МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

КАФЕДРА ПРОГРАМНИХ І КОМП’ЮТЕРНО-ІНТЕГРОВАНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Методичні вказівки з дисципліни

Динаміка складних систем

(Теоретична частина)

Для студентів інституту штучного інтелекту та робототехніки

Перший (бакалаврський) рівень вищої освіти

Спеціальність: 151 – Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології

Освітньо-професійна програма: Комп'ютерні технології автоматизації.

Одеса 2022

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

КАФЕДРА ПРОГРАМНИХ І КОМП’ЮТЕРНО-ІНТЕГРОВАНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Методичні вказівки з дисципліни

Динаміка складних систем

(Теоретична частина)

Для студентів інституту штучного інтелекту та робототехніки

Перший (бакалаврський) рівень вищої освіти

Спеціальність: 151 – Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології

Освітньо-професійна програма: Комп'ютерні технології автоматизації.

Затверджено на засіданні

кафедри програмних і комп’ютерно-інтегрованих технологій

Протокол № 7 від 26.01.2022 р.

Одеса 2022

Брунеткін, О.І. Методичні вказівки з дисципліни Динаміка складних систем. (Теретична частина): для студ. напряму 151 «Автоматизацiя та комп’ютерно-iнтегрованi технологiї» денної та заочної форм навчань./ Уклад. О.І Брунеткін.; НУ «Одес. Політехніка». – Одеса, 2022. – с.92.

*Адвокат сподівається, що у вас неприємності,*

*Лікар сподівається, що ви захворіли,*

*Поліція сподівається, що ви станете злочинцем,*

*Вчитель сподівається, що ви неосвічені,*

*Виробник трун хоче, щоб ви померли*

*І тільки інженер бажає вам процвітання в житті, щоб він міг збудувати вам будинок, машину, верстат, стадіон. Щоб ви могли жити і працювати, насолоджуватися довгим здоровим життям. Будь ласка, обійми інженера поряд з тобою. Він твій єдиний вірний друг.*

Оглавление

[**Прийняті скорочення** 7](#_Toc113714845)

[**Вступ** 8](#_Toc113714846)

[**1.** **Про що курс лекцій** 10](#_Toc113714847)

[**1.1.** **Кому можна пропустити цей розділ** 10](#_Toc113714848)

[**1.2.** **Ціль та задачі** 10](#_Toc113714849)

[**1.3.** **Предмет курсу та спосіб викладу матеріалу** 10](#_Toc113714850)

[**2.** **Модель та моделювання (***Лекція 1***)** 12](#_Toc113714851)

[**2.1.** **Однозначність термінів** 12](#_Toc113714852)

[**2.2.** **Що таке "модель"** 12](#_Toc113714853)

[**2.3.** **Математична модель (приклад)** 13](#_Toc113714854)

[**2.4.** **Математична модель у диференціальному вигляді (***Лекція 2***)** 15](#_Toc113714855)

[**2.5.** **Універсалізм математичної моделі (приклад)** 16](#_Toc113714856)

[**2.6.** **Формалізм математичної моделі (приклад)** 18](#_Toc113714857)

[**3.** **«Лего-кубики» сучасної інженерії (***Лекція 3***)** 19](#_Toc113714858)

[**3.1.** **Інерційна ланка першого ладу. Рішення** 19](#_Toc113714859)

[**3.2.** **Інерційна ланка першого ладу. Аналіз та обговорення результатів (***Лекція 4***)** 24](#_Toc113714860)

[**3.3.** **Пропорційна (підсилювальна) ланка** 26](#_Toc113714861)

[**3.4.** **Інтегруюча ланка (***Лекція 5***)** 30](#_Toc113714862)

[**3.5.** **Диференціююча ланка** 32](#_Toc113714863)

[**3.6.** **Інерційна ланка другого порядку (***Лекція 6***)** 33](#_Toc113714864)

[**3.7.** **Ланка запізнювання (ланка транспортного запізнення)** 38](#_Toc113714865)

[**4.** **Як поєднуються інженерні «лего-кубики» (***Лекція 7***)** 40](#_Toc113714866)

[**4.1.** **З якою метою поєднують інженерні «лего-кубики»** 40](#_Toc113714867)

[**4.2.** **Послідовне з'єднання ланок** 42](#_Toc113714868)

[**4.3.** **Паралельне з'єднання ланок** 42](#_Toc113714869)

[**4.4.** **Зустрічно-паралельне з'єднання ланок (***Лекція 8***)** 44](#_Toc113714870)

[**4.5.** **Редукція структурних схем** 46](#_Toc113714871)

[**5.** **Особливості застосування інженерних "лего-кубиків" (***Лекція 9***)** 49](#_Toc113714872)

[**5.1.** **Визначення виду стандартних ланок** 49](#_Toc113714873)

[**5.2.** **Лінеарізація (***Лекція 10***)** 55](#_Toc113714874)

[**6.** **Фізичні моделі систем (***Лекція 11***)** 58](#_Toc113714875)

[**6.1.** **Одиниці виміру** 60](#_Toc113714876)

[**6.2.** **Моделі процесів (***Лекція 12***)** 65](#_Toc113714877)

[**6.2.1.** **Процес заповнення ємності** 65](#_Toc113714878)

[**6.2.1.1.** **Просте заповнення ємності** 65](#_Toc113714879)

[**6.2.1.2.** **Заповнення ємності при подачі рідини знизу (**Лекція 13**)** 69](#_Toc113714880)

[**6.2.1.3.** **Заповнення рідиною замкнутої ємності** 73](#_Toc113714881)

[**6.2.1.4.** **Заключение по разделу 6.2.1** 74](#_Toc113714882)

[**6.2.2.** **Теплообмін. Нагрів тел (***Лекція 14***)** 76](#_Toc113714883)

[**6.2.2.1.** **Нагрівання пластини** 76](#_Toc113714884)

[**6.2.2.2.** **Нагрівання циліндра** 80](#_Toc113714885)

[**6.2.2.3.** **Нагрів кулі** 82](#_Toc113714886)

[**6.2.2.4.** **Нагрів пластини, циліндра та кулі. Інженерний підхід та спрощення розрахункових залежностей (**Лекція 15**)** 83](#_Toc113714887)

[**ДОДАТОК** 88](#_Toc113714888)

[**П1. Таблиця перетворень Лапласа** 89](#_Toc113714889)

[**П2. Базові величини розмірностей міжнародної системи СІ** 90](#_Toc113714890)

[**П3. Приставки системи одиниць та їх скорочені позначення для утворення десяткових кратних та дольних одиниць** 90](#_Toc113714891)

[**П4. Одиниці тиску** 91](#_Toc113714892)

[**П5 Діаграма переведення температур** 92](#_Toc113714893)

# **Прийняті скорочення**

|  |  |
| --- | --- |
| ТАУ | – теорія автоматичного управління; |
| ММ | – математична модель; |
| ТС | – технічна система; |

# **Вступ**

Цей курс лекцій читається на другому курсі (4 семестр) бакалаврської підготовки. Він постає як перехідний від загальнонаукових (математика, фізика) і загальнотехнічних (гідравліка, термодинаміка та ін.) до спеціальних дисциплін, у цьому випадку насамперед до ТАУ (теорія автоматичного управління).

Загальноприйнятою практикою, що реалізується у різних курсах, є виклад слухача нового матеріалу. В рамках оцінки кваліфікації, що досягається студентом (з розряду «знати і вміти») такий підхід відповідає поняттю «знати». Мається на увазі, що «уміння» має бути досягнуто у процесі лабораторних (практичних) занять. При цьому вміння після практичних занять слідує і відповідає знанням з відповідного курсу лекцій.

Описаний підхід є прийнятним при знайомстві зі спеціальними предметами. Їх вивчення (отримання знань) є основним завданням бакалаврської підготовки у технічних галузях, а здобуття умінь – основною метою відповідних спеціалізацій. При цьому загальнонаукові та загальнотехнічні дисципліни повинні бути фундаментом та інструментом щодо спеціального предмета. Інакше кажучи, освоєння математики, фізики, гідравліки, термодинаміки тощо. належить до володіння знаннями щодо спеціальних дисциплін. Але, як правило, не приділяється достатньо уваги до формування умінь застосування отриманих загальнонаукових і загальнотехнічних знань у процесі вивчення спеціальних предметів.

Ще однією особливістю при викладі, наприклад, загальнонаукових дисциплін є надмірно великий обсяг матеріалу, що розглядається. Йдеться не про перелік тем, що вивчаються, а про глибину їх розгляду. Багато викладачів мають академічну освіту і не працювали в галузях, які потребують застосування інженерних знань. Їх математика, фізика (і далі за списком) речі у собі: математика заради математики, фізика заради фізики тощо. Їм важко змиритися з підпорядкованістю знань їх предметів щодо спеціальних дисциплін. За всієї важливості загальнонаукових і загальнотехнічних знань є лише фундаментом і інструментом під час вирішення інженерних проблем. Інженеру у своїй діяльності потрібно завжди знати можливості та обмеження цих інструментів. Але в переважній більшості випадків немає необхідності знати чи пам'ятати, чим ці можливості та обмеження обумовлені. Йому не допомагає у роботі знання доказу теорем.

Інженерна діяльність обслуговується, хочу це спеціально наголосити, інженерною наукою. Область і специфіка застосування цієї науки широкі і різноманітні. Однією з афористичних спроб її тлумачення є висловлювання: «Математик вирішує завдання, які вміє, фізик – які розуміє, інженер – ті, що потрібно, але як розуміє і як уміє зараз». Є й інша думка, наприклад, що визначає інженерну діяльність як ремесло. Але результатом роботи ремісника користуються усі. Його праця є замикаючою ланкою в ланцюжку людської діяльності. Інженера потрібно цьому «специфічно» навчати. Йому важливо мати якісний інструмент (знання) та вміти ним користуватися. Але головне його завдання – отримати якісний виріб. Йому не важливо, хто і де зробили інструмент і які при цьому знання та навички застосував. Важливо, щоб у руках був потрібний інструмент.

Більшість підручників та курсів лекцій будуються на основі систематичного викладу матеріалу, що розглядається. Автори, виходячи зі свого досвіду, вибирають (будують) систему, спираючись на яку вони збирається викладати предмет, що вивчається. У рамках цієї системи на початковому етапі викладу описуються загальнонаукові та загальнотехнічні інструменти, які будуть використані. І лише наступному етапі викладається основний матеріал. Викладач, безумовно, має більший досвід, ніж той, хто навчається. В результаті для засвоєння матеріалу, що викладається, студент повинен докласти підвищених зусиль. Образно кажучи викладач, перебуваючи на вершині свого досвіду, сподівається, що й студент дістанеться деяких «вершин» по зазначеному в підручнику шляху. Якщо студентові сил вистачить.

Як показує досвід, такий шлях освоєння нових областей знань не завжди є оптимальним з погляду зусиль, що витрачаються. За успішної практики все відбувається з точністю навпаки. Так дитина, коли вчиться говорити, запам'ятовує слова (факти), а не алфавіт, відмінювання, відмінювання (інструменти для їх зв'язку). І лише у школі відбувається оформлення вміння говорити в оболонку правил. До двох років усі діти, як правило, швидко говорять (хоча і кострубато). Спроба багаторічного вивчення іноземних мов за «науковою» схемою (починаючи з алфавіту) далеко не завжди дає такий же успішний результат. Історія науки також свідчить про первісне знайомство з фактами. І лише потім оформлення їхніх взаємозв'язків у формі законів. Мабуть такий підхід по зусиллям, що прикладаються, найменш витратний для учня при засвоєнні заданого обсягу матеріалу.

Можна спробувати ще більше оптимізувати процес навчання з допомогою додаткових зусиль викладача. Слід спростити матеріал для збільшення обсягу і глибини його засвоєння. У цьому немає протиріччя. Для пояснення ідеї можна скористатися такою метафорою. Розглянемо викладача як джерело сигналу (знань) з деяким вихідним опором *R*вих (і, відповідно, провідністю λвих=1/*R*вих). Студент виступатиме як приймач сигналу (знань) з деяким вхідним опором *R*вх (і провідністю λвх=1/*R*вх). Елементарні знання в електротехніці дозволяють розглянути проблему узгодження опорів *R*вих і *R*вх і, як наслідок, максимізації потужності та енергії сигналу, що передається (обсягу знань).

З позицій електротехніки зменшення *R*вих (збільшення λвих) і збільшення *R*вх (зменшення λвх) веде до збільшення амплітуди (напруги) переданого сигналу, але не забезпечує можливого максимуму потужності, що передається. З позицій навчання така ситуація виглядає так:

* викладач у підручнику, на основі великого досвіду та знань, викладає великий обсяг одразу систематизованої інформації (висока провідність). При цьому прагнуть забезпечити максимально можливий тиск потоку відомостей (напруга, амплітуда вхідного сигналу) у бік студента;
* студент, в силу своєї непідготовленості (велике *R*вх), не може виділити найважливіші для його майбутньої інженерної діяльності елементи з потоку знань, що подається йому, не засвоює значну частину цього потоку.

З позицій електротехніки максимальна потужність може бути передана за рівності *R*вих і *R*вх. З позицій навчання за заданого великого вхідного опору студента має бути збільшений і вихідний опір (знижена провідність) викладача. Він повинен забезпечити на кожному етапі навчання відповідність рівня потоку знань, що подається, з можливістю студента його засвоювати. Іншими словами, рівень знань, що передаються на початковому етапі навчання, повинен бути знижений.

З позицій електротехніки вирівнювання *R*вих і *R*вх і збільшення потужності, що передається, до максимально можливого значення може призвести до несприятливих умов роботи джерела сигналу (викладача). Він може перегрітись. З позицій навчання необхідно враховувати.

Текст курсу лекцій поділено на основну та додаткову частини. Додаткова частина подається у вигляді вставок за основним текстом з використанням дрібнішого шрифту. Додаткові матеріали можуть бути використані для поглиблення знань у процесі самостійної роботи студентів.

# **Про що курс лекцій**

## **Кому можна пропустити цей розділ**

Якщо студент **молодших** курсів **вперше** знайомиться з матеріалом, що викладається, то може **пропустити** цей розділ. До нього варто повернутися після знайомства з текстом для узагальнення та структуризації здобутих знань.

Цілі та завдання формулюються на початковій стадії викладу у статтях, монографіях, дисертаціях. Тим самим визначається їх напрямок, обсяг та структура. Подана інформація призначається для фахівців у відповідній галузі і такий підхід для них у побудові джерела інформації є раціональним. З курсом лекцій можуть знайомитись читачі різної кваліфікації. Студент молодших курсів, що вперше стикається з предметом, що викладається, на початковій стадії його вивчення не має ні фактичної бази, ні досвіду для узагальнення. Він написаний перший абзац цього параграфа. Для решти читачів звична традиційна структура викладу. Їх поточний розділ залишено першої позиції.

## **Ціль та задачі**

Методи та математичний апарат теорії автоматичного управління (ТАУ) застосовуються при проектуванні та експлуатації систем автоматизації у різних галузях техніки. При цьому закони ТАУ для них загальні та будуються на основі математичних моделей (ММ), що описують процеси, що протікають в елементах обладнання, що проектується або експлуатується. Використовувані ММ в основі (закони збереження) також однакові. Але їх конкретна форма запису кожному разі різна. Численність можливих реалізацій при обмеженій кількості базових законів призводить до складнощів та неоднозначності опису за допомогою ММ роботи елементів технічних систем (МС). Це, своєю чергою, веде до помилок під час використання апарату ТАУ. Такі труднощі, але різною мірою залежно від досвіду дослідника, відчувають все фахівці. Більшою мірою їм піддаються студенти, які приступають до вивчення ТАУ. Для них насамперед і призначений пропонований для розгляду курс. У його рамках має на меті показати обмеженість кількості та спільність закономірностей, що описують процеси, що протікають у різних елементах енергетичного обладнання, тим самим полегшивши вивчення в майбутньому ТАУ. Поставлена ​​мета повинна бути досягнута на основі знань, що вже є у студентів, або з викладенням мінімальної кількості нових. У всякому разі, на це спрямовані всі зусилля. Завдання пропонованого курсу полягає в упорядкуванні, структуризації знань, що вже є у студентів. Робиться спроба показати, як з їхньої основі можна згенерувати нові знання, що у майбутньому для ефективного освоєння ТАУ. Ці нові знання видаються у вигляді своєрідної абетки ТАУ. Тим самим студенти, доклавши зусиль для вивчення пропонованого курсу, мають отримати місток між вже наявними знаннями із загальнонаукових (математика, фізика), загальнотехнічних (гідравліка, теплопередача) дисциплін та майбутньою новою спеціальною дисципліною ТАУ.

## **Предмет курсу та спосіб викладу матеріалу**

Як зазначено вище, всі висновки ТАУ виходять з урахуванням ММ елементів ТС. Як і будь-яка теорія, вона побудована з використанням припущень. Вони, з одного боку, спрощують (полегшують) її застосування, з іншого – накладають низку обмежень. Спрощення та обмеження ТАУ висувають і певні вимоги до вихідних ММ. Інженер зазвичай використовує для опису об'єктів готові моделі. Його завдання вибрати з наявного їх різноманіття підходящі кожного конкретного випадку. Для цього необхідно вміти коректно оцінювати обмеження, що накладаються на моделі, прийняті при їх створенні припущеннями.

У різних джерелах припущення можуть бути викладені з різних точок зору. Характерним аналогом може бути питання ступеня наповнення склянки. Хтось вважає його на половину порожнім, деякі – на половину повним. Істотно рідше можна отримати збалансовану інформацію, яка враховує обидві точки зору: - Перед нами півсклянки води. Так і з припущеннями. У якихось джерелах наголошується на тому, чим знехтували (не врахували) при створенні моделі. В інших навпаки, які ефекти вважали найбільш важливими та врахували. Щоб вибрати найбільш відповідну в кожному конкретному випадку ММ для інженера, важлива збалансована інформація про прийняті припущення. Отримання такого роду інформації є **однією зі складових** пропонованого курсу.

В основі моделей, що використовуються, лежить обмежена кількість базових фізичних законів (законів збереження). Тому і кількість моделей (ланок) обмежена. Кількість же ТЗ, які з їх допомогою повинні бути описані «безмежно» (принаймні велике). Тут немає суперечності. У конструкторі LEGO, наприклад, кількість видів елементів обмежена, але які різноманітні складні конструкції можуть бути зібрані на їх основі. У будівництві кількість типів цегли також обмежена, але які різноманітні та складні архітектурні форми отримані при його використанні. Аналогічна ситуація складається й у техніці. Завдання майбутнього інженера вивчити властивості наявного у його розпорядженні «будівельного матеріалу» (ММ ланок) і навчитися з його допомогою «будувати» різні споруди (описувати різні ТЗ). Навчання цьому є **ще одним завданням** пропонованого курсу.

Починаючи вивчати цей курс, студент вступає в нову для себе область. Досі щодо загальнонаукових дисциплін (наприклад математики) йому доводилося зіштовхуватися з обмеженою кількістю абстрактних понять (точка, відрізок, число, функція) і виконувати операції з них. Під час вивчення фізики з'явилися якісь фізичні об'єкти (вантаж масою m, похила поверхню, блок, магнітне поле, замкнутий контур тощо.). Але вони все ж таки штучно підібрані і не відображають реальної конструкції МС. Майбутній інженер повинен навчитися «перекидати місток» між раніше вивченими абстрактними поняттями, штучно підібраними фізичними об'єктами та реальною, нехай і спрощеною, конструкцією МС. У цьому полягає **ще одне завдання** пропонованого курсу.

Використання припущень під час запису ММ викликане як бажанням спростити, полегшити їх розуміння, а й особливостями застосовуваного в ТАУ математичного апарату. У класичній лінійній ТАУ використовуються лінійні прості диференціальні рівняння та відповідні їм (за ступенем подробиці) ММ. Найчастіше основою їх записи служать більш докладні моделі з урахуванням складніших диференціальних рівнянь у приватних похідних. У цьому випадку моделі, які використовуються в ТАУ, виходять шляхом спрощення [1]. Інакше кажучи, використовується підхід, що з рухом «згори», від складніших моделей високого рівня, «вниз», до простим моделям. Тут прихована суперечність між достатнім для роботи рівнем знань і тим обсягом відомостей, які потрібно мати та використовувати для отримання спрощених ММ. Такий підхід можуть використовувати, наприклад, науковці, які мають уже певний запас знань. При отриманні нових знань, а студенти цим і займаються, рух, як раціональніше, найчастіше відбувається у зворотному напрямку – від простого до складнішого до необхідного рівня. Такий підхід і обраний у запропонованому курсі.

# **Модель та моделювання (***Лекція 1***)**

## **Однозначність термінів**

Викладення будь-якого питання базується на використанні певної кількості термінів. Терміни є точними позначеннями, характерними для цієї сфери обговорюваних предметів. На відміну від слів загальної лексики, які часто є багатозначними і несуть емоційне забарвлення, терміни в межах сфери застосування однозначні. Важливість однозначності можна проілюструвати такою історією. «Водій вирішив заїхати в гараж на задній передачі. Поганий огляд. Попросив сина допомогти сказати, **коли** він доїде до стіни. Поїхав. Удар у стіну. Син кричить: о 17-45. Аварія як результат неоднакового трактування прохання «коли». Важливим викладом інженерних наук є термін «**модель**».

## **Що таке "модель"**

Поняття «модель» охоплює широке коло діяльності і має багато тлумачень. Не розглядатимемо їх усі. Необхідно, хоча б приблизно, визначити зміст, який вкладається у цей термін щодо інженерних наук.

Термін утворився від латинського слова **modulus** - " **міра, аналог, зразок**". Під «моделлю» розуміється *образ* якогось об'єкта чи явища, який відбиває лише *окремі властивості*. Поняття модель можна використовувати стосовно молодих людей на подіумі при демонстрації одягу, до телефонів, автомобілів, літаків і т.д. Наприклад, глобус – це модель земної кулі. Він статичний, а чи не обертається навколо сонця. Не може похвалитися власною силою тяжіння. Немає атмосфери. На поверхні глобуса не живуть крихітні чоловічки. Він відтворює *зовнішній вигляд* нашої планети, не торкаючись інших характеристик.

Говорячи про модель автомобіля (спеціально не використовую термін «машина», пральна машина), можна представляти який-небудь його зразок на дорозі або в гаражі. А можна у шафі у вигляді масштабних моделей. У цьому випадку, як і в глобусі, відображається в масштабі *вигляд* реального об'єкта, але не як малюнок, а у вигляді *об'ємного макета*.

Розглядаючи літаки, можна виділити моделі різних виробників та призначень (пасажирські, транспортні, бойові тощо). А можна як для автомобілів моделі-копії, що стоять у шафах (*масштабні об'ємні макети*). Крім того, можна виділити літаючі моделі-копії або авіамоделі, що літають, але не є копією будь-якого реального літака.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

*Навіть у тій частині, яку зачіпають наведені вище приклади, існує набагато більше видів моделей. Про деякі з них дозволяють судити відповідні синоніми: авіамодель, габарі, гламур-модель, конверсив, лекало, макет, макромодель, манекенник, манекенниця, марка, метамодель, мікромодель, моделька, муляж, натура, натурник, натурниця, зразок, зразок , парадигма, персептрон, перцептрон, підмодель, крій, приклад, прообраз, проплазма, прототип, професія, стандарт, стереомодель, субмодель, супермодель, схема, тип, фантом, фасон, феристор, форма, шейпінг-модель. Бажаючі можуть самостійно докладніше познайомитися з ними та іншими можливими видами моделей.*

Навіть на підставі обмеженого кола розглянутих моделей можна побачити, що для опису одного об'єкта можуть використовуватись різні моделі (для автомобіля, літака та ін.).

Особливістю зазначених моделей є *матеріальна* основа. Їх можна доторкнутися руками. Під час вивчення інженерних наук найчастіше використовуються моделі іншого виду – *математичні*, які стосуються типу інформаційних.

## **Математична модель (приклад)**

Одне з визначень математичної моделі (ММ) може звучати так: **Математична модель** – це спрощене опис реальності з допомогою математичних понять.

Формально все правильно і зрозуміло для людини, яка має певний науковий досвід. Але для бакалавра-початківця це може бути не настільки очевидно. Спробуємо прокоментувати поняття ММ менш коректно з формальної погляду, але простіше (не спрощено). При вивченні або проектуванні будь-якого фізичного об'єкта розглядаються процеси, пов'язані з ним, причини, що їх викликають і результат їх впливу. Наприклад, зміна швидкості руху автомашини. Фізичний об'єкт – машина; досліджуваний процес – її рух; причини, що визначають процес руху - різні сили, що діють на машину в процесі її руху; Результат їхнього впливу - деяка швидкість руху автомашини. Мета вивчення процесу – визначення швидкості машини. Завдання дослідника за допомогою інструментів загальнонаукових та загальнотехнічних дисциплін у вигляді різного роду рівнянь описати діючі на об'єкт дослідження сили. Сукупність цих рівнянь і ММ процесу. А їхнє рішення має дозволяти досягти поставленої мети – визначити швидкість автомашини.

Виглядає просто, але використання у процесі дослідження ММ **завжди** дає лише **наближений** результат. Чому так відбувається? Розглянемо деякі (не всі) причини:

* вихідні дані завжди визначаються і, відповідно, задаються з певною похибкою. Їх використання не дозволяє отримати результат, точно відповідним реально протікаючим процесам;
* дослідник усвідомлює (може висловити, описати) лише частину основних сил, що впливають на аналізований процес.

Інженер це розуміє та враховує у своїй діяльності.

Як приклад розглянемо один із варіантів руху автомашини – її гальмування починаючи з якоїсь швидкості *V*0 до зупинки. Спробуємо записати ММ цього процесу. На підставі другого закону Ньютона (шкільний курс фізики, скалярна форма) маємо:

 (2.1)

Тут *m* – маса автомобіля, *a* – прискорення автомобіля, *F* – рівнодіюча сил, під дією якої відбувається гальмування. Розглянемо як діючі сили тільки силу гальмування *F*т (тертя в гальмівних колодках). Сила гальмування визначає прискорення автомобіля у вигляді прискорення гальмування та, в результаті, зменшення його швидкості. І ось у деякий момент часу автомобіль зупинився, наприклад, при спуску з гірки. Щоб він не з'їхав вниз, повинна залишатися деяка сила гальмування *F*т. Відповідно до нашої моделі (2.1) за наявності сили має бути і прискорення. А автомобіль стоїть, а = 0. Навіть цей найпростіший приклад показує наявність обмежень на застосування моделей. Записана модель проста. Якихось факторів не враховано.

Розглянемо інший варіант руху авто – її розгін. У цьому випадку другий закон Ньютона може бути записаний у вигляді:

 (2.2)

Тут рівнодіюча сил складається з рушійної сили *Fдв*, що створюється двигуном і сили гальмування *FТ*, що виникає через дію сил тертя, сил опору повітря. Знаки (2.2) враховують напрямок дії сил. Припустимо, що у процесі розгону чинні сили постійні. З (2.2) випливає, що прискорення (*а*) теж незмінно. Але в цьому випадку швидкість повинна постійно зростати, що **суперечить реальній ситуації**. Відомо, що при будь-якій потужності двигуна гранична швидкість автомашини досягає деякої кінцевої величини і при постійних зовнішніх впливах залишається **незмінною**.

Для корекції моделі (2.2) будемо розмірковувати у зворотному порядку. Постійність швидкості передбачає відсутність прискорення (а=0) і з (2.2) випливає:

 (2.3)

Таким чином в кінці розгону сила, що гальмує, дорівнює рушійній. На початку розгону (*V*=0) збільшення швидкості відбувається з деяким прискоренням (*а*≠0) і з (2.2) випливає:

 (2.4)

З порівняння (2.3) і (2.4) випливає, що в процесі розгону при незмінній величині *Fдв* значення гальмівної сили *FТ* змінюється від деякої мінімальної величини до максимально можливої за заданих умов *FТ* = *Fдв*. Експериментальні дослідження показали, що *FТ* залежить від швидкості руху об'єкта та може бути виражена у вигляді:

 (2.5)

де *c* – коефіцієнт опору, *V* – швидкість об'єкта (автомашини) у час. Коефіцієнт опору - величина постійна і залежить від властивостей об'єкта, що рухається. Підставляючи (2.5) у (2.2) отримаємо:

 (2.6)

Записавши модель у вигляді (2.6) стикаємося з новою проблемою. Наведені вище рівняння записані для постійної величини прискорення. В (2.6) результуюча сила (права частина рівняння) залежить від поточної швидкості автомашини та впливає на зміну прискорення автомашини (ліва частина рівняння). У такому вигляді це рівняння не може бути використане.

## **Математична модель у диференціальному вигляді (***Лекція 2***)**

|  |
| --- |
|  |
| Мал. 2.1. Приклад графіка функції зміни прискорення автомашини під час її розгону |

Зміна прискорення у процесі розгону машини може бути відображено у вигляді графіка певної функції (рис. 2.1, А). Загалом він може мати довільний вигляд. Апроксимуємо його за допомогою графіка ступінчастої функції. В цьому випадку на будь-якому інтервалі часу (наприклад, Δ*t*, рис. 2.1, А) величину прискорення (а1) можна вважати постійною і з'являється можливість використовувати рівняння виду (2.2) та (2.6). Але з'являється обмеження. Рівняння, в яких використовується деяка **стала** прискорення (*а*1) будуть **приблизно** справедливі **тільки** на відповідному **інтервалі часу** (Δ*t*).

***Апроксимація*** *(від латів. Proxima - найближча) або* ***наближення*** *- науковий метод, що полягає в заміні одних об'єктів іншими, в якомусь сенсі близькими до вихідних, але більш простими. Апроксимація дозволяє досліджувати числові характеристики та якісні властивості об'єкта, зводячи завдання до вивчення більш простих або зручніших об'єктів (наприклад, таких, характеристики яких легко обчислюються або властивості яких вже відомі).*

***Апроксимація*** *— це метод свідомого* ***спрощення*** *надмірно складного теоретичного знання з метою привести його у відповідність* ***до потреб*** *та* ***можливостей*** *практики. Метод апроксимації спочатку використовувався в математиці і потім поширився інші науки. У математиці апроксимація передбачає заміну одних математичних об'єктів (наприклад, чисел чи функцій) іншими, простішими й у тому чи іншому сенсі близькими до вихідним.*

*Бакалавру корисно згадати значення термінів «****інтерполяція****» та «****екстраполяція****».*

Можна зменшити інтервали часу Δ*t* при побудові апроксимуючого ступінчастого графіка (рис. 2.1, Б), протягом яких зберігається сталість значення прискорення. Це, безумовно, підвищує точність апроксимації, але похибка обчислень повністю не усуває. У цьому збільшується кількість інтервалів часу, у яких доведеться виконувати обчислення. Проте за подальшого зменшення кроку дискретизації (зменшення кроку Δ*t* ступінчастої апроксимації) з'являються нові принципові можливості розв'язання технічних завдань.

Розглянемо зміну швидкості за проміжок часу Δ*t*. Припустимо, що у цьому проміжку прискорення залишалося постійним і рівним *а1* (рис. 2.1, А). За таких умов швидкість змінилася від початкового значення *V*н до деякого кінцевого *V*к. В цьому випадку зі шкільного курсу фізики випливає:

 (2.7)

Підставимо (2.7) у (2.6):

 (2.8)

З такої форми запису не вдається отримати додаткову інформацію порівняно з рівнянням (2.6). У цьому рівнянні багато невідомих за одного аргументу. Таке рівняння неможливо розв'язати. Але така форма запису породжує нові можливості.

На інтервалі часу Δ*t* величина поточної швидкості *V* (2.8) знаходиться в інтервалі значень *V*н та *V*к, але відрізняючись від них. Зменшуватимемо значення Δ*t*. Більше того, спрямуємо Δ*t*→0. Межі інтервалу зміни швидкості *V*н та *V*к будуть зближуватися і значення поточної швидкості *V* дедалі менше відрізнятиметься від них. У межі можна записати:

 (2.9)

Вираз (2.9) не суворе визначення похідної. У курсі вищої математики, який читають бакалаври, подібний висновок отриманий більш строго. Нам же важливо, яким шляхом було отримано вираз (2.9) і які можливості воно дає для вирішення рівняння (2.8). Підставимо до нього (2.9) і в результаті отримаємо:

 (2.10)

Це звичайне диференціальне рівняння. Методи їх вирішення докладно розглядаються у курсі вищої математики. Нам же важливо, що такі рівняння відображають прості закони, які часто у спрощеному вигляді вивчаються ще в шкільному курсі фізики. Так, рівняння (2.10) є відображенням (2.6). А похідна d*V*/d*t* використана відображення змінної величини прискорення (*а*) як постійної величини на малому проміжку часу d*t*.

## **Універсалізм математичної моделі (приклад)**

Рівняння (2.10) отримано під час розгляду процесу розгону автомашини. Але рівняннями такого виду можуть бути описані й інші процеси. У кожному конкретному випадку відповідні члени рівнянь можуть різнитися формою записи. Інженеру важливо «за деревами побачити ліс», відзначити (виділити, визначити тощо.) явище, що описується кожним членом рівняння. Розглянемо приклади деяких процесів. Виділимо основні явища, не зупиняючись на їхньому математичному описі.

*Стрибок парашутиста*. Визначається швидкість парашутиста у вертикальному напрямку щодо землі. Як рушійну силу виступає сила тяжіння (*mg*). Сила опору руху визначається площею бані парашута. У перший момент стрибка швидкість парашутиста дорівнює нулю. У міру його спуску збільшується швидкість і, відповідно, сила опору парашута. Досягши деякої величини швидкість перестає змінюватися. Це і є швидкість спуску парашутиста. Варіюючи (змінюючи) площею парашута можна проводити силу опору і встановлювати необхідну швидкість спуску.

|  |
| --- |
|  |
| Мал. 2.2. Рух рідини у трубопроводі |

*Рідина (вода) у трубопроводі*. Визначається швидкість руху рідини у трубопроводі. Розглянь бак та приєднаний до нього трубопровід із краном (К) (рис. 2.2, А). Тиск у баку *P*1. Кран закритий. Рідина у трубопроводі нерухома. Тиск рідини перед краном також дорівнює *P*1. У деякий час кран відкривається (зникає) (рис. 2.2, Б). Наприкінці трубопроводу встановлюється тиск *P*2 < *P*1. Можна навіть припустити *P*2=0. Утворюється різниця тиску Δ*P*=*P*2 – *P*1 (рушійна сила), під дією якої рідина у трубопроводі починає розганятися. Опір руху рідини обумовлено її тертям об стінки трубопроводу. Розмір сили опору залежить від швидкості руху рідини.

У наведених прикладах, хоч вони й розрізняються, розглядаються подібні між собою процеси - рух об'єкта зі зміною швидкості від стану спокою до деякої встановленої величини. Але за допомогою подібної моделі можуть бути описані інші процеси, що мають іншу фізичну природу. Не розглядатимемо безпосередньо модель. Наведемо два приклади процесів, для опису яких може використовуватися.

*Нагрівання тіла*. Розглядається нагрівання тіла при поміщенні його в навколишнє середовище з більшою та постійною температурою. Наприклад: приміщення деталі в нагрівальну піч, або вийняли продукти з холодильника і залишили на кухні та ін. У початковий момент часу при максимальній різниці температур тіла, що нагрівається, і навколишнього середовища реалізується максимальний потік енергії (у формі тепла) до тіла. Це відповідає максимальній швидкості збільшення його температури (аналогічно розглянутому у попередніх прикладах максимальному прискоренню у початковий момент часу). У міру зростання температури тіла і, відповідно, зменшення різниці температур тіла, що нагрівається і навколишнього середовища, зменшується потік енергії до тіла, що нагрівається. При вирівнюванні температур навколишнього середовища та тіла, що нагрівається, припиняється потік енергії до тіла. Відповідно, припиняється і зростання його температури. Це аналогічно припинення збільшення швидкості тіла, що розганяється при вирівнюванні рушійної сили і сили опору руху.

|  |
| --- |
|  |
| Мал. 2.3. Зарядка конденсатора |

*Заряджання конденсатора*. Джерело напруги *V*(t) і конденсатор зібрані в ланцюг (рис. 2.3.). Ланцюг розімкнений. Заряд на обкладках конденсатора відсутня (q=0) і, відповідно, напруга з-поміж них *V*C(t)=0. У деякий момент часу ланцюг замикається, починає текти струм *I*C(t) і збільшуватися заряд q конденсатора C. У міру збільшення заряду збільшується напруга *V*C(t) між обкладками конденсатора. При вирівнюванні *V*C(t)=*V*(t) протягом струму та заряджання конденсатора припиняються. Заряд конденсатора q досягає максимально можливого значення для поточних умов.

## **Формалізм математичної моделі (приклад)**

Наведений у попередньому параграфі перелік випадків, коли для опису процесів, що протікають, застосовна ММ, подібна (2.10), може бути розширений. Але й наведені приклади демонструють її широке застосування. Однотипні моделі породжують і однотипні рішення. Щоб не заплутатися в їхніх видах у ТАУ, прийнято подібні ММ записувати в єдиній формі. Для її подання (опису) запишемо (2.10) у вигляді:

 (2.11)

і розділимо всі члени на коефіцієнт "с":

 (2.12)

Такому запису відповідає узагальнена форма:

 (2.13)

Розглянемо деякі особливості (2.13). У лівій частині рівняння зібрані члени, що містять величину, що обчислюється. Вона названа вихідний і позначена як хвих. Що стосується (2.12) такою є швидкість *V*. У разі нагрівання тіла це його температура. Що стосується конденсатором – заряд з його обкладках і, відповідно, напруга з-поміж них. У правій частині знаходиться член з величиною, що є рушійною силою (вхід), першопричиною досліджуваного процесу. Вона позначена як *x*вх. У (2.12) такою є *F*дв.

В (2.13), (2.12) та у всіх подібних моделях другий доданок у лівій частині рівняння записано у формі з коефіцієнтом, рівним 1. Це зроблено навмисно. Складати (або віднімати) можна величини з однаковою розмірністю. Тому  и  такими повинні бути в будь-яких варіантах подібної ММ. При рівності розмірностей *dx*вих і *x*вых для компенсації розмірності часу для *dt* розмірність величини *Т* буде розмірністю часу (за будь-якої фізичної природи *х*вих у наведених вище прикладах: швидкість, температура, заряд на обкладках конденсатора та ін. Ця величина є важливою в ТАУ і має спеціальну назву – **постійна часу**. Також спеціальну назву має коефіцієнт *k* у правій частині рівняння (2.13) – **коефіцієнт посилення**. Властивості коефіцієнтів *Т* і *k* розглянуті нижче.

# **«Лего-кубики» сучасної інженерії (***Лекція 3***)**

Багато інженерні завдання при всьому їх нескінченному різноманітті можуть бути вирішені і, зрештою, вирішуються на базі стандартних елементів при нетривіальному їх поєднанні. Знання базових елементів та ряду стандартних операцій з ними виступає як фундамент в інженерній діяльності. У вмінні нестандартно поєднувати відомі елементи полягає досвід інженера.

Нижче описані моделі стандартних ланок (базових елементів). Їх всього 6. Будуть описані операції, за допомогою яких із базових елементів як із кубиків конструктора «LEGO» можуть бути побудовані ММ процесів та об'єктів різної складності. Слід враховувати, що моделі ланок та його кількість є випадковими величинами чи результатом суб'єктивного думки. У наступних розділах буде показано об'єктивний характер їхнього виду та кількості.

|  |
| --- |
|  |
| Мал. 3.1. Зображення ланки |

З огляду на те, що домовилися розглядати стандартні елементи у вигляді деяких «кубиків» для «будівництва» ММ, то й на схемах представлятимемо їх у вигляді, наприклад, прямокутників (рис. 3.1.). На вхід такого елемента подається деякий вхідний сигнал, вплив (*х*вх). Відбувається перетворення цього сигналу відповідно до ММ елемента, що розглядається. В результаті на виході отримуємо змінений сигнал (*x*вих).

## **Інерційна ланка першого ладу. Рішення**

На погляд могло скластися враження, що розглянуті вище приклади ММ випадкові. Але це не так. Усі вони є прикладами важливого в ТАУ елемента – моделлю інерційної ланки першого порядку або (іншу назву) аперіодичного ланки першого порядку. Узагальнена запис його ММ виражається рівнянням виду (2.13).

***Динамічне ланка*** *- поняття, що відноситься до ТАУ. Під динамічною ланкою розуміють пристрій будь-якої фізичної природи та конструктивного оформлення, що описується певним диференціальним рівнянням. Однією з тим рівнянням можуть описуватися дуже різноманітні пристрої (механічні, гідравлічні, електричні тощо. буд.), і навіть процеси різної фізичної природи (технічні, економічні, біологічні, політичні та інші)*.

Рівняння (2.13) є звичайним лінійним диференціальним рівнянням першого ладу і може бути розв'язано різними методами, що вивчаються бакалаврами в курсі вищої математики. У ТАУ використовують **метод перетворення Лапласа**. Причиною вибору цього є його особливість: у процесі рішення на проміжному етапі **диференціальне** рівняння представляється як **алгебраїчного**. Це стає можливим при заміні дійсного аргументу (часу, ***t***) на комплексну змінну (***p*** або деяких літературних джерелах ***s***). При цьому **оригінал** функцій у просторі дійсних величин замінюється на його **зображення** у просторі комплексних змінних. У процесі дослідження складні пристрої представляються у вигляді сукупності **типових** динамічних ланок, що взаємодіють між собою. Заміна їх ММ у диференціальній формі на алгебраїчне подання у просторі зображень спрощує проведення досліджень та проектних розрахунків. Надалі познайомимося з різними типовими динамічними ланками та його ММ.

Як зазначено вище, бакалаври в курсі вищої математики вивчали метод перетворення Лаплапса. Але інженеру у своїй діяльності у разі потреби не потрібно щоразу виконувати подібні перетворення. Існують таблиці різного ступеня повноти вже готовими результатами. Їх можна знайти у численній довідковій літературі. Не наводяться посилання, щоб не виділяти будь-яке джерело. З огляду на велику кількість їх легко знайти. Приклад одного з мінімально достатніх варіантів таких таблиць наведено в додатку П1.

*Сутність перетворення Лапласа у тому, що замість змінної x(t) розглядається однозначно відповідна їй змінна Y(p), де p - комплексна змінна, звана оператором (у деяких випадках оператор позначається символом “s”). У зв'язку з цим перетворення Лапласа часто називають операторним обчисленням. У операторному обчисленні функцію часу y(t) називають оригіналом функції Y(p), а відповідну їй функцію Y(p) - зображенням функції y(t).*

*Операцію переходу від функції y(t) до її зображення Y(p) називається прямим перетворенням Лапласа.*

*Математично пряме перетворення Лапласа записується умовно за допомогою символу:*

* (3.1)*

*Операцію переходу від зображення Y(p) до шуканої функції y(t) (перебування оригіналу за зображенням) називають зворотним перетворенням Лапласа. Математично зворотне перетворення Лапласа записується умовно за допомогою символу L-1:*

* (3.2)*

*При операторному обчисленні шляхом прямого перетворення Лапласа переходять від оригіналів функцій до їх зображень, виробляють обчислення, отримують результуюче зображення, а потім за допомогою зворотного перетворення Лапласа знаходять оригінал результату.*

*У цьому всі розрахунки значно спрощуються, оскільки операції диференціювання оригіналів за нульових початкових умов  замінюються операцією множення зображенняY(p) на оператор p відповідної ступеня, тобто  ; операції інтегрування , тощо замінюються операціями поділу зображення на оператор p, тобто  і т.д.*

*Для всього вищесказаного зображення Y(p) та оригінал пов'язані співвідношенням*

* (3.3)*

*lе p – комплексна змінна – оператор.*

*Таке складне співвідношення між зображенням та оригіналом, здавалося б, ще більше ускладнює диференціальне рівняння функції y(t). Однак саме таке співвідношення дозволяє при переході від оригіналів до зображень суттєво спростити всі розрахунки та звести диференціальні рівняння оригіналів, наприклад*

* (3.4)*

*до однозначно відповідного йому рівняння алгебри зображень.*

* (3.5)*

*При цьому слід зазначити, що при практичних розрахунках не потрібно користуватися складними виразами (3.3) при переході від оригіналів до зображень і назад. У технічній літературі є докладні таблиці перекладу оригіналів різних виразів відповідні їм зображення і назад.*

*Оскільки можливість однозначного переходу від диференціального рівняння до алгебраїчного значно полегшує багато розрахунків, дуже важливо психологічно переконатися у правомірності такого переходу.*

*Позначимо в (3.4) похідну . Згідно (3.3), знайдемо зображення:*

* (3.6)*

*Відповідно до правила інтегрування частинами,*

* (3.7)*

*Позначимо в (3.6) . З прийнятих позначень випливає, що . Враховуючи це відповідно до (3.7) знаходимо*

* (3.8 )*

*За нульових початкових умов  та з урахуванням (3.3) з (3.8) отримуємо*

* (3.9)*

*Таким чином, виконано перехід від диференціальної форми запису похідної до її запису в операторній формі шляхом формальної заміни символу диференціювання  на комплексну змінну p (за нульових початкових умов). Так як  то і т.д.*

*Отже, операція диференціювання оригіналу відповідає операції множення зображення цього оригіналу на комплексне число p. Це одна з найважливіших властивостей перетворення Лапласа.*

*Аналогічно можна довести, що операція інтегрування оригіналу відповідає операції поділу зображення цього оригіналу на комплексне число p. Так за нульових початкових умов .*

*Так як інтеграл суми (різниці) дорівнює сумі (різниці) інтегралів від окремих виразів, а постійний множник можна виносити за знак інтеграла, то перетворення Лапласа має властивість лінійності:*

* (3.10)*

*У зв'язку з тим, що викладені перетворення Лапласа дійсні лише за нульових початкових умов, слід особливо уточнити, що під цим розуміється. Під нульовими початковими умовами для диференціального рівняння n-го порядку розуміється те, що з t=0 значення функції y(t) та її похідних до (n-1)-й включно рівні нулю, тобто.*

* (3.11)*

*Фізично це означає, що такий перехід від оригіналів до зображень правомірний, якщо до надходження впливу на об'єкт, що обурює, система знаходилася в стані рівноваги. Цей стан приймається за нульовий. При надходженні впливу, що обурює, рахунок значень y(t) проводиться від встановленого («нульового») стану, а час t – з моменту надходження впливу.*

*У перетворених за Лапласом виразах з комплексною змінною p, як і іншими членами рівняння алгебри, можна робити різні дії: множення, розподіл, зведення в ступінь, винесення за дужки і т.д.*

Розглянемо рівняння (2.13). Виконаємо для нього перетворення Лапласа:

 (3.12)

У лівій частині рівняння винесемо за дужки загальний співмножник:

 (3.13)

і на основі (3.13) запишемо:

 (3.14)

Вирази виду (3.14) представляють ТАУ важливе поняття передавальної функції *W* як відношення **зображень** вихідного сигналу *Х*вых(p) до зображення вхідного *Х*вх(p). Саме отримання передавальних функцій використовувався метод перетворення Лапласа на вирішення диференціальних рівнянь. Надалі в курсі ТАУ більшою мірою будуть використовуватися саме передавальні функції. Це відноситься і до типових динамічних ланок і до опису складних систем, моделі яких побудовані на основі цих ланок.

Вирішимо за допомогою отриманої передавальної функції (3.14) диференціальне рівняння (2.13), що описує поведінку типової інерційної ланки першого порядку. З (3.14) випливає:

 (3.15)

Загалом підставляючи зображення різних вхідних впливів *Х*вх(*р*) можна визначити зображення різних рішень *Х*вих(*р*). У ТАУ розглядаються різні, хоч і в обмеженій кількості, типові впливи. У цьому курсі лекцій ми знайомимося лише з інструментом, що дозволяє будувати динамічні моделі об'єктів. Для такого знайомства достатньо використовувати будь-який стандартний вплив. У нашому випадку в його якості виступатиме **одиничний ступінчастий вплив** (функція Хевісайда).

***Функція Хевісайда (одинична ступінчаста функція, функція одиничного стрибка, включена одиниця, "сходинка")*** *– шматково-постійна функція, що дорівнює нулю для негативних значень аргументу і одиниці - для позитивних. У нулі ця функція, взагалі кажучи, не визначена, проте її зазвичай довизначають у цій точці деяким числом, щоб область визначення функції містила всі точки дійсної осі. Найчастіше неважливо, яке значення функція набуває в нулі, тому можуть використовуватися різні визначення функції Хевісайда, зручні з тих чи інших міркувань, наприклад, у наведеному нами випадку:*

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| *Мал. 3.2. Поодинока ступінчаста функція (функція Хевісайда)* |  |

Як такий вплив можна інтерпретувати у межах розглянутих вище прикладів? Для автомашини це миттєве включення двигуна на повну потужність (наприклад, за допомогою зчеплення) на початку його розгону. При стрибку парашутиста це зміна рівнодіючої сили у вертикальному напрямку з нульового значення (при знаходженні в літаку) до значення сили тяжіння (після стрибка при зникненні реакції опори підлоги літака). При розгоні рідини у трубопроводі – це миттєва поява перепаду тиску під час відкриття крана. При заряді конденсатора це миттєва напруга на обкладки конденсатора при замиканні ланцюга з джерелом напруги.

Зображенням одиничної ступінчастої функції (додаток П1 №3) є вираз  Підставимо його в (3.15). В результаті отримаємо:

 (3.16)

Виконавши зворотне перетворення Лапласа для цього виразу (додаток П1 №10) отримаємо вираз, що показує як об'єкт, ММ якого описується рівнянням (2.13), реагує на одиничний ступінчастий вплив. Рішення має вигляд:

 (3.17)

*Для вирішення рівняння (2.13) наведемо вираз (3.16) до виду №10 (додаток П1):*

* (3.18)*

*Введемо позначення:*

**

*Підставимо отримані вирази (3.18). Виконавши зворотне перетворення Лапласа відповідно до №4 та №10 (додаток П1), отримаємо:*

* (3.19)*

*Підставимо величини з введених позначень (3.19). В результаті отримаємо:*

* (3.20)*

Досліджуємо отримане рішення виду (3.17). Результати будемо відображати у графічному вигляді. Завжди потрібно будувати (чи, хоча б, представляти) одночасно два графіки: залежність вхідного впливу (*х*вх(*t*)) від часу і залежність рішення (вихідної величини *х*вих(*t*)) від часу. Як зазначалося вище зовнішній вплив може мати різну форму. На даному етапі використовуємо лише одиничний ступінчастий вплив.

Спочатку розглянемо два граничні випадки.

**1) спрямуємо в (3.17) *t*→0:**

 (3.21)

Таким чином, при *t*→0 *х*вих(*t*)=0.

**2) спрямуємо в (3.17) *t*→∞:**

 (3.22)

Таким чином, при *t*→∞ *х*вих(*t*)=*k*. Іншими словами, *х*вих = *k* є асимптотою.

Відобразимо отримані результати на графіці (рис. 3.3) у вигляді точки на початку координат (початок графіка) та асимптоти «*k*» (горизонтальна штрихова лінія). Задаючи інші значення часу можна побудувати весь графік, що відображає реакцію системи не одиничний ступінчастий вплив. Важливою **особливістю** графіка (рис. 3.3) є використання **наведеної** величини часу замість **відносної**. Такий прийом дозволяє спростити аналіз результатів.

|  |
| --- |
|  |
| Мал. 3.3. Інерційна ланка першого порядку |

Що розуміється під відносною та наведеною величиною? До цього моменту студенти при дослідженні функціональних залежностей та побудові графіків використовували відносні значення змінних та координат. Їх величина визначається шляхом порівняння (співвідношення) з якоюсь відомою величиною, прийнятою та визнаною як стандарт. Наприклад, у системі СІ як стандарт одиниці довжини прийняти 1 метр. Усі довжини та відстані визначаються шляхом їх порівняння з цим стандартом. Аналогічно з іншими базовими величинами: маса (*кг* – кілограм), час (*с* – секунда), температура (*К* – Кельвін) тощо. У межах такої системи всі однорідні величини, наприклад геометричні розміри, визначаються лише щодо одного стандарту – 1 метр. Це буде і 0.0001 м та 125000 м. Їх можна записати більш компактно: 10-4м та 1.25\*105м. Але вони однаково сильно відрізнятимуться чисельно. Це саме стосується часу та інших величин. Така ситуація не завжди зручна під час аналізу результатів досліджень.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Таблица 3.1** | | |
| ***t*** | Вид расчетного выражения | Результат |
| 1·*T* |  |  |
| 2·*T* |  |  |
| 3·*T* |  |  |

Є ще один спосіб визначення чисельних значень змінних використання наведених величин. Подивимося уважно на рівняння (3.17). До складу показника ступеня експоненти входить постійна часу (*Т*). У різних процесах її величини є різними. Але в рамках одного процесу вона стала. Приймемо в рамках процесу, що розглядається в даний момент, як стандарт одиниці часу постійну часу (*Т*). У цьому випадку змінну часу (*t*) потрібно вимірювати над секундах, а частках іншого стандарту – у частках (*Т*).

Для побудови графіка послідовно покладемо *t* = *Т*, 2*Т*, 3*Т*. Результати розрахунків наведені у (табл. 3.1). Використовуючи ці результати, побудований графік (рис. 3.3.).

## **Інерційна ланка першого ладу. Аналіз та обговорення результатів (***Лекція 4***)**

Використання **наведеної** змінної часу у вигляді часток (*Т*, 2*Т* і т.д.) від постійного часу дозволило отримати кілька корисних результатів:

1. будь-які процеси, ММ яких може бути описана за допомогою рівняння (2.10), одержують єдине рішення у вигляді (3.17) та графічне відображення у вигляді (рис. 3.3.). Якою б не була величина *Т* (секунди, хвилини, години, дні і т.д.), рішення завжди буде однаковим. Достатньо проаналізувати лише його, і отримуємо рішення для будь-яких значень *Т*.

2. наявність асимптоти *х*вих=*k* показує, що з деякого моменту часу при постійному одиничному вхідному впливі *х*вх=1 реакцію системи вважатимуться також постійної, але рівної *х*вих=*k*. Це відповідає посиленню одиничного вхідного впливу в *k* раз. З цієї причини коефіцієнт *k* називають коефіцієнтом посилення.

3. в інженерній практиці прийнято вважати допустимою похибка обчислень 5% і менше. З графіка (рис. 3.3.) видно, на час 3*Т* вихідна величина *х*вих сягає значення 0.95*k* чи 95% від максимально можливого. Інакше кажучи, на час 3*Т* похибка визначення *х*вих стосовно достовірному значенню *k* вбирається у 5%.

Використання у вирішенні **наведеної** величини часу дозволяє не вирішуючи ММ судити про поведінку рішення: про максимальне значення *k*, яке може прийняти вихідна величина і момент часу 3*Т*, коли процес «розгону» з інженерної точки зору можна вважати завершеним.

|  |
| --- |
|  |
| Мал. 3.4. Визначення постійного часу |

До цього моменту обговорювався пошук рішення (2.10) при відомих параметрах моделі: *k* і *T*. Але в деяких випадках виникає необхідність визначення цих параметрів за відомого рішення, наприклад, у графічному вигляді. Іншими словами, необхідно вирішити обернену задачу.

Нехай у процесі експерименту при одиничному зовнішньому вплив на систему отримали розгінну криву, подібну (рис. 3.4.). Для пошуку коефіцієнта *k* за графіком необхідно визначити величину, до якої прагне *х*вих із плином часу *t*, що не становить складності. Це буде коефіцієнтом посилення *k*. З визначенням постійної складніше. У навчальній літературі пропонується провести дотичну (0А) до кривої розгону початковій точці *t*=0 (рис. 2.6.). На асимптоті дотична відсікає відрізок (СА), що дорівнює за величиною постійної часу *Т*. На практиці виконати таку операцію складно. Спроби побудувати дотичну до однієї кривої розгону різними виконавцями завжди дає різний результат. Отже, не виходить однозначного визначення постійного часу. Але можна використовувати інший спосіб визначення величини постійного часу. Величина *k* – коефіцієнта посилення – визначає граничну величину зміни досліджуваного параметра при одиничному ступінчастому впливі. З даних (табл. 3.1) слід, що на момент часу 1·*T* проходить ~ 63% процесу зміни досліджуваного параметра чи 0.63*k*. Враховуючи цю властивість після визначення коефіцієнта *k* обчислюється величина, що дорівнює 0.63*k*, і будується відповідна точка B на осі ординат (рис. 3.4.). З цієї точки проводиться горизонтальна лінія до перетину з експериментальним графіком розгінної характеристики. З точки перетину опускається перпендикуляр на вісь абсцис (вісь часу), що дозволяє визначити постійну часу аналізованого процесу. У деяких джерелах пропонується від асимптоти *k* відкладати по осі ординат (вісь значень вихідного сигналу) у напрямку початку координат величину 0.37*k*. Але й у цьому випадку потрапимо до точки B (рис. 3.4.).

*Покажемо, що дотична, проведена до кривої розгону на початку координат, відсікає на асимптоті k відрізок, за величиною рівний постійному часу Т (рис. 3.4.). З курсу математики відомо, що тангенс кута нахилу дотичної до графіку функції дорівнює похідній від цієї функції у точці дотику (див. «Геометричний зміст похідної»). Знайдемо похідну від (3.17):*

* (3.23)*

*Знайдемо значення похідної (3.23) у точці дотику при t=0. Це буде тангенс кута нахилу дотичної*

* (3.24)*

*З іншого боку (рис. 3.4.):*

* (3.25)*

*та враховуючи, що AT=k, отримаємо:*

* (3.26)*

*Виходячи з рівності лівих частин (3.24) та (3.26), прирівняємо та їх праві частини:*

* (3.27)*

*що і потрібно було довести.*

## **Пропорційна (підсилювальна) ланка**

|  |
| --- |
|  |
| Мал. 3.5. Важіль 1 |

Розглянемо такий пристрій як важіль або його прояв у вигляді гойдалок (рис. 3.5) з плечами по різні боки від точки опори, рівними *s*1 і *s*2. Визначимо характер руху його країв. Нехай точка A переміститься у положення точки B на відстань *x*1. Тоді точка С переміститься у положення точки D на відстань *x*2. Через жорсткість важеля АС Δ(ABO) і Δ(CDO) подібні і можна записати:

 (3.28)

Введемо позначення:

 (3.29)

Запишемо вираз (3.28) з урахуванням (3.29):

 (3.30)

Якщо розглядати переміщення точки А важеля на відстань *x*1 як вхідний сигнал *x*вх, то, відповідно до (3.30), переміщення точки на відстань *x*2 слід розглядати як реакцію системи у вигляді вихідного сигналу *x*вих з коефіцієнтом посилення *k*=*s*2/*s*1.

У вигляді виразу (3.30) отримано ММ ще однієї ланки. Воно носить назву пропорційного чи підсилювального. Т.к. модель представлена у вигляді алгебраїчного виразу, що безпосередньо пов'язує *x*вх і *x*вих, немає необхідності в пошуку рішення як це було при розгляді інерційної ланки. Проте використовуємо перетворення Лапласа визначення його передавальної функції:

 (3.31)

|  |
| --- |
|  |
| Мал. 3.6. Пропорційна (підсилювальна) ланка |

Рішення (3.30) має вигляд, аналогічний вхідному впливу, збільшеному в *k* раз (рис. 3.6.).

|  |
| --- |
|  |
| Мал. 3.7. Інерційне (підсилювальне)  та пропорційна ланка |

Порівняємо рішення для інерційної ланки при різних значеннях постійного часу з пропорційною ланкою. На рис. 3.7. наведено графіки, що відображають процеси, що описуються ММ інерційної ланки першого порядку. Розглянуті процеси характеризуються постійними часу різної величини, а саме: *Т*=6, *Т*=3 та *Т*=1. З графіків видно, що із зменшенням постійного часу вони наближаються до ступінчастого відображення графіка пропорційної ланки. Отже, пропорційну ланку можна вважати граничним випадком інерційної ланки (при *Т*→0). Такий самий висновок можна зробити і при порівнянні ММ цих ланок. Запишемо їх рівняння ще раз:

 (3.32)

|  |
| --- |
|  |
| Мал. 3.8. Важіль 2 |

З рівнянь видно, що при *Т*→0 перший доданок в лівій частині рівняння моделі інерційної ланки також прагне 0 і обидва рівняння стають ідентичними.

Розглянемо деякі приклади застосування ММ пропорційної ланки. Звернемося ще раз до гойдалки (рис.3.8.). Розглянемо не переміщення їх, зрештою, а прикладені до них сили. Для рівноваги гойдалок необхідно, щоб моменти сил *F*1 і *F*2 дорівнювали:

 (3.33)

За аналогією з (3.29) позначимо:

 (3.34)

З огляду на це (3.33) може бути записано у вигляді (3.30) ММ пропорційної ланки. Слід звернути увагу (3.29) і (3.34) на вирази для коефіцієнтів посилення *k*. Вони становлять зворотне співвідношення. Це виражає відоме ще зі шкільного курсу фізики правило: «Виграєш у силі – програєш у переміщенні».

Ще одним прикладом застосування ММ пропорційної (підсилювальної) ланки може бути опис роботи різноманітних зубчастих або ремінних передач. Вони можуть мати різну форму та широке застосування в редукторах та приводах механізмів.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| Мал. 3.9. Пара зубчастих коліс із ЗОВНІШНІМ зачепленням. Передавальне число (коефіцієнт посилення) для моменту сил, що передається, — 3 (42/14). У той же час коефіцієнт передачі для кута повороту та кутової швидкості – 1/3. Обертання коліс відбувається **протиспрямовано**. | Мал. 3.10. Пара зубчастих коліс з внутрішнім зачепленням. Передатне число - 3 (42/14). Обертання коліс відбувається **сонаправлено**. |
|  |  |
| Мал. 3.11. Головна передача в задньопривідному автомобілі | Мал. 3.12. Конічні колеса у приводі затвору греблі |
|  |  |
| Мал. 3.13. Рейкова передача (кремальєра) | Мал. 3.14. Система Романа, застосовується у зубчастій залізниці |
|  |  |
| Мал. 3.15. Ремінна передача | Мал. 3.16. Ланцюгова передача |

*Багато механізмів, у яких застосовуються зубчасті, ланцюгові, ремінні передачі в залежності від призначення називаються* ***редукторами*** *або* ***мультиплікаторами****.*

***Редуктор*** *(від лат.* ***reducere*** *- зменшувати) - пристрій, що перетворює шляхом зменшення вхідний вплив на деякий вихідний тієї ж фізичної природи. Природа сигналів, що перетворюються, може бути різна. Все, про що йшлося вище, відноситься до* ***механічних*** *редукторів. Крім того, можна відзначити* ***гідравлічні****,* ***газові*** *редуктори. Електротехнічні* ***трансформатори*** *є редукторами напруги.* ***Механічний редуктор*** *– механізм передачі потужності обертанням, головною функцією якого є редукція, тобто, зниження зусилля, необхідного для приводу пристрою. Канонічним видом механічного редуктора є пара взаємозачеплених циліндричних шестерень, з яких провідна шестерня менша, що реалізує вхідний сигнал, а ведена — більшого. Взагалі, важіль також є редуктором.*

|  |
| --- |
|  |
| Мал. 3.17. Схема гідравлічного домкрата |

***Мультиплікатор*** *(лат.* ***multiplicare*** *– множити, примножувати, збільшувати) - пристрій, що перетворює шляхом збільшення вхідний вплив на деякий вихідний тієї ж фізичної природи. Природа сигналів, що перетворюються також, як у редукторах, може бути різна.*

Як ще один приклад пристрою, процеси в якому можуть бути описані за допомогою ММ пропорційної ланки, розглянемо гідравлічний домкрат (рис. 3.17). Він складається з двох циліндрів різного діаметра, з'єднаних патрубком. Кожен циліндр поміщений поршень відповідного діаметра. Простір під поршнями заповнений рідиною. При дії на менший поршень площею *S*1 силою *F*1 рідини під ним створюється тиск величиною *P*1, (тиск – сила, що діє на одиницю площі):

 (3.35)

При дії на великий поршень площею *S*2 силою (вагою) вантажу *F*2, що піднімається, в рідині під ним створюється тиск величиною *P*2:

 (3.36)

Циліндри є сполученими судинами (через патрубок, що з'єднує їх) і величини тисків в обох судинах рівні:

 (3.37)

За умовою другий циліндр (з вантажем, що піднімається) має більший діаметр і, відповідно, *S*2 > *S*1. І тут *F*2 > *F*1. В результаті отримали: меншою силою піднімаємо більший вантаж. Вираз (3.37) аналогічний (3.28) і (3.33). Воно також є записом ММ пропорційної ланки.

При розгляді роботи домкрата крім співвідношення сил, що виникають, слід розглянути і зміну інших параметрів. Нехай у процесі роботи поршень у малому циліндрі перемістився під впливом сили *F*1 з відривом *h*1. При цьому з малого циліндра витісняється об'єм рідини, що дорівнює:

 (3.38)

При переміщенні вгору на відстань *h*2 поршня у великому циліндрі об'єм рідини в ньому збільшився на:

 (3.39)

Т.к. рідину вважаємо стисканою, а циліндри сполученими судинами, маємо:

 (3.40)

Як і в попередньому випадку *S*2 > *S*1. Через це (3.39) *S*1/*S*2 < 1 і, відповідно, *h*2 < *h*1. В результаті, як і у випадку з важелем, виграємо у силі (*F*2 > *F*1), програємо у відстані (*h*2 < *h*1).

## **Інтегруюча ланка (***Лекція 5***)**

Розглянемо ММ у вигляді:

 (3.41 )

За допомогою такої моделі може бути описаний, наприклад, процес накопичення з часом будь-якої речовини в ємності *x*вих при змінному витраті цієї речовини *x*вх.

Розглянемо заповнення бака водою через трубопровід. Покладемо внутрішній діаметр трубопроводу рівним *d*. Швидкість течії води у трубопроводі з часом може бути змінною. Позначимо її як *r*(*t*). І тут кількість накопиченої води у баку – *V*(*t*). Витрата води  можна визначити як добуток площі внутрішнього перерізу трубопроводу на швидкість води в даний момент часу:

 (3.42)

Кількість води в баку визначається та співвідношення:

 (3.43)

або, підставивши (3.42):

 (3.44)

Компоненти цього рівняння при порівнянні його з (3.41) відповідають:

 (3.45)

Слід зазначити, що за заданої величини швидкості рідини (*х*вх=*r*) зі збільшенням діаметра трубопроводу (*d*) збільшується його площа перерізу і, відповідно, витрата рідини. Як наслідок, збільшується швидкість заповнення бака (накопичення води). Таким чином, і у разі ММ інтегруючої ланки коефіцієнт k можна розглядати як коефіцієнт посилення.

Нижче розглянемо інші приклади застосування ММ інтегруючої ланки. Наразі знайдемо рішення вихідного рівняння (3.41). Розглянута раніше ММ інерційної ланки першого порядку та моделі інших ланок, які будуть розглянуті нижче, подаються у вигляді диференціальних рівнянь. Внаслідок цього для одноманітності уявлення та модель (3.41) також зручніше уявити у такому вигляді. Продиференціюємо (3.41):

 (3.46)

Обидві форми подання (3.41) та (3.46) ММ інтегруючої ланки правомірні. За допомогою перетворення Лапласа знайдемо передатну функцію та рішення при одиничній ступінчастій дії рівняння (3.46):

 (3.47)

Рішення при одиничній дії з урахуванням (3.47) шукаємо у вигляді:

 (3.48)

|  |
| --- |
|  |
| Мал. 3.18. Інтегруюча ланка |

За допомогою операцій зворотного перетворення Лапласа (додаток П1, №4 та №5) отримаємо рішення:

 (3.49)

У графічному поданні реакція системи на одиничний ступінчастий вхідний вплив є прямою, що виходить із початку координат. Коефіцієнт *k* є тангенсом кута її нахилу до осі абсцис (рис. 3.18).

|  |
| --- |
|  |
| Мал. 3.19. Гідроциліндр |

Як приклад пристроїв, процеси в яких можуть бути описані за допомогою ММ інтегруючої ланки, можна навести гідроциліндри як пристрої приводу різних механізмів (рис. 3.19). Залежно від того, в яку сторону необхідно отримати переміщення *h* штока циліндра, рідина подається через штуцер 1 або 2 з деякою витратою *q*. За час *t* у відповідну порожнину надходить рідина з об'ємом:

 (3.50)

При відомій площі поршня *S* може бути визначена величина його переміщення, а отже, і переміщення штока:

 (3.51)

Робота спідометра в машині також може бути прикладом інтегруючої ланки. Як вхідний сигнал служить швидкість автомашини *V*. Як вихідний – зазначена пройдена відстань *S*=*V*·*t*

Як інтегруюча ланка можна розглядати і потенційну енергію *Е*П, що накопичується в процес підйому тіла масою *m* на висоту *h*:  Шлях *h* тіло проходить з деякою швидкістю *V* за час *t*. В цьому випадку:

 (3.52)

## **Диференціююча ланка**

Диференціююча ланка може бути ідеальною та реальною. Вихідна величина ідеальної ланки, що диференціює, пропорційно залежить від швидкості зміни вхідної величини. Модель такої ланки може бути записана у вигляді:

 (3.53)

|  |
| --- |
|  |
| Мал. 3.20. Ідеальна диференційна ланка |

Як зазначалося раніше, на даному етапі навчання ми розглядаємо вхідний вплив у вигляді одиничної ступінчастої функції (рис. 3.2.) – функції Хевісайда. Розглянемо, яка буде реакція на таку зовнішню дію (*x*вх) об'єкта, модель якого записана у вигляді (3.53). Для цього визначимо величину похідної від ступінчастої вхідної дії. Пам'ятаємо, що величина похідної може бути визначена величиною тангенса кута нахилу дотичної до графіку функції в точці, що розглядається. На рис. 3.20. графік вихідної функції (верхній графік) виділено червоним, а дотична – синім. На нижньому графіці відображена реакція об'єкта на ступінчасту вхідну дію. Розглянемо, як сформувався вихідний сигнал (реакція об'єкта):

* На інтервалі часу від -∞ до 0 (горизонтальна вісь, вісь часу, вісь абсцис) на графіку зміни вхідного сигналу його величина дорівнює 0. Це відображається горизонтальною прямою (верхній графік). Стосовно прямої збігається з цією прямою. Тому дотична також горизонтальна. → Кут її нахилу α=0. → Тангенс кута нахилу дорівнює 0. → Похідна від *х*вх дорівнює 0. Цей факт на нижньому графіку (зеленим кольором) відображається горизонтальною прямою вздовж осі часу на цьому ж інтервалі від -∞ до 0.
* У момент часу *t*=0 миттєвим стрибком відбувається **обмежена за величиною** зміна вхідної дії від 0 до 1 (верхній графік). Цей процес відображається вертикальним відрізком прямої (штрихова лінія, червоний колір). Стосовно цієї лінії також вертикальна пряма. → Кут її нахилу α=90о. → tg(90o)=∞. → Похідна від *х*вх дорівнює ∞. Цей факт на нижньому графіку (зеленим кольором) відображається вертикальною (штриховою) прямою, спрямованою в ∞ у момент часу *t*=0.
* На інтервалі часу від 0 до +∞ (горизонтальна вісь, вісь часу, вісь абсцис) на графіку зміни вхідного сигналу його величина дорівнює 0. Це відображається горизонтальною прямою (верхній графік). Стосовно прямої збігається з цією прямою. Тому дотична також горизонтальна. → Кут її нахилу α=0. → Тангенс кута нахилу дорівнює 0. → Похідна від *х*вх дорівнює 0. Цей факт на нижньому графіку (зеленим кольором) відображається горизонтальною прямою вздовж осі часу на цьому ж інтервалі від 0 до +∞.

Отримані результати відображають той факт, що миттєве кінцеве зміна будь-якої величини (вхідний сигнал у випадку) може бути забезпечене тільки при нескінченно великій швидкості його зміни (вихідна величина). Але здійснити такий процес неможливо, т.к. всі фізичні процеси в природі інерційні (зміна будь-яких величин можуть відбуватися нехай і з великою, але з кінцевою швидкістю).

Визначимо передатну функцію для диференційної ланки. Для цього застосуємо перетворення Лапласа до (3.53):

 (3.54)

Покажемо неможливість реалізації ідеальної диференційної ланки та через використання передавальної функції *W*. Для цього використовуємо форму розв'язання у зображеннях:

 (3.55)

Як вхідний вплив як зазвичай використовуємо одиничний ступінчастий вплив і, відповідно, його зображення (додаток П1, №3):

 (3.56)

Підставимо (3.56) у (3.55). З урахуванням (3.54):

 (3.57)

В результаті отримали як зображення вихідної величини постійне значення *k*. Але немає для постійної величини зворотного перетворення Лапласа. Це підтверджує, що практично створити ідеальну ланку, що диференціює неможливо.

Реальні диференціюючі ланки можуть бути отримані з деяких поєднань типових елементарних ланок за умови, що величини деяких входять до диференціальних рівнянь цих ланок коефіцієнтів посилення *k* і постійних часу *T* прагнуть нескінченності або нуля. У умовах диференціальне рівняння ланки наближається до виду рівняння (3.53). Ідеальна диференціююча ланка у поєднанні з інерційними ланками відіграє важливу роль при побудові ММ різних процесів.

## **Інерційна ланка другого порядку (***Лекція 6***)**

Ця ланка крім записаного в заголовку має й інші, начебто взаємовиключні, назви: аперіодична (не періодична), коливальна. Це неоднозначністю рішення, залежить від співвідношення коефіцієнтів ММ ланки. Форма рішення залежно від співвідношення коефіцієнтів описана нижче. Характер поведінки рішення буде досліджено на практичних заняттях

Інерційна ланка другого порядку має диференційне рівняння виду:

 (3.58)

Коефіцієнти *T*b та *T*a мають розмірність часу (див. Роз'яснення до рівняння 2.13). Після перетворення Лапласа передатна функція ланки:

 (3.59)

Приклади реалізації ланки наведено на рис. 3.21.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| а | б |
| Мал. 3.21. Приклади реалізації інерційної ланки другого порядку: а – коливальна ланка; б - аперіодична ланка | |

Перехідний процес інерційної ланки можна досліджувати шляхом аналітичного розв'язання диференціального рівняння (3.58). Воно є **неоднорідним** лінійним диференціальним рівнянням другого порядку.

**Неоднорідність** рівняння визначається наявністю правої частини. Перед рішенням проаналізуємо це рівняння, точніше вплив правої частини у цьому випадку. Рівняння (3.58) визначає рух математичного маятника при деякому, у випадку довільному, зовнішньому вплив *x*вх. У цьому випадку в якості використовується одиничний ступінчастий вплив. У лівій частині рівняння як невідома (визначена) величина використовується координата, положення маятника в залежності від часу. Члени лівої частини рівняння описують вплив різних сил на положення маятника. Розглянемо одну із схем запуску маятника у рух (рис. 3.22).

|  |  |
| --- | --- |
|  | |
| а | б |
| Мал. 3.22. Схема запуску маятника у рух | |

У початковий момент часу маятник відхилений від положення рівноваги 0 на деякий кут α до положення А (рис. 3.22, а). Сила тяжіння є силою, яка прагне привести маятник у рух. Це одна з сил, що діє на маятник під час його руху. Вона описана в лівій частині рівняння (третій човен рівняння). Крім того, до маятника прикладена сила *F*р така, що



Внаслідок цього результуюча сил, прикладених до маятника, визначається співвідношенням:



Маятник нерухомий у положенні А. Такий стан можна розглядати як результат нульової дії протягом від – ∞ до моменту часу 0 (рис. 3.2).

У деякий момент часу (позначимо його *t*=0. рис. 3.2) сила *F*р зникає (прибрали опору з-під вантажу маятника) та маятник під дією сили



починає рух. Як сказано раніше, дія сили тяжіння *mg* врахована в лівій частині рівняння (3.58). Таким чином, можна розглядати вільний рух маятника, рух без будь-якого зовнішнього впливу. І тут замість неоднорідного рівняння (3.58) можна розглядати **однорідне** (без правої частини)

 (3.60)

Початкове положення маятника (у точці А) відображається у початкових умовах. Т.к. диференціальне рівняння (3.60) є рівнянням другого порядку, то й початкових умов має бути два.

Як початкові умови виступають параметри об'єкта, що розглядається, або процесу в початковий момент часу. При розв'язанні рівняння (3.60) визначається координата вантажу маятника в залежності від часу. Тому як одну з умов задається координата в початковий момент часу *t*=0 (перед початком руху маятника). Як координата використовується довжина дуги *x*0 від точки 0 до точки А (рис. 3.22). Величину цієї дуги при заданому початковому куті максимального відхилення маятника можна визначити із співвідношення:

 (3.61)

Тут *l* – довжина підвісу маятника, кут α початкового відхилення маятника від положення рівноваги – в радіанах.

Крім координати початковий момент як початкової умови може бути похідна від координати початковий момент, тобто. швидкість вантажу маятника у початковий момент. Маятник починає рухатися із положення рівноваги. Отже, і швидкість початковий момент визначається співвідношенням:

 (3.62)

*Розглянемо рішення рівняння (3.60). Попередньо виконаємо перетворення. Для спрощення форми запису замінимо:*

 *(3.63)*

*Рівняння (3.60) набуде вигляду:*

 *(3.64)*

*Розділимо всі члени рівняння на коефіцієнт при першому доданку*

 *(3.65)*

*та введемо заміну:*

 *(3.66)*

*У результаті рівняння (3.60) запишемо у вигляді:*

 *или*  *(3.67)*

*У такому вигляді в курсі вищої математики студенти ознайомлювалися з рішенням лінійного однорідного звичайного диференціального рівняння другого порядку. Згадаймо деякі етапи його вирішення (за більш детальною інформацією можна звернутися до відповідного розділу будь-якого підручника з вищої математики).*

*Щоб знайти загальний інтеграл цього рівняння, достатньо знайти два лінійно незалежні приватні рішення. Шукатимемо приватні рішення у вигляді:*

* (3.68)*

*Тоді*

* (3.69)*

*Підставляючи отримані вирази похідних до рівняння (3.67), знаходимо:*

* (3.70)*

*Тому що  то, значить,*

* (3.71)*

*Якщо k задовольнятиме рівняння (3.71), то  буде рішенням рівняння (3.67). Рівняння (3.71) називається характеристичним рівнянням по відношенню до рівняння (3.67).*

*Характеристичне рівняння є квадратним рівнянням, що має два корені: позначимо їх через k1 і k2. При цьому*

* (3.72)*

*Можливі такі випадки:*

*I. підкорене вираз ; коріння характеристичного рівняння k1 та k2 – комплексні числа;*

*ІІ. підкорене вираз ; коріння характеристичного рівняння k1 і k2 – дійсні числа, рівні між собою (k1=k2);*

*ІІІ. підкорене вираз ; коріння характеристичного рівняння k1 і k2 – дійсні числа і навіть рівні між собою ().*

*Розглянемо кожен випадок окремо.*

1. *К о р і н н я х а р а к т е р и с т и ч н о г о р і в н я н н я. Так як коріння входить попарно сполученим, то позначимо:*

* (3.73)*

*де*

* (3.74)*

*Слід звернути увагу, що доданки у підкореному вираженні (3.74) мають інший порядок порівняно з (3.72). Загальне рішення рівняння (3.67) у разі комплексного коріння характеристичного рівняння має вигляд*

**

*або*

* 3.75*

*Де  – довільні постійні. Кількість довільних постійних (у разі дві) визначається порядком вихідного диференціального рівняння (3.67). Їхня величина може бути визначена з такої ж кількості початкових умов (3.61 – 3.62).*

*Рівняння (3.75) визначає рух маятника будь-якої миті часу, отже, і за t=0. Підставимо значення з (3.61) до (3.75). Пам'ятаємо, що значення функції замість xвых використовується y (3.63). В результаті отримаємо:*

* (3.76)*

*Для використання другої початкової умови (3.62) знайдемо похідну від y (3.75) як від виконання двох функцій:*

* (3.77)*

*Підставимо значення з (3.62) до (3.77):*

* (3.78)*

*і зрештою:*

* (3.79)*

*Порядок дій, відображений у (3.76 – 3.79) є загальним щодо постійних інтегрування* ***C*** *з допомогою початкових умов. В результаті отримана система двох рівнянь алгебри (3.76 і 3.79) для визначення двох невідомих величин: C1 і C2. У цьому випадку з деяких особливостей отриманих рівнянь немає необхідності вирішувати систему рівнянь. Вони можуть бути вирішені послідовно:*

* (3.80)*

*Слід пам'ятати, що* ***α*** *і* ***β*** *визначаються (3.74), а* ***p*** *і* ***q*** *для них із (3.66).*

1. *К о р н і х а р а к т е р і с т і ч е з к о г о р а в н е н е д е й с т і т о л і і р а у н е е. У цьому випадку *

*Одне приватне рішення  повчається виходячи з попередніх міркувань. Потрібно знайти друге приватне рішення, лінійно незалежне з першим (див. вище). У даному випадку функція  тотожно дорівнює  і тому не може розглядатися як друге приватне рішення.*

*Шукатимемо друге приватне рішення у вигляді*

* (3.81)*

*де u(t) – невідома функція, що підлягає визначенню.*

*Диференціюючи (16), знаходимо:*

* (3.82)*

*Підставляючи вирази похідних (3.82) до рівняння (3.67), отримаємо:*

* (3.83)*

*Оскільки k1 – кратний корінь характеристичного рівняння, то відповідно до (5)*

* (3.84)*

*Крім того,  або *

*Отже, щоб знайти u(t), треба розв'язати рівняння  чи  Інтегруючи, отримуємо . Зокрема, можна покласти тоді. Таким чином, як друге приватне рішення можна взяти:*

*. (3.85)*

*Це рішення лінійно незалежно з першим, тому що  загальним інтегралом будемо функція*

* (3.86)*

*де  – довільні постійні, які мають бути визначені на підставі початкових умов (див.3.76 – 3.79).*

1. *К о р і н н я х а р а к т е р и с т и ч н о г о р і в н я н н я д і й с н е і р і з н е: . У цьому випадку приватними рішеннями будуть функції*

* (3.87)*

*Ці рішення лінійно незалежні, оскільки*

* (3.88)*

*Отже, загальний інтеграл має вигляд*

* (3.89)*

*Де  довільні постійні, які мають бути визначені на підставі початкових умов (див.3.76 – 3.79).*

## **Ланка запізнювання (ланка транспортного запізнення)**

Вихідна величина в ланці, що запізнюється точно повторює вхідну величину, але з деяким запізненням (τ) за часом:

 (3.90)

Передатна функція для такого рівняння має вигляд:

 (3.91)

|  |
| --- |
|  |
| Мал. 3.23 Ланка транспортного запізнення |

|  |  |
| --- | --- |
|  | |
| а | б |
| Мал. 3.24. Приклади реалізації ланки запізнення | |

На рис. 3.24а схематично зображено прокатний стан з валками (червоний колір), що формують товщину листа і датчиками (синій колір), розташованими на деякій відстані від валків і визначають товщину листа після прокату. Якщо виміряна товщина відрізняється від заданої, то подається сигнал на механізм валків для регулювання товщини прокату. Якщо в певний момент часу валки сформували з похибкою товщину листа, то за допомогою датчиків це відхилення буде помічено лише через деякий проміжок часу (час запізнення). Величина визначається відстанню від валків до датчиків і швидкістю руху листа.

На рис. 3.24,б схематично зображено транспортер, наприклад, сипких продуктів з бункера 1 до деякої ємності 3. Витрата продукту, що транспортується з бункера 1 регулюється за допомогою засувки 2. Якщо величина витрати через засувку 2 буде відрізнятися від заданої, то в районі ємності 3 це буде помічено лише через деякий час τ (час затримки), що визначається довжиною транспортера та швидкістю його руху.

*У (3.91) наведено вираз для передавальної функції ланки запізнення. Розглянемо, як цю величину було отримано. Для цього застосуємо перетворення Лапласа до вираження ММ ланки запізнення (3.90):*

 *(3.92)*

*Відповідно до (3.3) отримаємо:*

 *(3.93)*

*Введемо нову змінну:*

* или  (3.94)*

*Підставимо (3.94) у (3.93):*

 *(3.95)*

*Розмір запізнення τ=const. Враховуючи, що диференціал dτ постійної величини дорівнює нулю та виносячи постійну величину e-pτ за знак інтеграла, отримаємо:*

 *(3.96)*

*Згідно (3.3) інтеграл (3.96) є (з урахуванням (3.94)) зображенням Xвх(p) функції xвх(λ)= xвх(t-τ), отримаємо:*

 *(3.97)*

*Таким чином, ланка запізнення має передатну функцію.*



*що відповідає (3.91).*

# **Як поєднуються інженерні «лего-кубики» (***Лекція 7***)**

## **З якою метою поєднують інженерні «лего-кубики»**

Рівняння, які описують реакцію розглянутих ланок на зовнішній вплив, є ММ найпростіших об'єктів та процесів у них. У реальних об'єктах може протікати одночасно і взаємно впливаючи кілька процесів. Більше того, механізми, що проектуються або робота яких досліджується, можуть включати до свого складу кілька більш простих об'єктів. Виникає необхідність для опису їхньої роботи об'єднувати ММ простих об'єктів (ланок) у складніші системи. При цьому має відображатись взаємодія ланок.

У конструкторі лего елементи можна з'єднувати по-різному: ставити поруч (стикувати бічними поверхнями) або ставити один на одного (з'єднувати послідовно). ММ складних об'єктів можуть бути побудовані аналогічно з більш простих моделей стандартних ланок. Для цього їх можна з'єднувати послідовно, паралельно чи комбінувати різні сполуки (рис. 4.1). Стрілки на схемі вказують напрямок проходження сигналу (від входу до виходу). Елементи, приклади яких наведено на рис. 4.1.г, позначають суматори. На схемах вони позначають пристрої, в яких об'єднуються сигнали, що приходять в них. Сигнали можуть підсумовуватись (позначені знаком “+”) або відніматися (позначені знаком “-“). Знак обліку в подібних пристроях сигналів, що надходять, може відображатися і іншим чином. Світлий сектор відповідає обліку сигналу зі знаком “+”, а “зачорнений” сектор – зі знаком “-“.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| **а)** | **б)** |
|  |  |
| **в)** | **г)** |
|  | |
| **д)** | |
| Мал. 4.1. Приклади з'єднання ланок | |

ММ окремої ланки описується за допомогою нехай і простого, але диференціального рівняння. В результаті ММ об'єкта складатиметься вже з деякої кількості диференціальних рівнянь. Для отримання рішення необхідно розв'язати систему цих рівнянь. Чим складніше об'єкт, тим більше рівнянь, що входять до цієї системи і тим складніше отримати її розв'язання. Для подолання цієї скрути використовується перетворення Лапласа для ММ окремих ланок.

|  |
| --- |
|  |
| Мал. 4.2. Подання стандартної ланки у зображенні після застосування перетворення Лапласа до вихідної ММ |

На структурних схемах виду рис. 4.1. стандартні ланки у зображеннях (після застосування до них перетворення Лапласа) подаються як рис. 4.2. Розглянемо як такий підхід дозволяє спростити рішення ММ складних об'єктів, що складаються з великої кількості ланок. Для цього визначимо вид загальної передавальної функції для різного типу з'єднання ланок.

## **Послідовне з'єднання ланок**

Послідовне з'єднання ланок (рис. 4.1,а) у зображеннях після виконання перетворення Лапласа матиме вигляд (рис. 4.3):

|  |
| --- |
|  |
| Мал. 4.3. Послідовне з'єднання ланок |

Тут верхній індекс зазначає номер ланки. Для кожної з ланок, враховуючи форму запису передавальної функції (4.1)

 (4.1)

можна записати (4.2,а)

 (4.2)

При послідовному з'єднанні ланок вихідна величина ланки, що розглядається, є вхідною величиною наступної ланки. Іншими словами:

 (4.3)

Враховуючи співвідношення, що виражається першим рівнянням (4.3), виконаємо підстановку першого рівняння (4.2,а) у друге. Результат представлений (4.2,б). Третє рівняння (4.2,а) поки що без змін. Далі, враховуючи співвідношення, що виражається другим рівнянням (4.3), виконаємо підстановку першого рівняння (4.2,б) в друге. Результат представлений (4.2,в).

З (4.2,в) слід, що залежність зображення вихідного сигналу  від зображення вхідного сигналу  системи із послідовно з'єднаних ланок визначається добутком передавальних функцій цих ланок. Іншими словами, передавальна функція послідовно з'єднаних ланок дорівнює добутку передавальних функцій цих ланок:

 (4.4)

За цим правилом визначається передатна функція для будь-якої кількості послідовно з'єднаних ланок.

## **Паралельне з'єднання ланок**

|  |
| --- |
|  |
| Мал. 4.4. Паралельне з'єднання ланок |

Паралельне з'єднання ланок (рис. 4.1,б) у зображеннях після виконання перетворення Лапласа матиме вигляд, наведений на рис. 4.4. Така сполука має деякі особливості. На вхід всіх паралельно з'єднаних ланок подається однаковий вхідний сигнал (зображеннях *X*вх(*p*)). Вихідний сигнал *X*вых(*p*) всього з'єднання формується як сума вихідних сигналів всіх ланок. Підсумовування відбувається з урахуванням символу впливу сигналу. Сигнал може і відніматися. У цьому спільність рішення порушується.

Отже, у всіх ланках відбувається перетворення однакового вхідного сигналу з урахуванням різних функцій передавальних ланок в індивідуальні вихідні сигнали:

 (4.5)

При цьому вихідний сигнал формується як:

 (4.6)

Підставимо вирази з (4.5) до (4.6):

 (4.7)

Винесемо однаковий співмножник *X*вх(*p*) за дужки:

 (4.8)

і визначимо передатну функцію між зображеннями вхідного *X*вх(*p*) і вихідного *X*вих(*p*) сигналів:

 (4.9)

Таким чином, передатна функція паралельно з'єднаних ланок дорівнює сумі передавальних функцій цих ланок. За цим правилом визначається передатна функція для будь-якої кількості паралельно з'єднаних ланок.

## **Зустрічно-паралельне з'єднання ланок (***Лекція 8***)**

|  |
| --- |
|  |
| Мал. 4.5. Зустрічно-паралельне з'єднання |

Ланками сигнали передаються в одному напрямку (принцип діода). Але практично виникає необхідність передачі сигналу з виходу об'єкта з його вхід. Така операція є основою створення систем автоматичного управління. Їхня теорія (ТАУ – теорія автоматичного управління) вивчатиметься у наступних семестрах. На даному етапі розглянемо зустрічно-паралельне з'єднання ланок та визначимо передатну функцію такого об'єкта. На рис. 4.1, наведена загальна схема з'єднання. Після застосування перетворення Лапласа вона матиме вигляд, наведений на рис. 4.5. Величина *W*ос визначає передатну функцію лінії зворотного зв'язку. Цією лінії передається сигнал з виходу об'єкта з його вхід. На **вхід** лінії зворотного зв'язку подається сигнал, що дорівнює сигналу на виході об'єкта. Рівні та його зображення *X*вых(*p*).

Зупинимося докладніше на суматорі. На нього подається вхідний сигнал для всього об'єкта (*X*вх(*p*)) та вихідний сигнал з лінії зворотного зв'язку (*X*вих ос(*p*)). У цьому випадку сигнал з лінії зворотного зв'язку на схемі подається в зачорнений сектор суматора, що відповідає його обліку зі знаком мінус. Саме такий варіант обліку цього сигналу найпоширеніший у ТАУ. Тому ми його й розглядатимемо. Подібна схема побудови ММ об'єкта називається схемою з **негативним** зворотним зв'язком.

Запишемо рівняння, що зв'язують величини, вказані на рис.4.5:

 (4.10)

Перше рівняння відображає взаємодію сигналів у суматорі. Друге – в основному ланці з функцією передатки *W*1. Третє – у лінії зворотного зв'язку. Наше завдання виразити в одному рівнянні зв'язок між зображеннями вхідного та вихідного сигналів *X*вх(*p*) та *X*вых(*p*).

Підставимо перше рівняння з (4.10) у друге:

 (4.11)

Третє рівняння з (4.10) підставимо (4.11)

 (4.12)

Розкриємо дужки:

 (4.13)

Наведемо такі члени:

 (4.14)

На основі (4.14) побудуємо передатну функцію об'єкта з негативним зворотним зв'язком (рис. 4.5):

 (4.15)

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| а) | б) |
| Мал. 4.6. Зворотній зв'язок без зміни сигналу | |

Розглянемо деякі особливості зустрічно-паралельного з'єднання (об'єкта із зворотним зв'язком) і, відповідно, вирази для передавальної функції. Передаточна функція лінії зворотного зв'язку свідчить про зміну сигналу в цій лінії при передачі з виходу об'єкта на суматор, розташований на вході в об'єкт. Така зміна може бути передбаченою (посилення сигналу при його передачі на велику відстань, зміна характеристик сигналу і т.д.), так і випадковим (перешкоди в лінії передачі). Але можна уявити ситуацію (ідеальний випадок), коли зміни сигналу лінії зворотного зв'язку немає. Сигнал із виходу об'єкта на вхід передається без зміни. На схемі це виглядатиме як рис. 4.6, а. У схемі виду рис. 4.5 це може бути подане у вигляді з передатною функцією *W*ос=1 (рис. 4.6,б). Справді, у цьому випадку відповідно до третього рівняння (4.10):

 (4.16)

Зміни сигналу лінії зворотного зв'язку немає. І тут передатна функція для схеми рис. 4.6, б і, відповідно, для схеми рис. 4.6,а матиме вигляд:

 (4.17)

З наведених міркувань до схеми рис. 4.6,а можна дійти невтішного висновку, що це сполучні лінії в **ідеалізованих** схемах мають передатну функцію і вона *W*=1. Так, у разі послідовного з'єднання ланок (рис. 4.3) з урахуванням усіх з'єднувальних ліній передавальна функція (4.4) може бути записана у вигляді:

 (4.18)

Сполучні лінії не впливають на кінцевий вид передавальної функції. Але в реальних об'єктах вони можуть вносити зміни (спотворення) в сигнал, що передається. Особливо суттєвим такий вплив може виявлятись у лініях передачі слабких сигналів, наприклад, від вимірювальних приладів. І тут необхідно враховувати вплив сполучних магістралей як визначення (завдання) їх передатних функцій.

p align="justify"> Ще однією особливістю зустрічно-паралельного з'єднання ланок є залежність знака в елементах передавальної функції від знака, з яким враховуються сигнали в суматорі. У розглянутому випадку сигнал від лінії зворотного зв'язку приходив до суматора зі знаком мінус (зачорнений сектор у суматорі). Але можуть бути випадки, коли такий сигнал надходить у суматор зі знаком плюс. В результаті в знаменнику передавальної функції (4.15) знак із «плюс» змінюється на знак «мінус»:

 (4.19)

Відповідні викладки студенти можуть зробити самостійно.

## **Редукція структурних схем**

|  |
| --- |
|  |
| Мал. 4.7. Послідовно-паралельне з'єднання ланок |

ММ реальних об'єктів мають складнішу структуру, ніж розглянуті у розділах 4.2, 4.3, 4.4. Як абстрактний приклад можна розглянути схему, наведену на рис. 4.1, д. Як отримати загальну передатну функцію такого об'єкта?

Розглянемо наведену на рис. 4.7 Схему. Виділимо частини схеми із послідовно з'єднаними елементами (виділені штрих-пунктирними контурами). До кожної такої частини застосуємо правило для послідовного з'єднання елементів і відповідно замінимо ланцюжки послідовно з'єднаних елементів одиночними елементами. Відповідно до (4.4) передавальні функції

|  |
| --- |
|  |
| Мал.4.8. Еквівалентна схема  (проміжний варіант) |

цих елементів дорівнюватимуть добутку передатних функцій замінюваних

елементів. Замість схеми (рис. 4.7) отримаємо проміжний варіант еквівалентної схеми (рис. 4.8). У такому вигляді вона являє собою схему з паралельним з'єднанням ланок з відповідними передатними функціями W1-2(p), W3-4(p), W5-6(p). У цьому випадку може бути застосоване правило, відображене (4.9). Схема (рис. 4.9) може бути замінена еквівалентною схемою всього з одним елементом, але його передатна функція дорівнюватиме сумі передатних функцій елементів схеми (рис. 4.8):

 (4.20)

З урахуванням виду передавальних функцій на схемі (рис. 4.8) отримаємо:

 (4.21)

Після виконаних перетворень реакцію системи на зовнішній вплив можна отримати за допомогою простого виразу:

 (4.22)

Тут *W*екв(*p*) – вираз алгебри.

В результаті замість розв'язання системи диференціальних рівнянь отримано рівняння алгебри виду (4.22). Усі перетворення у його отримання також носили алгебраїчний характер. Тепер достатньо за допомогою таблиць (наприклад, Додаток 1) виконати зворотне перетворення Лапласа і, тим самим, отримати рішення вихідної системи диференціальних рівнянь.

На основі розглянутого прикладу сформулюємо загальний алгоритм редукції структурних схем:

1. Виділяються частини схем, що складаються лише з послідовно з'єднаних елементів. Визначається передатна функція цих ділянок (4.4). Ланцюжки послідовно з'єднаних елементів замінюються одиночними елементами з обчисленими передатними функціями;
2. Виділяються групи паралельно чи зустрічно-паралельно з'єднаних елементів. На основі (4.9) або (4.15) визначаються передатні функції цих ділянок. Виділені групи паралельно або зустрічно-паралельно з'єднаних елементів замінюються одиночними елементами з обчисленими передатними функціями;
3. Якщо залишився один елемент, перетворення закінчено. Якщо залишилося кілька елементів, повторюються дії, починаючи з пункту 1.

Введемо уточнення. У цьому вся курсі для побудови ММ використані прості диференціальні рівняння. Як аргумент у яких може бути використана лише одна змінна. У курсі вищої математики у разі для позначення аргументу часто використовується змінна «х». У технічних дисциплінах розглядається розвиток досліджуваних у часі (вивчають динаміку процесів). З цієї причини як аргумент розглядається змінна, що означає час "*t*". Усі раніше зроблені перетворення та висновки залишаються чинними.

Як приклад розглянемо процес редукції складнішої схеми, подібної рис. 4.1, д. Після застосування перетворення Лапласа для відображення зміни сигналу при проходженні через ланку відображатиметься за допомогою відповідної передавальної функції. Вихідна схема наведена на рис. 4.9.

|  |
| --- |
|  |
| Мал. 4.9 Вихідна схема перед редукцією |

Відповідно до першого пункту сформульованого вище алгоритму виділено дві групи послідовно з'єднаних ланок: W1–W2–W3 і W5–W6. Відповідно до цього пункту алгоритму замінимо їх окремими елементами з відповідними передатними функціями (рис. 4.10).

|  |
| --- |
|  |
| Мал. 4.10. Схема після редукції за першим пунктом алгоритму (перший прохід) |

На схемі (рис. 4.11) відповідно до другого пункту алгоритму редукції штрих-пунктирним контуром виділено групу паралельно з'єднаних елементів (найвнутрішню групу). Виділена група елементів замінюється однією ланкою з передатною функцією відповідно до (4.9). Слід враховувати, що у суматорі знак сигналу від ланки з функцією W4 враховується зі знаком «мінус». Результат цього кроку редукції наведено на рис. 4.11.

|  |
| --- |
|  |
| Мал. 4.11. Схема після редукції другого пункту алгоритму (перший прохід) |

У схемі (рис. 4.11) після редукції залишилося більше одного елемента. Відповідно до пункту 3 алгоритму слід повторити дії алгоритму. Відсутні ланцюжки послідовно з'єднаних елементів. Тому переходимо до другого пункту алгоритму. На рис. 4.11 штрих-пунктирним контуром виділено групу паралельно з'єднаних елементів. У суматорі сигнали від обох елементів враховуються зі знаком плюс. Результат цього кроку редукції наведено на рис. 4.12.

|  |
| --- |
|  |
| Мал. 4.12. Схема після редукції другого пункту алгоритму (перший прохід) |

Після останнього кроку редукції схема наведена до виду, що відповідає рис. 4.6,а з негативним зворотним зв'язком. Передатна функція такого з'єднання може бути визначена відповідно (4.17), де замість W1 використовується Wекв зі схеми (рис. 4.12):

 (4.23)

Передавальні функції є виразами алгебри. Для стандартних ланок ці вирази мають простий вигляд. Підставляючи їх залежно, подібні (4.23) і виконуючи прості перетворення, можна отримати простий вид загальної передавальної функції *W* об'єктів різної складності. Далі використовується вже відомий нам простий вираз

 (4.24)

Вхідні дії можуть бути різні. На даному етапі використовуємо лише один вид – одиничне східчасте. Його зображення (відповідно до №3, Додаток П1) визначається співвідношенням

 (4.25)

*(Інші стандартні вхідні дії також мають простий вигляд зображень)*.

Далі підставляємо (4.25) (4.24), виконуємо також алгебраїчні перетворення і отримуємо у вигляді **алгебраїчного** виразу зображення вихідного сигналу *X*вых(*p*). Далі останній етап. За допомогою таблиць, подібних до Додатку П1, виконується зворотне перетворення Лапласа:

 (4.26)

Отже, отримано кінцеве рішення: залежність вихідного сигналу об'єкта від часу (оригіналу вихідного сигналу x(t)) при вхідному ступінчастому впливі.

У всіх розглянутих перетвореннях були використані тільки алгебраїчні вирази. Це простіше, ніж використання та вирішення вихідної системи диференціальних рівнянь.

# **Особливості застосування інженерних "лего-кубиків" (***Лекція 9***)**

Вище описані основні правила використання стандартних ланок та їх передавальних функцій. Але можуть виникнути деякі додаткові питання, відповіді на які дозволять більш свідомо використати описані правила. Насамперед з'ясуємо, чому були використані стандартні ланки, які описані, а не інші.

## **Визначення виду стандартних ланок**

Функціонування кожного елемента технічної системи може бути описано за допомогою моделі, що складається, в загальному випадку з декількох рівнянь, у тому числі диференціальних. Динамічна модель визначає зміну залежно від часу вихідних величин за заданих вхідних. У випадку вхідні величини також можуть залежати від часу. Наприклад:

 (5.1)

Опис роботи всієї системи буде описуватися великою кількістю рівнянь. У цьому вихідні величини одного елемента будуть вхідними іншого. Як приклад розглянемо просту технічну систему, що складається з трьох послідовно з'єднаних елементів 1, 2 і 3. Кожен елемент описується за допомогою одного диференціального рівняння і вони відомі:

 (5.2)

 (5.3)

 (5.4)

де  – вихідні величини відповідно першого, другого та третього елементів;

 – вхідні величини елементів;

 – постійні коефіцієнти диференціального рівняння першого елемента;

 – те саме, другого елемента;

 – те саме, третього елемента.

Слід звернути увагу, що в моделі, як і раніше, всі вхідні величини зосереджені в правій частині рівнянь, а вихідні – в лівій.

*Виконаємо перетворення.*

*З рівняння (5.4) знаходимо*

* (5.5)*

*Враховуючи, що вхідна величина  третього елемента є вихідною величиною  другого елемента (), отримаємо*

* (5.6)*

*Продиференціюємо (5.6)*

* (5.7)*

*Підставляючи (5.6) і (5.7) до (5.3), отримаємо:*

* (5.8)*

*або*

* (5.9)*

*Враховуючи, що вхідна величина  другого елемента є вихідною величиною  першого елемента (), з (5.9) запишемо*

* (5.10)*

*Знайшовши першу і другу похідні від виразу (5.10), підставивши їх, а також вираз (5.10) в (5.2), виконавши алгебраїчні перетворення, отримаємо*

* (5.11)*

*Враховуючи, що вхідна величина x1вх першого елемента є вхідною величиною xвх всієї системи, а вихідна величина x3вых третього елемента є вихідною величиною xвых системи, запишемо*

* (5.12)*

*Таким чином, динамічні процеси (або їх ще називають перехідними) в системі, що розглядається, з трьох послідовно з'єднаних елементів визначаються диференціальним рівнянням третього порядку з постійними коефіцієнтами.*

При розгляді довільної технічної системи в переважній більшості випадків загальне диференціальне рівняння, що описує динамічні процеси в ній, буде складнішим за рівняння третього порядку, але форма запису залишиться колишньою, аналогічною (5.12):

 (5.13)

Тепер рішення системи рівнянь математичної моделі, що описує роботу технічного об'єкта, що розглядається, зводиться до рішення відповідного загального диференціального рівняння. Такий шлях рішення «в лоб» не є оптимальним. Мета наведених вище викладок показати принципову можливість отримання загального диференціального рівняння. А ось аналіз його дозволяє зробити низку цікавих та корисних висновків. Ці й займемося далі.

У перетворених за Лапласом виразах з комплексною змінною *p*, як і з іншими членами рівняння алгебри, можна робити різні дії: множення, розподіл, зведення в ступінь, винесення за дужки і т.д. Перетворимо за Лапласом рівняння (5.13).

 (5.14)

Винесемо за дужки спільні співмножники:

 (15.15)

Визначимо із рівняння (15.15) відношення зображення вихідної величини до зображення вхідний – *передавальну функцію об'єкта*:

 (5.16)

Передатна функція *W*(*p*) є дробово-раціональною функцією комплексної змінної *p*

 (5.17)

де  – поліном ступеня *n*;

 – поліном ступеня *m.*

Чисельник і знаменник розкладемо на множники. Для цього поліноми у вираженні передавальної функції (5.16) і (5.17) прирівняємо до нуля  Розв'яжемо отримані рівняння і за допомогою знайдених коренів  запишемо поліноми в наступному вигляді твори співмножників:

 (5.18)

 (5.19)

З їх допомогою передатну функцію (5.16) або (5.17) запишемо у вигляді:

 (5.20)

Коріння  може бути нульовим, речовим або комплексним.

У тому випадку, якщо коріння нульове, відповідні співмножники набудуть вигляду:

 (5.21)

Якщо коріння *речові*, відповідні співмножники, після введення додаткових позначень, можуть мати вигляд:

 (5.22)

 (5.23)

Тут 

Якщо коріння *комплексні*, то (див. раніше рішення лінійних однорідних рівнянь для маятника): 1) є пов'язаними, тобто. з'являються парами; 2) два співмножники з пов'язаним комплексним корінням можна замінити квадратним рівнянням щодо *p* з дійсними коефіцієнтами виду:

 (5.24)

Тут  – пов'язане комплексне коріння γ,

*k*1 – дійсна частина пари комплексних сполучених коренів;

*r*1 – мнимая часть пары комплексных сопряженных корней;

Аналогічно для коріння λ:

 (5.25)

Тут  – пов'язане комплексне коріння λ,

*k*2 – действительная часть пары комплексных сопряженных корней;

*r*2 – мнимая часть пары комплексных сопряженных корней.

Підставимо (5.21) – (5.25) у (5.20). В результаті отримаємо наступний вираз для передавальної функції:

 (5.26)

де  – добуток символ.

В (5.26) постійний коефіцієнт *k* «увібрав» у себе, є результатом твору всіх постійних коефіцієнтів, супутніх співмножникам цього виразу, таких як  з (5.22) і (5.23),  з (5.24) і (5.25), а також  з вихідного виразу (5.20). Кількість співмножників у чисельнику та знаменнику (5.26) відповідає кількості коренів у чисельнику та знаменнику (5.20), точніше

 (5.27)

Величина 2σ відображає те, що вираз видуC·*p*2 + D·*p* + 1 включає два корені.

Для визначеності в подальших міркуваннях припустимо, що кількість коренів у знаменнику більша за кількість коренів у чисельнику та розглянемо по черзі комплекси творів. Почнемо з  Як домовились,  Позначимо  Тоді з урахуванням скорочення однакових членів у чисельнику та знаменнику

 (5.28)

Розглянемо другий комплекс (27)  Як і попередньому випадку врахуємо, що μ2>μ1. Уявимо μ2 що складається з двох частин: μ1 и ( μ2– μ1) тобто μ2=μ1+(μ2-μ1). Тоді можна записати

 (5.29)

В отриманому співвідношенні у виразі, що стоїть під першим знаком твору розділимо чисельник почленно на знаменник:

 (5.30)

Розглянемо третій комплекс із (5.26). Також врахуємо, що σ1>σ2. Виконаємо перетворення подібні до тих, що й у попередньому випадку. В результаті отримаємо:

 (5.31)

Зберемо результати виконаних перетворень (5.28), (5.30), (5.31) воєдино. Тепер передатну функцію (5.26), а отже і (5.20) та (5.16), можна записати у вигляді:



 (5.32)

Проаналізуємо отримані результати:

1. Вираз (5.32) є формою запису передавальної функції загального диференціального рівняння (5.13). Іншими словами, вона може бути застосована для будь-якої технічної системи, математична модель якої записана з виконанням раніше прийнятих припущень:

* в рівняннях можуть використовуватися алгебраїчні вирази та звичайні похідні;
* рівняння мають бути лінійні (або лінеаризовані);
* для можливості застосування перетворення Лапласу мають бути дотримані нульові початкові умови.

2. Вираз (5.32) записано лише п'ятьма видами комплексів

 (5.33)

які можна як передавальні функції п'яти різних елементів. Раніше зазначалося, що будь-яку технічну систему можна відобразити шляхом послідовного та паралельного з'єднання елементів. Після перетворення Лапласа це виявляється у тому, що передавальні функції цих елементів або множаться (при послідовному з'єднанні) або складаються (при паралельному). У даному випадку комплекси (5.33) у виразі (5.32) об'єднані лише за допомогою операцій множення та додавання. Таким чином, технічна система може бути описана за допомогою п'яти різних елементів, передавальні функції яких мають вигляд (5.33). Вони відповідають передатним функціям **стандартних (типових) ланок**.

Крім цих ланок до переліку стандартних додано ще одну – ланку транспортного запізнення. Усі вони були розглянуті у попередніх параграфах.

## **Лінеарізація (***Лекція 10***)**

Застосування перетворення Лапласа під час вирішення завдань динаміки зумовлено тим, що багатьом співвідношенням і операціям над оригіналами відповідають прості співвідношення їх зображеннями. Так **лінійні** диференціальні рівняння стають алгебраїчними. Але більшість процесів у навколишньому світі, у тому числі й ті, що ми вивчаємо, мають нелінійний характер. Отже, ММ, які їх адекватно описують, мають також нелінійний характер. Для використання математичних інструментів лінійних систем нелінійні рівняння мають бути линеаризованы.

**Лінеаризація** (від лат *linearis* – лінійний) – одне із методів наближеного уявлення нелінійних систем, у якому дослідження нелінійної системи замінюється аналізом лінійної системи, у сенсі еквівалентної вихідної. Методи лінеаризації мають обмежений характер, тобто еквівалентність вихідної нелінійної системи та її лінійного наближення зберігається лише обмеженого проміжку часу. Застосовуючи лінеаризацію, можна з'ясувати багато якісні та особливо кількісні властивості нелінійної системи.

|  |
| --- |
|  |
| Мал. 5.1. Синусоїда та дотична до неї  для *t*=0 |

Нехай функціональна залежність (наприклад синусоїда) відображена у графічному вигляді (рис. 5.1). Лінеаризація – це заміна на деякій ділянці вихідної кривої прямою лінією. Лінія повинна бути проведена таким чином, що на якомога більшому проміжку з найменшими відхиленнями відповідати вихідній кривій. З рис. 5.1 видно, що при такій побудові прямої лінії на деякому проміжку при *t*>0 і *t*<0 вона практично збігається, або принаймні близька до синусоїди. В цьому випадку при теоретичних дослідженнях на цьому інтервалі часу залежність *y*=*sin*(*t*) без істотної похибки може бути замінена більш простою лінійною залежністю *y*=*k*·*t*+*b*. У цьому випадку необхідно визначити, як проводити такі прямі та обчислити їх коефіцієнти *k* та *b*.

З курсу вищої математики відомо, що з лінеаризації використовуються **дотичні**. Вони проводяться до точки, навколо якої виконується лінеаризація. Дотична та графік вихідної функції мають одну загальну точку. У цьому випадку лінеаризація для *y*=*sin*(*t*) проводиться навколо точки ***t*=0** (початок координат). Тому пряма проходить через початок координат і, відповідно, ***b*=0**. Коефіцієнт ***k*** (за визначенням) дорівнює ***tg***(***α***) (тангенс) кута нахилу **α** дотичної (рис. 5.1). З курсу вищої математики відомо, що тангенс кута нахилу дотичної дорівнює похідної від розглянутої функції в точці дотику (в даному випадку при *t*=0). Можна записати наступний ланцюжок перетворень:

 (5.34)

Зрештою рівняння дотичної і, відповідно, лінеаризоване рівняння для *y*=*sin*(*t*) у точці *t*=0 має гранично простий вигляд:

 (5.35)

При іншому значенні аргументу лінеаризоване рівняння вихідної функції *y*=*sin*(*t*) залишаючись рівнянням прямої матиме інший вигляд. Виконаємо лінеаризацію (проведемо дотичну) для синусоїди при *t*=1 (рис. 5.2). Для цієї точки маємо:

 (5.36)

Знайдемо значення похідної від *sin*(*t*) у цьому значенні аргументу. Відповідно до (5.34) ця величина визначає кутовий коефіцієнт аналізованої дотичної:

 (5.37)

Виходячи із загальної форми рівняння прямої

 (5.38)

враховуючи, що вона проходить через точку з координатами (3.56) і використовуючи значення кутового коефіцієнта (3.57), можна записати:

 (5.39)

Використовуючи отримані значення для *k* з (5.37) і *b* з (5.39) рівняння дотичної до графіку функції *y*=*sin*(*t*) у точці *t*=1 запишемо у вигляді:

 (5.40)

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| Мал. 5.2. Синусоїда та дотична до неї  для *t*=1 | Мал. 5.3. Синусоїда і січе до неї  біля крапки з аргументом *t*=1 |

Значення вихідної функції (якщо вона не лінійна) та її лінеаризованого уявлення відрізняються завжди, крім точки дотику. У міру віддалення від точки дотику ці відмінності наростають. В інженерних розрахунках завжди є допуск на неточність виміру чи обчислення. Його величину встановлює інженер залежно від встановлених умов або, виходячи зі свого досвіду. Часто його величина встановлюється не більше 5%. Так, у випадку (рис. 5.1) межа в 5% дотримується в діапазоні *t*∈[-0.54…+0.54] або протягом **Δ*t*=1.08**. У разі (рис. 5.2) межа в 5% дотримується в діапазоні t∈[+0.71…+1.33] або протягом **Δt=0.62**.

Зі порівняння даних для випадків рис. 5.1 та рис. 5.2 слід, що лінеаризація для однієї і тієї ж функції але в різних точках правомочна на різному діапазоні зміни аргументу. Там, де функція більш гладка лінеаризоване уявлення вихідної функції може бути справедливим на більшому проміжку зміни аргументу.

*Питання вибору дотичної як метод лінеаризації у курсі вищої математики. Проте може виникнути питання, а чому не січе (рис. 5.3)? Видається можливим таким способом збільшити діапазон зміни аргументу, в якому відхилення лінеаризованого уявлення від вихідної функції буде в допустимих межах. Розглянемо цікавий факт з історії математики, який на якісному рівні може пояснити побудову дотичної як спосіб лінеаризації.*

|  |
| --- |
|  |
| *Мал. 5.4.*  *Схема Галілея* |

*Зараз період коливання маятника аналітично визначається з рішення диференціального рівняння. В епоху до Ісака Ньютона і Готфріда Лейбніца, які сформували диференціальне числення, Галілео Галілей також намагався вирішити питання визначення періоду коливань маятника. Його міркування приблизно можна передати так. У колі з центром у точці O (рис. 5.4) проведемо вертикально розташований діаметр AB і хорду AC довільної довжини, що виходить із вершини A діаметра. Можна показати (що буде зроблено на практичних заняттях), що тіло, що рухається без опору під дією сили тяжіння, пройде відстані AB (діаметр) та AC (хорда) за однаковий час. Іншими словами, час руху вздовж будь-якої хорди з початком у точці A, однаковий. У цьому діаметр A можна як граничний випадок хорди. Ця властивість відноситься і до будь-якої хорди з кінцем у точці B (наприклад, NB або MB). Час руху тіла під дією сили тяжіння вздовж таких хорд дорівнює часу падіння тіла вздовж діаметра. Покладемо довжину діаметра AB=2l. У цьому випадку час руху вздовж діаметра визначається із співвідношення:*

 *(5.41)*

*Отже, час руху тіла вздовж хорди NB або MB дорівнюватиме цій же величині.*

*Розглянемо маятник із точкою підвісу O і довжиною підвісу ON=l. У цьому випадку вантаж на кінці підвісу здійснює рух дугою NBM і назад. При цьому вектор його швидкості NK завжди спрямований щодо траєкторії руху (дотичної до кола). При коливаннях з малою амплітудою Галілей замінив рух дугою на рух хордами. У цьому випадку період коливань можна апроксимувати сумою чотирьох відрізків часу руху хордами: NB→BM→MB→BN. В результаті період коливань з урахуванням (5.41) Галілей визначив як:*

 *(5.42)*

*Володіючи апаратом диференціального обчислення зараз період коливань визначається величиною:*

 (5.43)

*Порівняємо та проаналізуємо (5.42) та (5.43). Незважаючи на відсутність відповідного математичного апарату, Галілею вдалося правильно виявити залежність періоду коливань від параметрів процесу: довжини підвісу маятника і напруги поля сили тяжіння (прискорення вільного падіння). Якщо зважити на те, що  , то й величина коефіцієнта перед коренем визначена близькою до правильного значення. Але це з позицій Галілея за відсутності необхідного математичного апарату. Подивимося на величини (5.42) та (5.43) з наших позицій. Хорда коротша за дугу, яку вона стягує. Тому шлях по хордах NB→BM→MB→BN коротший за шлях по дузі NBM→MBN. Але час, витрачений на рух хордами (5.42) більше часу руху по дузі кола (5.43). Це може свідчити про неправомірність заміни лінеаризації за допомогою дотичної на лінеаризацію за допомогою сіючої.*

# **Фізичні моделі систем (***Лекція 11***)**

Після ознайомлення з попереднім матеріалом студент має математичний інструмент, нехай поки що і спрощений, але вже дозволяє як будувати нові, так і аналізувати вже існуючі динамічні моделі процесів. Але у своїй діяльності інженер повинен пам'ятати те, про що образно сказав Томас Гекслі (англ. Thomas Henry Huxley – англійський зоолог, популяризатор науки): «*Математика, подібно до жорна, перемелює те, що під неї засинають, і, як засинавши лободу, ви не отримаєте пшеничного борошна, так, виписавши цілі сторінки формулами, ви не отримаєте істини з хибних посилок*». Це становище може бути сформульовано й іншими словами: «*Не можна правильно вирішити задачу, вихідні дані для якої неправильно задані*».

Ілюстрацією наведених тез може бути відоме завдання (рис. 6.1, а). Розглянемо прямокутний трикутник ABC (∠B – прямий). Гіпотенуза AC = 10, висота BD = 6. Знайти площу ∆ABC. З погляду математики, все просто. Початкові дані задані. Рішення має вигляд:



Не поспішатимемо з висновком і проаналізуємо вихідні дані. Опишемо навколо ∆ABC коло (рис. 6.1, б). За якістю прямокутного трикутника прямий кут спирається на діаметр цього кола. Гіпотенуза ABC є діаметром. Середина AC (т. O) є центром кола та її радіус OA=OC=5. Похила BO також є радіусом кола і, отже, BO=5. Але довжина похилої BO може бути меншою, ніж величина перпендикуляра (висоти) BD.

Проведений аналіз свідчить про неможливість існування такого трикутника. Отже, не може бути отримано і вирішення поставленого завдання. А з математичного погляду рішення отримано. **Протиріччя**.

|  |  |
| --- | --- |
| а | б |

Мал. 6.1. Приклад неправильної постановки задачі

Таким чином, володіння математичним апаратом для інженера є **необхідною** умовою, але **не достатньою**. Важливо розуміти які процеси (на рівні фізичних явищ) повинні бути враховані при вирішенні цієї задачі.

Інженеру доводиться проектувати або досліджувати роботу об'єктів у різних галузях техніки: робототехніці та енергетиці, комп'ютерній техніці та машинобудуванні, металургії та у всіх інших у навколишньому нас дійсності. Робота всіх об'єктів зумовлена ​​перебігом у яких тих чи інших фізичних процесів. За своєю природою кількість типів цих процесів обмежена і знайомляться з ними студенти при вивченні загальнотехнічних дисциплін: теоретичної механіки, гідравліки та гідрогазодинаміки, термодинаміки та теорії тепло-масообміну, електромеханіки та ін. Незважаючи на обмежену кількість типів фізичних процесів за їх допомогою описується ) функціонування всього різноманіття (фактично нескінченного) навколишніх об'єктів. Тут немає суперечності. Створення такого різноманіття моделей процесів стає можливим через поєднання в різній комбінації в об'єктах різних фізичних процесів, що розглядаються, в силу різного ступеня подробиці їх опису, через наявність різних крайових умов.

Все різноманіття існуючих і створюваних моделей «завчити» неможливо. На цьому етапі навчання можна лише познайомитися із загальними принципами їх аналізу. Але й то не з усіма, а лише з деякими. Деякі додаткові приклади розглядатимуться на практичних заняттях. У своїй діяльності інженер накопичуватиме досвід такого аналізу. Цінність інженера багато в чому визначається величиною, глибиною охоплення такого досвіду.

## **Одиниці виміру**

Слід пам'ятати, що в рамках найбільш широко використовуваної міжнародної системи одиниць СІ як базові виступають розмірності всього 7 величин (додаток П2). Більшість окремих виразів і моделей записані з урахуванням використання величин, що входять до них, з розмірностями в цій системі. Але в окремих випадках можуть використовуватися дані з компонентами розмірності, що відрізняються від базових (наприклад, зі старих довідників). У цьому випадку величини цих даних повинні бути перераховані для приведення у відповідність їх розмірності з базовими величинами.

***Приклад 1.***

*У межах системи СІ тиск вимірюється Па (паскаль). Ця одиниця є похідною з інших одиниць.*

* (6.1)*

*Одиниця виміру сили – Н (Ньютон), що входить до чисельника (6.2), також є похідною. Через війну розмірність Па визначається трьома базовими розмірностями – кг, м, з. Відповідно до загальними правилами СІ, що стосуються похідних одиниць, названих на ім'я вчених, найменування одиниці паскаль пишеться з малої літери, та її позначення – з великої. Таке написання позначення зберігається і в позначення інших похідних одиниць, утворених з використанням паскаля. Наприклад, позначення одиниці динамічної в'язкості записується як Па·с.*

*Системна одиниця «1 Па» мала за величиною та незручна у практичному використанні. Так тиск у атмосфері біля землі* ***приблизно*** *дорівнює 100000 Па=105 Па. В інженерних системах величина тиску найчастіше більша. Так в котельних установках тиск пари може досягати величин ~ 10000000 Па, 30000000 Па і навіть 50000000 Па* ***або*** *107 Па, 3\*107 Па і навіть 5\*107 Па. У ствольних артилерійських системах тиск порохових газів може досягати величин ~300000000 Па або 3\*108 Па. Такими величинами під час обговорення технічних питань оперувати незручно. Тому для таких ситуацій було введено несистемну величину для позначення величини тиску: 100000 Па=105 Па=1 бар. В цьому випадку величина тиску в атмосфері біля поверхні* ***приблизно*** *дорівнює 1 бар. При такому позначенні в котельних установках тиск пари може досягати величин ~ 100 бар, 300 бар і навіть 500 бар, а стовбурових артилерійських системах тиск порохових газів може досягати величин ~ 3000 бар.* ***Але для розрахункових формул необхідно переводити ці величини Па.***

*Є й інший спосіб компактнішого запису величин великої розрядності – використання десяткових кратних і дольних одиниць (додаток П3). Величина тиску в атмосфері біля землі* ***приблизно*** *дорівнює 100000 = 105 Па з* ***урахуванням десяткових множників*** *(додаток П3) може бути виражена у вигляді 100 кПа або 0.1 МПа. У цьому випадку величина читається як 100 кілопаскалей або десята частина мегапаскалю. Слід звернути увагу до написання приставок. Відповідно до додатку П3 приставка «кіло-» позначається малою літерою «к», а «мега-» позначається великою літерою «М». Вище наведені можливі значення величин тиску пари в котельних установках можуть бути записані у вигляді 10 МПа, 30 МПа і навіть 50 МПа. Тиск порохових газів у ствольних артилерійських системах може досягати величин 300 МПа. Але для розрахункових формул необхідно переводити ці величини Па.*

*Наразі все ще можна зустріти у документах дані зі старих довідників. На ряді виробничих об'єктів досі працюють прилади зі старим градуюванням. У всіх цих випадках величини тиску можуть виражатися за допомогою інших позначень. Не розглядатимемо варіанти перерахунку «раритетних» величин. Відповідні коефіцієнти перерахунку можна знайти у різних довідкових даних, у тому числі в Інтернеті. Згадаємо лише деякі варіанти їхнього прояву.*

*Технічна атмосфера (позначення: ат; міжнародне: at) - дорівнює тиску, що виробляється силою в 1 кгс (кілограм-сила), рівномірно розподіленої по перпендикулярній до неї плоскій поверхні площею 1 см2. У свою чергу, сила в 1 кгс дорівнює силі тяжкості, що діє на тіло масою 1 кг при значенні прискорення вільного падіння 9,80665 м/с2 (нормальне прискорення вільного падіння). Відповідно до цього 1 кгс = 9,80665 Н (Ньютона). Таким чином, 1 ат = 98066,5 Па. Слід розрізняти 1 кг як позасистемне позначення одиниці сили, і 1 кг як системне позначення одиниці маси.*

*Нормальна, стандартна або фізична атмосфера (позначення: атм; міжнародне: atm) – дорівнює тиску стовпа ртуті заввишки 760 мм на його горизонтальну основу при щільності ртуті 13595,04 кг/м3, температурі 0 °C і при нормальному прискоренні 9,80665 м/с2. Відповідно до визначення 1 атм = 101325 Па = 1,033233 ат.*

*Раніше використовувалися також позначення ата та аті для абсолютного та надлишкового тиску відповідно (вираженого в технічних атмосферах). Надлишковий тиск – різниця між абсолютним та атмосферним (барометричним) тиском за умови, що абсолютний тиск більший за атмосферний: Різб = Рабс − Ратм. Розрідження (вакуум) – різниця між атмосферним (барометричним) та абсолютним тиском за умови, що абсолютний тиск менший за атмосферний: Рвак = Ратм − Рабс.*

*При всьому різноманітті виразу величини тиску в переважній більшості випадків* ***для розрахункових формул необхідно переводити ці величини Па*** *(додаток П4). Але в окремих,* ***поодиноких*** *випадках можуть використовуватися вирази (формули), розраховані на використання величин тиску, виражених за допомогою несистемних одиниць (додаток П4). Потрібно бути уважним та відстежувати такі випадки для грамотного використання вихідних даних.*

***Приклад 2.***

*Існують деякі складнощі і при використанні величин температури. В рамках системи СІ термодинамічна (абсолютна) температура вимірюється в кельвінах і має позначення у вигляді великої літери «К» (додаток П2). Але часом можна зустріти й інші позначення величини температури. Ряд позначень існували раніше і на даний момент повністю вийшли з вжитку. Нижче наведені* ***короткі*** *відомості спрямовані на* ***розширення загального світогляду*** *майбутніх інженерів.*

*Існує кілька різних одиниць вимірювання температури. Вони можуть бути взаємно перераховані за допомогою, наприклад, діаграми переведення температур (додаток П5). Деякі з них на даний момент повністю вийшли з вжитку. Найбільш відомими є такі:*

* *Градус Цельсія (оC);*
* *Градус Фаренгейта (оF);*
* *Кельвін (K);*
* *Градус Реомюра (oRe, oR);*
* *Градус Ремера (oRø);*
* *Градус Ранкіна (oRa);*
* *Градус Деліля (оД або oD);*
* *Градус Гука (oH);*
* *Градус Дальтона (oDa);*
* *Градус Ньютона (oN);*
* *Лейденський градус (oL або DL);*
* *Планківська температура (Tp).*

*Вони діляться на відносні та абсолютні. У спрощеному варіанті їх особливості побудови можна описати так:*

* *при побудові відносних одиниць виміру температури вибирається два явища. Температури, у яких відбуваються ці явища, вибираються за базові. Діапазон між цими температурами розбивається на вибрану кількість інтервалів. Величина цього інтервалу визначається як одиниця виміру температури в системі. Так при створенні* ***шкали Цельсія*** *як базові обрані явища танення водяного льоду та кипіння води. Температури, при яких відбуваються ці явища, позначені відповідно як 0 оC та 100 оC. Діапазон між цими температурами розбитий на 100 інтервалів. Одиниця виміру позначена як 1 оC (один градус Цельсія);*
* *при побудові абсолютних одиниць виміру температури вибирається одна базова, від якої ведеться відлік. Вибирається (призначається, визначається) одиниця виміру температури. Так, при створенні* ***шкали Кельвіна*** *обрана точка, що відповідає абсолютному нулю. Нижче цієї величини температур у природі немає. (Як визначається ця температура описується у підручниках з фізики чи термодинаміки). Як одиниця виміру визначено 1 К (один градус кельвіна). За величиною він дорівнює 1 оC:*

* (6.2)*

*При цьому:*

* (6.3)*

*Перетворення температур може здійснюватися відповідно до виразу:*

* (6,4)*

***Коротко згадаємо про інші одиниці вимірювання температури:***

* ***Градус Фаренгейта*** *( ℉ ) – одиниця виміру температури, названа на честь німецького вченого Габріеля Фаренгейта, який у 1724 році запропонував шкалу для вимірювання температури. На шкалі Фаренгейта температура танення льоду дорівнює +32 °F, а температура води +212 °F (при нормальному атмосферному тиску). При цьому один градус Фаренгейта дорівнює 1/180 різниці цих температур. Діапазон 0…+100 °F за шкалою Фаренгейта приблизно відповідає діапазону −17,8…+37,8 °C за шкалою Цельсія. За початковою пропозицією нуль за шкалою Фаренгейта визначався за самопідтримуваною температурою суміші води, льоду та хлориду аммонію (відповідає приблизно −17,8 °C), а +96 °F — температурі здорової людини (у роті, за сучасною шкалою +98 °F) . Нормальна температура людського тіла за шкалою Цельсія дорівнює +36,6 °C, а за шкалою Фаренгейта +97,88 °F. Шкали Цельсія та Фаренгейта перетинаються у точці −40 одиниць, де вказують на однакову температуру. Абсолютний нуль на шкалі Фаренгейта відповідає значення -459,67 °F. Перетворення температур може здійснюватися відповідно до виразів:*

* (6.5)*

*В даний час шкалу Фаренгейта використовують у побуті як основну шкалу температури в наступних країнах:*

* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/a/a4/Flag_of_the_United_States.svg/22px-Flag_of_the_United_States.svg.png США;
* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/b/b8/Flag_of_Liberia.svg/22px-Flag_of_Liberia.svg.png Либерия;
* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/9/93/Flag_of_the_Bahamas.svg/22px-Flag_of_the_Bahamas.svg.png Багамские Острова;
* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/e/e7/Flag_of_Belize.svg/22px-Flag_of_Belize.svg.png Белиз;
* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/0/0f/Flag_of_the_Cayman_Islands.svg/22px-Flag_of_the_Cayman_Islands.svg.png Острова Кайман;
* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/4/48/Flag_of_Palau.svg/22px-Flag_of_Palau.svg.png Палау.
* ***Градус Реомюра*** *( °R ) одиниця вимірювання температури, в якій температури замерзання та кипіння води прийняті за 0 і 80 градусів, відповідно. Запропоновано у 1730 році Р.А. Реомюр. За очікуваннями Реомюра спирт розширюється приблизно на 8% (на 8,4% за розрахунком: коефіцієнт розширення спирту 0,00108 К-1) при нагріванні від температури танення льоду до температури кипіння (≈78 градусів Цельсія). Тому цю температуру Реомюр встановив як 80 градусів за своєю шкалою, де одній градусу відповідало розширення спирту на 1 тисячну, а нуль шкали було обрано як температура замерзання води. Однак через те, що як рідина в ті часи використовувався не тільки спирт, а й різні його водні розчини, то багатьма виробниками та користувачами термометрів помилково вважалося, що 80 градусів Реомюра – це температура кипіння води. І після повсюдного впровадження ртуті як рідина для термометрів, а також появи та поширення шкали Цельсія, до кінця XVIII століття шкала Реомюра була перевизначена таким чином остаточно. З рівності 100 градусів Цельсія = 80 градусів Реомюра виходить 1 oC = 0,8 °R (відповідно 1 °R = 1,25 oC). Хоча насправді оригінальною шкалою Реомюра має бути 1 °R = 0,925 oC. Ще за життя Реомюра були проведені вимірювання точки кипіння води в градусах його шкали (але зі спиртовим термометром це було неможливо). Було отримано значення 85. Але наступні виміри дали величини від 100 до 110 градусів. Якщо використовувати вищезгадані сучасні дані, то для точки кипіння води в градусах Реомюра виходить значення 108. (У 1772 році у Франції як стандартна була прийнята температура кипіння води, що дорівнює 110 градусів Реомюра.) На сьогоднішній день градус Реомюра майже не використовують.*
* ***Градус Ромера*** *( °Rø ) — одиниця температури, яка нині не використовується. Температурна шкала Ромера була створена в 1701 датським астрономом Оле Крістенсеном Ромером. Вона стала прообразом шкали Фаренгейта, який відвідував Ромера 1708 року. За нуль градусів береться температура замерзання солоної води. Друга реперна точка – температура людського тіла (30 градусів за вимірами Ромера, тобто 42 °C). Тоді температура замерзання прісної води виходить як 7,5 градусів (1/8 шкали), а температура кипіння води – 60 градусів. Таким чином, шкала Ромера – 60-градусна. Такий вибір, мабуть, пояснюється тим, що Ремер насамперед астроном, а число 60 було наріжним каменем астрономії з часів Вавилону. Формула для переведення градусів Ромера в градуси Цельсія і назад:*

* (6.6)*

* ***Шкала Ранкіна*** *(вимірюється в градусах Ранкіна - °Ra) - абсолютна температурна шкала, названа на ім'я шотландського фізика Вільяма Ранкіна (1820 - 1872). Використовується в англомовних країнах для термодинамічних інженерних розрахунків. Шкала Ранкіна починається за нормальної температури нуля, точка замерзання води відповідає 491,67 °Ra, точка кипіння води 671,67 °Ra. Число градусів між точками замерзання та кипіння води за шкалою Фаренгейта та Ранкіна однаково і дорівнює 180. Співвідношення між кельвіном і градусом Ранкіна:*

* (6.7)*

*Градуси Фаренгейта переводяться в градуси Ранкіна за формулою: оRa = оF + 459,67.*

* (6.8)*

* ***Градус Деліля*** *( °****D*** *) – нині невикористовувана одиниця вимірювання температури. Була винайдена французьким астрономом Жозефом Ніколя Делілем (1688 – 1768). Шкала Деліля схожа на температурну шкалу Реомюра. У 1732 році Деліль створив термометр, який використовує ртуть як робочу рідину. Як нуль було обрано температуру кипіння води. За один градус було прийнято таку зміну температури, яка призводила до зменшення обсягу ртуті на стостотисячну. Таким чином, температура танення льоду становила 2400 градусів. Однак пізніше така дробова шкала здалася надмірною, і вже взимку 1738 року, медик Йосія Вейтбрехт (1702 - 1747), зменшив число ступенів від температури кипіння до температури замерзання води до 150 градусів. Один градус Деліля відповідає 2/3 градусів Цельсія (або кельвіна), а абсолютний нуль відповідає 559,725 градусів Деліля****.***

*Формула для переведення градусів Цельсія в градуси Деліля і назад:*

* (6.9)*

* ***Градус Гука*** *(°H) – історична одиниця температури. Шкала Гука вважається найпершою температурною шкалою з фіксованим нулем. Прообразом для створеної Гуком шкали став термометр з Флоренції, що потрапив до нього в 1661 році. У виданій через рік "Мікрографії" Гука зустрічається опис розробленої ним шкали. Гук визначив один градус як зміну об'єму спирту на 1/500, тобто один градус Гука дорівнює приблизно 2,4 °C. У 1663 році члени Королівського товариства погодилися використовувати термометр Гука як стандартний і порівнювати з ним показання інших термометрів. Голландський фізик Християн Гюйгенс у 1665 р. разом із Гуком запропонував використовувати температури танення льоду та кипіння води для створення шкали температур. Це була перша шкала з фіксованим нулем та негативними значеннями. Перші виразні метеорологічні рекорди були записані з використанням шкали Гука-Гюйгенса. Так найбільшу літню спеку Гук описав як 13 градусів (31 °C), найбільший холод взимку як -7 градусів (-17 °C). Він не вказав географію місця вимірювання, ймовірно, це його рідна Британія. Формула для переведення градусів Гука в градуси Цельсія і назад:*

* (6.10)*

* ***Градус Дальтона*** *(°Dа) – історична одиниця температури. Він немає певного значення (в одиницях традиційних температурних шкал, таких як шкала Кельвіна, Цельсія чи Фаренгейта), оскільки шкала Дальтона – логарифмическая. Шкала Дальтона була розроблена Джоном Дальтоном для проведення вимірювань за високих температур, оскільки звичайні термометри з рівномірною шкалою давали помилку через нерівномірне розширення термометричної рідини. Нуль шкали Дальтона відповідає нулю Цельсія. Відмінною рисою шкали Дальтона є те, що в ній абсолютний нуль дорівнює −∞ °Da, тобто є недосяжною величиною (що насправді так, відповідно до теореми Нернста). Формула для переведення градусів Дальтона в градуси Цельсія та кельвіни і назад:*

* (6.11)*

* (6.12)*

* (6.13)*

* (6.14)*

* ***Градус Ньютона*** *(°N) – одиниця температури, що не використовується нині. Температурна шкала Ньютона була розроблена Ісааком Ньютоном в 1701 для проведення теплофізичних досліджень і стала, ймовірно, прообразом шкали Цельсія. Як термометрична рідина Ньютон використовував лляну олію. За нуль градусів Ньютон взяв температуру замерзання прісної води, а температуру людського тіла він позначив як 12 градусів. Таким чином, температура кипіння води дорівнювала 33 градусам. Формула для переведення градусів Ньютона в градуси Цельсія і назад:*

* (6.15)*

* ***Лейденський град*** *( °L ) – історична одиниця температури, яка використовувалася на початку XX століття для вимірювання кріогенних температур нижче −183 oC. Ця шкала походить з Лейдена, де з 1897 перебувала лабораторія Камерлінг-Оннеса. У 1957 році Х. ван Дійк та М. Дюро ввели шкалу L55. За нуль градусів бралася температура кипіння стандартного рідкого водню (−253 °C), що складається на 75 % із ортоводороду та на 25 % із пароводню. Друга реперна точка – температура кипіння рідкого кисню (-193 °С). Формула для переведення лейденських градусів у градуси Цельсія і назад:*

* (6.16)*

* ***Пла́нківська температура*** *– одиниця температури в планківській системі одиниць; названо на честь німецького вченого-фізика Макса Планка. У планківській системі в якості основних одиниць вибрано такі фундаментальні фізичні постійні: прихистість світла c, гравітаційна постійна* ***G****, постійна Дірака (постійна Планка, поділена на 2π)* ***h*** *і постійна Больцмана* ***k****. Через ці одиниці планківська температура Tp виражається так:*

* (6.17)*

*Якщо виразити величини, що входять у формулу, в одиницях Міжнародної системи одиниць (СІ), то вийде значення планківської температури в СІ. Використання найбільш точних на 2020 значень* ***c****,* ***h****,* ***k*** *і* ***G*** *дає:*

* (6.18)*

*c відносною похибкою (відносним стандартним відхиленням), що дорівнює 2.3 · 10-5. Таким чином, одиниця температури в Планківській системі одиниць у 1,416808 1032 разів більша, ніж одиниця температури кельвін у СІ.*

## **Моделі процесів (***Лекція 12***)**

### **Процес заповнення ємності**

#### **Просте заповнення ємності**

Як приклад розглянемо процес заповнення ємності (чи її спорожнення). Ще зі шкільної лави цей процес може здатися гранично простим, до того ж не часто зустрічається на практиці. Згадайте задачу про басейн, про воду, що втікає по одній трубі і що випливає по іншій. Але при уважному вивченні завдання виявляється не настільки тривіальним та однозначним. Розглянемо кілька моментів.

У розділі 3.4 при знайомстві з моделлю інтегруючої ланки як приклад розглядалася модель заповнення ємності (3.41, 3.46). Запишемо цю модель з урахуванням позначень (3.45) ще раз:



Цей вираз записано для випадку циліндричного трубопроводу, яким відбувається заповнення ємності. Слід прагнути записувати всі висловлювання у більш загальному вигляді, з урахуванням різних умов. Так у цьому випадку трубопровід може мати й іншу форму. Позначимо площу перерізу трубопроводу, що підводить як Sтр. Тоді вираз, що розглядається, можна записати у вигляді:

 (6.19)

Зупинимося на розмірності величин, що входять у цей вираз. Насамперед необхідно стежити за відповідністю між собою їх розмірностей. Однорідні розмірності повинні мати однакову основу. Так якщо швидкість рідини в живильній трубі *r*(*t*) вимірюється в м/сек, то діаметр труби також повинен вимірюватися в метрах. Правою частиною (6.19) визначається витрата рідини за одиницю часу (див. 3.42). З урахуванням прийнятих розмірностей об'ємна витрата  буде виражатися м3/сек.

Почнемо аналіз виразу (6.19) із найпростішого випадку. Заповнення ємності проводиться рідиною (для визначеності – водою) і швидкість течії в трубопроводі, що заповнює, постійна:

 (6.20)

Рівняння (6.19) відображає зміну об'єму рідини за нескінченно малий проміжок часу *dt*. Розмір обсягу рідини в ємності визначається шляхом інтегрування. З (6.19) випливає:

 (6.21)

та після інтегрування:

 (6.22)

У правій частині круглих дужках постійна величина. Вона може бути винесена за знак інтегралу. Далі за правилом обчислення певного інтеграла отримаємо:

 (6.23)

На початок заповнення в ємності може бути певний обсяг рідини. Його величина позначена як *V*0. Для порожньої на початок заповнення ємності *V*0=0. **Поки що все просто**.

У деяких випадках необхідно визначити не об'єм рідини в ємності до певного моменту часу, а її висоту (рівень заповнення). Укрупнено можна розрізняти два випадки:

* площа горизонтальних перерізів ємності з її висоті не змінюється. Це справедливо, наприклад, для прямого кругового циліндра, прямого паралелепіпеда (рис. 6.1):

|  |  |
| --- | --- |
| https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/e/e1/Cylinder_geometry.svg/162px-Cylinder_geometry.svg.png  а) | https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/d/dc/Rectangular_parallelepiped.svg/160px-Rectangular_parallelepiped.svg.png  б) |

Мал. 6.2. Приклади форм ємностей із постійною площею горизонтального перерізу: а) прямий круговий циліндр; б) прямий паралелепіпед.

Об'єм рідини визначається як:

 (6.24)

Тут *S*св – площа основи ємності або площа вільної поверхні рідини, *h* – висота рівня рідини у ємності.

У (6.24) змінною є лише одна величина *h* при *S*св = const. Вона просто визначається. З (6.23) з урахуванням (6.24) маємо:

 (6.25)

* площа горизонтальних перерізів ємності з її висоті змінна. Це спостерігається, наприклад, в ємностях конусоподібної або сферичної форми, циліндричної ємності, покладеної на бік. У цьому випадку при відомому обсязі рідини в ємності (6.23) глибину заповнення порахувати складніше. Наприклад розглянемо випадок горизонтальної циліндричної ємності (рис. 6.3).

|  |  |
| --- | --- |
| а) | б) |

Мал. 6.3. Рідина у горизонтальній циліндричній ємності

Однією з особливостей процесу її заповнення є збільшення площі вільної поверхні на початковому етапі та її зменшення після заповнення половини ємності. Внаслідок цього **при постійному витраті рідини**, що надходить швидкість збільшення глибини заповнення *h* на початковому етапі зменшується. Після заповнення половини ємності швидкість збільшення глибини заповнення *h* починає збільшуватися. Це зрозуміло на інтуїтивному рівні і не потребує розрахунків. Але така *апріорна* інформація (*інформація, отримана до виконання будь-яких дій, до виконання обчислень*) є важливою в інженерній практиці. Вона дає можливість на якісному рівні перевірити правильність розрахунків, що виконуються. Результати розрахунків мають демонструвати характер зміни глибини заповнення ємності.

Розглянемо ємність (рис. 6.3) радіусу *R* з довжиною бічної твірної *l* (довжина циліндра). Визначимо залежність глибини її заповнення *h* від обсягу рідини *V* в ємності. Об'єм рідини в ємності може бути визначений із співвідношення:

 (6.26)

де *S*сегм – площа сегмента ***a o b m*** (рис. 6.3, *b*) на торці ємності, що відповідає рівню її заповнення.

Визначимо площу сегмента (*S*сегм) ***a o b m*** (*сегмент – частина кола, обмежена дугою* ***a m b*** *і схудною хордою* ***a o b*** *– на рис. 6.3 зафарбована в синій колір*). Її величину знайдемо як різницю площ сектора ***acbm*** (*S*сект) і ∆ ***acb*** (*сектор – частина кола, обмежена дугою amb і двома радіусами ac і bc, що з'єднують кінці дуги з центром кола*).

Враховуючи, що ***om*** = *h*, отримаємо (рис. 6.3 б):

 (6.27)

Далі:

 (6.28)

З урахуванням (6.27) та (6.28), отримаємо:

 (6.29)

Знайдемо площу сектора *S*сект ***acbm***. Припустимо:

 (6.30)

Розмір кутів задається у ***радіанах***. Представимо коло (рис. 6.3 б) як специфічний сектор з центральним кутом 2γ=2π. Площа кола:

 (6.31)

У цьому випадку площа сектора ***acbm*** складатиме таку ж частину від площі кола, як і кут 2γ (рис. 6.3 б) становить від 2π. Іншими словами можна скласти пропорцію:

 (6.32)

Тепер з урахуванням (6.29) та (6.32) маємо можливість знайти площу шуканого сегмента *S*сегм ***aobm***,

 (6.33)

та з урахуванням (6.26) обсягу рідини в ємності (рис. 6.3):

 (6.34)

Для того щоб вираз (6.34) при незмінних розмірах ємності виражало залежність об'єму рідини тільки від її глибини, необхідно виразити величину кута γ в залежності від *h*. Врахуємо, що:

 (6.35)

або з урахуванням (6.27) та (6.30):

 (6.36)

Підставляючи (6.36) (6.34) в остаточному вигляді отримаємо:

 (6.37)

Для завершення перетворень (6.37) підставимо в (6.23):

 (6.38)

Виконані перетворення (6.26) – (6.38) можуть бути корисні власними силами. Але **метою** було показати, як невелика зміна зовнішніх умов може призвести до суттєвого **ускладнення обчислень**. Інженер має бути готовим до цього.

Складністю виконаних перетворень не вичерпуються проблеми, що виникли. З виразу (6.38) через його нелінійність щодо *h* не вдається виразити у явному вигляді цю величину, подібно до (6.25). В цьому випадку може бути застосовано наступний **інженерний** прийом. Завдання отримання (6.38) залежності зміни *h* від часу *t* називається **прямою**. Завдання отримання залежності моменту часу *t*, який досягається деяка величина глибини заповнення *h* (залежність *t* від *h*), називається **зворотної**. З огляду на лінійність (6.38) щодо *t* такий вираз може бути отримано:

 (6.39)

Задаючи зміну глибини заповнення *h* з будь-яким кроком ∆*h* (в діапазоні 0…2*R* – від повністю порожньої до повної горизонтально розташованої циліндричної ємності (рис. 6.3 а)) на підставі (6.39) визначаються моменти часу *t*, в які таке заповнення буде досягнуто. Отримані результати зводяться до таблиці (табл. 6.1).

Таблиця 6.1.

Моменти часу досягнення заповнення заданої величини

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***h*** | *h1* | *h2* | *…* | *…* | *hn-1* | *hn* |
| ***t*** | *t1* | *t2* | *…* | *…* | *tn-1* | *tn* |

Дані з такої таблиці дозволяють отримати результати, що відповідають розв'язанню прямої задачі: вибираючи необхідний час можна визначити відповідний йому ступінь заповнення ємності.

Приклад такого рішення розглядається на практичних заняттях.

#### **Заповнення ємності при подачі рідини знизу (**Лекція 13**)**

Наведені вище розрахунки відповідають випадку заповнення ємності зверху (рис. 6.4, а). Передбачається, що всі параметри, що забезпечують витікання рідини, залишаються незмінними. Тому і швидкість закінчення рідини весь час залишається постійною. Але умови можуть суттєво змінитися, якщо заповнення ємності відбуватиметься через такий же трубопровід, розташований біля дна ємності (рис. 6.4 б)

Розглянемо випадок, коли підтримується не стала рідина ***r*** як у разі його верхнього розташування (рис. 6.4, а), а постійний тиск ***P*1** (рис. 6.4, б) на вході в трубопровід. У міру заповнення ємності (зростання глибини ***h*** рідини) збільшуватиметься тиск стовпа рідини ***P*2** на виході трубопроводу в ємність. Одним з факторів, що визначають витрату рідини, є різниця тисків ***P*1**-***P*2** на вході та виході з трубопроводу. У міру збільшення ***h*** і відповідно ***P*2** буде зменшуватися різниця тисків ***P*1**-***P*2** і витрата рідини (відповідно зменшується швидкість течії рідини в трубопроводі).

У наукових дослідженнях намагаються врахувати всі чинники, що впливають аналізований процес. Що стосується перебігу рідини в трубопроводі враховують вплив зміни швидкості рідини на коефіцієнт опору, який, своєю чергою, впливає швидкість руху рідини. Але інженерні розрахунки за своєю природою є наближеними. Для їх спрощення ряд малозначущих факторів може не враховуватися. Величина похибки, що вноситься таким спрощенням, має бути оцінена і не перевищувати допустиму межу (для інженерних розрахунків <5%). Оцінимо вплив величини заповнення ємності на зміну об'ємної витрати рідини, що подається.

|  |  |
| --- | --- |
| а | б |

Мал. 6.4. Варіанти розташування трубопроводу, яким рідина подається в ємність: а – вище поверхні рідини; б – нижче поверхні рідини

Величина об'ємної витрати рідини через трубопровід може бути оцінена за допомогою виразу (з курсу фізики, гідравліки, гідродинаміки):

 (6.40)

Тут μ – узагальнений коефіцієнт опору магістралі; *S*тр – площа перерізу трубопроводу; ρ – щільність рідини, що подається; ∆*P* – перепад (різниця) тисків рідини на вході *P*1 і виході *P*2 трубопроводу, що подає.

Розмір *P*1=const, а величина *P*2 може бути з співвідношення:

 (6.41)

Тут *g* – прискорення вільного падіння.

Запишемо вирази для визначення об'ємної витрати рідини для випадків порожньої  (*P*2=0 при *h*=0) та повністю заповненої  ємності:

 (6.42)

У межах інженерних розрахунків вважатимуться, що вплив ступеня заповнення ємності (рис. 6.4, б) зневажливо мало величину об'ємного витрати рідини, якщо величини  (6.42) різняться менш як 5%:

 (6.43)

З урахуванням (6.42) в результаті отримаємо:



або



і зрештою:

 (6.44)

Вираз (6.44) дозволяє визначити величину тиску *P*1 на вході в трубопровід, при якому можна знехтувати зміною об'ємної витрати рідини (< ніж на 5%), на початку і при поточній висоті *h* заповнення ємності. Наприклад покладемо ρ=1000 кг/м3 (для води), g≈10 м/с2. В цьому випадку з (6.44) випливає:

 (6.45)

Виходячи з цього виразу задаючи висоту заповнення в метрах можна визначити тиск у паскалях на вході в трубопровід, що дозволяє в інженерних розрахунках не враховувати зміна об'ємної витрати рідини.

Переписавши (6.45) у вигляді:

 (6.46)

отримуємо можливість визначати тиск у барах (P1/105) та порівнювати його з рівнем заповнення в метрах. Слід зазначити, що в інженерній практиці не завжди зручно вимірювати тиск, створюваний насосом, у паскалях. Часто його представляють як натиск у метрах (водного стовпа). Це питання буде розглянуто в розділі про роботу насосів.

Отже, при порушенні умови (6.45) або (6.46) слід враховувати вплив величини заповнення ємності на об'ємну витрату рідини, що надходить і, наприклад, на час заповнення. У міру збільшення заповнення об'ємна витрата буде зменшуватись і може навіть стати рівним 0. Визначимо умови для виникнення такої ситуації. Це буде у випадку *P*1=*P*2, або з урахуванням (6.41):

 (6.47)

Умови, що описуються виразами (6.45–6.46) та (6.47) є граничними. У проміжку між ними заповнення ємності відбуватиметься, але зі змінною витратою. Це потрібно враховувати.

Запишемо рівняння (6.21) для наповнення ємності зі змінною витратою у вигляді:

 (6.48)

Об'єм рідини в ємності (рис. 6.4 б) відобразимо за допомогою виразу, подібного (6.23):

 (6.49)

а витрата за допомогою виразу, подібного (6.42):

 (6.50)

Підставивши (6.49) та (6.50) у (6.48) отримаємо:

 (6.51)

Вважаючи *V*0=*const* і *S*св=*const* і продиференціювавши ліву частину (6.51), отримаємо:

 (6.52)

Враховуючи, що вираз у фігурних дужках і перший доданок під знаком кореня є постійними величинами, позначимо їх як *K*1 і *K*2:

 (6.53)

В результаті (6.52) можна записати у вигляді:

 (6.54)

Вираз (6.54) є нелінійним звичайним диференціальним рівнянням першого порядку.

Далі з рішенням отриманого таким шляхом рівняння, як пощастить. Можливі три варіанти:

* навіть таке просте рівняння в силу, наприклад, своєї нелінійності не матиме аналітичного рішення. В цьому випадку:

1. використовуються **чисельні методи** розв'язання диференціальних рівнянь (є предметом вивчення спеціального курсу);
2. використовуються **методи лінеаризації** (розділ 5.2) для перетворення нелінійної частини біля точки лінеаризації. У цьому випадку може бути отримано аналітичне рішення не на всьому інтервалі зміни аргументу (в даному випадку часу *t*), а близьке до істинного, але лише в деякому діапазоні навколо лінеаризації точки;

* у деяких випадках вдається отримати **аналітичне рішення** необхідного рівняння.

Нам пощастило та рівняння (6.54) має аналітичне рішення:

 (6.55)

Тут *C*1 – постійна інтеграція.

При необхідності аналітичне рішення може бути отримане за допомогою будь-якого онлайн-сервісу, наприклад, WolframAlpha. На практичних заняттях будуть розглянуті всі три способи розв'язання цього рівняння.

*Як зазначалося вище, інженер бере для розрахунків відомі математичні вирази, що описують відомі процеси. Тому інженеру часто вказують, що він не створює нічого нового. Але відомі математичні вирази, що використовуються, є вихідним матеріалом, своєрідними «цеглинками», з яких будується «будівля» моделі процесу або об'єкта. Не варто дорікати архітектору, що він тільки будує з відомих будматеріалів, а не розробляє нові види цегли, марки бетону або сталі для арматури. Так і інженер є «архітектором» моделі об'єкта, що створюється. Без нього всі «наукові будматеріали» лише «груди цеглини» нехай і на грандіозному «будмайданчику» світу. Але й до іншої крайності впадати не можна. Вихідний «будівельний» матеріал (моделі, методи) важливий і з погляду його різноманіття та якості. З «лайна та палиць» нічого хорошого не вийде. І інженер повинен знати та вміти використовувати властивості наукового «будівельного» матеріалу. Без грамотного використання унікальних властивостей не вийдуть і унікальні об'єкти.*

#### **Заповнення рідиною замкнутої ємності**

У всіх попередніх випадках спеціально не обумовлювалося, але мало на увазі, що повітряний простір ємності з'єднаний з атмосферою і тиск над рідиною в процесі заповнення залишається величиною постійної, що дорівнює атмосферному тиску і не залежить від величини заповнення. Внаслідок цього ємність могла бути заповнена повністю. Але так відбувається не завжди. У ряді випадків ємність зверху замкнута і в міру збільшення заповнення обсяг повітряного простору зменшується без зміни кількості (маси) газу (повітря). В результаті величина тиску в газовому обсязі збільшується. Таким чином, така ємність не може бути заповнена повністю. Такі ємності зустрічаються у гідравлічних системах (у тому числі робототехнічних) як демпфери коливань тиску, як розширювальні баки у системах теплопостачання, системах подачі води (гідрофори).

Розглянемо ємність, подібну до зображеної на рис. 6.4,б. Простір над вільною поверхнею рідини замкнутий. Для спрощення аналізованої ситуації не враховуватимемо вплив висоти стовпа рідини h на її об'ємну витрату. Витрата рідини буде визначатися відповідно до (6.40). У цьому *P*1=*const*. Величина *P*2 визначається величиною тиску, що змінюється, у вільному обсязі над рідиною. Таким чином у дослідженні враховуватиметься вплив лише основного процесу – стиснення вільного обсягу газу над рідиною.

*В інженерній практиці для спрощення вирішення основного завдання широко використовується прийом виключення із розгляду малозначущих факторів. Але для вирішення деяких завдань може знадобитися облік цих факторів. Досвід, компетентність інженера полягає у вмінні виділити ці фактори, оцінити ступінь їхнього впливу. Так у розглянутому варіанті заповнення може все-таки знадобитися облік впливу глибини рідини, форми ємності, нагрівання газу при його стиску, складу газового об'єму, типу рідини, розчинності газу в рідині і, напевно, щось ще.*

Вважатимемо газ у вільному обсязі ємності ідеальним, що підпорядковується рівнянню ідеального газу (фізика, термодинаміка):

 (6.56)

де *V*св, *P*св – величина вільного обсягу газу та тиск у ньому відповідно, *R* – універсальна газова стала, *T* – температура газу, ν – кількість молей газу.

Вважаємо, що в процесі заповнення ємності та стиску газового об'єму температура газу залишається постійною (процес стиснення – ізотермічний). У цьому випадку будь-якої миті заповнення ємності та стиснення газу у вільному обсязі права частина рівняння (6.56), що описує цей процес, залишається постійною величиною. Отже, залишається постійною і ліва частина рівняння (6.56) (закон Бойля – Маріотта):

 (6.57)

Тут індекси 1 і 2 відзначають параметри процесу стиснення газу два різні моменти часу.

Покладемо для початкового моменту часу:

 (6.58)

Величина *h*0 означає глибину рідини в ємності перед початком подачі рідини. Відповідно *V*0 – початкова величина вільного обсягу (перед початком заповнення ємності). Величина *h*0 може дорівнювати 0 (порожня ємність). У цьому випадку величина *V*0 прийматиме максимальне значення, що дорівнює повному об'єму ємності. У міру надходження рідини висота вільного об'єму [*l*-(*h*0+*h*)] і, відповідно, його величина

 (6.59)

зменшуються. Підставивши (6.58) та (6.59) у (6.57) отримаємо:

 (6.60)

Величина *P*св (6.60) у виразі (6.40) використовується замість *P*2. У цьому випадку (6.52) набуде вигляду:

 (6.61)

Вираз у фігурних дужках перед квадратним коренем (*l*-*h*0) є постійними величинами. Позначимо їх як *K*1 і *K*2 відповідно:

 (6.62)

В результаті (6.61) можна записати у вигляді:

 (6.63)

Також необхідно пам'ятати, що *P*0 = *cons*t і *P*1 = *const*.

Як і (6.54), вираз (6.63) є нелінійним нормальним диференціальним рівнянням першого порядку. Так само, як і у випадку (6.54), (6.63) може бути отримано аналітичне рішення. Але він буде складним, громіздким із використанням зворотних гіперболічних функцій. У такому вигляді в інженерних розрахунках застосування прийнятого рішення є проблематичним. На практичних заняттях буде розглянуто метод його чисельного рішення та використання лінеаризації.

#### **Заключение по разделу 6.2.1**

Материалы, приведенные в разделах 6.2.1.1 – 6.2.1.3, не соответствуют рецепту для расчета емкостей. При изучении этих разделов у будущих инженеров должно начать формироваться осознание многосторонности и разнообразности процессов создания модели. Незначительное изменение условий может привести к существенному усложнению модели и ее решения. Очередной раз усложняя модель необходимо взвешивать это мероприятие. С одной стороны, что дало усложнение модели с точки зрения возможного результата. С другой стороны, нужно выбрать степень усложнения решения и возможность его получения.

Есть еще один фактор, влияющий на выбор степени детализации используемых моделей. Это точность определения исходных данных. Во всех случаях математическая точность должна быть в 2-4 раза выше, чем выше. Более высокая математическая точность, как и более низкая, будут неадекватны данной модели.

***Існують чотири джерела похибки результату:***

1. ***Похибка математичної моделі*** *– пов'язані з її невідповідністю фізичної дійсності, оскільки абсолютна істина недосяжна. Якщо математична модель обрана недостатньо ретельно, то які б методи ми не застосовували для розрахунку, всі результати будуть недостатньо надійні, а в деяких випадках і зовсім неправильні.*
2. ***похибка вихідних даних****, прийнятих до расчета. Це* ***непереборна похибка****, але це похибка можливо і необхідно оцінити для вибору алгоритму розрахунку та точності обчислень. Як відомо, помилки експерименту умовно поділяють на систематичні, випадкові та грубі, а ідентифікація таких помилок можлива за статистичного аналізу результатів експерименту.*
3. ***похибка способу*** *– заснована на дискретному характері будь-якого чисельного алгоритму. Це означає, що замість точного вирішення вихідної задачі метод знаходить рішення іншого завдання, близького в якомусь сенсі (наприклад, за нормою банахова простору) до шуканого. Похибка методу – основна характеристика будь-якого чисельного алгоритму. Похибка методу повинна бути в 2-5 разів менша за непереборну похибку.*
4. ***похибка округлення*** *– пов'язані з використанням у обчислювальних машинах чисел із кінцевою точністю представлення.*

Питання, пов'язані з похибками, розглядаються в різних спеціальних курсах (наприклад, «чисельні методи», «метрологія» та ін.).

Немає сенсу підвищувати точність моделі вище за відповідну точність вихідних даних. Багато праці та жодних нових результатів. Це відповідає методологічному принципу бритви Оккама: «*Не слід множити те, що існує без необхідності*» (або *«Не слід залучати нові сутності без крайньої на те необхідності»*).

У сучасній науці під бритвою Оккама зазвичай розуміють загальний принцип, який стверджує, що й існує кілька логічно несуперечливих пояснень будь-якого явища, пояснюють його однаково добре, слід, за інших рівних умов, віддавати перевагу найпростіше їх. Зміст принципу можна звести до такого: не треба без необхідності вводити нові закони, щоб пояснити якесь нове явище, якщо це можна вичерпно пояснити старими законами.

Слід звернути увагу на вжиті вище обороти «однаково добре», «за інших рівних умов» і «вичерпно»: бритва Оккама вимагає віддати перевагу просте пояснення тільки в тому випадку, якщо воно пояснює явище не менш точно, ніж складне, враховуючи весь відомий на поточний момент масив спостережень, тобто якщо відсутні об'єктивні підстави для того, щоб надати перевагу більш складному пояснення простому.

Як особливість наведеної вище безпосередньо обчислювальної роботи слід відзначити її простоту. Найчастіше до виконання обчислень достатньо знань шкільного курсу математики. Особливістю ж роботи є широта кругозору майбутнього інженера, розуміння принципів процесів, що протікають, знання основ запису моделей цих процесів і, **головне**, вміння **спрощувати** існуючі моделі без втрати значущої інформації про аналізований процес.

### **Теплообмін. Нагрів тел (***Лекція 14***)**

Поряд із гідравлічними процесами, деякі приклади яких розглянуті вище, важливу роль при створенні чи управлінні об'єктами відіграють процеси теплообміну – нагрівання чи охолодження тіл. Вони можуть мати як основний технологічний характер (нагрів тіл перед їх обробкою або охолодження при загартуванні, для зупинки будь-якого процесу), так і паразитний (нагрів, наприклад, процесора або деталей будь-яких пристроїв у процесі роботи та необхідність їх охолодження). Коло питань може бути дуже широким. Відповідні завдання розглядаються у спеціальних курсах (тепло-масообмін, теплопередача та ін.). **Метою** даного розділу є ознайомлення майбутніх інженерів із деякими способами спрощення аналізованих складних завдань без істотної втрати інформативності рішень.

#### **Нагрівання пластини**

Під час вирішення попередніх завдань використовувалися прості диференціальні рівняння. Це зумовлено тим, що аргументом (незалежною змінною) виступала лише одна величина. У розглянутих випадках це був час. Не мало значення в якому напрямку в ємності розтікалася рідина, що надходить. Шукали узагальнюючу (інтегральну) величину – сумарний обсяг рідини, що надійшла. У завдання теплообміну інша картина. Основним процесом, що вивчається, є обмін енергією. Параметром, що характеризує розподіл енергії всередині тіла, є температура. Температура в різних точках тіла (як при нагріванні, так і при охолодженні) може бути різною. Таким чином, величина температури в різних точках тіла може залежати як від моменту часу розгляду, так і від координат точки.

Не обговорюючи спосіб отримання запишемо загальноприйняте рівняння теплопровідності для будь-якої точки тіла, що розглядається у вигляді:

 (6.64)

де *T* - температура в точці, що розглядається, *x*, *y*, *z* - координати точки, що розглядається, *a* – коефіцієнт температуропровідності.

В свою чергу:

 (6.65)

Тут *λ*, *c*, *ρ* – відповідно теплопровідність, теплоємність і щільність матеріалу нагрівається (охолоджуваного) тіла.

Вважатимемо *a*=*const*. Це можна вважати одним із кроків, спрямованих на спрощення вихідного рівняння. Але й у цьому випадку загальне аналітичне рішення (6.64) неможливе. Залишається лише складне рішення з допомогою чисельних методів.

Одним із шляхів подолання труднощів, що виникають, є пошук способів, що дозволяють зменшити кількість аргументів (незалежних змінних). Розвиток процесу нагрівання – охолодження тіла розглядаємо у часі. Тому ця координата – час – мусить залишитися. Зменшення кількості просторових координат має залишати можливість досліджувати розподіл температури в межах тіла, що розглядається. На погляд суперечлива задача. Але в деяких випадках вона має рішення і воно наводиться у спеціальних курсах (наприклад, «Тепло-масообмін та теплопередача»). З повним рішенням можна ознайомитися щодо цих курсів. Тут же розглянемо лише підходи до вирішення цього завдання та кінцеві результати. У багатьох випадках саме таке обмежене коло питань вирішує інженер. У цьому випадку у навчальних цілях завдання інженера розглядатимемо як необхідність узгодження наявних результатів розв'язання «наукової» задачі з «потребами» інженера. Слід враховувати, що на практиці інженеру частіше доводиться вирішувати обернену задачу: за потреби розв'язання «інженерної» задачі доводиться шукати приклад розв'язання близької до неї «наукової» задачі.

|  |
| --- |
|  |
| Мал. 6.5. Схема нагріву нескінченної пластини |

Приймемо низку припущень. Розглянемо тіло у вигляді тонкої нескінченної пластини **γ** завтовшки 2**δ** (рис. 6.5). У всіх точках пластина має однакову (початкову) температуру *T*н. Температура навколишнього середовища стрибком (миттєво) змінюється (наприклад, підвищується) до температури *T*ок і пластина починає нагріватися. Зв'яжемо з пластиною декартову систему координат 0*xyz*. Вісь 0*x* направимо перпендикулярно бічним стінкам пластини. Тоді осі 0*y* та 0*z* будуть спрямовані вздовж пластини у відповідних напрямках. З огляду на симетричність умов навколишнього середовища та теплообміну зміна температури пластини відбуватиметься лише вздовж наплавлення осі 0*x*. У напрямку осей 0*y* і 0*z* при заданому значенні осі 0*x* температура буде однаковою. Профіль температури вздовж 0*x* матиме симетричний вигляд: у країв пластини температура буде вищою, ніж у середині пластини. Ця особливість процесу нагрівання пластини дозволяє звести завдання від виду (6.64) до наступного:

 (6.66)

Це значно простіша модель порівняно з вихідною (6.64).

Якісна картина зміни температури (відбиває загальний характер без прив'язки до конкретних чисельних значень), що відповідає різним моментам часу, наведено на рис. 6.6. Як просторову координату виступає вісь 0*x*. В силу симетрії профілю температури при нагріванні пластини

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| а | б | в |
| Мал. 6.6. Якісний характер зміни температури за товщиною пластини у різні моменти часу | | |

в заявлених умовах до центру пластини прив'язана вісь 0T, якою відображається зміна температури. На (рис. 6.6 а) зображено вихідний стан системи після приміщення пластини з температурою *T*н (позиція 1) в навколишнє середовище з температурою *T*ок. Штриховою лінією позначена температура, що дорівнює температурі навколишнього середовища *T*ок, до якої теоретично (але не практично) може нагрітися пластина. На (рис. 6.6 б) показані деякі проміжні стану нагрівання пластини. Графік (позиція 2) відповідає моменту часу, коли стінки пластини вже кілька нагрілися, а центрі пластини температура залишилася рівної початкової *T*н. На графіці (позиція 3) відображено деяке проміжне стан: стінки нагрілися до ще більшої температури і центр пластини також почав нагріватися. На (рис.6.6, в) відображається стан (позиція 4) закінчення нагрівання, **близьке** до досягнення максимально можливої температури, що дорівнює температурі навколишнього середовища *T*ок.

Розглянемо докладніше температурний стан пластини, що нагрівається, відображене на (рис.6.6, в). Поміркуємо. Причиною передачі енергії у формі тепла (тепловий потік) є різниця (перепад) температур між нагрівальним середовищем і тілом, що нагрівається. Немає перепаду температури і теплового потоку. З цього можна зробити такі висновки:

* 1. поки температура в центрі пластини відрізняється від температури навколишнього середовища, існує тепловий потік до центру пластини. В силу цього існує різниця температур між температурою навколишнього середовища та температурою стінки пластини, а також між температурою стінки пластини та температурою її ядра;
  2. у міру підвищення температури центру пластини зменшується перепад температур і тепловий потік. Складається ситуація, що відповідає завданням, що описуються інерційною ланкою першого порядку (розділ 3.1) та, відповідно, рівнянням (2.13). Отже, і рішення можуть бути схожими.

Зверніть увагу, що ми не вирішували завдання. Лише міркували. І про вид рішення лише висловили припущення.

Завдання, яке описується рівнянням (6.66) має аналітичне рішення. У цьому посібнику спеціально не вказується його шлях. Його можна подивитися у великій кількості підручників з теплообміну. Нам цікавий тільки його кінцевий вигляд. І то не сам собою, а як основа для подальшого порівняння. У межах рівняння (6.65) характеризує властивості матеріалу пластини, що визначає процес теплопровідності всередині пластини. Тепловий моток, що передається від навколишнього середовища до пластини, може бути визначений за допомогою спеціального коефіцієнта α – коефіцієнта тепловіддачі. У цьому випадку рішення рівняння (6.66) має вигляд:

 (6.67)

Тут μi є послідовне коріння трансцендентного рівняння:

 (6.68)

У рішенні (6.67) бачимо рідкісний випадок, коли диференціальне рівняння у приватних похідних має аналітичне рішення. Незважаючи на громіздкість, воно широко використовується при вирішенні практичних завдань. Надалі розглянемо і обгрунтуємо можливість застосування значно простішого вираження.

|  |
| --- |
|  |
| Мал.6.7. Нагрівання тонкої пластини |

Рішення (6.67) отримано для спеціального випадку, що не існує на практиці випадку нагрівання **нескінченної** пластини. Інженер повинен уміти пристосовувати, коли це можливо, такі рішення для практичних завдань. Розглянемо **тонку** пластину (рис.6.7). Під тонкою будемо розуміти пластину, товщина якої набагато менше інших її розмірів. При нагріванні такої пластини в її крайової частини потік енергії *q* у формі тепла надходить не тільки через бічні, але і торцеву поверхню. Для визначення температури цієї частини пластини використання рішення (6.67) не правомірно. Але на деякій відстані від краю приплив енергії через торцеву поверхню позначається мало (що далі від краю, тим менше). У середній частині пластини (всередині пунктирного контуру) можна вважати, що нагрівання відбувається лише за рахунок теплових потоків через бічні поверхні. У цьому випадку для розрахунку температури в різних точках усередині пластини можна використовувати (6.67).

Підведемо підсумки:

1. введення поняття «нескінченної пластини» дозволило звести загальне тривимірне завдання до більш простої в одновимірній постановці. Це дало змогу отримати її аналітичне рішення. У такому вигляді завдання вирішене все ще для ідеальних (реально неіснуючих) умов – нескінченна пластина. Назвемо таке завдання та його вирішення «академічними».
2. припущення про «тонку пластину» дозволило застосувати «академічне» рішення на дослідження «інженерної» проблеми нагріву реальної пластини (у разі її центральної частини).

Приблизно в такий спосіб або зі схожим підходом вирішуються всі інженерні завдання. Завжди приблизно, з деякою похибкою, але для реальних умов.

#### **Нагрівання циліндра**

Положення точки у просторі може бути визначено у системі трьох координат. У багатьох випадках використовується система декарту координат. Взагалі, ця система може бути використана завжди. Але в деяких випадках зручніше використання спеціальних видів координат.

|  |
| --- |
|  |
| Мал.6.8 Циліндрична система координат |

Розглянемо циліндр (рис.6.8). Зв'яжемо вісь O*z* із центральною віссю циліндра. З точки O побудуємо вісь O*r*, перпендикулярну до O*z*. Координати точки *A* всередині циліндра можуть бути задані таким чином:

* визначається відстань *Ac* від розглянутої точки до осі O*z*. Це координата по осі O*r*;
* визначається координата розглянутої точки по осі O*z*. Вона визначається довжиною відрізка *Ad*. На цей момент визначено положення точки *A* у просторі площині *ObaO*´.
* визначається кут повороту φ площини *ObaO* навколо осі O*z* від осі O*r*. Розмір цього кута повороту є третьою координатою.

Таким чином побудовано циліндричну систему координат *Orzφ*. Вона зручна визначення координат точок циліндричних тіл.

|  |
| --- |
|  |
| Мал. 6.9 Нагрів нескінченного циліндра |

Зв'яжемо з нескінченно довгим циліндром (стрижнем) циліндричну систему координат. Розглянемо його нагрівання за тих самих умов, як і нагрівання пластини (підрозділ 6.2.2.1): початкова температура стрижня *T*н, температура навколишнього середовища (в якій нагрівається стрижень) *T*ок. Тепловий потік q (рис.6.9) передається нескінченному циліндру з усіх боків рівномірно. Виділимо всередині нескінченного циліндра циліндричну поверхню з радіусом ρ. В силу симетрії нескінченного циліндра і теплового потоку температура на цій циліндричній поверхні у всіх точках буде однаковою в даний момент часу, але змінюватиметься зі зміною радіусу циліндричної поверхні. Таким чином, при нагріванні нескінченного циліндра температуру в будь-якій точці можна визначити в залежності від однієї координати (*r*) в циліндричній системі координат. Знову отримуємо можливість постановки та вирішення одновимірної задачі виду (6.66), але з особливостями, викликаними застосування циліндричної системи координат:

 (6.69)

Її рішення можна записати у вигляді:

 (6.70)

Тут як і у разі нагрівання нескінченної пластини μi є послідовне коріння трансцендентного рівняння:

 (6.71)

У (6.70) і (6.71) змінні мають ті ж позначення, що й для випадку нескінченної пластини. Крім того: *R*0 – радіус нескінченного циліндра, *J*0 – функція Бесселя першого роду нульового порядку, *J*1 – функція Бесселя першого роду першого порядку. Функції Бесселя *J*0 та *J*1 є спеціальними функціями. Вони не мають аналітичного виразу в елементарних функціях, але можуть бути обчислені за допомогою рядів. Крім того, є численні таблиці з вже обчисленими значеннями цих функцій для різних аргументів.

Розрахунок температури за допомогою (6.70) ще більш громіздкий, ніж для нагрівання пластини. Проте він може використовуватися в інженерних розрахунках щодо температури циліндра кінцевої довжини (стрижня) при малому його радіусі. Обґрунтування аналогічне випадку нагрівання тонкої пластини кінцевого розміру. За допомогою (6.70) не може бути розрахована температура лише на кінцях стрижня. Крім того, наявність рішення (6.70) шляхом порівняння з результатами розрахунку з використанням наближених формул дозволяє оцінити величину похибки останніх.

Підведемо підсумки:

1. як і у випадку з нескінченною пластиною наявність симетрії дозволило звести рішення тривимірної задачі до одновимірної та отримати його. Але задля забезпечення «симетрії» моделі знадобилося використання спеціальної циліндричної системи координат;
2. припущення про малий визначальний розмір (у разі малому радіусі циліндра) дозволяє використовувати «академічне» рішення для нескінченного циліндр щодо «інженерної» проблеми нагрівання стрижня кінцевої довжини.

#### **Нагрів кулі**

Як показано в розділах 6.2.2.1 та 6.2.2.2, наявність симетрії спрощує модель процесу нагрівання і, відповідно, її вирішення. Пошук симетрії є важливим кроком у вирішенні будь-якого завдання. Розглянемо ще одне тіло, яке має симетрію – кулю. Але щоб реалізувати перевагу, що надається симетрією, як і у випадку з нескінченним циліндром, необхідно ввести спеціальну систему координат – сферичну.

|  |
| --- |
|  |
| Мал. 6.10. Сферична система координат |

Розглянемо декартову систему координат *Oxyz* (рис.6.10). Розташування точок, крім використання декартової системи, можна визначити й іншим способом. Розглянемо точку *A* з відривом *r* від початку координат (рис.6.10). Через цю точку можна здійснити сферу, всі точки якої будуть на відстані *r* від початку координат. Через точку *A* проведемо площину *OzAm*. Її положення щодо площини *xOz* визначається кутом повороту навколо осі *Oz*. Положення точки *A* у просторі площини *OzAm* визначається кутом відхилення вектора *OA* від осі *Oz* на кут *θ*. Таким чином, положення точки *A* в просторі може бути задане в системі координат *Orφθ*. Така система координат називається сферичною. У цій системі при *r*=*const* і за різних кутах φ і θ точка *A* розташовується на сфері радіуса r.

Нагріватимемо кулясте тіло з його початковою температурою *T*н і температурою навколишнього середовища *T*ок. В силу симетрії тіла та умов нагрівання температура в будь-якій точці деякої сферичної поверхні з центром в точці *O* всередині кулястого тіла, що нагрівається, буде величиною постійної. Її величина змінюватиметься лише зі зміною радіусу цієї сферичної поверхні. Таким чином нагрівання кулі у сферичній системі координат так само, як і завдання нагрівання нескінченних пластини та циліндра, є одномірним завданням:

 (6.72)

Її рішення має вигляд:

 (6.73)

Тут як і у разі нагрівання нескінченної пластини та нескінченного циліндра μi є послідовні корені трансцендентного рівняння:

 (6.74)

У (6.73) і (6.74 ) змінні мають ті ж позначення, що і для випадку нескінченної пластини і нескінченного циліндра. Крім того: *R*0 – радіус кулі, що нагрівається.

Підведемо підсумки:

1. як і у випадку з нескінченною пластиною та нескінченного циліндра наявність симетрії дозволило звести рішення тривимірної задачі до одномірної та отримати його. Але задля забезпечення «симетрії» моделі знадобилося використання спеціальної сферичної системи координат;
2. На відміну від двох попередніх випадків при вирішенні задачі нагрівання кулі немає необхідності в припущеннях для адаптації отриманого «академічного» рішення до потреб інженерних завдань.

#### **Нагрів пластини, циліндра та кулі. Інженерний підхід та спрощення розрахункових залежностей (**Лекція 15**)**

Вирази (6.67), (6.70) та (6.73) дозволяють розрахувати зміну температури в процесі нагріву в довільний момент часу та в довільній точці тіла. Рішення точні, але громіздкі, складні для застосування у повсякденній практиці інженерних розрахунків. У такій ситуації в інженера має виникати бажання зробити розрахунки більш простими, розглядаючи, наприклад, спеціальні умови розрахунків.

При нагріванні як частини технологічного процесу важливо контролювати температуру не у всіх точках тіла, перш за все, в точках, що повільно прогріваються. У випадках ними є частини тіл, найбільш віддалені від нагріваються поверхонь, тобто. у їхньому центрі. Системи координат, що використовуються, прив'язані до центрів тел. Таким чином, координати точок, що цікавлять нас, будуть рівні:

* для пластини – *x*=0;
* для циліндра та кулі – *R*=0.

Підставимо ці значення (6.67), (6.70) і (6.73). В результаті отримаємо:

* **для пластини:**

 (6.75)

або

 (6.76)

* **для нескінченного циліндра:**

 (6.77)

або

 (6.78)

* **для кулі:**

 (6.79)

Під час запису цього рівняння є нюанс. Виділений другий співмножник є першою чудовою межею (згадуємо курс математики):

 (6.80)

З урахуванням (6.80) вираз визначення температури в центрі кулі матиме вигляд:

 (6.81)

Отримані вирази (6.76), (6.78) та (6.81) **не** принципово простіше вихідних (6.67), (6.70) та (6.73). Вони залишаються досить складними для систематичних розрахунків у інженерній практиці.

При використанні «академічних» рішень завжди є протиріччя. Точні рішення практично завжди складні. У той же час, вихідні дані, що використовуються для їх реалізації, завжди мають певну похибку. Відомо, що не можна отримати рішення з точністю, що перевищує точність вихідних даних. Для вирішення завдань можна використовувати наближені, але простіші рішення, величина похибки яких не перевищує похибки вихідних даних. У цьому випадку досягається оптимальний варіант співвідношення складності та точності рішення. У разі нагрівання тіл такий варіант існує.

*У цьому курсі важливо ознайомитися з реалізацією такого підходу, а чи не з вирішенням конкретного завдання. Тому метод отримання цього конкретного рішення або джерело, де цей метод викладено, не вказується.*

При отриманні рішень у вигляді (6.67), (6.70) та (6.73) використана величина - коефіцієнт тепловіддачі. Насправді він визначається з похибкою до 20%. З цієї причини вирази (6.67), (6.70) та (6.73) є точними з математичної точки зору. Але при вирішенні за їх допомогою інженерних завдань не дають такого результату.

Розглянемо вираз виду:

 (6.82)

Виявляється, за допомогою рівняння такого виду, але, правда, з деякою похибкою можна описати зміну температури в центрі і пластини і циліндра і кулі. Для різних тіл будуть різні коефіцієнти, що входять до виразу для . Величина знерозмірної температури  (наведеної до виду без розмірності) визначається із співвідношення:

 (6.83)

де *T* – обумовлена температура в центрі розглянутих тіл.

Запишемо вираз (6.82) з урахуванням (6.83):

 (6.84)

Розкривши квадратні дужки, отримаємо:

 (6.85)

Далі розглянемо вираз для :

 (6.86)

У практиці розрахунків комплекси змінних, що входять до (6.86), мають свою назву та позначення. Так комплекс

 (6.87)

називається числом Фур'є (*названо на честь французького фізика та математика Жана Фур'є*). Цей комплекс є знерозмірним часом (без розмірності – розмірності змінних у комплексах скорочуються). Змінна *x* визначається характерним розміром розглянутого тіла. Для пластини *x*=δ, а циліндра і кулі *x*=*R*0 – радіус тіла. Комплекс

 (6.88)

називається числом Біо (*названо на честь французького вченого, фізика, геодезиста та астронома Ж.-Б. Біо*). Цей комплекс також є обезрозмірною величиною.

*Розділ науки, у тому числі інженерної науки, що використовує такі комплекси (критерії та числа подібності) щодо процесів у навколишньому середовищі, називається теорією подібності. У цьому короткому курсі немає можливості познайомити майбутніх інженерів навіть із її основами. Але зважаючи на важливість і корисність методів цього розділу науки настійно рекомендується познайомитися з ними.*

З урахуванням (6.88) вираз (6.86) для  може бути записаний у вигляді:

 (6.89)

До складу (6.86) або (6.89) входять ще два коефіцієнти: *K*g – коефіцієнт форми, *k* – поправочний коефіцієнт. Їхні величини залежать від форми тіла, для якого ведеться розрахунок температури. Значення цих коефіцієнтів наведено у таблиці 6.2.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Таблица 6.2. | | |
|  | ***Kg*** | ***k*** |
| Пластина | 1 | 0.42 |
| Цилиндр | 2 | 0.39 |
| Шар | 3 | 0.36 |

Використання коефіцієнтів із табл. 6.2 (6.89) дозволяє за допомогою (6.82) описати зміну температури в центрі всіх трьох розглянутих тіл: нескінченних пластини і циліндра, а так само кулі. Вираз (6.82) значно простіше, ніж будь-яке з (6.67), (6.70) або (6.73), його застосування не потребує вирішення трансцендентних рівнянь або використання спеціальних функцій.

Оцінимо похибку, що вноситься в результат під час використання (6.82). Для досягнення температури в центрі тіла величини, що дорівнює температурі навколишнього середовища, потрібен нескінченно великий час. З цієї причини визначався момент часу, коли температура в центрі тіла відрізнятиметься від температури навколишнього середовища на 5%. Розрахунки були виконувані за допомогою (6.82), а також (6.67), (6.70) та (6.73) у діапазоні зміни *Bi*∈(0.005…1000) (критерій Біо). Зазначений діапазон зміни *Bi* відповідає зміні на 5 порядків або в 100 000 разів (точніше в даному випадку в 200 000 разів). *(Зміна на один порядок відповідає зміні у 10 разів. Зміна на 5 порядків відповідає зміні у 105 разів)*. У всьому розглянутому діапазоні зміни Bi наближені результати за єдиною формулою (6.82) не більше ніж на 4% відрізняються від точних розрахунків з використанням (6.67), (6.70) та (6.73). Похибка наближених розрахунків (< 4%) менша від похибки визначення вихідних даних (~ 20 % для α). Це доводить правомірність використання результатів розрахунків з допомогою (6.82) в інженерної практиці.

**Висновок**

У запропонованому короткому посібнику не ставилася мета дати будь-які конкретні, а тим паче точні, обчислювальні залежності. Основним завданням є знайомство майбутніх інженерів на початковій стадії навчання з прикладами інженерних досліджень та розрахунків. Головна особливість інженерної роботи – поставлене завдання має бути **завжди** вирішене незалежно від її складності. Це одна з причин, чому всі інженерні розрахунки наближені виконуються з певною похибкою. Зі збільшенням досвіду інженера зменшується похибка розрахунків, але вони однаково залишаються наближеними. Така ситуація сприяє використанню щодо простих (математичних) методів розрахунків. Протягом всього представленого посібника використані методи не перевищували за складністю курс шкільної математики. Не заперечує необхідності глибшого вивчення основ вищої математики як основи точніших обчислень. Але в інженерній практиці це не є визначальним. Головним для інженера є чітке уявлення про процеси, що протікають у об'єкті, що розглядається. Для нього визначально важлива фізична картина навколишнього світу, що склалася. На її розширення спрямовані знання, які отримує інженер щодо загальнотехнічних дисциплін.

# **ДОДАТОК**

## **П1. Таблиця перетворень Лапласа**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | Оригінал | Зображення | № | Оригінал | Зображення |
| 1 | *x(t)* | *L*[*x(t)*] | 2 |  |  |
| 3 | 1 |  | 4 | *x*0 |  |
| 5 |  |  | 6 |  |  |
| 7 | *t* |  | 8 |  |  |
| 9 |  |  | 10 |  |  |
| 11 |  |  | 12 |  |  |
| 13 |  |  | 14 |  |  |
| 15 |  |  | 16 |  |  |
| 17 |  |  | 18 |  |  |
| 19 |  |  | 20 |  |  |
| 21 |  |  | 22 |  |  |
| 23 |  |  | 24 |  |  |

## **П2. Базові величини розмірностей міжнародної системи СІ**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Розмір | | Одиниця | |
| Найменування | Символ розмірності | Найменування | Міжнародне  позначення |
| Довжина | L | метр | m |
| Маса | M | кілограм | kg |
| Час | T | секунда | s |
| Сила електричного струму | I | ампер | A |
| Термодинамічна температура | Θ | кельвін | K |
| Кількість речовини | N | моль | mol |
| Сила світла | J | кандела | cd |

## **П3. Приставки системи одиниць та їх скорочені позначення для утворення десяткових кратних та дольних одиниць**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Приставка | Позначення приставки | Десятковий множник | Приставка | Позначення приставки | Десятковий множник |
| Тера | Т | 10**12** | Санті | с | 10**-2** |
| Гіга | Г | 10**9** | Міллі | м | 10**-3** |
| Мега | М | 10**6** | Мікро | мк | 10**-6** |
| Кіло | к | 10**3** | Нано | н | 10**-9** |
| Гекто | г | 10**2** | Піко | п | 10**-12** |
| Дека | да | 10**1** | Фемто | ф | 10**-15** |
| Деці | д | 10**-1** | Атто | а | 10**-18** |

## **П4. Одиниці тиску**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Фунт-сила на**  **квадратний дюйм**  **(psi)** | 1.4504·10**-4** | 14.504 | 14.223 | 14.696 | 0.019337 | 1.4223·10**-3** | 1 |
| **Міліметр водяного**  **стовпа**  **(мм. вод. ст., mm H2O)** | 0.101972 | 10197.2 | 10**4** | 10332.3 | 13.595 | 1 | 703.07 |
| **Міліметр ртутного**  **стовпа**  **(мм. рт. ст., mm Hg,**  **Torr, торр)** | 7.5006·10**-3** | 750.06 | 735.56 | 760 | 1 | 0.073556 | 51.715 |
| **Фізична**  **атмосфера**  **(atm, атм)** | 9.8692·10**-6** | 0.98692 | 0.96784 | 1 | 1.3158·10**-3** | 9.6784·10**-5** | 0.068046 |
| **Технічна**  **Атмосфера**  **(at, ат)** | 1.01972·10**-5** | 1.01972 | 1 | 1.03323 | 1.3595·10**-3** | 10**-4** | 0.070307 |
| **Бар**  **(bar, бар** | 10**-5** | 1 | 0.980665 | 1.01325 | 1.3332·10**-3** | 9.80665·10**-5** | 0.068948 |
| **Паскаль**  **(Pa, Па)** | 1 | 10**5** | 98066.5 | 101325 | 133.322 | 9.80665 | 6894.76 |
|  | **1 Па** | **1 бар** | **1 ат** | **1 атм** | **1 мм. рт. ст.** | **1 мм. вод. ст.** | **1 psi** |

## **П5 Діаграма переведення температур**

