МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

КАФЕДРА ПРОГРАМНИХ І КОМП’ЮТЕРНО-ІНТЕГРОВАНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Методичні вказівки з дисципліни

Динаміка складних систем

(Матеріали самостійної роботи студентів)

Для студентів інституту штучного інтелекту та робототехніки

Перший (бакалаврський) рівень вищої освіти

Спеціальність: 151 – Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології

Освітньо-професійна програма: Комп'ютерні технології автоматизації.

Одеса 2022

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

КАФЕДРА ПРОГРАМНИХ І КОМП’ЮТЕРНО-ІНТЕГРОВАНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Методичні вказівки з дисципліни

Динаміка складних систем

 (Матеріали самостійної роботи студентів)

Для студентів інституту штучного інтелекту та робототехніки

Перший (бакалаврський) рівень вищої освіти

Спеціальність: 151 – Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології

Освітньо-професійна програма: Комп'ютерні технології автоматизації.

Затверджено на засіданні

кафедри програмних і комп’ютерно-інтегрованих технологій

Протокол № 7 від 26.01.2022 р.

Одеса 2022

 Брунеткін, О.І. Методичні вказівки з дисципліни Динаміка складних систем. (Матеріали самостійної роботи студентів): для студ. напряму 151 «Автоматизацiя та комп’ютерно-iнтегрованi технологiї» денної та заочної форм навчань./Уклад. О.І Брунеткін.; НУ «Одес. Політехніка». – Одеса, 2022. – с.16.

**Оглавление**

[**До лекції 6** 5](#_Toc113805381)

[**До лекції 8** 13](#_Toc113805382)

# **До лекції 6**

**Інерційна ланка другого порядку**

Перехідний процес інерційної ланки другого порядку можна досліджувати аналітичним рішенням диференціального рівняння. Воно є неоднорідним лінійним диференціальним рівнянням другого порядку. Одним з об'єктів, що візуалізує рух, що описується таким рівнянням, є математичний маятник. На його прикладі можна розглянути послідовність створення відповідної математичної моделі (ММ).

|  |
| --- |
|  |
| Мал. 6.1. Математичний маятник |

**Математичний маятник** – осцилятор, що представляє собою механічну систему, що складається з матеріальної точки масою ***m***, що знаходиться на невагомій нерозтяжній нитці ***l*** або на невагомому стрижні в однорідному полі сил тяжіння і коливання у вертикальній площині під дією сили тяжіння ***mg*** (рис. 6). ***g*** – прискорення вільного падіння. Слід розрізняти математичний та фізичний маятники.

**Фізичний маятник** – це абсолютно тверде тіло, що здійснює коливання під дією сили тяжіння навколо нерухомої горизонтальної осі, що не проходить через центр мас C (рис. 6.2). *Усі існуючі маятники є фізичними.*

|  |
| --- |
|  |
| Мал. 6.2. Фізичний маятник |

Рух фізичного маятника за певних умов може бути описаний за допомогою моделі у вигляді математичного маятника. Така заміна допустима у разі, якщо виникають при цьому похибки невеликі. В останній пропозиції два моменти вимагають пояснення: йдеться про похибки у множині (які?); похибки мають бути невеликими (це скільки?). В інженерній практиці вважається припустимою похибка <5%. Все, що менше вважається невеликою похибкою. Фізичний маятник можна замінити математичним з невагомою ниткою, якщо маса нитки підвісу фізичного маятника на один-два порядку (в 10-100 разів) менша за масу підвішеного вантажу. Підвішений вантаж можна вважати матеріальною точною, якщо його розміри на один-два порядки (в 10-100 разів) менші за довжину нитки підвісу. За виконання цих умов можна припустити, що заміна фізичного маятника математичним внесе незначні похибки у результати розрахунків. Далі розглянемо можливі похибки. В даному випадку можна виділити дві групи. Одна пов'язана з параметрами процесу: швидкість, прискорення руху вантажу на підвісі, період коливань. Навіть якщо похибка визначення цих величин знаходиться у допустимих з інженерної точки зору межах, може виявитися другий вид похибки. Нехай слід відстежувати положення (координату) вантажу у часі у процесі коливань. Навіть за мінімальних похибок першої групи з часом накопичуватиметься похибка визначення координати вантажу. У певний час похибка перевищить допустимі межі. У цьому випадку момент часу перевищення допустимої межі є межею застосування моделі у вигляді математичного маятника.

Заміна об'єкта у вигляді фізичного маятника простішою моделлю математичного маятника є одним із прикладів побудови ММ досліджуваного процесу.

Побудуємо модель **математичного маятника** (рис.6.1). Розглянемо сили, які діють матеріальну точку масою ***m*** (підвішений вантаж) у процесі руху маятника. Для визначення розглянемо положення маятника при відхиленні його на максимальний кут (положення ①). На тіло діє сила тяжкості ***mg***. Вона може бути розкладена на дві взаємно перпендикулярні складові: ***mg*** ***cos***(**γ**) – відцентрова сила, спрямована вздовж нитки підвісу та врівноважувана силою натягу ***T*** нитки; ***mg*** ***sin***(**γ**) – тангенціальна складова, завжди спрямована по дотичній до траєкторії руху матеріальної точки (по дотичній до кола, перпендикулярно до нитки підвісу). На цьому етапі ММ будується без урахування сил опору руху маятника. Тому тангенціальна складова є єдиною неврівноваженою силою, що приводить у рух маятник. Незалежно від положення маятника, вона завжди спрямована до положення його рівноваги (0A). З другого закону Ньютона випливає:

  (6.1)

де *a* – прискорення, із яким рухається матеріальна точка під впливом *F*Σ всіх неврівноважених сил. З урахуванням єдиної такої сили (6.1) запишемо у вигляді:

  (6.2)

Знак (–) у правій частині відзначає дію тангенціальної сили у протилежному напрямку до усунення маятника щодо положення рівноваги.

Очевидним є взаємозв'язок змін ***a*** і γ. В одному рівнянні цей взаємозв'язок повинен бути відображений через єдину змінну. Зі шкільного курсу геометрії відомо:

  (6.3)

Тут кут **γ** вимірюється в радіанах, *x* – довжина дуги, що відповідає куту.

*Якщо ви забули формулу (6.3) або навіть не знали (часто буває в інженерній практиці), її легко згадати або отримати. Для інженера цілком звична формула для обчислення довжини кола за її радіусом:*

  (6.4)

*Це можна як обхід радіусом повного кута 2π (рис. 6.3,в)*

|  |
| --- |
|  |
| *Мал. 6.3. Види кутів* |

*Залежно від того, яку частину від повного кута обходить радіус, таку частину від повного кола і описує. Якщо (6.4) замість* ***R*** *підставити* ***l****, а замість 2π підставити* ***γ****, отримаємо вираз (6.3).*

При підстановці (6.3) (6.2) отримаємо:

  (6.5)

З курсу математики та фізики відомо, що прискорення є другою похідною за часом від координати. У цьому випадку (6.5) можна записати у вигляді:

  (6.6)

У даному випадку маса ***m*** може бути скорочена. В результаті одержано нелінійне диференціальне рівняння другого порядку, що описує рух математичного маятника без урахування дії будь-яких сил опору. Воно можна вирішити з допомогою спеціальних функцій. Але в інженерній практиці такий підхід застосовується нечасто. Завжди краще отримати рішення елементарних функціях. І тут застосовуються методи спрощення вихідного рівняння. В даному випадку це лінеаризація (курс лекцій. лекція 10) нелінійних елементів.

Нелінійним елементом є другий доданок (6.6), точніше вираз *sin*(*x*/*l*). Розкладемо його в ряд Тейлора навколо деякої точки *x*0:

  (6.7)

Залишимо члени зі ступенем аргументу не вище першого. У цьому випадку це перші два доданки. Вони визначають рівняння лінеаризації. Вигляд цих доданків:

  (6.8)

З урахуванням (6.8) рівняння лінеаризації набуде вигляду:

  (6.9)

Як точка, навколо якої виконується лінеаризація, виберемо положення рівноваги маятника. Саме довкола неї відбуваються його коливання. Цій точці відповідає *x*0 = 0. Підставимо це значення (6.9):

  (6.10)

Т.к. лінеаризація виконана навколо точки, що відповідає положенню рівноваги маятника, його кут відхилення від положення рівноваги мал. (6.10) виразом у дужках (*x*/*l*) позначений кут відхилення. Таким чином, (6.10) відображена відома властивість: синус малого кута приблизно дорівнює цьому куту, за умови, що кут вимірюється в **радіанах**.

*Як правило, інженер пам'ятає цю властивість синуса навіть якщо не пам'ятає спосіб його отримання. Але у разі є спосіб підтвердження на візуальному рівні, спираючись на шкільні знання. Розглянемо одиничний (його радіус дорівнює 1) коло (рис.6.4). Проведемо радіус* ***0a****=1. З точки a опустимо перпендикуляри ac на горизонтальну*

*вісь (вісь абсцис) та* ***ab*** *на вертикальну вісь (вісь ординат). Для прямокутного трикутника* ***0ac****:*

  (6.11)

*З іншого боку, величину дуги ad можна визначити із співвідношення (6.3):*

  (6.12)

*З (6.11) та (6.12) для малого кута випливає (рис.6.4):*

  (6.13)

*краще виконується співвідношення (6.13). На (рис. 6.4) можна побачити ще одну особливість. Довжина дуги* ***◡ad*** *більша від відрізка* ***ac****. Довжина дуги в одиничному колі дорівнює відповідному куту* ***γ****. А відрізок ac в одиничному колі дорівнює sin(γ) Отже, при γ≈sin(γ) завжди виконується умова γ>sin(γ). Розмір кута γ виявляється у радіанах.*

|  |  |
| --- | --- |
|  | *Таблиця 6.1.*  *Порівняння величин кута та синуса цього кута* |
|  |
| Мал. 6.4. Одиничне коло |

*У виразах (6.10) та (6.13) відображається якісна картина. При наближеності інженерних розрахунків у яких завжди повинна визначатися (чи хоча б оцінюватися) кількісна величина похибки, обумовлена цими наближеннями. Тут може допомогти часто використовуваний в інженерній практиці прямолінійний розрахунок величин γ, sin(γ) та їх порівняння. (табл.6.1) наведено результати такого розрахунку та їх порівняння. У першому стовпці наведено значення деяких кутів (у радіанах). У другому стовпці значення синусів цих кутів. Навіть візуальне порівняння показує їхнє близьке значення до ~ 0.5 радіан. У третьому стовпці наведено похибки значень між першим та другим стовпцями щодо значення синуса відповідного кута (у відсотках). З наведених значень слід, що значення кута (у радіанах) і значення синуса цього кута мало помітні з погляду інженерної похибки (<5%) до 0.5 радіан. Це відповідає ~30о градусною мірою (четвертий стовпець). Слід зазначити, що дані в третьому та четвертому стовпцях наведені лише з однією цифрою після коми. Це також один із принципів інженерних розрахунків. У цих шпальтах наведено дані для наближеної оцінки. У цьому випадку немає необхідності вести розрахунки та наводити їх результати з більшою точністю.*

З урахуванням (6.10) диференціальне рівняння руху ідеального математичного маятника (6.6) може бути записане у вигляді:

  (6.14)

До цього моменту розглядалося рух математичного маятника без урахування сил опору його руху (тому він називається ідеальним). Опір довкілля пропорційно швидкості руху тіла. Зі зростанням швидкості зростає і опір:

  (6.15)

де *c* – коефіцієнт пропорційності, що залежить від властивостей навколишнього середовища, форми тіла, що рухається і т.д. Визначення величини коефіцієнта потребує окремого дослідження.

Залежно від величини швидкості ***V*** показник ступеня ***n*** може набувати різних значень. Так за малих швидкостях *n*=1. Зі збільшенням швидкості збільшується значення ***n***. Він може бути рівним і 2 і 3 приймати дробові значення. За відмінності ***n*** від одиниці вираз (6.15) стає нелінійним. Воно вимагатиме спеціальних перетворень щодо його лінеаризації. У силу малих швидкостей руху вантажу маятника вважатимемо ***n***=1. У цьому випадку вираз (6.2) матиме вигляд:

  (6.16)

У цьому виразі зазначено, що крім сили, що відновлює (другий член у правій частині виразу) на характер руху буде впливати і сили опору руху (перший член у правій частині виразу). Мінус перед першим членом у правій частині (6.16) наголошує на тому факті, що сили опору завжди спрямовані в протилежний бік від напрямку руху маятника. Зазначимо, що як і прискорення може бути виражене як функція від координати (друга похідна за часом), і швидкість може бути виражена у вигляді подібної функції (перша похідна за часом). З урахуванням цього, а також з урахуванням (6.6) та (6.10) вираз (6.16) може бути записаний у вигляді:

  (6.17)

У цьому вся виразі кількість коефіцієнтів може бути зменшено, що спростить подання рішення. Для цього розділимо всі члени рівняння на коефіцієнт перед одним із доданків, наприклад, на ***m***. В результаті отримаємо:

  (6.18)

Позначивши:

  (6.19)

рівняння (3.60) запишемо у вигляді:

  или  (6.20)

*У такому вигляді в курсі вищої математики студенти ознайомлювалися з вирішенням лінійного однорідного звичайного диференціального рівняння другого порядку. Згадаймо деякі етапи його вирішення (за більш детальною інформацією можна звернутися до відповідного розділу будь-якого підручника з вищої математики).*

*Щоб знайти загальний інтеграл цього рівняння, достатньо знайти два лінійно незалежні приватні рішення. Шукатимемо приватні рішення у вигляді:*

 * (6.21)*

*Тоді*

 * (6.22)*

*Підставляючи отримані вирази похідних рівняння (6.20), знаходимо:*

 * (6.23)*

*Тому що то , значить,*

 * (6.24)*

*Якщо k задовольнятиме рівняння (6.24), то  буде рішенням рівняння (6.20). Рівняння (6.24) називається характеристичним рівнянням по відношенню до рівняння (6.20).*

*Характеристичне рівняння є квадратним рівнянням, що має два корені: позначимо їх через k1 і k2. При цьому*

 * (6.25)*

*Можливі такі випадки:*

1. *підкорене вираз ; коріння характеристичного рівняння k1 та k2 – комплексні числа;*
2. *підкорене вираз ; коріння характеристичного рівняння k1 і k2 – дійсні числа, рівні між собою (k1=k2);*
3. *підкорене вираз ; коріння характеристичного рівняння k1 і k2 – дійсні числа і навіть рівні між собою ().*

*Розглянемо кожен випадок окремо.*

1. *К о р і н н я х а р а к т е р и с т и ч н о г о р і в н я н н я к о м п л е к с н е. Оскільки комплексне коріння входить попарно сполученим, то позначимо:*

 * (6.26)*

*де*

 * (6.27)*

*Слід звернути увагу, що доданки у підкореному вираженні (6.27) мають інший порядок порівняно з (6.25). Загальне рішення рівняння (6.20) у разі комплексного коріння характеристичного рівняння має вигляд*

 **

*або*

 * (6.28)*

*де  – довільні постійні. Кількість довільних постійних (у разі дві) визначається порядком вихідного диференціального рівняння (6.20).*

*Рівняння (6.28) описує рух маятника у будь-який момент часу, отже, і за t=0*

 * (6.29)*

*Для використання другої початкової умови знайдемо похідну від* ***y*** *(6.28) як від двох функцій:*

 * (6.30)*

*та:*

 * (6.31)*

*і зрештою:*

 * (6.32)*

*Порядок дій, відображений у (6.29 – 6.32) є загальним щодо постійних інтегрування* ***С*** *допомогою початкових умов. В результаті отримана система двох рівнянь алгебри (6.29 і 6.32) для визначення двох невідомих величин: C1 і C2. У цьому випадку з деяких особливостей отриманих рівнянь немає необхідності вирішувати систему рівнянь. Вони можуть бути вирішені послідовно:*

 * (6.33)*

*Слід пам'ятати, що* ***α*** *і* ***β*** *визначаються (6.27), а* ***p*** *і* ***q*** *для них з (6.19). Таким чином отримано рішення у вигляді (6.28):*

 * (6.34)*

1. *К о р і н н я х а р а к т е р и с т и ч н о г о р і в н я н н я д і й с н е т а р і в н е. В цьому випадку *

*Одне приватне рішення  повчається виходячи з попередніх міркувань. Потрібно знайти друге приватне рішення, лінійно незалежне з першим (див. вище). У даному випадку функція  тотожно дорівнює  і тому не може розглядатися як друге приватне рішення.*

*Шукатимемо друге приватне рішення у вигляді*

 * (6.35)*

*де u(t) – невідома функція, що підлягає визначенню.*

*Диференціюючи (6.35), знаходимо:*

 * (6.36)*

*Підставляючи вирази похідних (6.36) до рівняння (6.20), отримаємо:*

 * (6.37)*

*Оскільки k1 – кратний корінь характеристичного рівняння, то:*

 * (6.38)*

*Крім того,  або *

*Отже, щоб знайти , треба розв'язати рівняння  чи  Інтегруючи, отримуємо . Зокрема, можна покласти  тоді . Таким чином, як друге приватне рішення можна взяти:*

 *. (6.39)*

*Це рішення лінійно незалежно з першим, тому що Тому загальним інтегралом будемо функція*

 * (6.40)*

*Де  – довільні постійні, які мають бути визначені на підставі початкових умов.*

1. *К о р і н н я х а р а к т е р и с т и ч н о г о р і в н я н н я д і й с н е і р і з н е: .*

*У цьому випадку приватними рішеннями будуть функції*

 * (6.41)*

*Ці рішення лінійно незалежні, оскільки*

 * (6.42)*

*Отже, загальний інтеграл має вигляд*

 * (6.43)*

*де  – довільні постійні, які мають бути визначені на підставі початкових умов.*

# **До лекції 8**

**Редукція структурних схем**

При дослідженні та проектуванні автоматичних систем управління широко використовуються структурні схеми, що дають наочне уявлення про зв'язки між ланками, про проходження та перетворення сигналів у системі.

Структурною схемою теорії автоматичного управління називають графічне зображення системи управління як сукупності динамічних ланок із зазначенням зв'язків з-поміж них. Структурна схема може бути складена на основі відомих рівнянь системи та, навпаки, рівняння системи можуть бути отримані зі структурної схеми. При цьому перше завдання може мати різні варіанти рішення (різні структурні схеми), друге завдання має єдине рішення.

|  |
| --- |
|  |
| Мал. 8.1. Ланка на структурній схемі |

Ланка на структурній схемі умовно позначають у вигляді прямокутника (рис.8.1) із зазначенням вхідних та вихідних величин, а також передавальної функції всередині нього. Алгебраїчні суматори сигналів (рис. 8.2) зображуються у вигляді кола, поділеного на сектори. До секторів підводяться стрілки, поруч із якими вказуються доданки. Сума позначається стрілкою, що виходить з одного із секторів. Негативний доданок позначається або знаком "-" у вістря стрілки, або затемненням. Якщо напрямок проходження сигналу відомий, позначення стрілки може бути відсутнім.

|  |
| --- |
|  |
| Мал. 8.2. Алгебраїчний суматор сигналів |

|  |
| --- |
|  |
| Мал. 8.3. Вузол |

У структурних схемах використовуються також вузли (точки розгалуження сигналів), що позначаються точками на лініях зв'язку (рис. 8.3). Всім стрілкам, що відходять від вузла, відповідає одна і та ж величина.

У лекції розглянуто найпростіші стандартні випадки перетворення структурних схем: при послідовному, паралельному та зустрічно-паралельному з'єднанні ланок. У випадках, коли структурна схема виявляється складною і містить багато різних перехресних зв'язків, виникає необхідність перетворення, тобто. спрощення та зведення її до найпростішого вигляду. Перетворення структурних схем лінійних систем складає основі деяких правил, які перелічені нижче.

**1. Правило перестановки суматорів та елементів порівняння (рис. 8.4)**

|  |  |
| --- | --- |
| Вихідний стан | Перестановка |
|  |  |
|  |  |
| Мал. 8.4. Перестановка суматорів |

**2. Правило перестановки суматорів та вузлів (рис. 8.5)**

|  |  |
| --- | --- |
| Вихідний стан | Перестановка |
|  |  |
|  |  |
| Мал. 8.5. Перестановка суматорів та вузлів |

**3. Перенесення суматора з входу ланки на вихід (перенесення через ланку у напрямку передачі дії (рис. 8.6)**

|  |  |
| --- | --- |
| Вихідний стан | Перестановка |
|  |  |
| **y=W1(p)\*x1(p)+W1(p)\*x2(p)=W1(p)\*[**x1(p)+ x2(p)**]** |
| Мал. 8.6. Перенесення суматора з входу ланки на вихід |

**4. Перенесення суматора з виходу ланки на його вхід (перенесення через ланку проти напрямку передачі сигналу (рис. 8.7)**

|  |  |
| --- | --- |
| Вихідний стан | Перестановка |
|  |  |
| **y=[W1(p)\***x1(p)**]**+x2(p) |
| Мал. 8.7. Перенесення суматора з виходу ланки на вхід |

**5. Перенесення вузла зі входу ланки на його вихід (перенесення у напрямку передачі впливу (рис. 8.8)**

|  |  |
| --- | --- |
| Вихідний стан | Перестановка |
|  |  |
| Мал. 8.8. Перенесення вузла зі входу ланки на його вихід |

**6. Перенесення вузла з виходу ланки на його вхід (перенесення проти напрямку передачі сигналу (рис. 8.9)**

|  |  |
| --- | --- |
| Вихідний стан | Перестановка |
|  |  |
| Мал. 8.9. Перенесення вузла з виходу ланки на його вхід |

**7. Перехід до одиничного зворотного зв'язку (рис. 8.10)**

|  |  |
| --- | --- |
| Вихідний стан | Перестановка |
|  |  |
| Мал. 8.10. Перехід до одиничного зворотного зв'язку |

**8. Заміна ланок прямого та зворотного ланцюгів (рис. 8.11)**

|  |  |
| --- | --- |
| Вихідний стан | Перестановка |
|  |  |
| Мал. 8.11. Заміна ланок прямого та зворотного ланцюгів |