuito equivalente. Se va a analizar a continuación el comportamiento de este circuito en las distintas regiones de funcionamiento.

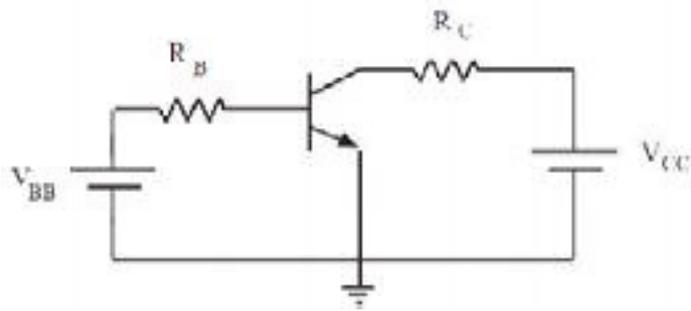


Fig. 5.4 Circuito del ejemplo 5.1

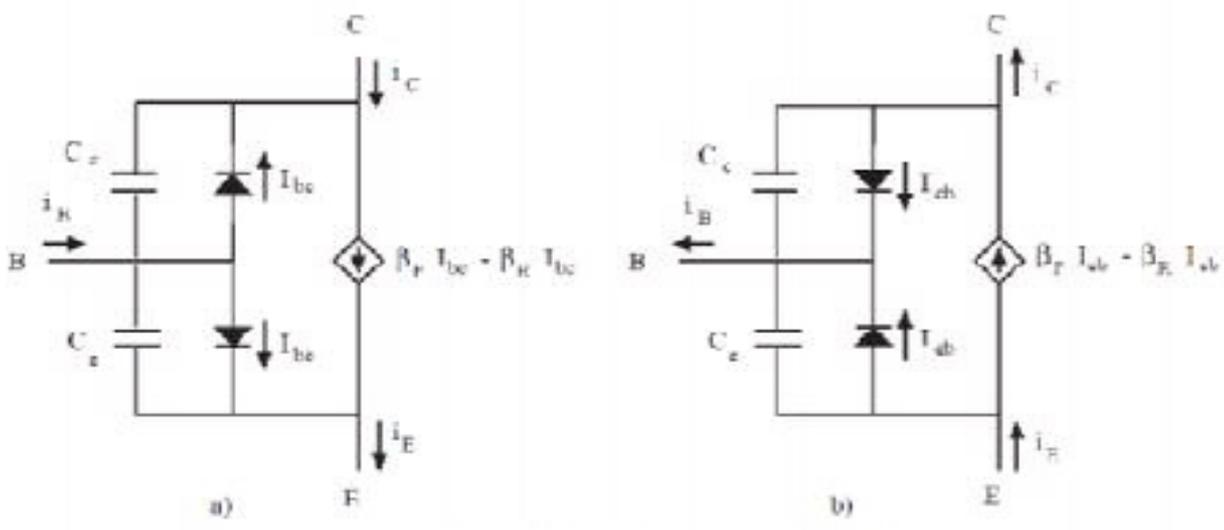


Fig. 5.5 Modelos de los transistores: a) *NPN*; b) *PNP*

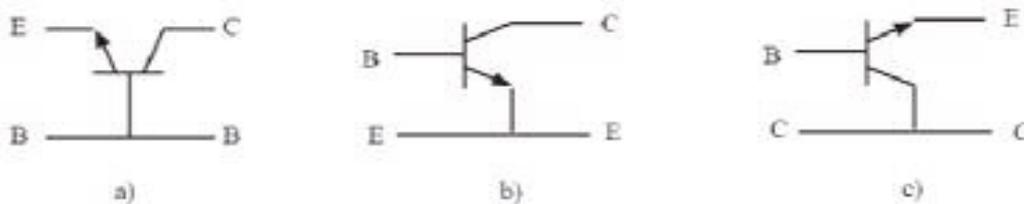


Fig. 5.6 Configuraciones: a) base común; b) emisor común; c) colector común

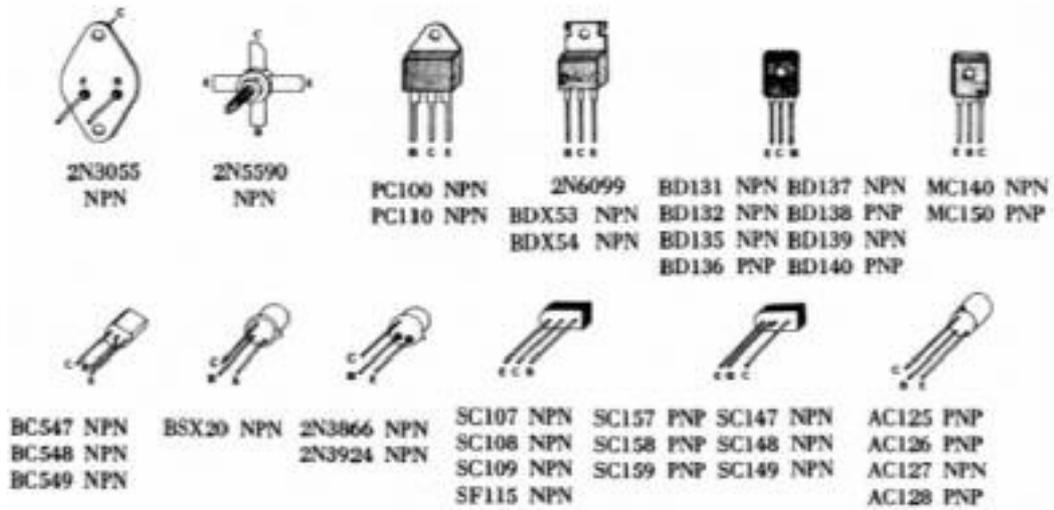


Fig. 5.7 Modelos comerciales de transistor

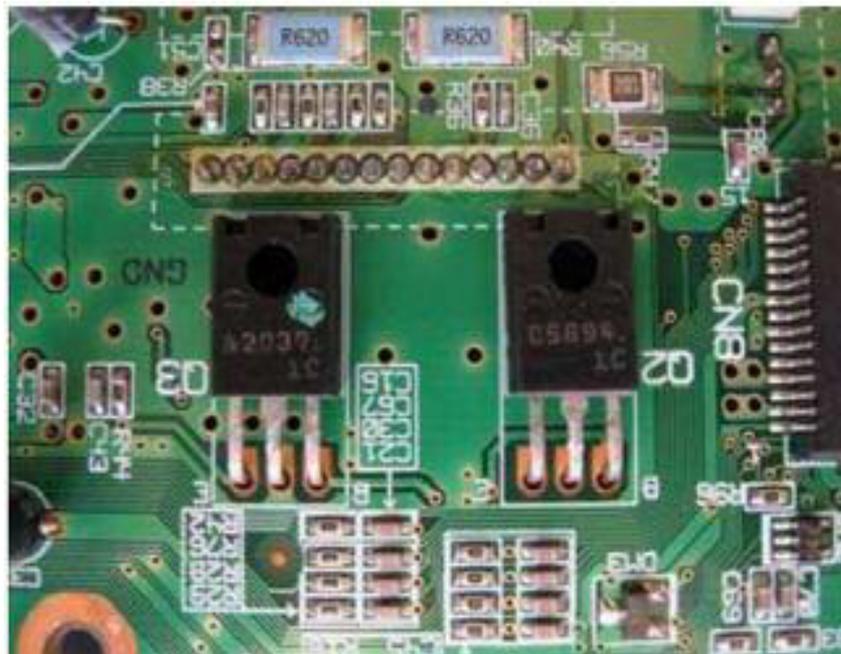


Fig. 5.8 Transistores en un circuito impreso

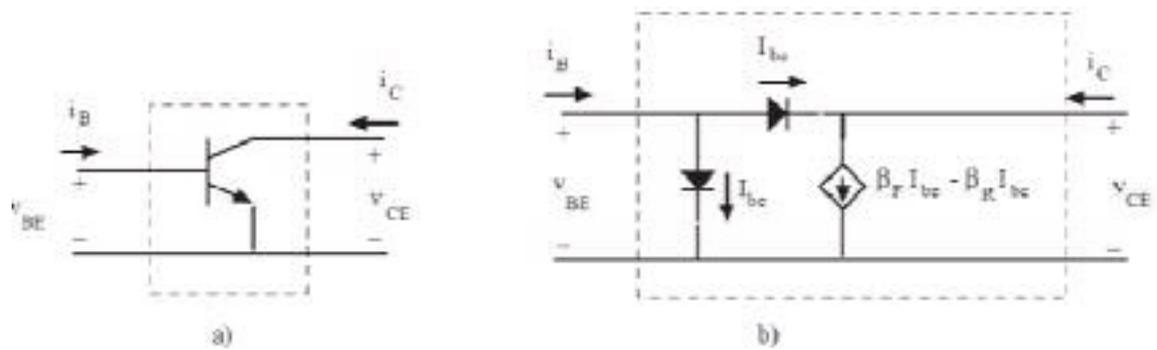


Fig. 5.9 a) Corrientes y tensiones en emisor común; b) modelo en emisor común

### a) Región activa

En este modo de funcionamiento ( $v_{BE} > 0$ ;  $v_{BC} < 0$ ) el diodo de emisor está polarizado en directa y el de colector en inversa. La corriente  $I_{bc}$  será prácticamente nula, por lo que el diodo de colector puede aproximarse por un circuito abierto y, tal como muestra el circuito de la fig. 5.10, podrá escribirse:

$$\begin{aligned} i_R &\cong I_{be} = I_{se} (e^{v_{BE}/V_T} - 1) \\ i_C &\cong \alpha_F I_{be} = \alpha_F I_B \end{aligned} \quad (5.3)$$

Obsérvese que la característica de entrada es la curva del diodo de emisor, y es independiente de  $v_{CE}$ . La característica de salida viene dada por rectas horizontales (fijado un valor de  $I_B$ , la corriente de colector es independiente de la tensión de salida). La corriente de colector es constante y vale  $\beta_F$  veces la de base. El parámetro  $\beta_F$  tiene, pues, el significado físico de "ganancia" de corriente del transistor bipolar en la configuración de emisor común.

Estas curvas características se representan en la figura 5.11. La dependencia que se ha descrito pone de manifiesto que el transistor es un dispositivo unidireccional: la entrada determina a la salida pero no al revés.

**Ejercicio de ejemplo:** La curva característica de la fig. 5.12 corresponde a una corriente de base constante de  $15 \mu A$ . ¿Cuál es el valor aproximado de  $\beta_F$ ?

**Solución:** En la región activa  $i_C = \beta_F I_B$ . Por tanto, tomando un punto cualquiera del tramo horizontal de la curva, resulta:

$$\alpha_F \cong \frac{2,25 \text{ mA}}{15 \text{ } \mu A}$$

### b) Región de corte

Cuando el transistor bipolar opera en modo de corte, las corrientes  $I_{be}$  e  $I_{bc}$  son aproximadamente nulas. Por tanto, también lo será la corriente de colector. En las curvas características de salida, la región de corte viene dada por el semieje positivo de abscisas, puesto que la corriente de colector debe ser nula, y la unión colector polarizada inversamente. En la fig. 5.13 a se representa el modelo aproximado del transistor bipolar en corte.

### c) Región de saturación

Cuando el transistor bipolar opera en modo de saturación, las tensiones  $v_{BE}$  y  $v_{BC}$  son ambas positivas. El modelo del transistor, entonces, no puede simplificarse ya que los dos diodos conducen. Este modelo establece que la corriente de colector viene dada por:

$$i_C = \alpha_F I_{be} - \alpha_R I_{bc} = I_s (e^{v_{BE}/V_T} - 1) - \frac{I_s}{\alpha_R} (e^{v_{BC}/V_T} - 1) \quad (5.4)$$

En la última expresión se ha hecho uso de las ecuaciones (5.1) y (5.2) y de la definición del parámetro  $\alpha$ . Mientras el transistor opera en la región activa, la corriente de colector vale  $\beta_F I_B$ , es decir, el primer término de la última igualdad. Cuando  $v_{BC}$  se incrementa a partir de cero, el segundo término (5.4) adquiere importancia y, al restar, hace que la corriente de colector primero disminuya y luego cambie de signo.

Nótese que si  $\alpha_R$  fuera la unidad, la ecuación anterior indicaría que la corriente de colector sería nula para  $v_{BC}$  igual a  $v_{BE}$ , es decir, para una tensión  $v_{CE}$  nula. Como  $\alpha_R$  es menor que la unidad,  $v_{CE}$  será algo mayor que cero cuando  $i_C$  sea igual a cero. Como la curva característica se traza para un valor fijo de  $I_B$ , la tensión  $v_{BE}$  es constante. Por esto, la disminución de  $i_C$  tendrá una dependencia exponencial respecto a  $v_{CE}$  ( $v_{CE} = v_{CB} + v_{BE}$ ). En consecuencia, la curva característica en saturación se puede aproximar por una curva "casi" vertical, tal como se indica en la fig. 5.11. Se

acostumbra a considerar que cuando el transistor se satura  $v_{CE}$  vale unos 0,2 V. En la fig. 5.13 b se representa el modelo aproximado del transistor en saturación.

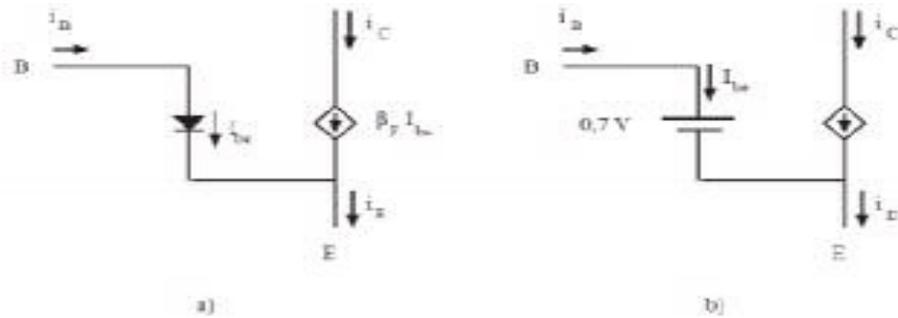


Fig. 5.10 a) Circuito equivalente del transistor en modo activo; b) circuito aproximado

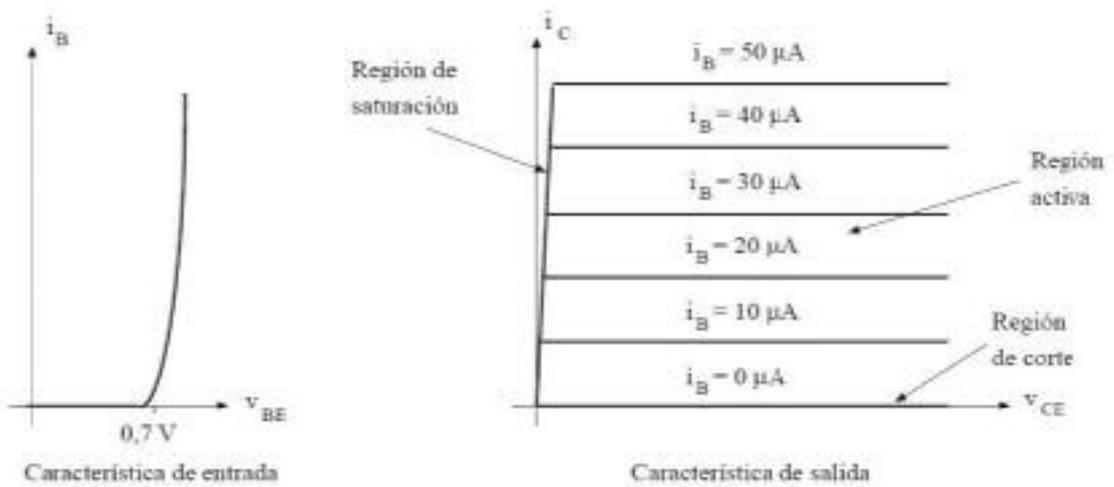


Fig. 5.11 Curvas características del transistor bipolar según el modelo de la figura 5.9 b

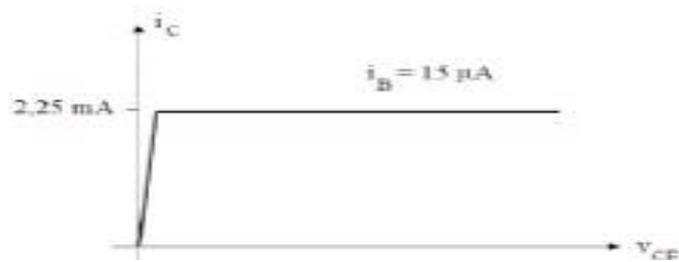


Fig. 5.12 Curva característica del ejemplo 5.2

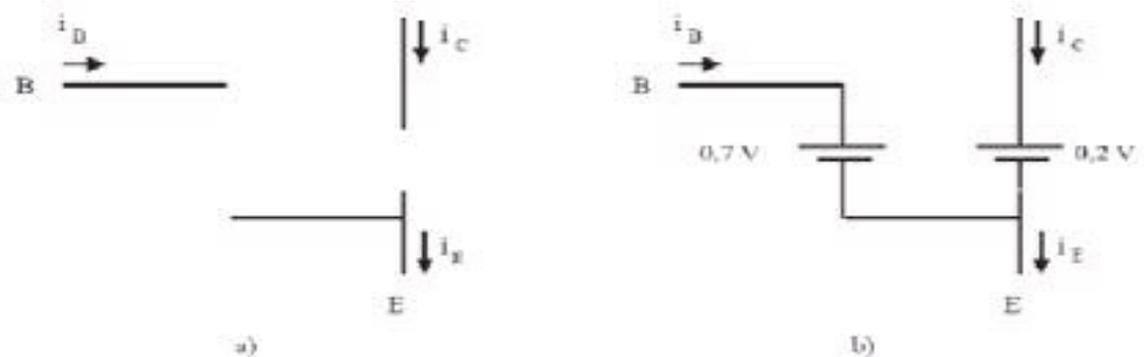


Fig. 5.13 a) Modelo aproximado del transistor en corte; b) modelo aproximado del transistor en saturación

#### d) Región inversa

En la región inversa el diodo de emisor está en corte y el de colector conduce. Por tanto, el transistor se comporta como en modo activo, pero intercambiando los terminales de emisor y colector, y sustituyendo  $\beta_F$  por  $\beta_R$ . Al ser  $\beta_R$  muy inferior a  $\beta_F$  no suele resultar interesante trabajar en esta región.

Las curvas características representadas en la fig. 5.11 se dedujeron a partir del modelo de la fig. 5.5 del transistor bipolar. Cuando estas curvas se *miden* en un transistor real (fig. 5.14) suelen aparecer algunas diferencias que, si bien no son muy importantes, indican que el modelo de transistor de la fig. 5.5 no representa el comportamiento exacto del dispositivo real.

Una diferencia entre ambas curvas es que para tensiones  $v_{CE}$  elevadas, las corrientes del transistor aumentan abruptamente. Esto es debido a que el diodo de colector entra en su región de ruptura. Otra desviación entre las curvas experimentales y el modelo descrito está en el ligero aumento de  $i_C$  con  $v_{CE}$  en la región activa. Este fenómeno se denomina *efecto Early* e implica un aumento del parámetro  $\beta_F$  con la tensión  $v_{CE}$  (en la región activa  $\beta_F$  viene dado por  $i_C/i_B$ ). Para modelar este efecto se suelen aproximar las curvas de salida en la región activa por segmentos de rectas cuya prolongación corta al eje de abscisas en un punto  $v_{CE} = -V_A$ , según se indica en la fig. 5.15 a. La tensión  $V_A$  se denomina tensión Early.

Por tanto, suponiendo un valor constante de  $i_B$ , tenemos:

$$i_C(v_{CE}) = i_C(0) \left(1 + \frac{v_{CE}}{V_A}\right) \quad (5.5)$$

### 5.3 El transistor bipolar como interruptor

La acción de un transistor cuando trabaja en modo de corte o en modo de saturación puede ser asimilada a la de un interruptor. En efecto, considérese el circuito de la fig. 5.16. Cuando el transistor está en modo de corte equivale a un interruptor abierto; cuando está en modo de saturación la tensión de salida es casi cero y puede aproximarse por un interruptor cerrado. El estado del interruptor está controlado por la corriente  $i_B$ . Nótese que, para que el transistor equivalga a un interruptor cerrado, debe trabajar en la región de saturación, lo que implica que  $I_C$  debe ser inferior a  $\beta_F I_B$ .

Uno de los tipos de circuitos electrónicos de amplia utilización son los denominados circuitos digitales binarios. Las señales que se procesan en estos circuitos sólo toman dos valores. Un valor "alto" próximo al de la fuente de alimentación  $V_{CC}$ , y un valor "bajo" próximo a cero voltios.

El circuito de la fig. 5.16 puede analizarse desde esta perspectiva. Este circuito recibe el nombre de inversor (o puerta NOT) porque la tensión de salida es "alta" cuando la de entrada es "baja" y viceversa. Para entrada "baja" (próxima a cero voltios) el transistor trabaja en la región de corte y entonces  $v_D$  es igual a  $V_{CC}$ . Para entrada

"alta" (próxima a  $V_{CC}$ ) el transistor trabaja en modo saturación y  $v_0$  es próxima a cero (0,2 V).

Sin embargo, este comportamiento no es del todo exacto. En efecto, considérese el circuito de la fig. 5.16 y supóngase que la tensión  $V_i$  conmuta entre 0 y 5 V según se indica en la fig. 5.17. Si el análisis de continua fuera válido, la tensión de salida  $v_0$  sería la indicada en la figura con trazo discontinuo. En realidad, la salida que se observa es la indicada con trazo continuo. Nótese que la salida alcanza los valores previstos por el análisis de continua después de transcurrido un cierto tiempo. Es el denominado *retardo de propagación*. Este retardo es debido a las capacidades  $C_e$  y  $C_c$  del transistor bipolar.

El análisis cuantitativo de la respuesta del circuito inversor es complicado debido a que las capacidades dependen de las tensiones  $V_{BE}$  y  $V_{BC}$ . Por esta razón suele realizarse mediante el uso de programas de análisis de circuitos con ordenador. En el último apartado de este capítulo se presenta un ejemplo de dicho análisis.

Sin embargo, puede llevarse a cabo un estudio cualitativo de su comportamiento sustituyendo el transistor por su circuito equivalente (fig. 5.18). Supóngase que  $V_i$  es 0 V durante un tiempo largo, de forma que  $C_e$  está descargado y  $C_c$  cargado a  $V_{BC} = -5$  V. Cuando  $V_i$  conmuta a 5 V, el condensador  $C_e$  inicia su carga y la tensión  $v_{BE}$  empieza a aumentar desde su valor inicial nulo. El aumento de esta tensión provoca el de  $I_{ct}$ , que inicialmente era nula, lo cual provoca, a su vez, la disminución de  $v_0$  debido a la caída de tensión en la resistencia  $R_C$ . Al cabo de cierto tiempo, la corriente  $I_{ct}$  toma el valor suficiente para que la caída en  $R_C$  sea de casi 5 V. Al final de este proceso, el condensador  $C_e$  se ha cargado a una tensión de unos 0,7 V, y el condensador  $C_c$  a unos 0,5 V ( $V_{BC} = V_{BE} - V_{CE}$ ). Esto explica el transitorio de conmutación desde el valor alto de salida a su valor bajo.

Cuando la entrada conmuta de nuevo a 0 V, la carga de los condensadores mantiene, durante un cierto tiempo, unas tensiones  $v_{BE}$  y  $v_{BC}$  positivas que, a su vez, mantienen un valor elevado de la corriente por  $R_C$ . Sólo cuando  $C_c$  y  $C_e$  se han descargado suficientemente, las corrientes  $I_{be}$  e  $I_{bc}$  disminuyen y tienden a su valor final.

Los tiempos de retardo acabados de analizar (transitorios de conmutación) impiden que el circuito inversor funcione correctamente en altas frecuencias.

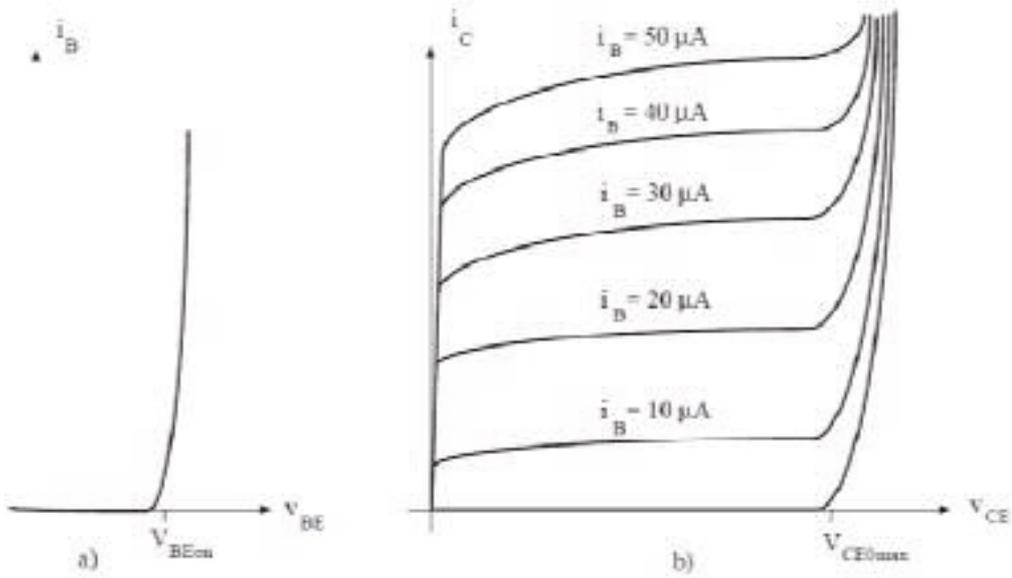


Fig. 5.14 Curvas características típicas de un transistor bipolar

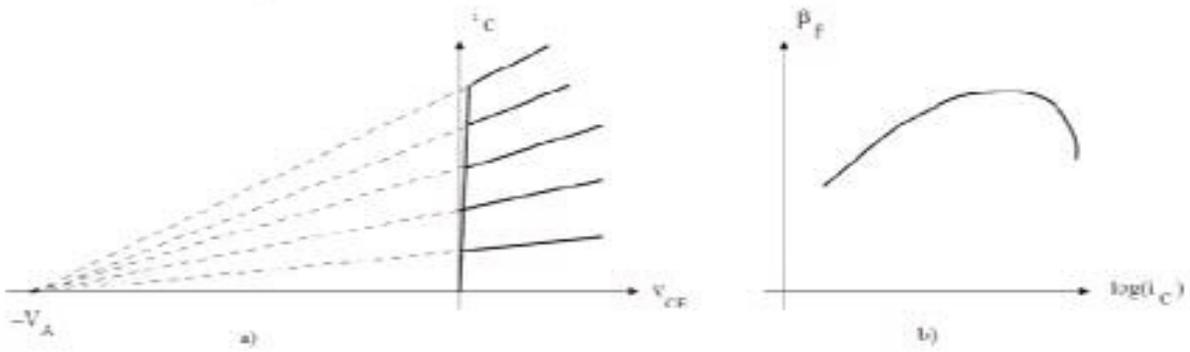


Fig. 5.15 a) Modelización del efecto Early; b) variación de  $\beta_F$  con  $i_C$

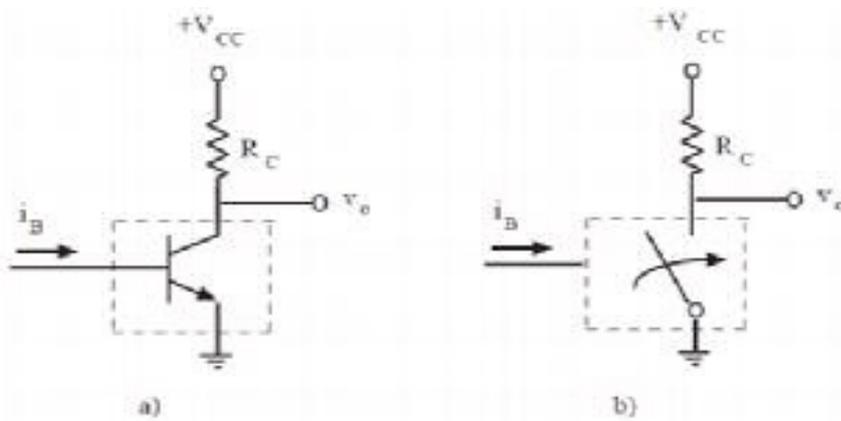


Fig. 5.16 El transistor bipolar como interruptor

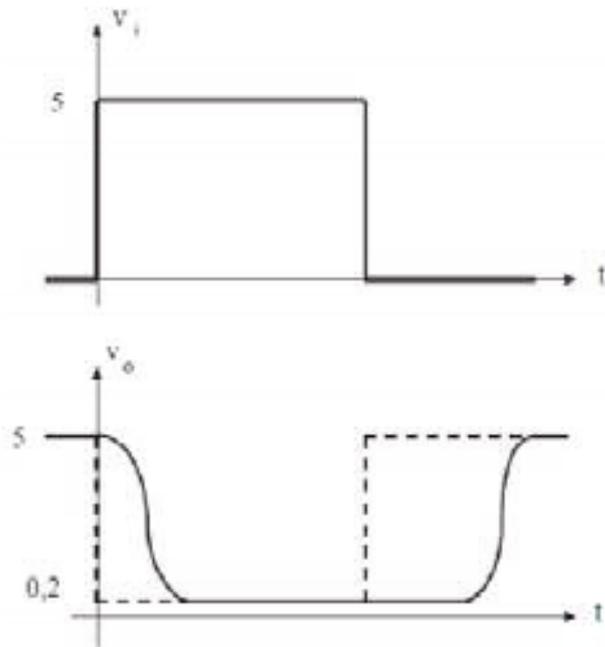


Fig. 5.17 Señales de entrada y de salida del inversor

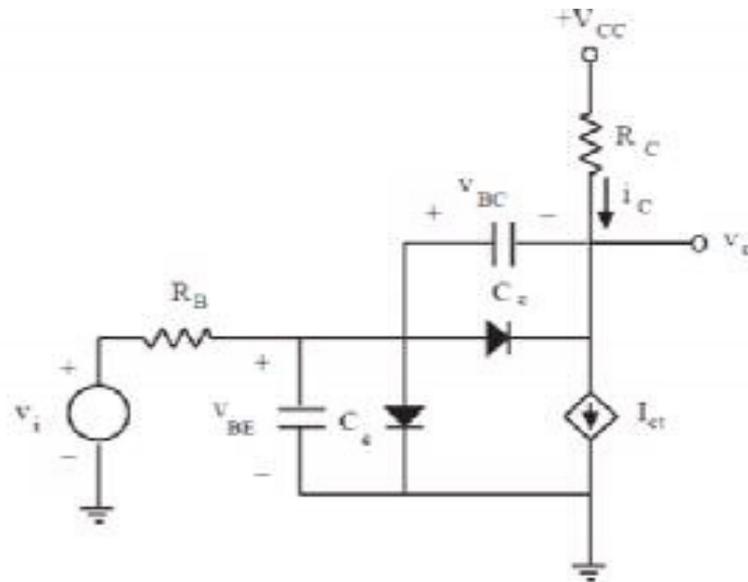


Fig. 5.18 Circuito equivalente correspondiente

## 5.4 Problemas para el trabajo independiente

**Cuestión 1:** Identifica en español, inglés y ruso cada uno de los elementos señalados en las imágenes a continuación:

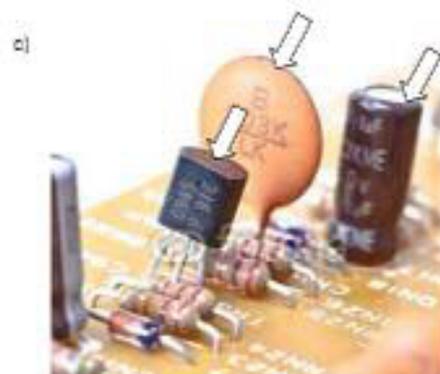
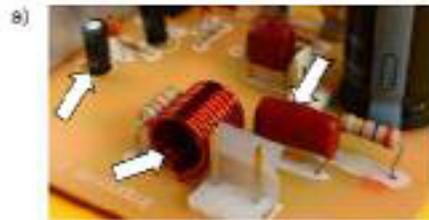


Fig. 5.19 Imágenes de los elementos para el cuestión 1

**Cuestión 2:** Identifica en español inglés y ruso cada uno de los terminales del transistor a continuación

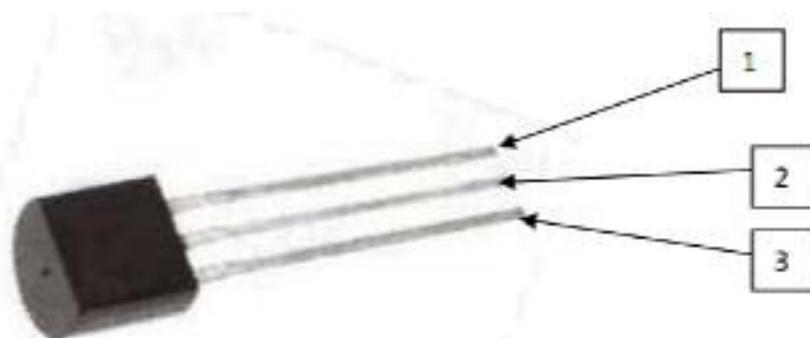


Fig. 5.20 Imágen del transistor para el cuestión 2

## Bibliografía general

### En español

- [1] CIRCUITOS Y DISPOSITIVOS ELECTRÓNICOS. *Prat Viñas/ Lluís Bragós Bardía, Ramón/ Chávez Domínguez/ Juan Antonio*. Ed. Universidad Politécnica de Cataluña, 1995. 474 p. ISBN: 978-84-7653-541-7
- [2] CURSO DE ELECTRÓNICA BÁSICA. *Andrés Aranzabal Olea*. Ed. EUITI de EIBAR España, 2001. 382 p.
- [3] “PROBLEMAS RESUELTOS DE TECNOLOGÍA ELÉCTRICA”. *Narciso Moreno Alfonso/ Alfonso Bachiller Soler/ Juan Carlos Bravo*. Ed. Madrid Thomson-Paraninfo, 2006. 309 p. ISBN: 84-9732-194-4
- [4] PRÁCTICAS DE ELECTRÓNICA ANALÓGICA CON COMPONENTES DISCRETOS. *A. Sebastián/ E. Batalla/ A. Mocholí/ M. Iranzo/ C. Pérez*. Departamento de Ingeniería Electrónica de la U.P.V. Ed. SPUPV–93–693
- [5] LABORATORIO DE ELECTRÓNICA BÁSICA. *F.J. Ballester/ E. Batalla/ R.J. Colom/ A.H. García/ M. Iranzo/ F. Montilla/ C. Pérez*. Departamento de Ingeniería Electrónica de la U.P.V. Ed. SPUPV–98–698
- [6] ELECTRÓNICA ANALÓGICA. *M. Iranzo/ F. Montilla/ E. Batalla/ A.H. García/ A. Guill*. Departamento de Ingeniería Electrónica de la U.P.V. Ed. SPUPV–99–826
- [7] ELECTRÓNICA: TEORÍA DE CIRCUITOS. (6ª Ed.) *R.L. Boylestad/ L. Nashelsky*. Ed. Prentice Hall Hispanoamericana, S.A.
- [8] ELECTRÓNICA BÁSICA. CUADERNO DE LABORATORIO. *C. Pérez/ M. Iranzo*. Departamento de Ingeniería Electrónica de la U.P.V. Ed. SPUPV. 2006. 311 p. ISBN 84-9705-440-7

### En inglés

- [9] FUNDAMENTALS OF ELECTRIC CIRCUITS. *Charles K. Alexander/ Matthew N.O. Sadiku*. Ed. McGraw-Hill College. 2003. 850 p.

### En ruso

- [10] Селиванова, З.М. ОБЩАЯ ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА: Учеб. пособие по курсовому проектированию / З.М. Селиванова, Ю.Л. Муромцев. – Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2009. – 120 с. ISBN 978-5-8265-0818-3.
- [11] Афанасьева, Н.А. ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА: Учеб. пособие / Н.А. Афанасьева, Л.П. Булат. – СПб.: СПбГУН и ПТ, 2010. – 181 с. ISBN 5-89565-117-8.
- [12] ОБЩАЯ ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА: Метод. указания к лабораторным работам для студентов электрических и неэлектрических специальностей / сост. М.Ю. Михайлова, Д.А. Прасол. – Белгород: Изд-во БГТУ, 2012. – 50 с.

*Навчальне видання*

**Оскар Гарсія-Ділс Вега**  
**Сергій Гутиря**

# Електротехніка та основи електроніки

Навчальний посібник  
за ред. проф. С.С. Гутирі

*(іспанською мовою)*

Верстка А.М. Чанчін

*Видано в авторській редакції  
з наданого оригінал-макету*

---

Підписано до друку 07.04.17. Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 11,19.  
Обл.-вид. арк. 10,89 Наклад 100 пр. Зам. № 1873

---

Видавець та виготовлювач ТОВ БАХВА  
(свідоцтво суб'єкта видавничої справи серія ДК № 4277 від 06.03.2012)  
65044, Україна, м. Одеса, просп. Шевченка, 1, корп.5  
тел./факс (048) 777-43-50, e-mail: mail@bahva.com  
www.bahva.com, www.vuzkniga.ua