

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ "ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
Кафедра вищої математики та моделювання систем

**Методичні вказівки
для проведення практичних занять та самостійної роботи здобувачів**

«Вища математика»

Розділ «Вступ до математичного аналізу»

Для здобувачів вищої освіти за освітнім ступенем бакалавра за спеціальностями:

– 281 Публічне управління та адміністрування,

– 073 Менеджмент.

Інституту бізнесу, економіки та інформаційних технологій (ІБЕІТ)

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ "ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
Кафедра вищої математики та моделювання систем

Методичні вказівки
для проведення практичних занять та самостійної роботи здобувачів

«Вища математика»

Розділ «Вступ до математичного аналізу»

Для здобувачів вищої освіти за освітнім ступенем бакалавра за спеціальностями:

– 281 Публічне управління та адміністрування,

– 073 Менеджмент.

Інституту бізнесу, економіки та інформаційних технологій (ІБЕІТ)

Затверджено на засіданні
кафедри вищої математики
та моделювання систем
Протокол № 9 від 21.04.22 р.

Методичні вказівки для проведення практичних занять та самостійної роботи здобувачів.
«Вища математика». Розділ «Вступ до математичного аналізу» Для здобувачів вищої освіти за освітнім ступенем бакалавра за спеціальностями: – 281 Публічне управління та адміністрування, – 073 Менеджмент. Інституту бізнесу, економіки та інформаційних технологій (ІБЕІТ) / Укладач: О.В. Жарова. – Одеса: НУ "ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА", 2022 - 23 с.

Укладач: О.В. Жарова, канд. фіз.-мат. наук, доц.

ЗМІСТ

Вступ.....	4
Розділ «Вступ до математичного аналізу».....	5
ІНДИВІДУАЛЬНІ ДОМАШНІ ЗАВДАННЯ.....	19

Мета практичних занять – організація детального розгляду окремих теоретичних положень дисципліни; формування вмінь та навичок їх практичного застосування шляхом виконання здобувачами індивідуальних завдань.

В ході практичних занять відбувається розширення, поглиблення й деталізація наукових знань, отриманих здобувачами на лекціях та в процесі самостійної роботи і спрямованих на підвищення рівня засвоєння навчального матеріалу, прищеплення умінь і навичок, розвиток наукового мислення та усного мовлення здобувачів.

В результаті проведення практичних занять здобувач повинен:

- оволодіти необхідним математичним апаратом, його основними положеннями, прийомами, методами (технікою виконання матричних операцій; аналітичними методами розв'язання задач; операцією диференціювання);
- вміти дати математичний опис (моделювати) економічних процесів з умови задачі, починаючи від простого моделювання у вигляді нескладних функціональних залежностей і кінчаючи функціональними рівняннями, аналізувати отриману математичну модель, з'ясувати реальний зміст параметрів, з якими припущеннями математична модель описує реальний процес, аналізувати отриманий результат).

Самостійна робота є основним засобом засвоєння здобувачем навчального матеріалу в час, вільний від обов'язкових навчальних занять.

Співвідношення обсягів аудиторних занять і самостійної роботи здобувачів визначається навчальним планом підготовки бакалаврів спеціальності 281 «Публічне управління та адміністрування», з урахуванням специфіки та змісту дисципліни, її місця, значення і дидактичної мети в реалізації освітньо-професійної програми.

– РОЗПОДІЛ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ ЗДОБУВАЧА

– 1 семестр

№ зп	Зміст роботи	Кількість годин
1	Самостійне опрацювання теоретичного матеріалу	34
2	Підготовка до практичних занять	27
3	Підготовка до екзамену	30
	Разом	91

6. $\varphi(x) = \lg \frac{1-x}{1+x}$. Перевірити рівність $\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$.

7. $f(x) = \lg x$; $\varphi(x) = x^3$. Записати вирази:

а) $f(\varphi(2))$. Відповідь. $3 \lg 2$.

б) $f(\varphi(a))$. Відповідь. $3 \lg a$.

в) $\varphi(f(a))$. Відповідь. $(\lg a)^3$.

8. Знайти області визначення функцій та побудувати їх графіки:

а) $y = \sqrt{4-x^2}$; Відповідь. $|x| \leq 2$.

б) $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{3-x}$; Відповідь. $-1 \leq x \leq 3$.

в) $y = 1 - \sqrt{2 \cos 2x}$; Відповідь. $-\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi$.

г) $y = 4 / \left(1 + \sqrt{x^2 - 4}\right)$; Відповідь. $|x| \geq 2$.

д) $y = \lg(3x-1) + 2 \lg(x+1)$; Відповідь. $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

е) $y = 2^{-x^2}$. Відповідь. $(-\infty, \infty)$.

9. Побудувати графіки функцій:

а) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, б) $y = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$,

в) $y = \operatorname{tg} \frac{1}{2} x$, г) $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{4}\right)$,

д) $y = x^3 + 1$, е) $y = 4 - x^3$,

є) $y = x^4$, ж) $y = x^5$,

з) $y = |x|$, и) $y = \log_2 |x|$,

і) $y = \begin{cases} 1+x & \text{при } -1 \leq x \leq 0, \\ 1-2x & \text{при } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$

й) $y = \begin{cases} x^3 & \text{при } x \leq 1, \\ x & \text{при } x > 1. \end{cases}$

Границя числової послідовності

Приклад. Довести, що границею послідовності $x_n = \frac{2n+3}{n+5}$ є число $a = 2$.

Задамо число $\varepsilon > 0$, тоді

$$|x_n - a| = \left| \frac{2n+3}{n+5} - 2 \right| = \left| \frac{2n+3-2n-10}{n+5} \right| = \left| \frac{-7}{n+5} \right| = \frac{7}{n+5}.$$

З нерівності $|x_n - a| < \varepsilon$ маємо $\frac{7}{n+5} < \varepsilon$ або $n > \frac{7}{\varepsilon} - 5$. Звідки $N = \left[\frac{7}{\varepsilon} - 5 \right]$.

Приклад. Знайти $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 3n^2 - 5n + 6}{6 - 2n + 7n^2}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 3n^2 - 5n + 6}{6 - 2n + 7n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(1 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2} + \frac{6}{n^3}\right)}{n^2 \left(\frac{6}{n^2} - \frac{2}{n} + 7\right)} = \infty.$$

Приклад. Знайти $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right)$.

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - 0 = 1. \end{aligned}$$

Завдання для перевірки знань

1. Довести, що при $n \rightarrow \infty$ послідовність $3, 2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}, 2\frac{1}{4}, \dots, 2 + \frac{1}{n}, \dots$ має границею число 2.

2. Довести, що при $n \rightarrow \infty$ послідовність $\frac{7}{3}, \frac{10}{5}, \frac{13}{7}, \dots, \frac{3n+4}{2n+1}, \dots$ має границею число 1,5.

Знайти границі послідовностей:

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(5n+1)}{n^2+2}$. Відповідь. 0.

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+6n+7}{2-n^2-3n^3}$. Відповідь. $-\frac{1}{3}$.

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n}+n+1}{5n^3-\sqrt[4]{n}+3}$. Відповідь. 0.

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n}$. Відповідь. 1.

7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2}$. Відповідь. $\frac{1}{2}$.

8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$. Відповідь. 3.

9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3-100n^2+1}{100n^2+15n}$. Відповідь. ∞ .

10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1000n^3+3n^2}{0,001n^4-100n^3+1}$. Відповідь. 0.

11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^4+(n-1)^4}$. Відповідь. 0.

12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^4-(n-1)^4}{(2n+1)^4+(n-1)^4}$. Відповідь. $\frac{15}{17}$.

13. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$. Відповідь. 1.

14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1}$. Відповідь. 0.

15. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+1}+n)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$. Відповідь. 4.

$$16. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 - 2n^2 + 1} + \sqrt[3]{n^4 + 1}}{\sqrt[4]{n^6 + 6n^5 + 2} - \sqrt[5]{n^7 + 3n^3 + 1}}. \quad \text{Відповідь. 1.}$$

$$17. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^5 + 2} - \sqrt[3]{n^2 + 1}}{\sqrt[5]{n^4 + 2} - \sqrt{n^3 + 1}}. \quad \text{Відповідь. 0.}$$

$$18. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)! - n!}. \quad \text{Відповідь. 0.}$$

$$19. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!}. \quad \text{Відповідь. 0.}$$

$$20. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!}. \quad \text{Відповідь. 1.}$$

$$21. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}}. \quad \text{Відповідь. } \frac{4}{3}.$$

$$22. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (1 + 2 + 3 + \dots + n). \quad \text{Відповідь. } \frac{1}{2}.$$

$$23. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right). \quad \text{Відповідь. } \frac{1}{2}.$$

$$24. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 1}{2^n + 1}. \quad \text{Відповідь. 1.}$$

$$25. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^n} - 1}{\frac{1}{2^n} + 1}. \quad \text{Відповідь. 0.}$$

Границя функції. Лівостороння та правостороння границі функції в точці є односторонніми границями цієї функції.

Приклад.. Знайти $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$.

Тут чисельник та знаменник дроби прямують до нуля при $x \rightarrow 3$ (невизначеність вигляду $\left[\frac{0}{0} \right]$).

Оскільки $\frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)} = \frac{x+3}{x}$ при $x \neq 3$, то $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x} = 2$. Звідси

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = 2.$$

Приклад. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1} = \left[\frac{0}{0} \right]$.

Розкладемо на множники чисельник та знаменник дроби:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2(x-1) - (x-1)}{x^2(x+1) - (x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)(x+1)^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x+1} = \frac{0}{2} = 0. \end{aligned}$$

Приклад. Знайти

$$\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^3 - 100}{x^3 - 20x^2 + 100x} = \left[\frac{0}{0} \right].$$

Маємо:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^3 - 1000}{x^3 - 20x^2 + 100x} &= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{(x-10)(x^2 + 10x + 100)}{x(x-10)^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^2 + 10x + 100}{x(x-10)}.\end{aligned}$$

Чисельник дробу прямує до 300, а знаменник — до нуля, тобто є н.м.в. Таким чином, заданий дріб — н.в.в. (нескінченно велика величина):

$$\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^3 - 1000}{x^3 - 20x^2 + 100x} = \infty.$$

Приклад. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} = \left[\frac{0}{0} \right]$.

Домножимо чисельник та знаменник дробу на суму $\sqrt{x+4} + 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+4} - 2)(\sqrt{x+4} + 2)}{x(\sqrt{x+4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+4} + 2} = \frac{1}{4}.$$

Приклад. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{(1+x)^3} - 1}{x} = \left[\frac{0}{0} \right]$.

Покладемо $1+x = y^5$, тоді

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{(1+x)^3} - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^3 - 1}{y^5 - 1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^2 + y + 1}{y^4 + y^3 + y^2 + y + 1} = \frac{3}{5}.$$

Приклад. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{4x^3 + 3x^2 + 2x + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

Поділимо чисельник та знаменник на старший степінь x , тобто на x^3 :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{4x^3 + 3x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3}}{4 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = \frac{1}{4}.$$

Приклад. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2}{\sqrt{x^8 + 3x + 4}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

Поділимо чисельник та знаменник на x^4 :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2}{\sqrt{x^8 + 3x + 4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{2}{x^4}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x^7} + \frac{4}{x^8}}} = \frac{3}{1} = 3.$$

Приклад. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 8x + 3} - \sqrt{x^2 + 4x + 3} \right) = [\infty - \infty]$.

Помножимо та поділимо заданий вираз на $\sqrt{x^2 + 8x + 3} + \sqrt{x^2 + 4x + 3}$

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 8x + 3} - \sqrt{x^2 + 4x + 3} \right) = \\
& = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + 8x + 3} - \sqrt{x^2 + 4x + 3} \right) \left(\sqrt{x^2 + 8x + 3} + \sqrt{x^2 + 4x + 3} \right)}{\sqrt{x^2 + 8x + 3} + \sqrt{x^2 + 4x + 3}} = \\
& = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 8x + 3 - x^2 - 4x - 3}{\sqrt{x^2 + 8x + 3} + \sqrt{x^2 + 4x + 3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 8x + 3} + \sqrt{x^2 + 4x + 3}} = \\
& = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{8}{x} + \frac{3}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}}} = \frac{4}{2} = 2.
\end{aligned}$$

Приклад. Знайти $\lim_{x \rightarrow 3 \pm 0} \left(x + 2^{\frac{1}{x-3}} \right)^{-1}$.

Якщо $x \rightarrow 3-0$, то $\frac{1}{x-3} \rightarrow -\infty, 2^{\frac{1}{x-3}} \rightarrow 0$; $\lim_{x \rightarrow 3-0} \left(x + 2^{\frac{1}{x-3}} \right)^{-1} = \frac{1}{3}$.

Якщо $x \rightarrow 3+0$, то $\frac{1}{x-3} \rightarrow +\infty, 2^{\frac{1}{x-3}} \rightarrow +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 3+0} \left(x + 2^{\frac{1}{x-3}} \right)^{-1} = 0$.

Завдання для перевірки знань

1. Знайти $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5}{x^2 - 3}$. Відповідь. 9.
2. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{1-x}$. Відповідь. ∞ .
3. Знайти $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x^4 + x^2 + 1}$. Відповідь. 0.
4. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x}$. Відповідь. 0.
5. Знайти $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$. Відповідь. $-\frac{2}{5}$.
6. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2 - 1}$. Відповідь. $\frac{1}{2}$.
7. Знайти $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}$. Відповідь. 6.
8. Знайти $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 8x + 12}$. Відповідь. $\frac{1}{2}$.
9. Знайти $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$. Відповідь. $\frac{1}{6}$.
10. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 3x + 2}$. Відповідь. -2.
11. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$. Відповідь. ∞ .

12. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^2} \right)$. *Відповідь.* -1 .
13. Знайти $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x(x-2)^2} - \frac{1}{x^2-3x+2} \right)$. *Відповідь.* ∞ .
14. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+2}{x^2-5x+4} + \frac{x-4}{3(x^2-3x+2)} \right)$. *Відповідь.* 0 .
15. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$ (m та n — цілі числа). *Відповідь.* $\frac{m}{n}$.
16. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x}{x^4 - 3x^2 + 1}$. *Відповідь.* 0 .
17. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 5x}{x^2 - 3x + 1}$. *Відповідь.* ∞ .
18. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1}$. *Відповідь.* $\frac{1}{2}$.
19. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}$. *Відповідь.* -1 .
20. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2+1} - x \right)$. *Відповідь.* 0 .
21. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{2x^2-1} - \frac{x^2}{2x+1} \right)$. *Відповідь.* $\frac{1}{4}$.
22. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2}{2x+1} - \frac{(2x-1)(3x^2+x+2)}{4x^2} \right)$. *Відповідь.* $-\frac{1}{2}$.
23. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(x+1)^{10} + (x+2)^{10} + \dots + (x+100)^{10}}{x^{10} + 10^{10}} \right)$. *Відповідь.* 100 .
24. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x-x}}$. *Відповідь.* -1 .
25. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1} - \sqrt[5]{x^4+1}}$. *Відповідь.* 1 .
26. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{x^7+3} + \sqrt[4]{2x^3-1}}{\sqrt[6]{x^8+x^7+1} - x}$. *Відповідь.* ∞ .
27. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4+3} - \sqrt[5]{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^7+1}}$. *Відповідь.* 0 .
28. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$. *Відповідь.* 0 .
29. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x^2}$. *Відповідь.* ∞ .
30. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{\sqrt{x^2+16} - 4}$. *Відповідь.* 4 .

31. Знайти $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$. Відповідь. $\frac{1}{4}$.
32. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$. Відповідь. 3.
33. Знайти $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$. Відповідь. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, якщо $x > 0$;
 ∞ , якщо $x = 0$.
34. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$. Відповідь. -1.
35. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$. Відповідь. $\frac{1}{3}$.
36. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}$. Відповідь. $\frac{2}{3}$.
37. Знайти $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x-b} - \sqrt{a-b}}{x^2-a^2} (a > b)$. Відповідь. $\frac{1}{4a\sqrt{a-b}}$.
38. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$ (n та m — цілі числа) Відповідь. $\frac{m}{n}$.
39. Знайти $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{x+1}$. Відповідь. $-\frac{1}{4}$.
40. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x}-1}{x^2}$. Відповідь. $\frac{1}{2}$.
41. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$. Відповідь. 3.
42. Знайти $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{7+2x-x^2}}{x^2-2x}$. Відповідь. $\frac{\sqrt{7}}{4}$.
43. Знайти $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2^x+3}{2^x-3}$. Відповідь. $\begin{cases} 1, \text{ якщо } x \rightarrow +\infty \\ -1, \text{ якщо } x \rightarrow -\infty. \end{cases}$
44. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2+ax+b} - \sqrt{x^2+cx+d} \right)$. Відповідь. $\frac{a-c}{2}$.
45. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x} \right)$. Відповідь. 0.
46. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x} \right)$. Відповідь. 0.
47. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x}-1}{x-1}$. Відповідь. $\frac{1}{4}$.
48. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5-1}{x^4-1}$. Відповідь. $\frac{5}{4}$.
49. Знайти $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-10^n}{1+10^{n+1}}$. Відповідь. -0,1.
50. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^4}{1-2x^4} - 2^{\frac{1}{x}} \right)$. Відповідь. -2,5.

51. Знайти $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-10^x}{2+10^{x+1}}$. Відповідь. 1,5.

52. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})$. Відповідь. 0.

53. Знайти $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2+1} - x)$. Відповідь. $\begin{cases} 0, \text{ якщо } x \rightarrow +\infty \\ +\infty, \text{ якщо } x \rightarrow -\infty. \end{cases}$

54. Знайти $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$. Відповідь. $\begin{cases} \frac{1}{2}, \text{ якщо } x \rightarrow +\infty \\ -\infty, \text{ якщо } x \rightarrow -\infty. \end{cases}$

55. Знайти $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{(x+a)(x+b)} - x)$. Відповідь. $\begin{cases} \frac{a+b}{2}, \text{ якщо } x \rightarrow +\infty \\ \infty, \text{ якщо } x \rightarrow -\infty. \end{cases}$

56. Знайти $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2-2x-1} - \sqrt{x^2-7x+3})$. Відповідь. $\pm \frac{5}{2}$.

ОСОБЛИВІ ГРАНИЦІ

Приклад. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x^2} = \left[\frac{0}{0} \right]$.

Маємо

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{5x}{2}}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{5x}{2}}{x} \right)^2 = 2 \left(\frac{5}{2} \right)^2 = \frac{25}{2}.$$

Приклад. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 3x + 7} \right)^x = [1^\infty]$.

Діленням чисельника дробу на знаменник виділяємо цілу частину $\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 3x + 7} = 1 + \frac{8x - 3}{x^2 - 3x + 7}$.

Таким чином,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 3x + 7} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{8x - 3}{x^2 - 3x + 7} \right)^x = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{8x - 3}{x^2 - 3x + 7} \right)^{\frac{x^2 - 3x + 7}{8x - 3}} \right)^{\frac{x(8x - 3)}{x^2 - 3x + 7}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{8x - 3}{x^2 - 3x + 7} \right)^{\frac{x^2 - 3x + 7}{8x - 3}} \right)^{1 - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}}; \end{aligned}$$

оскільки $\frac{8x - 3}{x^2 - 3x + 7} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, то $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{8x - 3}{x^2 - 3x + 7} \right)^{\frac{x^2 - 3x + 7}{8x - 3}} = e$.

Зауважимо, що $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8 - 3/x}{1 - 3/x + 7/x^2} = 8$. Дістанемо:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 3x + 7} \right)^x = e^8.$$

Приклад. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x \sin x)}{\operatorname{tg}(x^2)}$.

Замінімо чисельник та знаменник дробу еквівалентними н.м.в.: $\ln(1 + 3x \sin x) \sim 3x \sin x, \operatorname{tg}(x^2) \sim x^2$, тоді

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x \sin x)}{\operatorname{tg}(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \sin x}{x^2} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 3.$$

Завдання для перевірки знань

1. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} mx}{\sin nx}$. Відповідь. $\frac{m}{n}$.
2. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{1 - \cos 3x}$. Відповідь. $\frac{25}{9}$.
3. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$. Відповідь. $\frac{1}{2}$.
4. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + mx)}{x}$. Відповідь. m .
5. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - x}{\ln(x + 1)}$. Відповідь. 2 .
6. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}$ ($n, m \in \mathbb{N}$). Відповідь. $\begin{cases} 0, & \text{якщо } n > m \\ 1, & \text{якщо } n = m \\ \infty, & \text{якщо } n < m \end{cases}$.
7. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin 2x}$. Відповідь. $\frac{3}{4}$.
8. Знайти $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt[3]{(1 - \cos \alpha)^2}}$. Відповідь. ∞ .
9. Знайти $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos \alpha)^2}{\operatorname{tg}^3 \alpha - \sin^3 \alpha}$. Відповідь. ∞ .
10. Знайти $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$. Відповідь. $-\frac{3}{2}$.
11. Знайти $\lim_{y \rightarrow a} \left(\sin \frac{y - a}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi y}{2a} \right)$. Відповідь. $-\frac{a}{\pi}$.
12. Знайти $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$. Відповідь. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
13. Знайти $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x}$. Відповідь. 2 .
14. Знайти $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(2x \operatorname{tg} x - \frac{\pi}{\cos x} \right)$. Відповідь. -2 .
15. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(a + x) - \cos(a - x)}{x}$. Відповідь. $-2 \sin a$.
16. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2}$. Відповідь. $\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}$.

17. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x) - \sin(a-x)}{\operatorname{tg}(a+x) - \operatorname{tg}(a-x)}$. Відповідь. $\cos^3 a$.
18. Знайти $\lim_{\alpha \rightarrow \beta} \frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\alpha^2 - \beta^2}$. Відповідь. $\frac{\sin 2\beta}{2\beta}$.
19. Знайти $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+2h) - 2\sin(a+h) + \sin a}{h^2}$. Відповідь. $-\sin a$.
20. Знайти $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(a+2h) - 2\operatorname{tg}(a+h) + \operatorname{tga}}{h^2}$. Відповідь. $\frac{2 \sin a}{\cos^3 a}$.
26. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+3} \right)^{x+1}$. Відповідь. e^{-1} .
27. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+5}{3x+7} \right)^{3x+2}$. Відповідь. e^{-2} .
28. Знайти $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x+2}{3x+4} \right)^{2x}$. Відповідь. $\begin{cases} 0 & \text{при } x \rightarrow +\infty \\ \infty & \text{при } x \rightarrow -\infty \end{cases}$.
29. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2}$. Відповідь. e^2 .
30. Знайти $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x+1}{2x-1} \right)^x$. Відповідь. $\begin{cases} 0 & \text{при } x \rightarrow +\infty \\ \infty & \text{при } x \rightarrow -\infty \end{cases}$.
31. Знайти $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)^x$. Відповідь. $\begin{cases} \infty & \text{при } x \rightarrow +\infty \\ 0 & \text{при } x \rightarrow -\infty \end{cases}$.
32. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^x$. Відповідь. 1 .
33. Знайти $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x^2}$. Відповідь. $\begin{cases} \infty & \text{при } x \rightarrow +\infty \\ 0 & \text{при } x \rightarrow -\infty \end{cases}$.
34. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\operatorname{cosec} x}$. Відповідь. e .
35. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x} \right)^{\frac{1}{2x}}$. Відповідь. \sqrt{e} .
36. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{x \ln x}$. Відповідь. 1 .
37. Знайти $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{x-2}}$. Відповідь. \sqrt{e} .
38. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\ln^2(1+2x)}$. Відповідь. $9/4$.
39. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1+x-3x^2+2x^3)}{\ln(1+3x-4x^2+x^3)}$. Відповідь. $-1/2$.
40. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\ln(1+x^2)}$. Відповідь. $-1/2$.
41. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}$. Відповідь. -2 .

42. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1}$. Відповідь. e .

43. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$. Відповідь. 2 .

44. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{x}$. Відповідь. 1 .

45. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$. Відповідь. $a - b$.

46. Задана функція $y = x^3$.

а) Показати, що Δy та Δx при $x \rightarrow 0$ ($x \neq 0$) є н.м.в. одного порядку мализни.

б) Перевірити, що при $x = 0$ змінна величина Δy є н.м.в. вищого порядку мализни, ніж н.м.в. Δx

в) При якому значенні x прирости Δx та Δy будуть еквівалентними н.м.в? Відповідь.

$$x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

Приклад. Показати, що при $x = 4$ функція $y = \frac{x}{x-4}$ має розрив.

Знаходимо $\lim_{x \rightarrow 4-0} \frac{x}{x-4} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 4+0} \frac{x}{x-4} = +\infty$.

Таким чином, функція при $x \rightarrow 4$ не має ні правої, ні лівої скінченної границі. Звідси, $x = 4$ є точкою розриву 2-го роду.

Приклад. Показати, що при $x = 4$ функція $y = \arctg \frac{1}{x-4}$ має розрив.

Якщо $x \rightarrow 4-0$, то $\frac{1}{x-4} \rightarrow -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 4-0} y = -\frac{\pi}{2}$. Якщо $x \rightarrow 4+0$, то $\frac{1}{x-4} \rightarrow +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 4+0} y = \frac{\pi}{2}$. Таким чином, при $x \rightarrow 4$ функція має ліву та праву скінченні границі, причому ці границі різні. Звідси, $x = 4$ є точкою розриву 1-го роду.

Приклад. Показати, що при $x = 5$ функція $y = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$ має розрив.

У точці $x = 5$ функція має невизначеність $\left[\frac{0}{0} \right]$. В інших точках дріб скорочується на $x - 5$, оскільки $x - 5 \neq 0$. Звідси, при $x \neq 5$ $y = x + 5$. Легко показати, що

$$\lim_{x \rightarrow 5-0} y = \lim_{x \rightarrow 5+0} y = 10.$$

Таким чином, при $x = 5$ функція має усувний розрив. Його можна усунути, якщо домовитися, що при $x = 5$ $y = 10$.

Звідси можна вважати, що функція $y = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$ неперервна при всіх значеннях x , якщо вважати, що рівність $\frac{x^2 - 25}{x - 5} = x + 5$ справджується при всіх значеннях x , включаючи і саму точку $x = 5$. У цьому випадку графіком функції буде пряма лінія $y = x + 5$.

Завдання для перевірки знань

1. Знайти точки розриву функції $y = 1/((x-1)(x-5))$.

Відповідь. $x = 1, x = 5$ — точки розриву 2-го роду.

2. Який характер розриву функції $y = 1/(1 - e^{1-x})$ в точці $x = 1$?

Відповідь. $x = 1$ — точка розриву 2-го роду.

3. Знайти точки розриву функції

$$y = (\operatorname{tg} \arctg(1/(x-3)))/(x(x-5)).$$

Відповідь. $x = 3$ — точка розриву 1-го роду; $x = 5$ — точка розриву 2-го роду; $x = 0$ — точка усувного розриву; $x = \frac{\pi}{2} + \pi n (0, 1, 2, \dots)$ — точки розриву 2-го роду.

4. Знайти точки розриву функції

$$y = (x^3 - 6x^2 + 11x - 6)/(x^2 - 3x + 2).$$

Відповідь. $x = 1, x = 2$ — точки усувного розриву.

5. Знайти точки розриву функції $y = 1/(x^2 + x + 1)$.

Відповідь. Функція неперервна на всій числовій прямій $(-\infty, +\infty)$.

6. Дослідити на неперервність функцію $y = \frac{1}{(x-1)(x-6)}$ на сегменті: а) $[2, 5]$; б) $[4, 10]$; в) $[0, 7]$.

Відповідь. а) функція неперервна; б) має одну точку розриву 2-го роду; в) має дві точки розриву 2-го роду.

7. Дослідити на неперервність функцію $y = 1/(x^4 - 26x^2 + 25)$ на сегменті: а) $[6, 10]$; б) $[-2, 2]$; в) $[-6, 6]$.

Відповідь. а) функція неперервна; б) має дві точки розриву 2-го роду; в) має чотири точки розриву 2-го роду.

8. Знайти точки розриву функції $y = (2^{1/(x-2)} - 1)/(2^{1/(x-2)} + 1)$.

Відповідь. $x = 2$ — точка розриву 1-го роду.

9. Дослідити на неперервність та побудувати графік функції

$$y = \begin{cases} 0,5x^2 & \text{при } |x| < 2, \\ 2,5 & \text{при } |x| = 2, \\ 3 & \text{при } |x| > 2. \end{cases}$$

Відповідь. $x = \pm 2$ — точки розриву 1-го роду (розрив неусувний).

10. Дослідити на неперервність та побудувати графік функції

$$y = \frac{1}{(1 + 2^{\frac{1}{x}})}$$

Відповідь. $x = 0$ — точка розриву 1-го роду (розрив неусувний).

11. Дослідити на неперервність та побудувати графік функції

$$y = \operatorname{arctg} \frac{a}{x-a}$$

Відповідь. $x = a$ — точка розриву 1-го роду.

12. Дослідити на неперервність та побудувати графік функції

$$y = \frac{x^3 - x^2}{2|x-1|}$$

Відповідь. $x = 1$ — точка розриву 1-го роду (розрив неусувний).

13. Дослідити на неперервність та побудувати графік функції

$$y = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{якщо } x > 1, \\ x + 1, & \text{якщо } x < 1, \\ 3, & \text{якщо } x = 1. \end{cases}$$

Відповідь. $x = 1$ — точка розриву 1-го роду (розрив усувний).

ІНДИВІДУАЛЬНІ ДОМАШНІ ЗАВДАННЯ

Задача 20. Обчислити границі числових послідовностей.

1	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^2 - (n+1)^2}{n^2 + n + 1}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 - 6n + 7}{3n^2 + 20n - 1} \right)^{1-n}$
2	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^2 + (3+n)^2}{(3-n)^2 - (3+n)^2}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt[3]{n^3-5})n\sqrt{n}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2} \right)^{n^4}$
3	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-4n)^2}{(n-3)^3 - (n+3)^3}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n-3})$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^2+3n-1}{5n^2+3n+3} \right)^{n^3}$
4	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n+2)^3}{(3n+2)^2 + (n+1)^2}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[3]{5+8n^3} - 2n)$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-10}{n+1} \right)^{3n+1}$
5	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^2 - (n-2)^2}{(n+3)^2}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n(n-1)})$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+5n+7}{2n^2+5n+3} \right)^n$
6	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+5n-7}{(n+2)^3 - (n-2)^3}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(\sqrt[3]{n^3+5} - \sqrt[3]{n^3+3})$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3+n}{n^3+2} \right)^{2n^2}$
7	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)! - (n+2)!}{(n+3)!}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2-3})$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+n-1}{n^2+n+1} \right)^n$
8	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^3 - 8n^3}{(2n+1)^2 + 4n^2}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3+2n^2} - n)$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n-7}{6n+4} \right)^{3n+2}$
9	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 + (n-1)^2}{n^3 - 3n}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{(n^2+1)(n^2-4)} - n^2)$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n^2+4n-1}{4n^2+2n+3} \right)^{1-2n}$
10	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(6-n)^2 - (6+n)^2}{(6+n)^2 - (1-n)^2}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{(n+2)^2} - \sqrt[3]{n^2})$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1} \right)^{n+1}$
11	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^3}{(n+1)^2 - (n-1)^3}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n(n+5)} - n)$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7n^2+8n-5}{7n^2+2n+1} \right)^{n+2}$
12	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 - (n-1)^2}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{n(n-1)})\sqrt[3]{n}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+5} \right)^{n+4}$
13	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 - (n+2)^3}{(4-n)^3}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^4+3} - \sqrt{n^4-2})$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+n+2}{n^2+n+1} \right)^{3n+5}$
14	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-1)! + (3n+1)!}{(3n)!(n-1)}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} (n + \sqrt[3]{4-n^3})$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{3n-1} \right)^{2n+3}$
15	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^3 - (n-5)^2}{8n^3 - 2n}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n+3})$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+7n}{2n^2+3n} \right)^{-n^2}$
16	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^2 + (n+3)^2}{(n+5)^2 + (n-5)^2}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} n^3(\sqrt[3]{n^8+4n^2} - \sqrt[3]{n^8-1})$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{10n-3}{10n-1} \right)^{5n}$
17	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{n^3 - 3n}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2-2n} - \sqrt{n^2-3})$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-3n+6}{n^2+5n+1} \right)^{n/2}$

18	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+6)^3 - (n+1)^3}{(2n+3)^2 + (n+4)^2}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[3]{2+27n^3} - 3n \right)$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{13n+3}{13n-16} \right)^{n-3}$
19	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+9)^2 + (3n+1)^2}{(n+6)^3 - (n+1)^3}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{n^3+2} - \sqrt{n^3-1} \right)$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2+4n-1}{3n^2+2n+7} \right)^{n+1}$
20	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^4 - (n-2)^4}{n^4 - 2n^2 - 1}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2n + \sqrt[3]{3-8n^3} \right)$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+3} \right)^{n+2}$
21	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+4n+7}{(2n-1)^2 - (n+1)^2}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \sqrt{n^2+n+1} \right)$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+2n+3}{2n^2+2n+1} \right)^{n^2}$
22	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)! + (2n+2)!}{(2n+3)!}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\sqrt[3]{n^3+4} - \sqrt[3]{n^3+2} \right)$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1} \right)^{n+1}$
23	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-2)^3}{n^2 + 2n - 3}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\sqrt{n^5-n} - \sqrt{n^5-8} \right)$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-6n+5}{n^2-5n+5} \right)^{n+2}$
24	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - (n-1)^3}{(n+1)^4 - n^4}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^3+5n^2+4n-n} \right)$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n^2}$
25	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-1)^2 - (n+2)^2}{4n^2 + (2n-5)^2}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2-3n+2} - n \right)$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n^2+n+3}{6n^2+n+4} \right)^{2n^2}$
26	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^2 - n^3}{(n+1)^3 - (n+1)^2}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left((n+1)^{2/3} - (n-2)^{2/3} \right)$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+4}{n+2} \right)^n$
27	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-2n)^4}{(3n+2)^3 + (n+3)^3}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \sqrt{(n+1)(n+2)} \right)$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2-5n}{3n^2-5n+7} \right)^n$
28	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n+2)!}{(n-1)! + (n+2)!}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^4-3n^2} - \sqrt{n^4-9} \right)$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+5}{n-7} \right)^{n+1}$
29	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^4 - (2-n)^4}{(1-n)^4 - (1+n)^4}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left(\sqrt{n+3} - \sqrt{n-4} \right)$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+7n-1}{2n^2+3n-1} \right)^{n^2}$
30	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5-n)^2 - (4+n)^2}{(3+n)^2 - (2-n)^2}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(\sqrt[3]{n^6+n^3} - \sqrt[3]{n^6+2} \right)$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+1} \right)^{-n^2}$

Задача 21. Обчислити границі функцій, користуючись відомими границями функцій та наслідками з них.

1	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(7^{2x} - 1)}{\ln(1 + 3x)}$	$\lim_{x \rightarrow 1} (2 - x)^{\frac{1}{\sin(x-1)}}$	$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{1 - \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \operatorname{tg} x}}{\sin 2x}$
2	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x} - 1}{\arcsin x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 4x + 2x^2)^{\frac{1}{x^2}}$
3	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x + 3}{3x^2 - x - 2}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(1 + 10x)}{\log_7(1 + 5x)}$	$\lim_{x \rightarrow 1} (2 - x)^{\sec \frac{\pi x}{2}}$
4	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{e^{5x} - 1}$	$\lim_{x \rightarrow 0} (e^{x^2} + \cos x)^{\frac{1}{x^2}}$
5	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - x - 6}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{3^x - 1}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin 2x}{\sin 5x - \sin 4x}$
6	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 4x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1+x} - 1}{\sqrt[5]{1+2x} - 1}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3+x}{7+x} \right)^{\operatorname{cosec}(2/x)}$
7	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{1 + \cos 2x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{\operatorname{tg} x} - 3^{\sin x}}{\operatorname{tg}^3 2x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 7x - 1}{\sqrt[3]{1 + 3x^2} - 1}$
8	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos 2x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\sqrt{1 - 3x^2} - 1}$	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4^{x-2} - 1}{3^{x-2} - 1}$
9	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^2 - 3x + 2}$	$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{5^x - 5^5}{\operatorname{arctg}(x - 5)}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{3 + 2x}$
10	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 6x + 8}{x^3 + 8}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos x} - 1}{\sqrt[5]{\cos 2x} - 1}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[5]{x} - 1}{e^{x-1} - 1}$
11	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{\log_3(3 + x^2) - 1}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{\ln(1 - 2x)}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{\sin(x - 1)}$
12	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[5]{x^4} - 1}{\sqrt{x^3} - 1}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{2^{\sin 3x} - 1}$
13	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arcsin(1 - x)}{1 - x^2}$	$\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln(\ln x)}{2x - 2e}$	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x}$
14	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 5x + 1}{3 + 14x^2 + 2x}$	$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 10x}{\sin 9x}$	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\log_3 x - 1}{x - 3}$
15	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 5x}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 1}{x^{10} - 1}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \ln \frac{3x - 1}{3x - 6} \right)$
16	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 7x}{1 - 2x^3}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sqrt{x+1} - 1}$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^3 + 1} - \sqrt{4x^2 - 1}}{x + 7}$
17	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x^2}$	$\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$	$\lim_{x \rightarrow 1/6} \frac{2^{3x} - \sqrt{2}}{6x - 1}$
18	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[5]{x}}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos x} - 1}{\sin^2 3x}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2x \ln \frac{3+x}{4+x} \right)$
19	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}$	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\cos 2x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 3x} \right)^{1/x}$

20	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos \alpha x}{\ln \cos \beta x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{1/x}$
21	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 1)^{50}}{(x + 1)^{100}}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x \sqrt[3]{3x^2 + 1}}{x \ln \cos 3x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{2x}$
22	$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(2x - 1)}{4x^2 - 1}$	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(\log_2 x)}{x - 2}$	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$
23	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{1 - \operatorname{ctg} x}$	$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sin x}{\sin 2} \right)^{\frac{1}{x-2}}$	$\lim_{x \rightarrow 5} \left(2 - \frac{x}{5} \right)^{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{5}}$
24	$\lim_{x \rightarrow 10} \frac{\lg(x/10)}{x - 10}$	$\lim_{x \rightarrow \pi/4} (\sin 2x)^{\operatorname{tg}^2 2x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\sqrt{1 + x \sin x} - \cos x}$
25	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4^x - 64}{x - 3}$	$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[2]{1 + \sin x} - 1 + \operatorname{tg} x}{x}$
26	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\arcsin(x + 2)}{x^2 + 2x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^x}{x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \sin 2x}{\sqrt[3]{1 + x^3} - 1}$
27	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 10x}{1 - \cos 15x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} (e^{3x} + x)^{\frac{1}{x}}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(a + x) - \cos(a - x)}{x}$
28	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x}{\sec 2x - 1}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^{3x}}{\sin 4x - \sin 3x}$	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cos(3x - 9) - \cos(2x - 6)}{\sqrt{x^2 - 6x + 10} - 1}$
29	$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin^2 x)^{\frac{1}{\ln \cos x}}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{4 + x}{2 + x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + b) + \sin(x - b)}{2x}$
30	$\lim_{x \rightarrow 0} (4^x - 2^x)/x$	$\lim_{x \rightarrow 0} (2^x + \sin 3x)^{\operatorname{ctg} 3x}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(2x + 5) - \ln(2x + 1))$

Задача 22. Знайти точки розриву функції $y = f(x)$, якщо вони існують, та визначити їхній характер. Побудувати схематично графік функції.

1	$y = \begin{cases} \sin x, & x \leq 0, \\ 0, & 0 < x < 1, \\ \lg x, & x \geq 1 \end{cases}$	11	$y = \begin{cases} 2, & x < -1, \\ x^2, & -1 \leq x \leq 1, \\ 2 - x^2, & x > 1 \end{cases}$	21	$y = \begin{cases} e^x, & x < -1, \\ -x^3, & -1 \leq x \leq 1, \\ x - 2, & x > 1 \end{cases}$
2	$y = \begin{cases} -x - 1, & x \leq -1, \\ 0, & -1 < x < 0, \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$	12	$y = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0, \\ \operatorname{tg} x, & 0 < x \leq \pi/4, \\ 2, & x > \pi/4 \end{cases}$	22	$y = \begin{cases} x + 4, & x < -1, \\ x^2 + 2, & -1 \leq x < 1, \\ 2x, & x \geq 1 \end{cases}$
3	$y = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0, \\ x^2 + 1, & 0 < x < 1, \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$	13	$y = \begin{cases} x + 1, & x \leq 0, \\ 1 - x^2, & 0 < x \leq 1, \\ 1/(1 - x), & x > 1. \end{cases}$	23	$y = \begin{cases} 1/x, & x < 0, \\ \sin x, & 0 \leq x < \pi/2, \\ 0, & x \geq \pi/2 \end{cases}$
4	$y = \begin{cases} 3^{-x}, & x \leq -1, \\ 2, & -1 < x \leq 0, \\ \lg x, & x > 0 \end{cases}$	14	$y = \begin{cases} -2 - x, & x \leq -2, \\ 1, & -2 < x < 0, \\ e^x, & x \geq 0 \end{cases}$	24	$y = \begin{cases} 5^x, & x \leq 0, \\ x, & 0 < x \leq 1, \\ x + 1, & x > 1 \end{cases}$
5	$y = \begin{cases} 1/x, & x < 0, \\ x^2, & 0 \leq x < 1, \\ 2 - x, & x \geq 1 \end{cases}$	15	$y = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \leq 1, \\ 2 - x, & 1 < x < 2, \\ 4 - x^2, & x \geq 2 \end{cases}$	25	$y = \begin{cases} x + 1, & x \leq 0, \\ \cos x, & 0 < x \leq \pi, \\ x - \pi, & x > \pi \end{cases}$
6	$y = \begin{cases} 2^x, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 1, \\ x + 1, & x > 1 \end{cases}$	16	$y = \begin{cases} x + 1, & x \leq 0, \\ \cos x, & 0 < x < \pi/4, \\ \sin x, & x \geq \pi/4 \end{cases}$	26	$y = \begin{cases} x + 9, & x < -2, \\ x^2 + 3, & -2 \leq x < 2, \\ 3x, & x \geq 2 \end{cases}$
7	$y = \begin{cases} 2^x, & x \leq 0, \\ 1, & 0 < x \leq 1, \\ 2^{1-x}, & x > 1 \end{cases}$	17	$y = \begin{cases} x^3, & x \leq 0, \\ \operatorname{tg} x, & 0 < x < \pi/2, \\ 1, & x \geq \pi/2 \end{cases}$	27	$y = \begin{cases} 1/x, & x < 0, \\ \operatorname{ctg} x, & 0 < x < \pi/2, \\ \pi/2 - x, & x \geq \pi/2 \end{cases}$
8	$y = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ \sin x, & 0 < x \leq \pi, \\ x - 2, & x > \pi \end{cases}$	18	$y = \begin{cases} e^{-x}, & x \leq -2, \\ 2, & -2 < x \leq 0, \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$	28	$y = \begin{cases} -4 - x, & x \leq -3, \\ 1, & -3 < x < 0, \\ e^{-x}, & x \geq 0. \end{cases}$
9	$y = \begin{cases} 2 + x, & x \leq -1, \\ \sqrt[3]{x}, & -1 < x < 1, \\ 2 - x, & x \geq 1 \end{cases}$	19	$y = \begin{cases} -1/x, & x < 0, \\ \sqrt{x}, & 0 \leq x < 4, \\ 6 - x, & x \geq 4 \end{cases}$	29	$y = \begin{cases} x^3, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 1, \\ 1/(x - 1), & x > 1 \end{cases}$
10	$y = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ \operatorname{ctg} x, & 0 < x < \pi, \\ \pi - x, & x \geq \pi \end{cases}$	20	$y = \begin{cases} -6 - x, & x \leq -8, \\ \sqrt[3]{x}, & -8 < x < 8, \\ 10 - x, & x \geq 8 \end{cases}$	30	$y = \begin{cases} \sin x, & x < \pi/2, \\ \cos x, & \pi/2 \leq x < \pi, \\ -1, & x \geq \pi \end{cases}$