

Міністерство освіти і науки України
Національний університет “Одеська політехніка”

В.П. Лесніков

Моделювання та прогнозування стану довкілля

Навчальний посібник
для студентів спеціальності
101 Екологія

Рекомендовано Вченою Радою
Національного університету “Одеська політехніка”
протокол № 3 від 26.10.2021

Одеса 2021

Моделювання та прогнозування стану довкілля: Навчальний посібник / Укл.: В.П. Лесніков, Одеса: Національний університет «Одеська політехніка», 2021. – 97 с.

Укладач: Лесніков В.П., доцент

ЗМІСТ

	Стор.
ВСТУП. ПРЕДМЕТ МОДЕЛЮВАННЯ	6
ГЛАВА 1.....	8
ЗАГАЛЬНІ ПРИНЦИПИ ПОБУДОВИ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ	8
1.1 Закони збереження.....	8
1.2 Варіаційні принципи	8
1.3 Динамічні моделі, що описують еволюцію системи.....	11
1.3.1 Закон Мальтуса і логістичне рівняння.....	11
1.3.2 Модель «хижак – жертва» (Лотки – Вольтерра).....	13
1.3.3. Загальна модель «хижак – жертва» (модель Колмогорова).....	15
ГЛАВА 2.....	17
ЗАБРУДНЕННЯ АТМОСФЕРИ	17
2.1 Математичне моделювання оптимального розміщення промислових підприємств	17
2.2 Основне рівняння переносу домішок в атмосфері	18
2.3 Врахування дифузії.....	19
2.4 Розповсдження домішки в нерухомій атмосфері від точкового джерела забруднень....	20
2.5 Вплив вітру на дифузію домішок.....	22
2.6 Модель гравітаційного осідання частинок.....	23
2.7 Спряжені рівняння переносу	25
2.8 Загальне завдання оптимального розміщення підприємств	28
ГЛАВА 3.....	29
ЗАБРУДНЕННЯ ВОДОЙМ.....	29
3.1 Моделі перенесу та дифузії забруднень у водоймах	29
3.2 Загальна екологічна проблема водних ресурсів	29
3.3 Тепловий баланс водних об'єктів	31
3.4 Метод кінцевих різниць	32
3.5 Водний баланс.....	35

	4
3.6 Моделювання кисневого режиму водоюм	36
3.7 Модель динаміки фосфору у водоймах	39
ГЛАВА 4.....	40
ЗАБРУДНЕННЯ ПІДЗЕМНИХ ВОД	40
4.1 Розподіл підземних вод та характеристики ґрунтів	40
4.2 Явище дисперсії.....	42
4.3 Джерела забруднення підземних вод.....	42
4.4 Рішення рівняння дисперсії для забруднень	43
4.5 Рішення рівняння дисперсії за наявності потоку.....	44
ГЛАВА 5.....	46
МОДЕЛІ ПОПУЛЯЦІЙ В ЕКОЛОГІЇ	46
5.1 Стійкість біологічних популяцій.....	46
5.2 Логістичне рівняння та квоти вилову	46
5.3 Вилов із відносною квотою	49
5.4 Фазові портрети диференціальних рівнянь	50
5.5 Біфуркації	53
5.6 Типи біфуркацій.....	54
5.7 Автоколивання в моделі Лотки – Вольтера	58
5.8 Система Лотки-Вольтера з урахуванням обмеженого елемента їжі.....	59
5.9 Формула Моно	60
5.10 Система Лотки-Вольтера з формулою Моно	62
5.11 Автоколивання в моделях популяцій з запізненням. Рівняння Хатчінсона	63
ГЛАВА 6.....	65
ХВИЛІ І СТРУКТУРИ В ЕКОЛОГІЧНИХ СИСТЕМАХ.....	65
6.1 Розподілені екологічні системи.....	65
6.2 Поширення збурень у популяції з дифузиею. Модель Колмогорова – Петровського – Піскунова.....	67
6.3 Модель УПХ (усамітнена популяційна хвиля) в популяції амброзієвого листоїду (жука)	68

	5
6.4 «Плямні структури» в біологічних спільнотах	72
6.5 Хвилі цунамі.....	74
6.6 Гравітаційні хвилі	75
6.7 Гравітаційні хвилі в шарі рідини кінцевої товщини	76
6.8 Варіаційне числення	78
6.9 Час спуску по брахістохроні.....	80
6.10 Карти часів добігання цунамі	81
6.11 Форма усамітненої хвилі (цунамі) в океані.....	82
ГЛАВА 7.....	85
ВИПАДКОВІСТЬ В ЕКОЛОГІЇ.....	85
7.1 Загальні відомості з теорії ймовірностей	85
7.2 Розподіл випадкових величин	86
7.3 Процеси народження – загибелі (генерація – рекомбінація).....	88
7.4 Основне кінетичне рівняння.....	88
7.5 Система випадкових величин	91
7.6 Метод найменших квадратів	92
7.7 Метод розмірностей.....	94
7.8 Імітаційне моделювання випадкових процесів.....	95
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	97

ВСТУП. ПРЕДМЕТ МОДЕЛЮВАННЯ

Процес моделювання полягає у тому, що на основі всебічного вивчення аналізованого об'єкта, складається система математичних рівнянь, яка адекватно описують поведінку об'єкта. Як правило, ця система залежить від деяких параметрів, які називаються керуючими. Сукупність керуючих параметрів позначається $\vec{\alpha}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Отримавши рішення системи рівнянь ми отримуємо можливість простежити за поведінкою аналізованого об'єкта в залежності від $\vec{\alpha}$.

Наприклад, для задачі про конвекцію Релея-Бенара єдиним керуючим параметром є градієнт температури $\alpha = (T_1 - T_2)/h$, h – товщина шару рідини, T_1 і T_2 температури нижньої і верхньої меж рідини.

Основні труднощі у вирішенні модельних математичних рівнянь пов'язують із тим, що вони нелінійні. Відповідні рівняння можуть бути або алгебраїчними або диференціальними. У сучасній математиці немає загальних методів розв'язання нелінійних рівнянь. Добре розроблені лише методи розв'язання лінійних алгебраїчних та диференціальних рівнянь.

У загальному разі система лінійних алгебраїчних рівнянь має вигляд:

$$AX = B \quad (1)$$

де A і B задані матриці, X - матриця невідомих величин.

Для системи еволюційних лінійних диференціальних рівнянь маємо:

$$\frac{dX}{dt} = AX \quad (2)$$

Системи (1) і (2) легко розв'язується.

Однак у навколишньому світі визначальну роль відіграє нелінійність, яка порушує принцип суперпозиції і суттєво все ускладнює.

Рівняння Максвелла для електромагнітного поля є лінійними

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \end{cases} \quad (3)$$

Завдяки цьому ми маємо сьогодні добре розвинену теорію електромагнітного поля та її численних додатків.

Гідродинаміка набагато старша за рівняння Максвелла, проте до останнього часу істотного прогресу тут не було. І все через нелінійність рівнянь гідродинаміки. Для нев'язкої та нестисливої рідини рівняння Ейлера такі:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \vec{\nabla}) \vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \\ \vec{\nabla} \vec{v} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Другий член у лівій частині першого рівняння нелінійний, тому в гідродинаміці значно менше точних результатів, ніж у теорії електромагнетизму. Досі немає теорії турбулентності. До того ж наявність границь також значно ускладнює задачу. Тільки використання комп'ютерів, що дозволяють отримувати чисельне рішення нелінійних рівнянь, дозволило досягти певного успіху в гідродинаміці останнім часом.

ГЛАВА 1

ЗАГАЛЬНІ ПРИНЦИПИ ПОБУДОВИ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

Модель може бути побудована із законів збереження, варіаційних принципів та різного роду динамічних моделей.

1.1 Закони збереження

До них відносять: закон збереження маси, імпульсу, енергії, моменту імпульсу і т.і.

У якості приклада розглянемо балістичний маятник, який дозволяє визначити швидкість кулі по куту відхилення маятника із законів збереження імпульсу та енергії

$$\begin{cases} mv = (m + M)V \\ \frac{(m + M)V^2}{2} = (m + M)gh \end{cases} \quad (1.1)$$

Оскільки висота відхилення $h = l(1 - \cos \alpha)$, то виключивши V , отримаємо

$$v = \frac{m + M}{m} \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)} \quad (1.2)$$

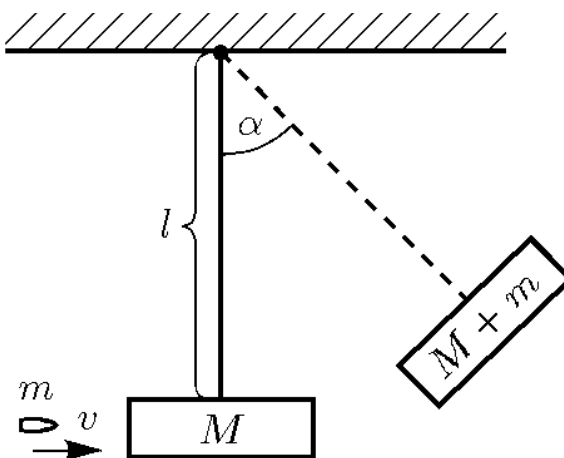


Рисунок 1 – Балістичний маятник

1.2 Варіаційні принципи

Суть будь-якого варіаційного принципу полягає у тому, що з усіх можливих варіантів поведінки системи вибирається той, який задовольняє певній умові. Зазвичай ця умова зводиться до того, що досягає екстремального значення якась пов'язана з об'єктом величина.

Розглянемо задачу про рух автівки з A в B зі сталою швидкістю, так, що автівка торкнулася деякої прямої лінії. Запитується, під яким кутом треба їхати, щоб час руху t_{AB} був мінімальним?

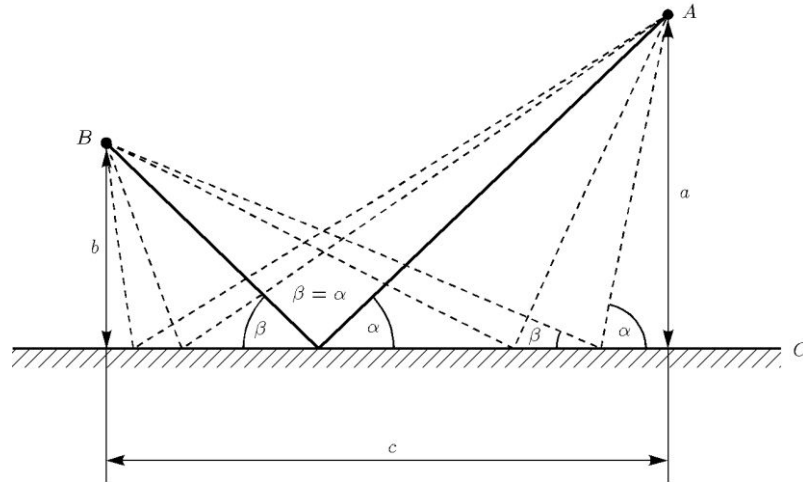


Рисунок 2 – До задачі про траєкторію руху автівки (вид зверху)

З рисунку видно, що

$$AL = \frac{a}{\sin \alpha}, \quad BL = \frac{b}{\sin \beta} \quad (1.3)$$

Тоді

$$t_{AB} = t_1 + t_2 = \frac{AL}{v} + \frac{BL}{v} \quad (1.4)$$

Будемо вважати, що $\beta = \beta(\alpha)$. Знайдемо екстремальне значення функції $t_{AB} = t_{AB}(\alpha)$:

$$t_{AB} = \frac{a}{v \sin \alpha} + \frac{b}{v \sin \beta(\alpha)} \quad (1.5)$$

Умова екстремума $\frac{\partial t_{AB}}{\partial \alpha} = 0$ має вид

$$\frac{a \cos \alpha}{v \sin^2 \alpha} + \frac{b \cos \beta}{v \sin^2 \beta} \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} = 0 \quad (1.6)$$

З іншого боку сталою є проекція відрізка AB на пряму:

$$\frac{a}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{b}{\operatorname{tg} \beta} = c \quad (1.7)$$

Диференцюючи цю умову по α , будемо мати

$$\frac{a}{\operatorname{tg}^2 \alpha \cos^2 \alpha} + \frac{b}{\operatorname{tg}^2 \beta \cos \beta} \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} = 0 \quad (1.8)$$

Виключивши звідси $\frac{d\beta}{d\alpha}$ за допомогою (1.6), остаточно отримаємо

$$\cos \alpha = \cos \beta, \quad \alpha = \beta \quad (1.9)$$

Аналогічний варіаційний принцип справедливий для поширення світла і називається принципом Ферма: світло завжди поширюється за траєкторією, яка відповідає мінімальному часу поширення.

Як ще один приклад розглянемо формулювання механіки на основі варіаційного принципу Гамільтона. Відповідно до цього принципу механіку можна сформулювати, вважаючи вихідним пунктом таке твердження. Механічна система, у проміжку часу від t_1 до t_2 , рухається таким чином, щоб дія S , яка є інтегралом за часом від функції Лагранжа L , була мінімальною:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (1.10)$$

де функція Лагранжа дорівнює різниці кінетичної і потенціальної енергій

$$L = E_k - E_p \quad (1.11)$$

Покажемо, що принцип призводить до того, що із усіх можливих траєкторій здійснюється та, яка відповідає рівнянням Ньютона, тобто варіаційне формулювання механіки Гамільтоном, еквівалентно ньютонівській механіці. Розглянемо пружний маятник масою m та жорсткістю k . Положення маятника визначимо зміщенням x . Припустимо, що зміщення маятника відрізняється від x на величину $\varepsilon\varphi$, де ε мале число, а φ - функція, для якої в початковий і кінцевий моменти часу виконуються умови $\varphi(t_1) = \varphi(t_2) = 0$.

Умова екстремальності дії

$$\frac{d}{d\varepsilon} S(x + \varepsilon\varphi) \Big|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (1.12)$$

Дія для пружнього маятника має вид:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} \right) dt \quad (1.13)$$

Звідси для варіації дії маємо

$$S(x + \varepsilon\varphi) = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m(\dot{x} + \varepsilon\dot{\varphi})^2}{2} + \frac{k(x + \varepsilon\varphi)^2}{2} \right] dt \quad (1.14)$$

$$\frac{dS}{d\varepsilon} = \int_{t_1}^{t_2} [m(\dot{x} + \varepsilon\dot{\varphi})\dot{\varphi} - k(x + \varepsilon\varphi)\varphi] dt \quad (1.15)$$

Покладаючи $\varepsilon = 0$, знайдемо

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} (m\dot{x}\dot{\varphi} - kx\varphi)dt = \int_{t_1}^{t_2} (-m\ddot{x}\varphi - kx\varphi)dt = \int_{t_1}^{t_2} (-m\ddot{x} - kx)\varphi dt \quad (1.16)$$

де у другому рівнянні проведено інтегрування по частинам.

Для того щоб інтеграл обертався у нуль при будь-яких значеннях φ , необхідно обертання на нуль виразу в скобках, тобто

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (1.17)$$

Таким чином, варіаційний принцип Гамільтона дає рівняння Ньютона. І обидва формулювання механіки – еквівалентні.

1.3 Динамічні моделі, що описують еволюцію системи

Приклади таких моделей будуть розглянуті стосовно екології.

1.3.1 Закон Мальтуса і логістичне рівняння

Не один живий організм не існує окремо від інших. Організми утворюють групу, що називається популяцією.

Всередині популяції мають місце дуже складні відносини, однак по відношенню до інших популяцій та довкілля, вона виступає у вигляді целостної системи. Популяція - самий низький рівень, розглядаємий в екології. Основною характеристикою популяції є її розмір - загальна численість або густина (численість на одиницю простору). Динаміка змінення розміру визначається двома процесами – народженням та загибелю.

Еволюційне рівняння, що визначає динаміку популяції, має вид:

$$\frac{dN}{dt} = \varepsilon N \quad (1.18)$$

Тут $\varepsilon = B - D$, B - швидкість народження, D - швидкість смерті популяційних особин. Інтегрування (1.18) з урахуванням початкових умов дає:

$$N = N_0 e^{\varepsilon t} \quad (1.19)$$

Формула (1.19) виражає закон Мальтуса, згідно якому розмір популяції нескінченно зростає при умові $\varepsilon \geq 0$.

Закон Мальтуса, однак, не виконується у стабільних екосистемах, так як завжди виявляється достовірна негативна кореляція між ε і N . Єдина популяція, для якої має місце

додатня кореляція - популяція людини. В стабільних екосистемах, таким чином, $\varepsilon = \alpha - \gamma N$ і рівняння еволюції приймає вид:

$$\frac{dN}{dt} = (\alpha - \gamma N)N \quad (1.20)$$

Записане рівняння є нелінійним і називається логістичним або рівнянням Ферхюльста. Те, що в цьому рівнянні коефіцієнт приросту ε зменшується із зростанням N , забезпечує стаціонарний розмір популяції.

Логістичне рівняння є рівнянням з розділюючимися змінними і легко може бути розв'язано

$$\frac{dN}{(\alpha - \gamma N)N} = dt, \quad \left[\frac{\gamma}{\alpha(\alpha - \gamma N)} + \frac{1}{\alpha N} \right] dN = dt, \quad \ln \frac{N}{\alpha - \gamma N} = \alpha t + C \quad (1.21)$$

Поклавши, $N = N_0$ в початковий момент часу, знайдемо

$$N = \frac{\alpha N_0 e^{\alpha t}}{\alpha + \gamma N_0 (e^{\alpha t} - 1)} \quad (1.22)$$

Звідси видно, що коли $t \rightarrow \infty$ система еволюціонує до стаціонарного значення $N_s = \frac{\alpha}{\gamma}$.

На рис.1.3 представлені логістичні криві росту популяцій деяких організмів.

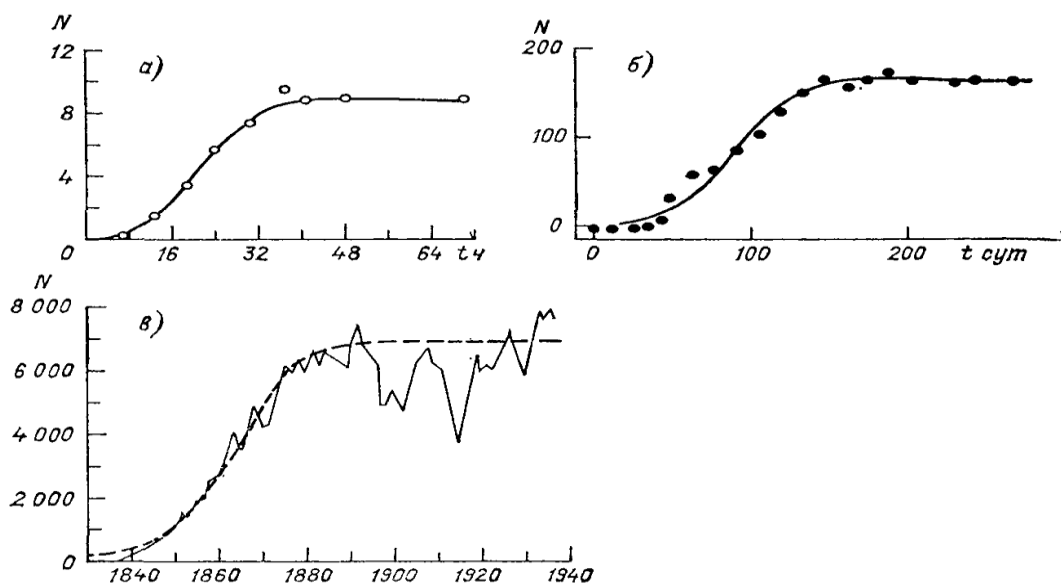


Рисунок 3 – Зростання розміра популяцій: а) дрожжів *Saccharomyces cerevisial* 1/50 мм³, б) зернового точильника *Rhizopertha dominica*, в) овець на півдні Австралії, в тис.

Можна ввести більш складні популяційні моделі, які в залежності від функції $\varepsilon = \varepsilon(N)$ можна розділити на два класи:

1. моделі, в яких коефіцієнт приросту популяції монотонно змінюється із зростанням N , як наприклад, в логістичному рівнянні.
2. для інших моделей популяції характерна відсутність монотонності: ε може із зростанням N збільшуватися, а потім обов'язково зменшуватися

$$\varepsilon = \alpha + \gamma N - \beta N^2, \quad \frac{dN}{dt} = (\alpha + \gamma N - \beta N^2)N \quad (1.23)$$

Такий вид залежності, для якого початково відбувається зростання, називається кривою Оллі. Для кривої Оллі існує вже не одно, а декілько стаціонарних станів.

Отримані вище результати узагальнюються на випадок декількох популяцій. Відповідні моделі називаються вольтерровскими. Рівняння, що описують такі моделі мають вид:

$$\frac{dN_i}{dt} = (\alpha_i - \gamma_{ij} N_j) N_i \quad (1.24)$$

Швидкість природного приросту чи смертності i -того виду залежить і від других видів. Матриця γ_{ij} відображує вплив j виду на i вид. Цю матрицю називають матрицею спільноти. Вона відображує структуру зв'язків спільноти.

1.3.2 Модель «хижак – жертва» (Лотки – Вольтерра)

Модель «хижак-жертва» описує дві популяції хижаків y (волки) і жертв x (зайці), взаємодіючі між собою.

Припустимо, що єдиним фактором, що обмежує розмноження жертв, є тиск на них з боку хижаків. Нехай також розмноження хижаків обмежується кількістю жертв. Зрозуміло, що за відсутності хижаків, чисельність жертв мала б експоненційно зростати зі швидкістю α , а чисельність хижаків без жертв, повинна була експоненційно зменшуватися зі швидкістю m .

Нехай хижак y одиницю часу з'їдає $V(x)$ жертв, и k -та частина отримана від цієї енергії йде на виробництво хижаків. $V(x)$ називається трофічною функцією хижака. В результаті система рівнянь, яка описує динаміку популяції хижаків та жертв, набуває вигляду:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - V(x)y \\ \frac{dy}{dt} = kV(x) - my \end{cases} \quad (1.25)$$

Вид трофічної функції наступний:

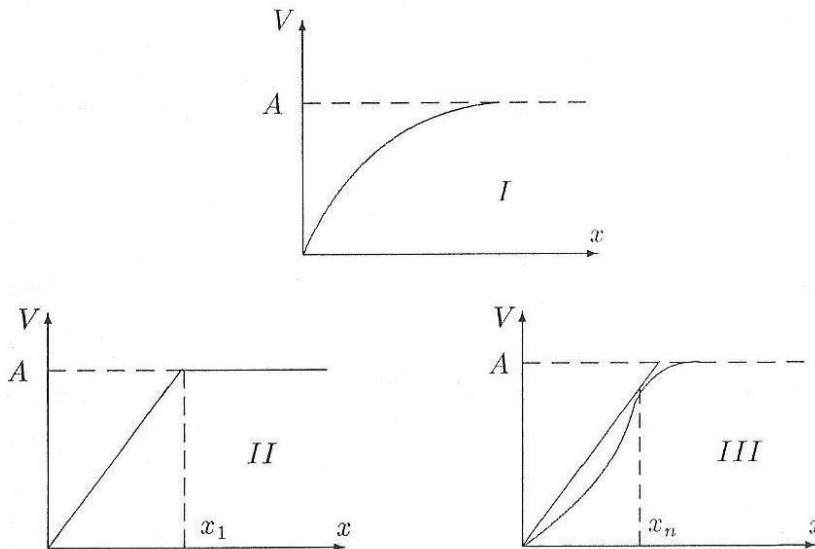


Рисунок 4 – Трофічні функції у випадках 1,2,3:

1 – притаманно для безхребетних хижаків, чи деяких видів хижих риб; 2 – хижаків – фільтратив (багатьох молюсків); 3 – для хребетних організмів, які виявляють досить складну поведінку (здатні до навчання). Аналогічний вид має трофічну функцію, якщо жертви можуть виробляти захисну стратегію.

При малих значеннях x , коли майже всі жертви зідаються трофічна функція $V(x)$ – можна вважати лінійною функцією від жертв $V(x) = \beta x$. Будемо також вважати, що інші параметри α, m, k – постійні. В результаті модель, що вивчається, нами «хижак-жертва» набуває вигляду:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy \\ \frac{dy}{dt} = k\beta xy - my \end{cases} \tag{1.26}$$

Ця система має стаціонарне рішення $x_* = \frac{m}{k\beta}$, $y_* = \frac{\alpha}{\beta}$.

Поділимо друге рівняння на перше

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(k\beta x - m)y}{(\alpha - \beta y)x} \tag{1.27}$$

Це рівняння є рівнянням зі змінними, що розділяються

$$\frac{\alpha - \beta y}{y} dy = \frac{(k\beta x - m)}{x} dx \tag{1.28}$$

Перейдемо до безрозмірних змінних: $X = \frac{x}{x_*}$, $Y = \frac{y}{y_*}$, тоді рівняння перетвориться на

$$\frac{\alpha(1-Y)}{Y} dY = \frac{X-1}{X} dX \quad (1.29)$$

Інтегруючи, знайдемо

$$\left(\frac{e^X}{X}\right)^m \left(\frac{e^Y}{Y}\right)^\alpha = C \quad (1.30)$$

Отримана залежність для різних значень C на графіку зображується замкнутими кривими, що відповідає коливанням чисельності хижаків та жертв з часом.

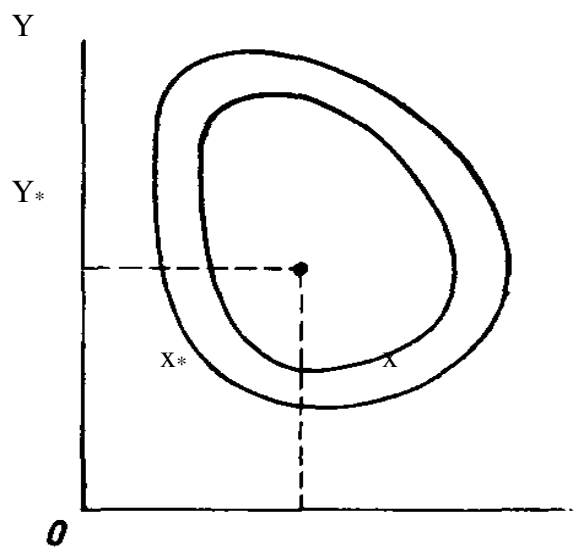


Рисунок 5 – Коливання чисельності хижаків та жертв у моделі Лотки-Вольтерра

Хоча модель Лотки-Вольтерра змогла пояснити багато явищ, вона має істотний недолік, який полягає в тому, що при будь-яких збуреннях система перескакує з однієї замкнутої траєкторії на іншу.

1.3.3. Загальна модель «хижак – жертва» (модель Колмогорова)

Відповідні рівняння мають вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha(x)x - V(x)y \\ \frac{dy}{dt} = k(x)y \end{cases} \quad (1.31)$$

У цій моделі не робиться не якихось спеціальних пропозицій щодо функцій α, V, k ; вона є стійкою щодо малих збурень, має кілька стаціонарних точок, а також дає замкнені криві, які описують динаміку популяцій x і y .

ГЛАВА 2

ЗАБРУДНЕННЯ АТМОСФЕРИ

2.1 Математичне моделювання оптимального розміщення промислових підприємств

Інтенсивний розвиток промисловості та викликане цим збільшення викиду забруднень дуже відчутно впливає на екологію багатьох регіонів. Об'єкти промисловості зазвичай споруджуються в густонаселених районах або поблизу них, з метою забезпечення підприємств робочою силою. У той же час, необхідно виконання санітарних норм щодо забруднення екологічно значущих зон. У зв'язку з цим виникає завдання оптимального розміщення підприємств з тим, щоб поєднати обидві ці суперечливі вимоги. Необхідно досліджувати та оцінити забруднення атмосфери та підстилаючої поверхні та дати рекомендації щодо розміщення підприємства так, щоб звести до мінімуму дію шкідливих домішок, пов'язаних з виробництвом.

Розрізняють пасивні та активні домішки. Пасивна домішка, називається, якщо аж до випадання на поверхню Землі, вона не зазнає змін. Якщо домішка в процесі поширення в атмосфері вступає в хімічні реакції з водяною паром або іншими компонентами атмосфери, то вона називається активною. В результаті активна домішка переходить з одного хімічного стану в інший. Поширення домішок пов'язаних з роботою підприємства в атмосфері відбувається двома шляхами: 1) адвективним перенесенням повітряними масами; 2) дифузійною, яка обумовлюється здебільш турбулентними пульсаціями повітря. Якщо домішки, що викидаються в повітря, складаються з великих частинок, то вони поширюються в атмосфері і осідають на землю під дією сили тяжіння. На відміну від важких домішок, легкі поширюються та осідають у результаті дифузійного процесу. Для довкілля найнебезпечнішими є оксиди газоподібного виду, які є легкими.

Багаторічні спостереження за переміщенням повітряних мас у даному районі дозволяє скласти спеціальну діаграму, звану трояндою вітрів. Вона являє собою сукупність векторів, що вказують на напрямок руху повітряних мас. Максимальність вектора на троянді вітрів відповідають вітру, що панує в даному районі. Крім троянди вітрів при плануванні нового підприємства, слід враховувати вже наявні забруднення діючих підприємств.

2.2 Основне рівняння переносу домішок в атмосфері

Таким рівнянням є рівняння нерозривності та його модифікації, що враховують явища дифузії, і навіть наявність джерел забруднення. Рівняння нерозривності виражає закон збереження маси. Виведемо рівняння нерозривності.

Нехай величина φ є концентрація домішки

$$\varphi = \frac{m}{V} \quad (2.1)$$

де m – маса домішки в об'ємі V .

Нехай об'єм V обмежений замкненою поверхнею S .

Змінення маси домішки в цьому об'ємі

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \varphi dV \quad (2.2)$$

Змінення маси домішки всередині поверхні відбувається за рахунок виходу частинок домішки з цієї поверхні. З елементарної площадки $d\vec{S} = \vec{n}dS$ поверхні в одиницю часу витікає маса домішки

$$dm = \varphi \vec{u} d\vec{S} \quad (2.3)$$

Повна маса домішки, яка витікає з розглядаємої поверхні в одиницю часу буде визначатися інтегралом по всій поверхні. Витікання призводить до того, що маса з часом зменшується, тому в рівнянні балансу слід поставити знак мінус

$$\frac{\partial m}{\partial t} = - \oiint_S \varphi \vec{u} d\vec{S} \quad (2.4)$$

В результаті отримуємо наступне рівняння, що виражає закон збереження маси домішки

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \varphi dV = - \oiint_S \varphi \vec{u} d\vec{S} \quad (2.5)$$

Використовуємо теорему Остроградського - Гауса, що дозволяє перейти від поверхневого інтеграла до об'ємного

$$\oiint_S \varphi \vec{u} d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \varphi \vec{u} dV \quad (2.6)$$

В результаті отримаємо

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \varphi \vec{u} \right) dV = 0 \quad (2.7)$$

Об'єм в нас довільний, тому інтеграл можна опустити і в результаті получимо наступне рівняння нерозривності, що виражає закон збереження маси

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \varphi \vec{u} = 0 \quad (2.8)$$

Його також можна записати у виді

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0 \quad (2.9)$$

де величина

$$\vec{j} = \varphi \vec{u} \quad (2.10)$$

є щільністю конвективного потоку домішки φ .

Якщо в процесі розповсюдження домішки її частина втрачається, наприклад, через реакцію з навколишнім середовищем, то рівняння нерозривності слід доповнити членом $\sigma\varphi$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} + \sigma\varphi = 0 \quad (2.11)$$

За відсутності швидкості рівняння

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sigma\varphi = 0 \quad (2.12)$$

має загасаюче рішення $\varphi = \varphi_0 e^{-\sigma t}$, таким чином, σ – визначає швидкість зменшення домішки з часом. Крім того, у рівнянні нерозривності слід врахувати джерело домішки, яке у загальному випадку є функцією від координат та часу. Це рівняння і є основним рівнянням перенесення домішок в атмосфері

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} + \sigma\varphi = f, \quad f = f(x, y, z, t) \quad (2.13)$$

Рівняння з постійно діючим джерелом без швидкості

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sigma\varphi = f \quad (2.14)$$

має рішення

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\sigma t} + \frac{f}{\sigma} (1 - e^{-\sigma t}) \quad (2.15)$$

Як бачимо, рішення визначається двома доданками, перший з яких відповідає рішенню однорідного рівняння без джерела. Видно, що це рішення згасає з часом, внаслідок поглинання частинок домішки довкіллям. Другий член у рішенні обумовлений наявністю джерела. Видно, що при $t \rightarrow \infty$, цей член прямує до стаціонарного значення $\varphi_* = \frac{f}{\sigma}$.

2.3 Врахування дифузії

Явище дифузії полягає у тому, що за наявності нерівномірного розподілу речовин відбувається його поступове розсмоктування до стану, у якому цей розподіл речовин стає рівномірним.

В основі явища дифузії лежить закон Фіка, згідно з яким щільність потоку домішки прямо пропорційна взятому із зворотним знаком градієнту домішки

$$\vec{j}_D = -D \text{grad} \varphi \quad (2.16)$$

Коефіцієнт D називається коефіцієнтом дифузії.

В результаті, повна щільність потоку складається з конвективної та дифузійної складових

$$\vec{j} = \varphi \vec{u} + \vec{j}_D \quad (2.17)$$

Підставивши це у вираз (2.17), отримаємо основне рівняння переносу домішки з урахуванням дифузії

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div} \varphi \vec{u} + \sigma \varphi = D \Delta \varphi + f \quad (2.18)$$

де Δ – оператор Лапласа.

У випадку коефіцієнт дифузії може бути залежним від просторових координат. Крім того, коефіцієнт дифузії може різнитися у вертикальному та горизонтальному напрямку. У цьому загальному випадку величина $D \Delta$ змінюється на

$$D \Delta = \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.19)$$

де μ – коефіцієнт, що характеризує горизонтальну дифузію; ν – вертикальну дифузію.

Слід мати на увазі, що повітря в атмосфері постійно пульсує через явище турбулентності, тому якщо йдеться про поширення домішки в турбулентній атмосфері, то коефіцієнт дифузії виявляється набагато більше, ніж у тому випадку якщо будь-які пульсації відсутні.

2.4 Розповсюдження домішки в нерухомій атмосфері від точкового джерела забруднень

Розглянемо тепер процес поширення домішки в нерухомій атмосфері за наявності постійного джерела домішки, що знаходиться в точці x_0 і має інтенсивність Q .

Вважатимемо процес стаціонарним і що відбувається вздовж однієї координати x .

Основне рівняння поширення домішки набуває вигляду

$$\sigma \varphi = \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + Q \delta(x - x_0) \quad (2.20)$$

де $\delta(x)$ - дельта-функція Дірака, що має властивості

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \delta(x - x_0) dx = g(x_0) \quad (2.21)$$

де $g(x)$ - довільна функція.

Поозначимо φ^- концентрацію домішок в області $-\infty \leq x \leq x_0$, і φ^+ - в області $x_0 \leq x \leq \infty$. В цих областях джерела зазбруднень немає, тому φ^- і φ^+ знаходяться з рішень рівнянь

$$\mu \frac{d^2 \varphi^-}{dx^2} - \sigma \varphi^- = 0, \quad \mu \frac{d^2 \varphi^+}{dx^2} - \sigma \varphi^+ = 0 \quad (2.22)$$

Враховуючи, що повинні виконуватися очевидні умови $\varphi^- \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$ і $\varphi^+ \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, рішення рівнянь запишемо у виді

$$\varphi^- = c^- \exp\left(\sqrt{\frac{\sigma}{\mu}} x\right), \quad \varphi^+ = c^+ \exp\left(-\sqrt{\frac{\sigma}{\mu}} x\right) \quad (2.23)$$

Обговоримо тепер, які умови повинні виконуватися в точці x_0 . На границі буде

$$\varphi^-(x_0) = \varphi^+(x_0) \quad (2.24)$$

Друга гранична умова виникає наступним чином: проінтегруємо вихідне рівняння в невеличкій околиці точки x_0 :

$$\sigma \int_{x_0-\varepsilon/2}^{x_0+\varepsilon/2} \varphi dx = \mu \int_{x_0-\varepsilon/2}^{x_0+\varepsilon/2} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} dx + Q \quad (2.25)$$

Звідси з урахуванням (2.24), знайдемо

$$\mu \frac{d\varphi^+}{dx} \Big|_{x_0} - \mu \frac{d\varphi^-}{dx} \Big|_{x_0} + Q = 0 \quad (2.26)$$

В результаті маємо систему рівнянь для визначення c^- і c^+

$$\begin{cases} c^- \exp\left(\sqrt{\frac{\sigma}{\mu}} x_0\right) = c^+ \exp\left(-\sqrt{\frac{\sigma}{\mu}} x_0\right) \\ \mu c^+ \left(-\sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}\right) \exp\left(-\sqrt{\frac{\sigma}{\mu}} x_0\right) - \mu c^- \left(\sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}\right) \exp\left(\sqrt{\frac{\sigma}{\mu}} x_0\right) + Q = 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

З (2.27)

$$c^+ = \frac{Q}{2\sqrt{\sigma\mu}} \exp\left(\sqrt{\frac{\sigma}{\mu}} x_0\right), \quad c^- = \frac{Q}{2\sqrt{\sigma\mu}} \exp\left(-\sqrt{\frac{\sigma}{\mu}} x_0\right) \quad (2.28)$$

Остаточно, розподіл домішок має вид

$$\varphi^- = \frac{Q}{2\sqrt{\sigma\mu}} \exp\left(\sqrt{\frac{\sigma}{\mu}} (x - x_0)\right), \quad \varphi^+ = \frac{Q}{2\sqrt{\sigma\mu}} \exp\left(-\sqrt{\frac{\sigma}{\mu}} (x - x_0)\right) \quad (2.29)$$

По заданій санітарній нормі φ_0 тоді легко знайти області, де $\varphi \leq \varphi_0$ і нема небезпеки забруднення.

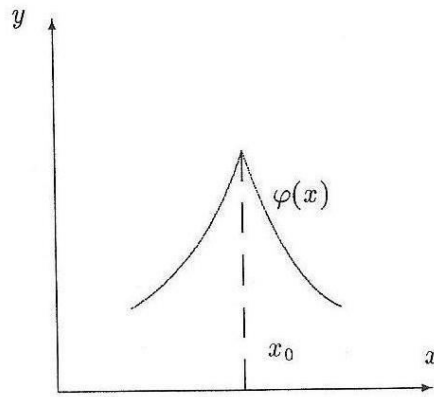


Рисунок 6 – Розподіл домішок від стаціонарного джерела

2.5 Вплив вітру на дифузію домішок

Нехай є стаціонарний вітер, швидкість якого вздовж вісі x дорівнює u . Рівняння дифузії домішок у цьому разі приймає вид:

$$u \frac{d\varphi}{dx} + \sigma\varphi = \mu \frac{d^2\varphi}{dx^2} + Q\delta(x - x_0) \quad (2.30)$$

Граничні умови для записаного рівняння мають такий самий вид, як і в попередній задачі

$$\varphi^-(x_0) = \varphi^+(x_0) \quad (2.31)$$

$$\mu \frac{d\varphi^+}{dx} \Big|_{x_0} - \mu \frac{d\varphi^-}{dx} \Big|_{x_0} + Q = 0 \quad (2.32)$$

До цих умов слід додати відсутність забруднюючих речовин вдалині від джерела

$$\varphi^-(-\infty) = \varphi^+(\infty) = 0 \quad (2.33)$$

Таким чином, треба розв'язати рівняння:

$$\begin{aligned} \mu \frac{d^2\varphi^+}{dx^2} - u \frac{d\varphi^+}{dx} - \sigma\varphi^+ &= 0, & x_0 \leq x < \infty \\ \mu \frac{d^2\varphi^-}{dx^2} - u \frac{d\varphi^-}{dx} - \sigma\varphi^- &= 0, & -\infty \leq x < x_0 \end{aligned} \quad (2.34)$$

Характеристичне рівняння для обох рівнянь однакове

$$\mu k^2 - uk - \sigma = 0 \quad (2.35)$$

Звідси

$$k_{1,2} = \frac{u}{2\mu} \pm \sqrt{\frac{u^2}{4\mu^2} + \frac{\sigma}{\mu}} \quad (2.36)$$

Зразу видно, що $k_1 \geq 0$, а $k_2 \leq 0$. В результаті рішення для концентрації домішок, яке задовольняє обертанню на нуль при $x \rightarrow \pm\infty$ має вид:

$$\varphi^+ = c^+ e^{k_2 x}, \quad \varphi^- = c^- e^{k_1 x} \quad (2.37)$$

Для знаходження c^+ и c^- підставимо отриманий вираз для φ^+ и φ^- в перші дві граничні умови. Виникає система рівнянь для c^+ и c^- . Розв'язавши її, остаточно для φ^+ и φ^- отримаємо

$$\varphi^+ = \frac{Q}{\sqrt{4\sigma\mu + u^2}} \exp\left[-\left(\sqrt{\frac{\sigma}{\mu} + \frac{u^2}{4\mu}} - \frac{u}{2\mu}\right)(x - x_0)\right], \quad \varphi^- = \frac{Q}{\sqrt{4\sigma\mu + u^2}} \exp\left(\sqrt{\frac{\sigma}{\mu} + \frac{u^2}{4\mu}} - \frac{u}{2\mu}\right)(x - x_0) \quad (2.38)$$

З цих виразів видно, що згасання концентрації домішок відбувається за експоненційним законом. Однак, показники згасання в області $x \geq x_0$ менше, ніж показник експоненти в області $x \leq x_0$, тобто, виходить очевидний результат, що вітер сприяє поширенню домішок.

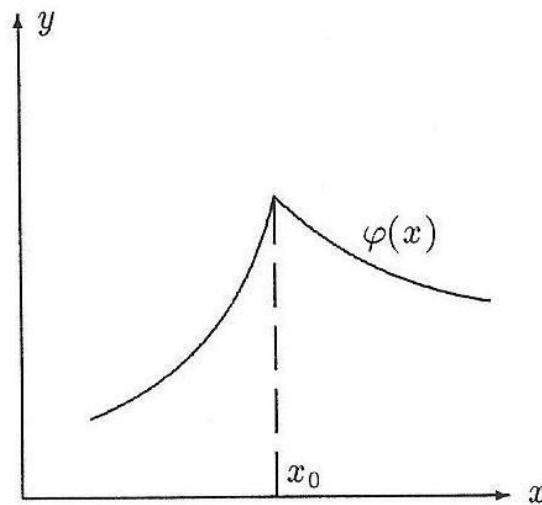


Рисунок 7 – Розподіл домішки від стаціонарного джерела за наявності вітру.

2.6 Модель гравітаційного осідання частинок

До цього часу розглядалося стаціонарне рівняння переносу домішки. Якщо в задачі необхідно обчислити кількість домішки, що випала за якийсь проміжок часу, то доводиться вирішувати рівняння перенесення, що містить похідну за часом. До такого класу задач відноситься задачі про випадання важких аерозолів на якусь поверхню. Тяжка аерозоль (домішка) опускається на землю з якоюсь сталою швидкістю w_g , що спрямована до

поверхні землі. Значення цієї швидкості можна визначити, використовуючи рішення задачі Стокса, про рух кульки у в'язкій рідині. Рівняння переносу для руху домішки набуває вигляду:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} u \varphi + \frac{\partial}{\partial y} v \varphi + \frac{\partial}{\partial z} [(w - w_g) \varphi] + \sigma \varphi = \frac{\partial}{\partial z} v \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \varphi + f \quad (2.39)$$

Рішення відповідного рівняння повинно проводитись за певних початкових та граничних умов.

Будемо вважати, що при $t = 0$, $\varphi = \varphi_0$ в усьому об'ємі G . Крім того, вважаємо, що $\varphi = 0$ на усій границі Σ об'єму G ; $\varphi = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$ на границі Σ_H ; $\varphi = \varphi_g$ і $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \alpha \varphi_g$ на Σ_0 , де α – стала. Крім того вертикальна швидкість w повинна дорівнювати нулю на Σ_0 і Σ_H .

Проінтегруємо вихідне рівняння по z від нуля до H , тоді, вводячи позначення,

$$\bar{\varphi} = \int_0^H \varphi dz, \quad F = \int_0^H f dz \quad (2.40)$$

отримаємо

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} u \bar{\varphi} + \frac{\partial}{\partial y} v \bar{\varphi} + (w - w_g) \varphi \Big|_0^H + \sigma \bar{\varphi} = v \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_0^H + \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \bar{\varphi} + F \quad (2.41)$$

Або з урахуванням граничних умов

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} u \bar{\varphi} + \frac{\partial}{\partial y} v \bar{\varphi} + \sigma \bar{\varphi} = \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \bar{\varphi} - (w_g + v \alpha) \varphi_g + F \quad (2.42)$$

З цього рівняння видно, що за одиницю часу кількість аерозолів в атмосфері зменшується на величину $(w_g + v \alpha) \varphi_g$. Відповідна зміна викликана наявністю сталої швидкості осідання w_g , та з іншого боку вертикальної дифузії.

Зазвичай у таких задачах цікавляться кількістю аерозолів, які містяться в області деякій G_i ,

$$J_i = \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_{G_i} \varphi dG \quad (2.43)$$

або кількістю аерозолів, що випала на землю на поверхню Σ_i

$$J_i = (w_g + v \alpha) \int_0^T dt \int_{\Sigma_i} \varphi_g d\Sigma_i \quad (2.44)$$

Обидва ці функції обчислюються після вирішення рівняння (2.42).

2.7 Спряжені рівняння переносу

Розглянемо множину функцій, яке називаються гільбертовим простором. Для будь-яких двох функцій g і h входять до цього простору, визначимо їх скалярний добуток

$$(g, h) = \int_0^T dt \int_G gh dG \quad (2.45)$$

де G – об'єм.

Нехай деяка функція φ задовольняє рівнянню переносу

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + A\varphi = f \quad (2.46)$$

Позначимо

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + A \quad (2.47)$$

Тоді (2.46) приймає вид

$$L\varphi = f \quad (2.48)$$

Наряду з цим рівнянням введемо спряжене рівняння

$$L^* \varphi^* = p \quad (2.49)$$

де спряжений оператор L^* визначається умовою

$$(\varphi^*, L\varphi) = (L^*\varphi^*, \varphi) \quad (2.50)$$

Спряжений оператор легко знаходиться, користуючись інтегруванням частинами. Для рівняння

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div} \bar{u} \varphi + \sigma \varphi - \frac{\partial}{\partial z} v \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \varphi = f \quad (2.51)$$

оператор L такий

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \text{div} \bar{u} \cdot + \sigma - \frac{\partial}{\partial z} v \frac{\partial}{\partial z} - \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \quad (2.52)$$

а спряжений оператор L^* дорівнює

$$L^* = -\frac{\partial}{\partial t} - \text{div} \bar{u} \cdot + \sigma - \frac{\partial}{\partial z} v \frac{\partial}{\partial z} - \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \quad (2.53)$$

Таким чином, спряжений оператор отримується з вихідного оператора, заміною знаків в тих членах, де стоять перші похідні і збереженням знаків у членів з другими похідними.

Вихідна рівність для спряженого оператора може також бути записана у виді

$$(\varphi^*, f) = (\varphi, p) \quad (2.54)$$

Скалярні добутки (2.54) і підлягають дослідженню при рішенні задач про наявність аерозоля.

Рівняння перенесення без вітру за наявності точкового джерела забруднення має вигляд

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sigma \varphi - \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = Q \delta(x - x_0) \quad (2.55)$$

Задача одномірна, x лежить в межах $\pm \infty$. Нам треба вказати область, де може знаходитися джерело забруднення, так, щоб концентрація аерозолей $\varphi(\xi, \tau)$ в деякій точці ξ в момент часу τ , не перевищувало певної санітарної норми.

Для вирішення цього завдання представимо вираз для концентрації у вигляді деякого функціоналу, що визначається скалярним добутком

$$\varphi(\xi, \tau) = J = \int_0^{\tau} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \varphi(x, t) \delta(x - \xi) \delta(t - \tau) \quad (2.56)$$

Звідси слідує що

$$p = \delta(x - \xi) \delta(t - \tau) \quad (2.57)$$

І ми можемо написати спряжене рівняння

$$-\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} + \sigma \varphi^* - \mu \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x^2} = \delta(x - \xi) \delta(t - \tau) \quad (2.58)$$

Для вирішення рівняння, що виникло, нам знадобиться рішення рівняння дифузії. У курсі математики доводиться, що для рівняння

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (2.59)$$

з початковою умовою $\varphi(x, 0)$ має місце рішення

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\mu t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha, 0) e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4\mu t}} d\alpha \quad (2.60)$$

зване інтегралом Пуассона. У тому випадку, коли початкова умова є дельта-функцією $\varphi(x, 0) = \delta(x - \xi)$, рішення (2.60) спрощується

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\mu t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\mu t}} \quad (2.61)$$

Повернемося до нашого спряженого рівняння. Введемо нову змінну $t' = \tau - t$, тоді наше рівняння буде таким

$$\frac{\partial \varphi^*}{\partial t'} + \sigma \varphi^* - \mu \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x^2} = \delta(x - \xi) \delta(t') \quad (2.62)$$

Права частина рівняння показує, що початковою умовою для нього є функція $\delta(x-\xi)$. У лівій частині порівняно з рівнянням дифузії з'явився член $\sigma\varphi^*$. Проте він не приводить до особливих труднощів і може бути врахований множенням інтеграла Пуассона на загасаючу експоненту за часом. Все це дозволяє записати остаточне рішення спряженого рівняння

$$\varphi^*(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\mu(\tau-t)}} e^{-\sigma(\tau-t) - \frac{(x-\xi)^2}{4\mu}} \quad (2.63)$$

для $t \leq \tau$.

Представимо тепер наше рішення через φ^*

$$J = \varphi(\xi, \tau) = (\varphi^*, f) = \int_0^\tau dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \varphi^*(x,t) Q \delta(x-x_0) = Q \int_0^\tau dt \varphi^*(x_0,t) \quad (2.64)$$

Підставивши вираз для φ^* , остаточно знайдемо

$$\varphi(\xi, \tau) = J = \frac{Q}{2\sqrt{\pi\mu}} \int_0^\tau \frac{1}{\sqrt{\tau-t}} e^{-\sigma(\tau-t) - \frac{(x_0-\xi)^2}{4\mu(\tau-t)}} dt \quad (2.65)$$

Нарисуємо тепер графік залежності функціонала (2.65) або, що те ж саме функції $\varphi(\xi, \tau)$.

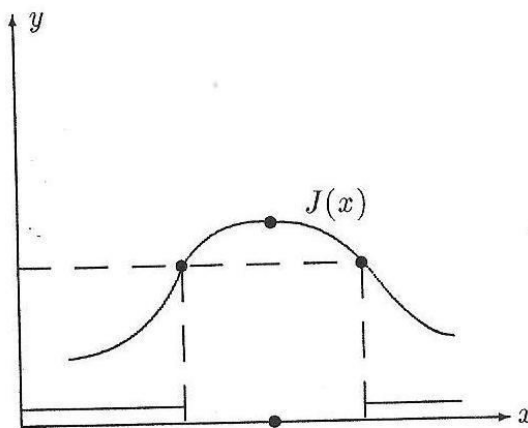


Рисунок 8 – Допустима область, яка задовольняє санітарним нормам
(подвійна лінія на осі абсцис)

Обчислення інтеграла може бути здійснено наближеним чином, розбивши часовий інтервал на k точок

$$\varphi(\xi, \tau) = \frac{Q}{2\sqrt{\pi\mu}} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{\sqrt{\tau-t_i}} e^{-\sigma(\tau-t_i) - \frac{(x_0-\xi)^2}{4\mu(\tau-t_i)}} \frac{\tau}{k} \quad (2.66)$$

2.8 Загальне завдання оптимального розміщення підприємств

У цьому випадку слід вирішувати рівняння переносу з урахуванням троянди вітрів і швидкості випадання домішок, що визначається задачею Стокса. Тоді доводиться вирішувати більш складне рівняння

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} u \varphi + \frac{\partial}{\partial y} v \varphi + \frac{\partial}{\partial z} [(w - w_g) \varphi] + \sigma \varphi = \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \varphi + f \quad (2.67)$$

до якого слід додати граничні умови.

Результатом рішення має бути знаходження функціоналів, які визначають або середню кількість домішок в об'ємі G , або кількість домішки, що випадає в одиницю часу на поверхню Σ_0

$$J_G = b \int_0^T dt \int_G \varphi dG, \quad b = \frac{1}{T} \quad (2.68)$$

$$J_\Sigma = a \int_0^T dt \int_{\Sigma_0} \varphi d\Sigma, \quad a = w_g + \nu \alpha \quad (2.69)$$

Доцільно обидва ці два функціонали об'єднати в один

$$J = \int_0^T dt \int_G [b + a \delta(z)] \varphi dG \quad (2.70)$$

З цього запису видно, що роль p відіграє величина $b + a \delta(z)$. Тоді ми можемо написати спряжене рівняння переносу

$$-\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} + \dots = p \quad (2.71)$$

В результаті функціонал, що шукається, може бути представлений через рішення спряженого рівняння наступним чином

$$J = \int_0^T dt \int_G \varphi^* f dG \quad (2.72)$$

Якщо джерело забруднення має вигляд $f = Q \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ то цей функціонал зводиться до

$$J = Q \int_0^T dt \varphi^*(\vec{r}_0, t) \quad (2.73)$$

Його слід мінімізувати за \vec{r}_0 . І таким чином вийде область, де можна розміщувати відповідні підприємства.

ГЛАВА 3

ЗАБРУДНЕННЯ ВОДОЙМ

3.1 Моделі перенесу та дифузії забруднень у водоймах

Ця задача повністю аналогічне розглянутим вище. Доводиться вирішувати таке ж рівняння перенесу

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} u \varphi + \frac{\partial}{\partial y} v \varphi + \frac{\partial}{\partial z} [(w - w_g) \varphi] + \sigma \varphi = \mu \Delta \varphi + f \quad (3.1)$$

До нього слід додати граничні умови

$$\begin{aligned} w = 0, \quad z = 0, z = -H \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \alpha \varphi_g, \quad z = -H \\ \varphi = 0, \quad z = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Подальші рішення відбуваються точно так, як у разі випадання важких аерозолів. Вводяться величини

$$\bar{\varphi} = \int_{-H}^0 \varphi dz, \quad F = \int_{-H}^0 f dz \quad (3.3)$$

В результаті для концентрацій забруднень отримаємо рівняння щодо нової змінної $\bar{\varphi}$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} u \bar{\varphi} + \frac{\partial}{\partial y} v \bar{\varphi} + \sigma \bar{\varphi} = \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \bar{\varphi} - (w_g + v \alpha) \varphi_g + F \quad (3.4)$$

Це рівняння таке саме, як у випадку моделі гравітаційного осідання частинок. Рівняння має бути доповнено граничними умовами.

З рівняння видно, що у одиницю часу домішки у питній воді зменшується на величину $(w_g + v \alpha) \varphi_g$. Тут, як звичайно, перша частина пов'язана з випаданням домішки під дією сил тяжіння, а друга зумовлена вертикальною дифузиею на граничній зоні біля дна.

3.2 Загальна екологічна проблема водних ресурсів

Вода займає особливе місце серед природних багатств землі – вона не замінна. До виснаження природних багатств призводить не зростання води, що витрачається, а її забруднення. Шкідливі домішки утворюються в океані за сотні кілометрів від берега та судноплавних ліній. У рівній мірі це стосується і замкнутих водойм. Якщо потік, що надходить у водойм приносить забруднення, яке перевищує здатність екосистеми водойму

до самоочищення, то забруднення накопичується в донних відкладеннях, приводячи в подальшому до вторинного забруднення.

Вода входить до складу клітин та тканин будь-якої тварини та рослини. Найскладніші реакції, що протікають у клітинах, потребують присутності молекул води. Клімат та погода на землі багато в чому залежить та визначається наявністю водних просторів та вмістом водяної пари в атмосфері. Прийнятна для людини відносна вологість становить 60-80%. Таким чином, в наявності глобальна проблема, пов'язана із забрудненням води. Це забруднення є серйозною загрозою. Очищення води стає дедалі дорожчою, та її транспортування також становить значні труднощі.

Окрім цієї глобальної проблеми, існують і регіональна проблема води. Ця проблема виявляється складнішою, ніж глобальна і пов'язана, перш за все, з тим, що запаси води розподіляються вкрай нерівномірно. Існують три основні аспекти водогосподарських систем:

- 1) збільшення безповоротного споживання води;
- 2) забруднення водою;
- 3) штучний перерозподіл стоку води.

Щодо регіону України найбільший споживач води безповоротно – сільське господарство. На другому місці промисловість та енергетика; на третьому – комунальні підприємства міст.

У сільському господарстві дуже багато води йде на зрошення. Підраховано, що виробництво добової норми харчових продуктів на одну особу потребує 6 кубометрів або 6 тонн води. Для виплавки 1 тонни сталі потрібно 100 тонн води. Якщо щорічне споживання мінеральних ресурсів 7-8 млрд тонн, то води витрачається 7-8 млрд тонн щодобово. Навіть якщо зникнуть запаси металів, їх можна замінити на пластмаси. Якщо не вистачить рослинних та тваринних білків, то в принципі їх можна замінити синтетичними. Навіть повітря можна замінити, використавши штучну суміш газів.

Вода незамінна нічим.

Великий вплив на довкілля надають атомні та теплові станції. Станція з потужністю 300 тис. кВт споживає 120 тонн води щомиті (*s*). Крім того, на цих станціях періодично здійснюються теплові скидання, що істотно впливають на навколишнє середовище. Таким чином, з погляду моделювання під час обговорення водних проблем виникають такі задачі:

- 1) поширення забруднення у водоймах;
- 2) тепловий баланс водою;
- 3) водний баланс різних регіонів.

Щодо першої проблеми, то вона була розглянута у попередньому параграфі, тому нижче обговоримо проблеми теплового та водного балансу.

3.3 Тепловий баланс водних об'єктів

Умова теплового балансу для водного об'єкта може бути сформульована наступним чином: алгебраїчна сума теплових потоків, що надходять у аналізований водний об'єкт і теплового потоку, що діє всередині, дорівнює швидкості зміни тепловмістку об'єму рідини, що розглядається.

Рівняння теплового балансу виглядає так:

$$\iint_S (\vec{q}_T + \vec{q}_C + \vec{q}_S) d\vec{S} + \iiint_V q_V dV = \iiint_V c\rho \frac{\partial T}{\partial t} dV \quad (3.5)$$

Де прийняті позначення:

\vec{q}_T - тепловий потік за рахунок теплопровідності;

\vec{q}_C - тепловий потік за рахунок конвективної теплопровідності;

\vec{q}_S - тепловий потік обумовлений випромінюванням (наприклад сонце);

q_V - потужність внутрішніх джерел;

ρ – густина;

c – питома теплоємність.

Перейдемо від інтегральної форми рівняння до диференціальної за допомогою теореми Остроградського-Гаусса

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\vec{q}_T + \vec{q}_C + \vec{q}_S) + q_V \quad (3.6)$$

Використовуючи для теплового потоку закон Фур'є

$$\vec{q}_T = -\lambda \vec{\nabla} T \quad (3.7)$$

де λ – коефіцієнт теплопровідності, і вважаючи, що швидкість течії дорівнює \vec{u} , і нехтуючи потоком q_S отримаємо для ізотропного середовища наступні рівняння

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \vec{\nabla} T = \chi \Delta T + \frac{q_V}{c\rho} \quad (3.8)$$

де $\chi = \frac{\lambda}{c\rho}$ – коефіцієнт температуропровідності.

Отримане рівняння описує динаміку температури у водному обсязі. Воно має бути доповнено граничними умовами. Для вирішення цього рівняння повинні бути задані геометричні розміри водойми та температурні умови на межах.

Розрізняють три види граничних температурних умов.

1) граничні умови першого роду, коли на границях задана температура. Така задача називається задачею Дірихле.

2) граничні умови другого роду. В цьому випадку задаються потоки тепла на границях. Це задача Неймана.

3) граничні умови третього роду. В цьому разі користуються законом Ньютона – Ріхмана.

Відповідно до цього закону кількість теплоти, що віддається одиницею поверхні тіла в одиницю часу, пропорційна різниці температур поверхні тіла та навколишнього середовища

$$q = \beta(T_T - T_C) \quad (3.9)$$

Вираз для відповідного потоку прирівнюється потоку, обумовленому теплопровідністю у напрямку нормалі до поверхні

$$\beta(T_T - T_C) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \quad (3.10)$$

3.4 Метод кінцевих різниць

Цей спосіб є основою чисельного розв'язання диференціальних рівнянь як звичайних так і рівнянь у приватних похідних. Суть цього методу полягає в тому, що похідні замінюються відповідними різницями.

Розглянемо спосіб кінцевих різниць на прикладі дифузії в одновимірному випадку. Як зазначалося, відповідне рівняння має рішення у виді інтеграла Пуасона. Це рішення справедливе, проте без границь. Граничні умови все значно ускладнюють. Аналітичний запис рішення виявляється неможливим, вирішити завдання чисельно дозволяє метод кінцевих різниць.

Задамо для одномірного рівняння дифузії початкові та граничні умови та подивимося, як працює метод кінцевих різниць

$$\begin{aligned} \varphi(x,0) &= \varphi(x), & 0 \leq x \leq L \\ \varphi(0,t) &= \phi_1(t), & 0 \leq t \leq T \\ \varphi(L,t) &= \phi_2(t), & 0 \leq t \leq T \end{aligned} \quad (3.11)$$

Виберемо осі x і t .

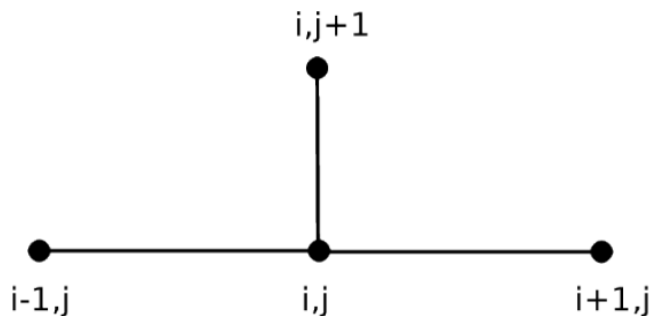


Рисунок 9 – До методу кінцевих різниць

Покриємо прямокутну область зі сторонами L і T сіткою, вузли якої (ih, kl) , де h і l просторовий та тимчасовий кроки сітки і $i, k = 1, 2, 3, \dots$. Введемо позначення

$$\varphi(x, t) = \varphi(ih, kl) = \varphi_{i,k} \quad (3.12)$$

Розберемося тепер із похідними, що входять до рівняння дифузії

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} = \frac{\varphi(x+h, t) - \varphi(x, t)}{h} = \frac{\varphi_{i+1,k} - \varphi_{i,k}}{h} \quad (3.13)$$

Друга похідна дорівнює

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{h} \left[\frac{\varphi(x+h, t) - \varphi(x, t)}{h} - \frac{\varphi(x, t) - \varphi(x-h, t)}{h} \right] = \frac{\varphi_{i+1,k} - 2\varphi_{i,k} + \varphi_{i-1,k}}{h^2} \quad (3.14)$$

Похідна за часом дорівнює

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = \frac{\varphi(x, t+l) - \varphi(x, t)}{l} = \frac{\varphi_{i,k+1} - \varphi_{i,k}}{l} \quad (3.15)$$

Підставляючи отримані вирази у вихідне рівняння дифузії, будемо мати

$$\frac{\varphi_{i,k+1} - \varphi_{i,k}}{l} = D \frac{\varphi_{i+1,k} - 2\varphi_{i,k} + \varphi_{i-1,k}}{h^2} \quad (3.16)$$

З цього рівняння знаходимо $\varphi_{i,k+1}$

$$\varphi_{i,k+1} = \left(1 - \frac{2Dl}{h^2} \right) \varphi_{i,k} + \frac{Dl}{h^2} (\varphi_{i+1,k} + \varphi_{i-1,k}) \quad (3.17)$$

Звідси видно, що значення функції $\varphi_{i,k+1}$ визначається трьома значеннями функції у попередній момент часу $t = kl$.

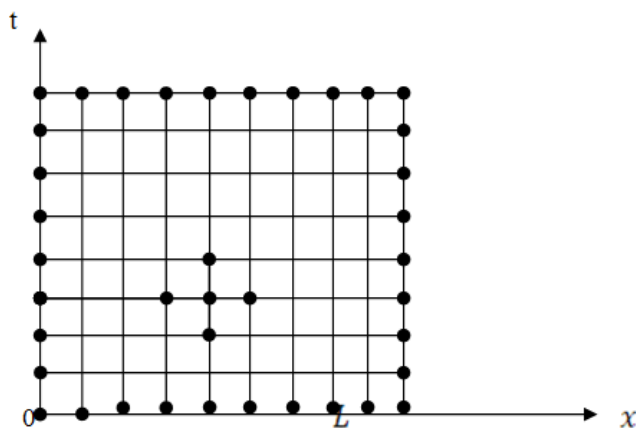


Рисунок 10 – Динаміка системи

Цей рисунок показує, як система рухається з часом. Процедуру обчислення ще можна спростити, якщо вибрати кроки h , l так, що

$$1 - \frac{2Dl}{h^2} = 0 \quad (3.18)$$

тоді динаміка системи визначиться рівнянням

$$\varphi_{i,k+1} = \frac{1}{2}(\varphi_{i+1,k} + \varphi_{i-1,k}) \quad (3.19)$$

тобто. для такої сітки динаміка визначається не трьома, а двома попередніми значеннями функції.

Розглянемо, як ускладнюється завдання у разі двох вимірів по координатам. Для площини стаціонарне завдання дифузії зводиться до рівняння Лапласа

$$\Delta\varphi = 0, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (3.20)$$

Нехай на кордоні цієї області N встановлено значення функції $\varphi|_C = f$, так що маємо граничне завдання Діріхле.

Задаємо сітку $x = ih$, $y = kh$

Замінімо розглянуту область N на область N^* , обмежену контуром ламаною лінією, що йде по сітці поблизу контуру C .

Другі похідні можуть бути записані у вигляді

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\varphi_{i+1,k} - 2\varphi_{i,k} + \varphi_{i-1,k}}{h^2}; \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \frac{\varphi_{i,k+1} - 2\varphi_{i,k} + \varphi_{i,k-1}}{h^2} \quad (3.21)$$

Підставляючи похідні до рівняння Лапласа, отримаємо

$$\varphi_{i,k} = \frac{1}{4}(\varphi_{i+1,k} + \varphi_{i,k+1} + \varphi_{i-1,k} + \varphi_{i,k-1}) \quad (3.22)$$

Звідси видно, що значення функції у вузлі визначається значеннями цієї функції у сусідніх вузлах.

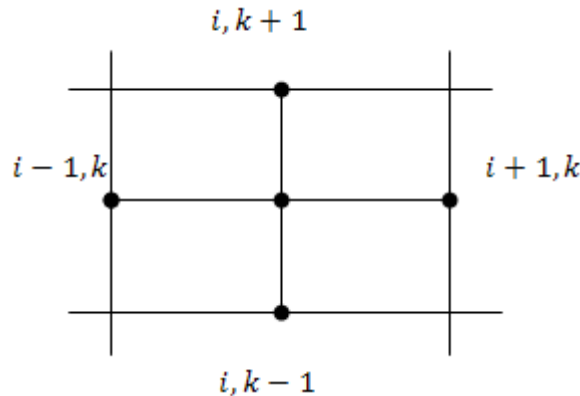


Рисунок 11 – Метод кінцевих різниць для задачі Діріхле

Вважатимемо, що значення функції φ у вузлах на контурі C^* задані (вони виходять апроксимацією з контуру C).

В результаті отримуємо рівняння для всіх вузлів, що входять в область, обмежену C^* . Таким чином, маємо систему з N – рівнянь для вузлів, що знаходяться всередині заданої області. Система вирішується зазвичай за допомогою комп'ютера і в результаті знаходяться значення φ в області, що розглядається.

3.5 Водний баланс

Метод водного балансу заснований на наступному законі збереження: для будь-якого об'єму простору обмеженого деякою довільною поверхнею, кількість води, що увійшла всередину цього об'єму, за вирахуванням кількості води, що вийшла назовні, повинна дорівнювати збільшення або зменшення кількості води всередині цього обсягу.

Водний баланс, з погляду екології, відбиває всі ланки процесу круговороту води. Він дозволяє виробляти зіставлення окремих джерел надходження вологи у різні періоди часу на досліджувану територію. Прибуткову частину балансу становитимуть:

- 1) опади, що випали за аналізований період на досліджувану територію, x ;
- 2) кількість вологи, що конденсується у ґрунті через поверхню, z_1 ;
- 3) кількість води, що надійшла шляхом підземного припливу, w_1 ;

4) кількість води, що надійшла на цю територію через поверхневі стоки (руслові та схильні), y_1 .

Витрата вологи з об'єму, що розглядається, може здійснюватися наступними шляхами:

- 1) випаровуванням води, снігу z_2 ;
- 2) відпливом води шляхом підземного стоку w_2 ;
- 3) стіканням води поверхневими водотоками (русловий та схильний стік) y_2 ;
- 4) використання води в народному господарстві, (безповоротне використання) v_2 .

Розглянутий район оточений вертикальною циліндричною поверхнею, верхня частина не обмежена, а нижня знаходиться нижче підземних і стічних вод, джерел.

Нехай u - зміна запасу вологи в обсязі, що розглядається, тоді рівняння водного балансу має вигляд

$$u = x + y_1 + z_1 + w_1 - y_2 - z_2 - w_2 - v_2 \quad (3.23)$$

Всі члени, що входять до цього рівняння, виражаються в міліметрах. Розглянуте рівняння може бути спрощено, якщо деякими членами входять до балансу можна знехтувати. Якщо можна знехтувати безповоротним використанням води та підземними водами, а також кількість води, що надійшла через поверхневі водотоки, у цьому випадку рівняння набуває вигляду

$$\begin{aligned} u &= x - y - z \\ z &= z_2 - z_1 \\ y &= y_2 - y_1 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Якщо спостереження виробляються досить великий проміжок спостереження, то цьому випадку можна говорити що середнє значення дорівнює нулю. Тоді рівняння балансу стає таким

$$\bar{x} = \bar{y} + \bar{z} \quad (3.25)$$

Більше того, якщо район не містить водотоків, тоді $\bar{x} = \bar{z}$.

3.6 Моделювання кисневого режиму водойм

Якість води та її мінералізація істотно впливають на сільськогосподарську продукцію. В даний час розроблені міжнародні та національні стандарти на питну природну воду, що використовується як джерело у водопостачанні. Встановлено ГДК (гранично допустимі концентрації), що забезпечують нешкідливість води. Основними з цих ГДК є розчинений кисень (РК) 7мг/л, фтор 200 мг/л, феноли 0,001 мг/л.

Критерієм забруднення водойм відходами є біохімічне споживання кисню (БПК) за рахунок якого зменшується вміст розчиненого кисню у водоймі і отже погіршується якість води.

У моделях різного рівня водойм враховується надходження кисню за рахунок фотосинтезу, надходження кисню з атмосфери, витрата кисню на дихання водоростей, витрата кисню на біохімічні окислення органіки у питній воді, споживання кисню донними відкладеннями і нітрифікація.

Перша математична модель динаміки кисню у водоймах була запропонована Стрітером і Фелпсом. Відповідно до цієї моделі динаміка концентрації кисню c та речовини відповідальної за БПК x , описується наступними рівняннями

$$\begin{cases} \frac{dc}{dt} = k_2(c_* - c) - k_1x \\ \frac{dx}{dt} = -k_1x \end{cases} \quad (3.27)$$

де c_* – стаціонарна концентрація розчиненого кисню, k_1 – постійна величина, що дорівнює швидкості біохімічного окислення речовини x або коефіцієнт споживання кисню, k_2 – стала швидкість реаерації для розчиненого кисню або коефіцієнт реаерації. Вона істотно залежить від швидкості течії величини потоку і температури води. Обидві величини k_1 і k_2 прийнято вимірювати в 1/день.

Система рівнянь є лінійною і може бути легко вирішена. З другого рівняння знаходимо x , а потім з першого c

$$x = Ae^{-k_1t} \quad (3.28)$$

$$c = c_* - \frac{k_1}{k_2 - k_1} Ae^{-k_1t} + Be^{-k_2t} \quad (3.29)$$

де A і B визначаються початковими умовами для x і c .

Звідси видно, що динаміка концентрації розчиненого кисню визначається експонентами, що містять постійні швидкості k_1 і k_2 . Якщо $t \rightarrow 0$, концентрація кисню прагне свого стаціонарного значення, а x прямує до нуля.

Записане рівняння для розчиненого кисню та БПК можуть бути доповнені членами, які враховують швидкість потоку у водоймі, дифузію, а також джерело забруднень. Наприклад, для речовини x в цьому випадку матимемо наступні рівняння

$$\frac{\partial x}{\partial t} + u \frac{\partial x}{\partial r} = -k_2x + \mu \frac{\partial^2 x}{\partial r^2} + f(\vec{r}, t) \quad (3.30)$$

де \vec{r} – просторовий вектор у напрямку швидкості потоку \vec{u} , що визначає положення розглянутої точки.

Рівняння Стрітера і Фелпса може бути записано через дефіцит кисню $D = c_* - c$:

$$\begin{cases} \frac{dD}{dt} = -k_2 D + k_1 x \\ \frac{dx}{dt} = -k_1 x \end{cases} \quad (3.31)$$

Використовуючи раніше отримане рішення моделі Стрітера – Фелпса, для дефіциту кисню отримаємо

$$D(t) = \frac{k_1 x_0}{k_2 - k_1} \left[e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t} + \frac{D_0 (k_2 - k_1)}{k_1 x_0} e^{-k_2 t} \right] \quad (3.32)$$

де D_0 і x_0 – початкові значення дефіциту та БПК.

Запишемо тепер умову максимального значення дефіциту кисню $\frac{dD}{dt} = 0$, і розв'яжемо

його відносно t

$$\frac{dD}{dt} = -k_1 e^{-k_1 t} + R k_2 e^{-k_2 t} = 0 \quad (3.33)$$

$$t_* = \ln \left(\frac{k_2}{k_1} R \right)^{\frac{1}{k_2 - k_1}} \quad (3.34)$$

$$\text{де } R = 1 - \frac{D_0 (k_2 - k_1)}{k_1 x_0}$$

Таким чином, через проміжок часу t_* буде досягнуто максимального дефіциту кисню.

Уявімо собі річку, швидкість якої u . Нехай за течією річки знаходиться яесь підприємство, яке в початковий час скинула в річку БПК з початковим значенням x_0 , тоді максимальний дефіцит кисню досягатиметься вниз за течією на відстані від цього підприємства

$$L = ut_* \quad (3.35)$$

Знайдемо значення максимального дефіциту кисню

$$D_{\max} = x_0 \frac{k_1}{k_2} \left(\frac{k_1}{k_2} R \right)^{-\frac{k_1}{k_2 - k_1}} \quad (3.36)$$

Існують санітарні норми, що визначають граничний рівень дефіциту кисню D_{\lim} . Тоді умова $D_{\lim} = D_{\max}$ визначає максимально можливий рівень скидання БПК x_0 . Отже, маємо

$$D_{\lim} = x_0 \frac{k_1}{k_2} \left(\frac{k_1}{k_2} R \right)^{-\frac{k_1}{k_2 - k_1}} \quad (3.37)$$

Рішення рівняння може бути здійснено чисельними методами.

3.7 Модель динаміки фосфору у водоймах

Гідрохімічні процеси є основними за впливом на водні екосистеми. Розглянемо як приклад динаміку фосфору, який є поживною речовиною для різних водоростей. Пропонована модель враховує взаємодії розчинених у воді мінерального фосфору (DIP) та органічних сполук фосфору (DOP), фракцій фосфору у складі детриту (PD) та біомас планктону (FP) та бактерій (BP).

Фітопланктон – це сукупність мікроскопічних рослин, що живуть у воді і пасивно пересуваються під впливом водних течій. Детрит - дрібні частинки залишків організмів та їх виділень у водному середовищі (зважені або осілі на дні водойми).

Рівняння моделі для концентрацій наступні

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + (\vec{u}\vec{\nabla})c_i = R_i + G_i \quad (3.38)$$

де $c_1 = DOP$, $c_2 = DIP$, $c_3 = PD$, $c_4 = FP$, $c_5 = BP$; R_i - лінійні функції від концентрацій, G_i - постійні величини.

З цієї системи в залежності від швидкості течії водоймища та граничних умов, впливають вирази для концентрації всіх введених величин. Зазначимо, що у водоймах можливе евтрофірування. Евтрофірування веде спочатку до підвищеної водної продуктивності водних басейнів, та дедалі до збільшення нестачі кисню і до виникнення заморів.

ГЛАВА 4 ЗАБРУДНЕННЯ ПІДЗЕМНИХ ВОД

4.1 Розподіл підземних вод та характеристики ґрунтів

Розподіл вологи під водою описуються наступною діаграмою:

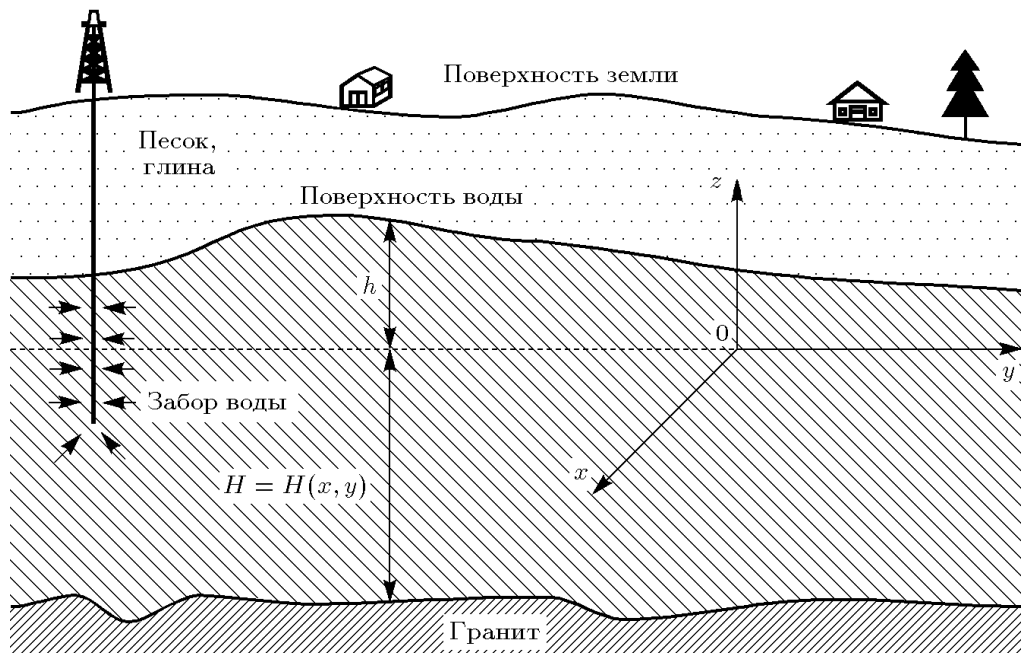
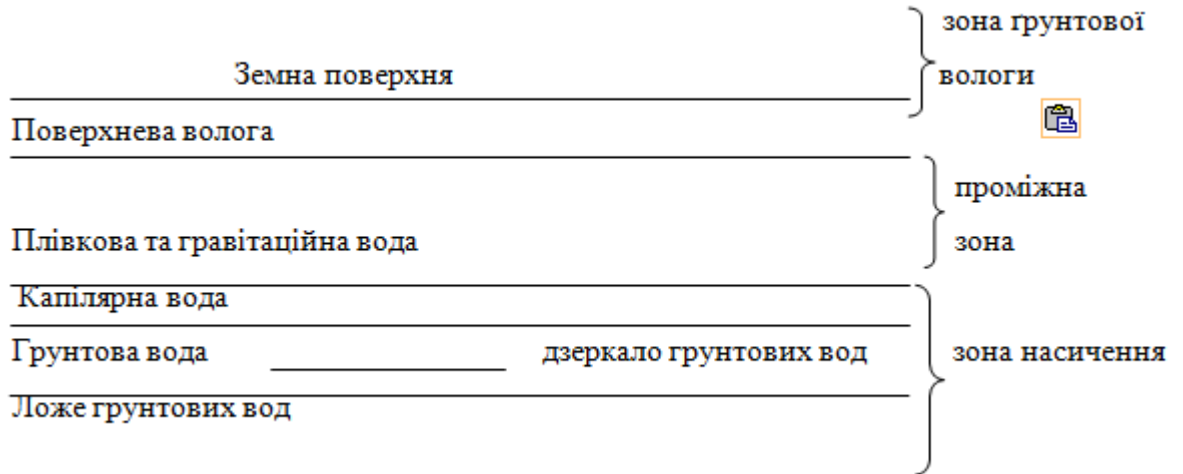


Рисунок 12 – Розподіл вологи

Пористе середовище отримує значну частку твердої речовини, яка називається каркасом, або скелетом. Він складається з або не пов'язаних між собою твердих частинок, або є безпервною структурою (сцементована, консолідована, або ущільнена). До першого типу відноситься піски, до другого – глина.

Ґрунти та пухкі гірські породи зазвичай складаються з незв'язаних частинок. Ці частинки можуть бути однозернистими або різнозернистими. Прикладом однозернистих порід є дюнні піски, тоді як більшість ґрунтів, що обробляються, погано відсортовані. Всі ці ґрунти характеризуються наявністю порожнин та тріщин. Так пори між глинистими частинками є плоскими чи трубчастими. Тріщини в поверхневих шарах ґрунтів мають плоску форму та втоплюються з глибиною. Порожнини утворені корінням рослин є прикладом одиночних, або розгалужених сліпих пор.

Форма та розміри пор залежать головним чином від складу ґрунтових частинок, їх розміру та структури. Розподіл частинок за розмірами в ґрунті називається механічною, або гранулометричною характеристикою ґрунту.

Пори створюють велику поверхню для води, що міститься в ґрунті. Через велику поверхню вода може значною мірою взаємодіяти із забрудненнями, що надходять у ґрунтовий ґрунт.

Для кількісної характеристики пористості запроваджується поняття об'ємної, поверхневої, лінійної пористості. Пористість визначається відношенням об'єму, площі, довжини пор до повного значення відповідної величини.

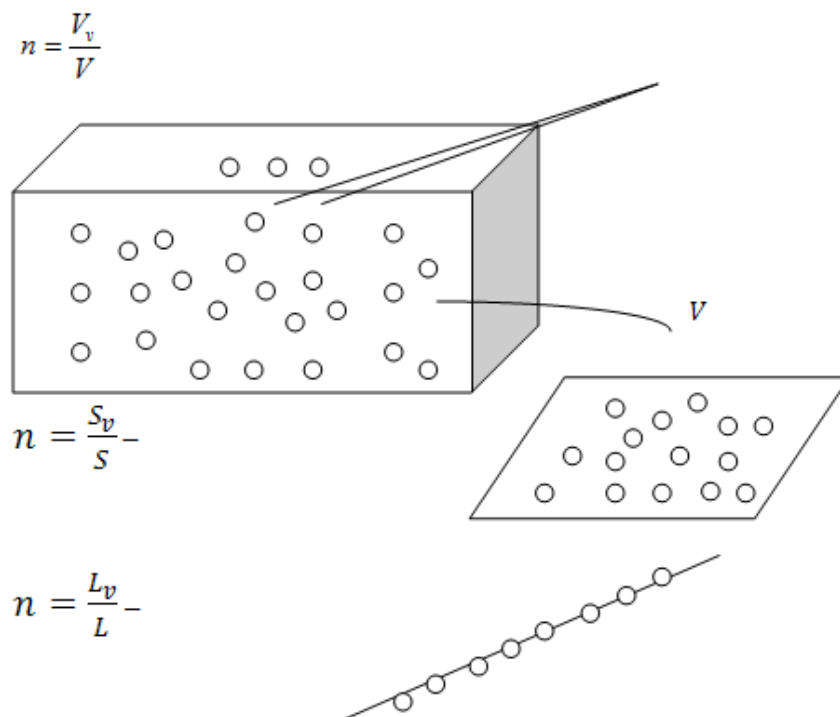


Рисунок 13 – До визначення пористості

Ситуація забруднення води в пористому ґрунті дуже схожа з насиченням крові киснем у легенях. Легкі є сукупність капілярів, заповнених кров'ю. Кров, потрапляючи в таке пористе середовище, швидко насичується киснем.

Висоту капілярної води легко оцінити, використовуючи формулу Лапласа для капілярного тиску

$$\rho gh = \frac{2\sigma}{r} \rightarrow h = \frac{2\sigma}{\rho gr} \quad (3.39)$$

де σ - коефіцієнт поверхневого натягу води, r - радіус капіляра.

4.2 Явище дисперсії

Дисперсія полягає у перемішуванні (змішуванні) різних рідин у пористому середовищі. Дисперсія здійснюється як внаслідок суто механічного перемішування, пов'язаного з наявністю пор, так і в результаті звичайної молекулярної дифузії. Пори призводять до наявності великих градієнтів швидкості та зміни спрямованості елементарних ліній струму.

Для опису явища дисперсії деякого забруднювача або домішки в пористому середовищі слід вести концентрацію цієї домішки в ґрунтовій воді. Вважається, що динаміка концентрації описується таким самим рівнянням, як і рівняння дифузії, в якому замість коефіцієнта дифузії слід використовувати коефіцієнт дисперсії K

$$\frac{\partial c}{\partial t} + (\vec{u} \vec{\nabla})c = K \Delta c \quad (4.40)$$

Таким чином, для розрахунку забруднення необхідно вирішувати знову дифузійне рівняння.

4.3 Джерела забруднення підземних вод

Забруднення підземних вод за своїм походженням поділяється на 4 основні групи

- 1) промислове;
- 2) побутове;
- 3) сільськогосподарське;
- 4) природне.

Причому кожна з них ділиться на постійну та випадкову складові.

Промислове забруднення привноситься у водоносний горизонт використаними водами, що містять хімічні сполуки, важкі метали, радіоактивні речовини. Крім того, промислове забруднення може здійснюватися дощовою водою, що інфільтрується через відвали промислових відходів або в результаті аварії на трубопроводах.

Побутове забруднення – викликається водою, використаною у побутових потребах.

Сільськогосподарське забруднення здійснюється дощовою водою, яка виносить з полів мінерали, солі, пестициди, гербіциди.

Природне забруднення – відбувається головним чином унаслідок впровадження морської води у прибережний водоносний горизонт.

4.4 Рішення рівняння дисперсії для забруднень

Розглянемо методи аналітичного розв'язання задачі про забруднення підземних вод. Як відомо, рівняння дифузії, а значить і рівняння дисперсії, в одновимірному випадку відсутність швидкості має рішення у вигляді інтеграла Пуассона

$$\frac{\partial c}{\partial t} = K \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad c(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Kt}} \int_{-\infty}^{\infty} c(\alpha) e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4Kt}} d\alpha \quad (4.41)$$

де $c(x) = c(x, 0)$ – початковий розподіл концентрації забруднень.

Розглянемо, що дасть цей інтеграл у тому випадку, коли початковий розподіл є деякою ступінчастою функцією заввишки c_0 для $x_1 \leq x \leq x_2$, що відповідає попаданню забруднень у початковий момент у деяку область. Інтеграл Пуассона тоді набуває вигляду

$$c(x, t) = \frac{c_0}{2\sqrt{\pi Kt}} \int_{x_1}^{x_2} c(\alpha) e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4Kt}} d\alpha \quad (4.42)$$

Зробимо заміну змінних

$$\frac{x-\alpha}{\sqrt{4Kt}} = \mu, \quad d\alpha = -\sqrt{4Kt} d\mu \quad (4.43)$$

і перетворимо отриманий інтеграл

$$c(x, t) = -\frac{c_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x-x_1}{\sqrt{4Kt}}}^{\frac{x-x_2}{\sqrt{4Kt}}} e^{-\mu^2} d\mu = \frac{c_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x-x_1}{\sqrt{4Kt}}} e^{-\mu^2} d\mu - \frac{c_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x-x_2}{\sqrt{4Kt}}} e^{-\mu^2} d\mu \quad (4.44)$$

Таким чином, рішення виражається через два однотипні інтеграли. Введемо функцію помилок, або інтеграл ймовірності, який визначається наступною формулою

$$\Phi(z) \equiv \operatorname{erf}z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\mu^2} d\mu \quad (4.45)$$

Функція помилок, як неважко встановити, є непарною та $\Phi(\infty) = 1$

Поряд із нею також використовується додаткова функція помилок

$$\operatorname{erfc}z = 1 - \operatorname{erf}z \quad (4.46)$$

Використовуючи ці функції, остаточне рішення задачі можна подати у вигляді

$$c(x,t) = \frac{c_0}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{x-x_1}{\sqrt{4Kt}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{x-x_2}{\sqrt{4Kt}} \right) \right] \quad (4.47)$$

Воно описує процес плавного розпливання початкової сходинок, що відповідає поширенню забруднення у воді з часом.

4.5 Рішення рівняння дисперсії за наявності потоку

У разі потоку рідини рівняння має вигляд

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = K \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad (4.48)$$

Як очевидно з лівої частини, відбувається як локальне зміна концентрації забруднення, і його конвективний перенесення. Поставимо до цього рівняння початкову умову $c(x,0) = c_0(1 - H(x))$, де $H(x)$ функція Хевісайда

$$H(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \infty \\ 0, & -\infty \leq x \leq 0 \end{cases} \quad (4.49)$$

Така постановка завдання відповідає тому, що ми хочемо простежити за передньою стінкою сходинок з часом. Для вирішення задачі перейдемо в систему координат, що рухається зі швидкістю u . Введемо нові змінні $\xi = x - ut$, $\tau = t$. Враховуючи що

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} - u \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \quad (4.50)$$

В результаті вихідне рівняння набуває простого вигляду

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2} \quad (4.51)$$

Рішення останнього рівняння є інтегралом Пуассона, в яке слід підставити початкову умову $c(\xi,0) = c_0(1 - H(\xi))$. В результаті отримаємо

$$c(\xi, \tau) = \frac{c_0}{2\sqrt{\pi K \tau}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(\xi-\alpha)^2}{4K\tau}} d\alpha \quad (4.52)$$

Використовуючи таку ж заміну змінних, як і вище, отримаємо

$$c(\xi, \tau) = \frac{c_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\xi}{2\sqrt{K\tau}}}^{\infty} e^{-\mu^2} d\mu = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\xi}{2\sqrt{K\tau}}}^0 e^{-\mu^2} d\mu + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\mu^2} d\mu \right], & \xi \leq 0 \\ \frac{1}{2} \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\xi}{2\sqrt{K\tau}}}^{\infty} e^{-\mu^2} d\mu \right], & \xi \geq 0 \end{cases} \quad (4.53)$$

або

$$c(\xi, \tau) = \begin{cases} \frac{c_0}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\xi}{2\sqrt{K\tau}} \right) \right], & \xi \leq 0 \\ \frac{c_0}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{\xi}{2\sqrt{K\tau}} \right), & \xi \geq 0 \end{cases} \quad (4.54)$$

Запишемо це рішення через старі змінні

$$c(x, t) = \begin{cases} \frac{c_0}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x-ut}{2\sqrt{Kt}} \right) \right], & x-ut \leq 0, \quad ut \geq x \\ \frac{c_0}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{x-ut}{2\sqrt{Kt}} \right), & x-ut \geq 0, \quad ut \leq x \end{cases} \quad (4.55)$$

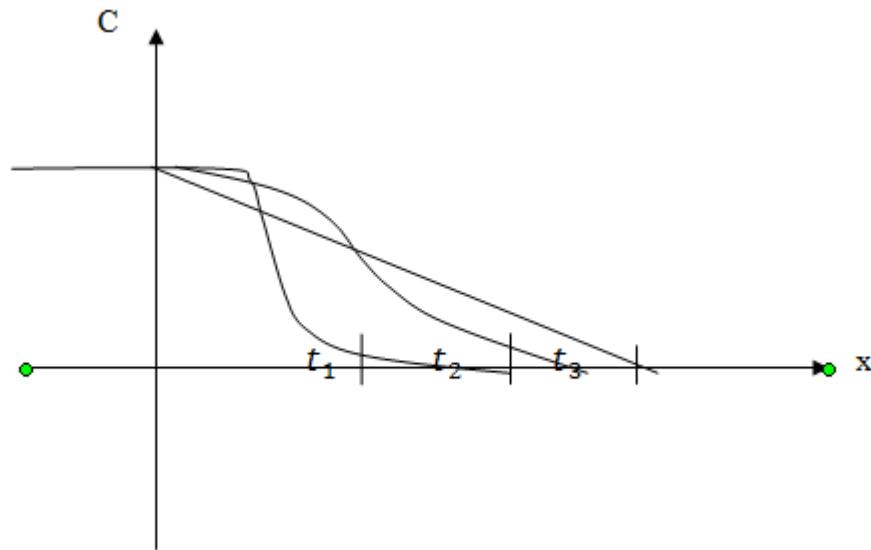


Рисунок 14 – Динаміка забруднень

На рис.14 зображено процес поширення забруднення з часом.

ГЛАВА 5

МОДЕЛІ ПОПУЛЯЦІЙ В ЕКОЛОГІЇ

5.1 Стійкість біологічних популяцій

Раніше були розглянуті рівняння, що описують динаміку популяції, такі як рівняння Мальтуса, логістичне рівняння, система Лотки-Вольтерра.

Всі ці рівняння належать до рівняння наступного виду

$$\frac{dN}{dt} = f(N) \quad (5.1)$$

де N - число особин в популяції. При дослідженні цього загального рівняння важливим є знаходження стаціонарних станів популяції або точок спокою. Відповідні точки позначаються N_* , і для них маємо

$$\frac{dN_*}{dt} = 0, \quad f(N_*) = 0 \quad (5.2)$$

Однак не всі стаціонарні стани є стійкими. Для з'ясування стійкості стаціонарного стану, функції $f(N_*)$ слід розкласти до ряду Тейлора поблизу стаціонарної точки

$$f(N) = f(N_*) + f'(N_*)\delta N + \frac{f''(N_*)}{2!}\delta N^2 + \frac{f'''(N_*)}{3!}\delta N^3 + \dots \quad (5.3)$$

де $\delta N = N - N_*$ відхилення популяції від точки N_* .

Вважаючи, що δN мале, достатньо зберегти в розкладанні тільки члени лінійні по δN . Тоді динаміка відхилення описуватиметься рівнянням

$$\frac{d\delta N}{dt} = f'(N_*)\delta N \quad (5.4)$$

З останнього рівняння ясно, що стаціонарна точка буде стійка, якщо $f'(N_*) \leq 0$ і нестійка при $f'(N_*) \geq 0$.

Розглянута вище стійкість зветься локальною. Розрізняють також глобальну стійкість. Про глобальну стійкість можна говорити в тому випадку, якщо є лише одна точка спокою і будь-яке рішення для відхилення від цієї точки виявляється в околиці точки спокою за кінцевий проміжок часу.

5.2 Логістичне рівняння та квоти вилову

Розглянемо як ілюстрацію вищевикладеного логістичне рівняння

$$\frac{dN}{dt} = (\alpha - \gamma N)N \quad (5.5)$$

Знайдемо його стаціонарні точки та досліджуємо їх стійкість. Перетворимо рівняння, вводячи безрозмірну змінну

$$x = \frac{\gamma}{\alpha} N \quad (5.5)$$

та безрозмірний час αt , зберігши для нього далі позначення t , тоді наше рівняння набуде вигляду

$$\frac{dx}{dt} = (1 - x)x \quad (5.6)$$

Стаціонарні точки $x_{*1} = 0$, $x_{*2} = 1$ і

$$f'(x) = 1 - 2x, \quad f'(x_{*1}) = 1 \geq 0, \quad f'(x_{*2}) = -1 \leq 0 \quad (5.7)$$

Таким чином, логістичне рівняння має тільки одну стійку точку спокою x_{*2} . Точка x_{*1} – нестійка.

Фазовий портрет логістичного рівняння має вигляд:

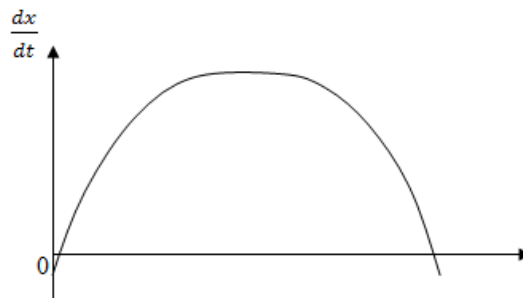


Рисунок 15 – Фазовий портрет логістичного рівняння

Загалом поведінка системи виглядає так:

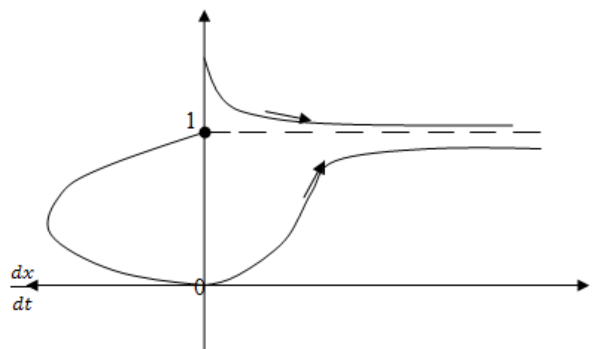


Рисунок 16 – Поведінка системи, що описується логістичним рівнянням

Припустимо тепер, що відбувається зменшення популяції через постійний вилов. Швидкість зменшення популяції виловом називається квотою вилову. Позначаючи її c , отримаємо наступне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = (1-x)x - c \quad (5.8)$$

Зайдемо стаціонарні точки

$$(1-x)x - c = 0, \quad x_{*1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - c} \quad (5.9)$$

Звідси видно, що квота вилову повинна бути менше $1/4$.

Дослідимо точки на стійкість

$$f'(x) = 1 - 2x, \quad f'(x_{*1}) = -\sqrt{1-4c}, \quad f'(x_{*2}) = \sqrt{1-4c} \quad (5.10)$$

Другий стаціонарний стан не є стійким. Відповідний графік для даної задачі має вигляд

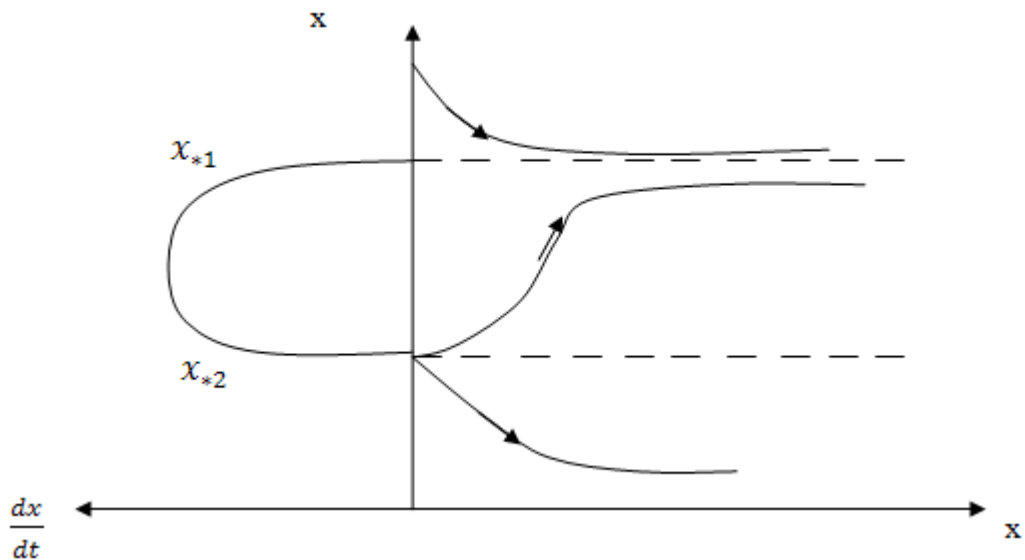


Рисунок 17 – Поведінка системи з постійною квотою вилову

Таким чином, ми бачимо, що при не дуже великій квоті вилову $0 \leq c \leq \frac{1}{4}$, Існують два положення рівноваги. Верхнє положення рівноваги є стійким. Якщо з деяких причин, таких наприклад, як не допустимий вилов риби, або її хвороби, рівень популяції опуститься нижче x_{*2} , то в наступному популяція за деякий проміжок часу зникне. Популяція також зникне, якщо квота вилову перевищить $1/4$. Оскільки в цьому випадку рівноваги взагалі немає, то вся популяція буде виловлена за кінцевий час.

5.3 Вилів із відносною квотою

Замість абсолютної швидкості вилову також часто використовується відносна швидкість вилову, яка буде пропорційна чисельності популяції. У цьому випадку логістичне рівняння набуває вигляду

$$\frac{dx}{dt} = (1-x)x - px, \quad (p \leq 1) \quad (5.11)$$

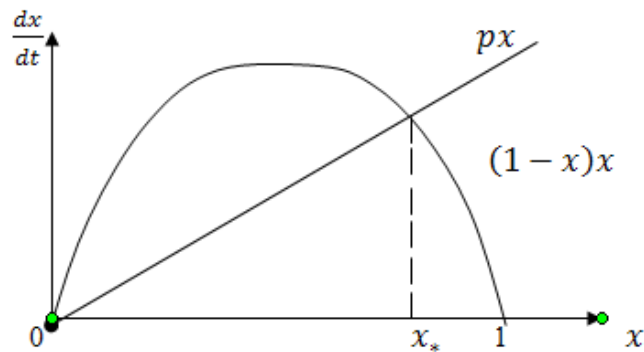
Знаходимо стаціонарні точки

$$x_{*1} = 1 - p, \quad x_{*2} = 0 \quad (5.12)$$

Досліджуємо відповідні точки на стійкість

$$f'(x) = 1 - p - 2x, \quad f'(x_{*1}) = -(1 - p) \leq 0, \quad f'(x_{*2}) = (1 - p) \geq 0 \quad (5.13)$$

Таким чином, система з відносною квотою вилову має лише одну стійку точку. Зобразимо перебування стаціонарної стійкої точки на фазовій площині.



$$f(x) = 0$$

$$(1-x)x = px$$

Рисунок 19 – До знаходження максимально можливої швидкості вилову

Знайдемо значення p , при якому досягається максимальна швидкість вилову. Очевидно, що це буде у тому випадку, коли пряма лінія проходить через вершину параболы.

Вершині параболы відповідає точка $x = \frac{1}{2}$. Тоді з рівняння $(1-x)x = px$ видно що $p = \frac{1}{2}$.

Таким чином, при $p = \frac{1}{2}$ досягається максимально можлива квота вилову

$$c = px_* = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad (5.14)$$

При цьому система все ще залишається стійкою.

5.4 Фазові портрети диференціальних рівнянь

Вище обговорювалося стійкість різноманітних популяції. Було видно, що в залежності від керуючих параметрів (квота, відносна квота), стаціонарні точки можуть бути як стійкими так і нестійкими.

При зміні таких параметрів можлива така ситуація, коли стійкий стан системи стає нестійким. Відповідні зміни поведінки систем називають бифуркацією.

Треба чітко розуміти, що немає загальних методів розв'язання нелінійних рівнянь. Аналітичні рішення можна отримати у виняткових випадках. Тому важливим є якісний аналіз диференціального рівняння та його рішення, який можна здійснити на фазовій площині. Остання є системою координат, осями якої є змінні, що входять у вихідне диференціальне рівняння або систему диференціальних рівнянь. Зображуючи на фазовій площині залежність координат від часу, ми отримуємо фазовий портрет.

У загальному випадку система диференціальних рівнянь, що вивчається, має вигляд

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, \vec{\alpha}) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots) \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots) \end{cases} \quad (5.15)$$

де $\vec{x}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – невідомі функції від часу (координати)

$\vec{\alpha}(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ – керуючі параметри.

Розглянемо випадок однієї змінної

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (5.16)$$

Зразу видно, що якщо $f(x)$ позитивна, точка на фазовому портреті, яка відповідає стану системи з $f(x)$ переміщається вправо по осі x , а для $f(x) \leq 0$, переміщення відбувається вліво.

На фазовому портреті має бути обов'язково вказати стрілку, яка визначає динаміку системи.

Розглянемо тут приклади фазових портретів диференціальних рівнянь без керуючого параметра, а в наступному розділі з ним.

$$\begin{aligned}
 1) \dot{x} &= x^2 \\
 2) \dot{x} &= x^3 \\
 3) \dot{x} &= \frac{1}{2}(x^2 - 1) \\
 4) \dot{x} &= \sin x
 \end{aligned}
 \tag{5.17}$$

де $\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}$. Нижче наведено фазові портрети та графіки залежностей $f(x)$

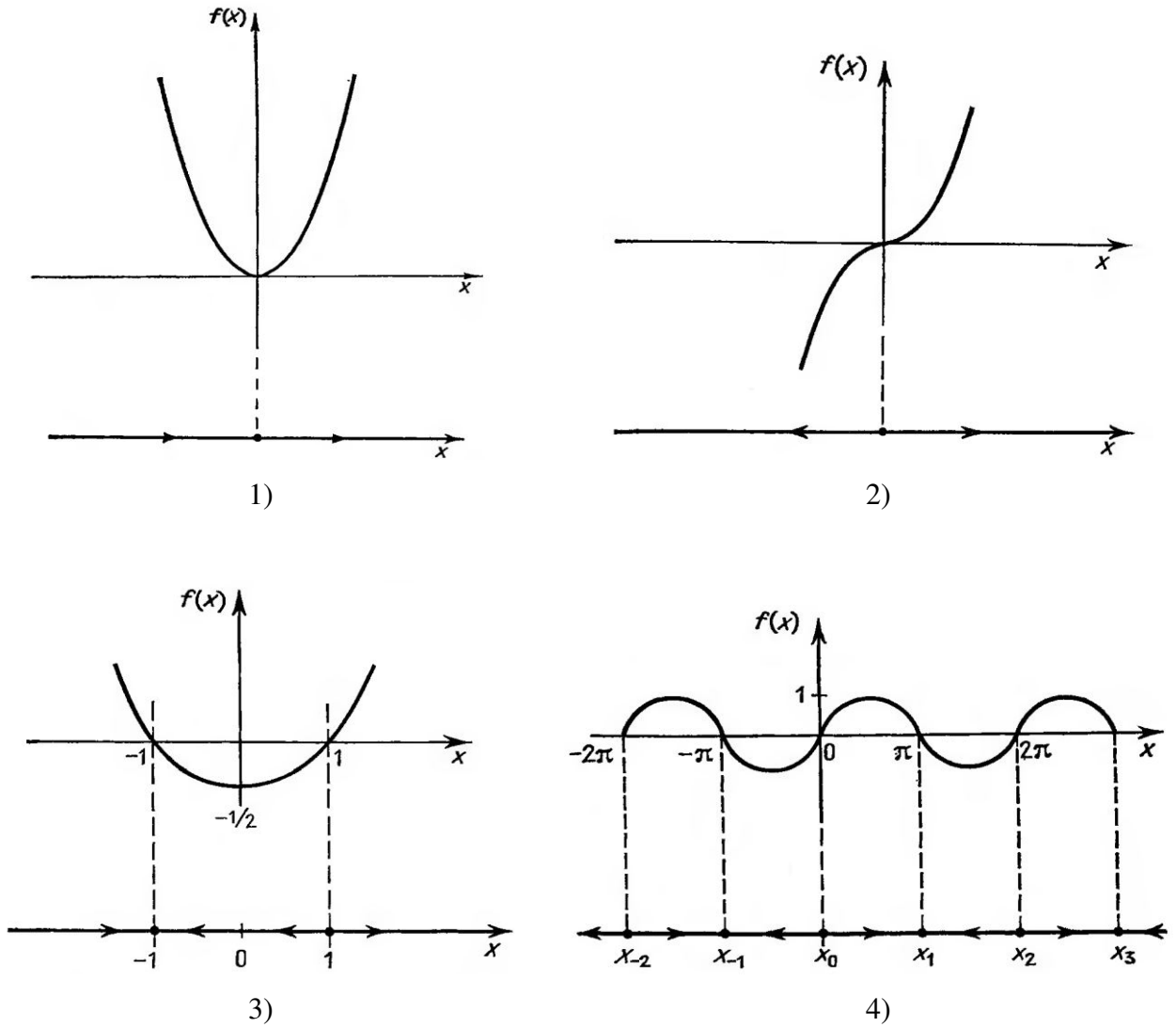
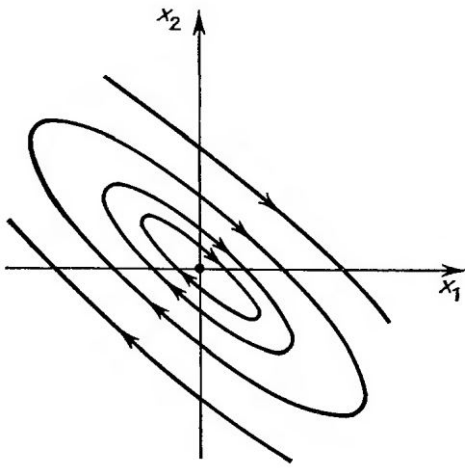
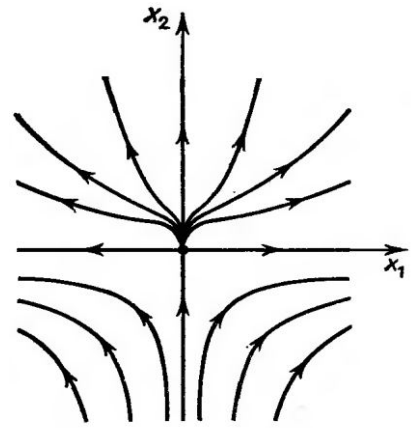


Рисунок 20 – Фазові портрети для (5.17)

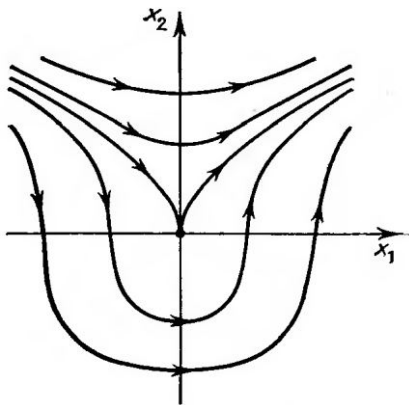
Далі наведемо приклади фазових портретів різних двовимірних (лінійних та нелінійних) систем ОДУ



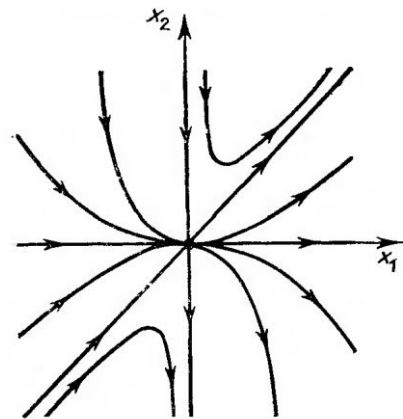
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 + 4x_2 \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - 3x_2 \end{cases}$$



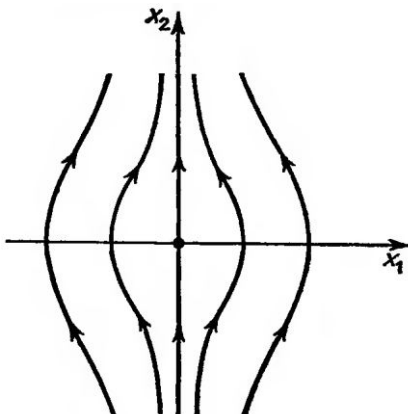
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = x_2^2 \end{cases}$$



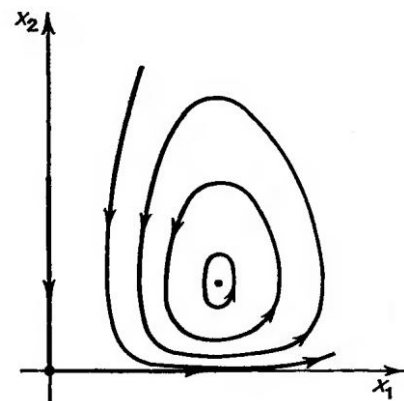
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 \\ \dot{x}_2 = x_2(2x_1 - x_2) \end{cases}$$



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1^2 + x_2^2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(1 - x_2) \\ \dot{x}_2 = -x_2(2 - x_1) \end{cases}$$

Рисунок 21 – Фазові портрети двовимірних систем

5.5 Біфуркації

Якщо змінювати параметр $\bar{\alpha}$ у великому діапазоні, може статися, що станеться якісна зміна відповідного фазового портрета. Така якісна зміна називається біфуркацією.

Фазовий портрет диференціального рівняння $\dot{x} = \alpha x$ виглядає так

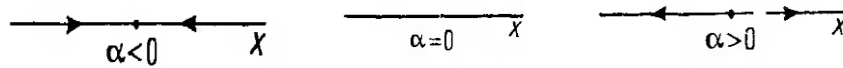


Рисунок 22 – Фазовий портрет рівняння $\dot{x} = \alpha x$

Рівняння має один стан рівноваги $\alpha = 0$. При $\alpha \leq 0$ цей стан стійкий, при $\alpha \geq 0$ - нестійкий. Отже, значення $\alpha = 0$ є біфуркаційним значенням керуючого параметра α .

Нижче зображено біфуркацію фазового портрета однопараметричної системи двох диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases} \quad (5.17)$$

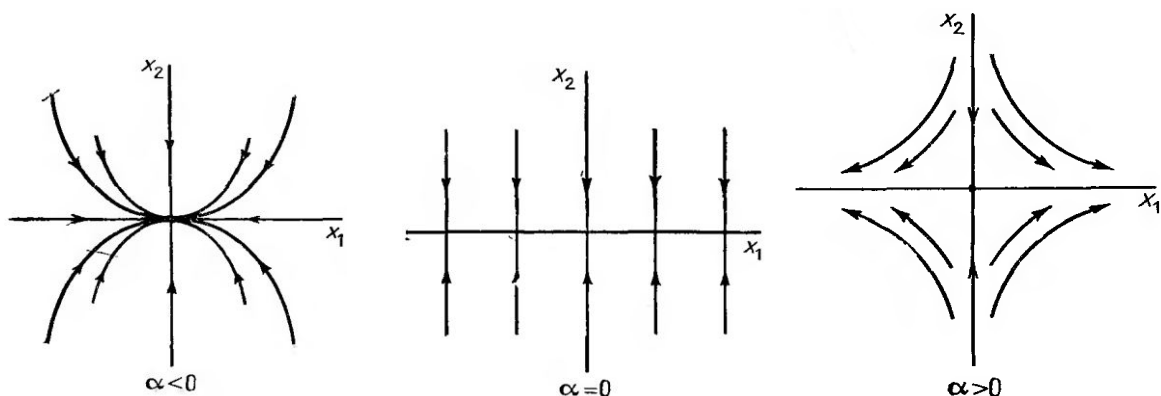


Рисунок 22 – Фазовий портрет системи (5.17)

Біфуркація типу «сідло-вузол» у двовимірному випадку для системи рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 + \alpha \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases} \quad (5.18)$$

Виглядає наступним чином

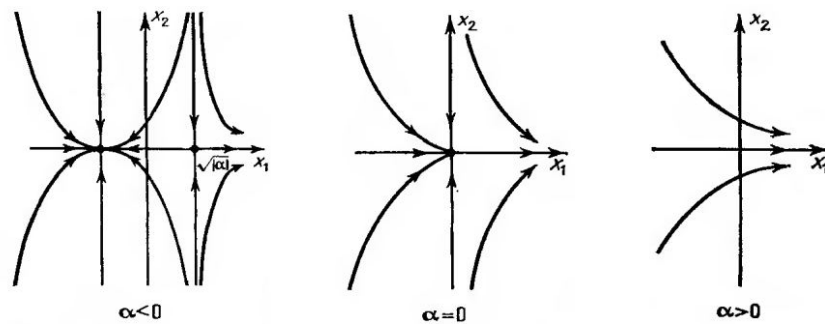


Рисунок 23 – Фазовий портрет системи (5.18)

Из рисунка видно, що при $\alpha \leq 0$ система має два положення рівноваги, одне з яких є сідло, а інше – вузол. Ці точки при $\alpha \rightarrow 0$ наближаються один до одного і зливаються в так зване сідло-вузол. Звідси і виникла назва «біфуркація типу сідло-вузол».

5.6 Типи біфуркацій

Усі біфуркації поділяються на 3 типи:

- 1) біфуркації «сідло-вузол».
- 2) біфуркації Андронова-Хопфа.
- 3) біфуркації, пов'язані із втратою симетрії.

Прикладом біфуркації «сідло-вузол» є система, що описується рівнянням

$$\dot{x} = x^2 + \alpha \quad (5.19)$$

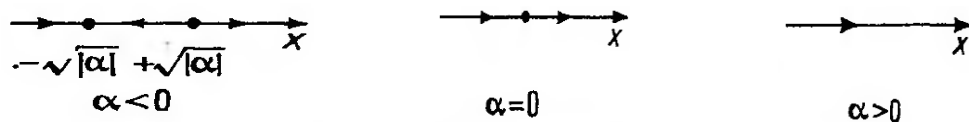


Рисунок 24 – Фазовий портрет системи (5.19)

При $\alpha \leq 0$ існують два положення рівноваги $x_{1,2} = \mp \sqrt{|\alpha|}$, з яких перше положення стійке, а друге нестійке. При $\alpha \geq 0$ положення рівноваги відсутнє. Таким чином, значення $\alpha = 0$ є біфуркаційним значенням параметра α . Діаграма стаціонарних рішень рівняння має вид

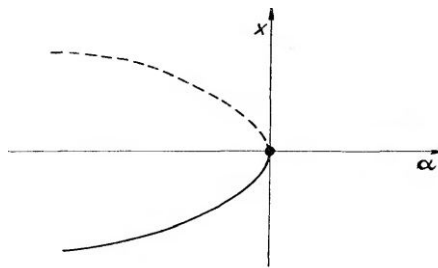


Рисунок 25 – Діаграма стаціонарних рішень рівняння (5.19)

Розглянемо тепер приклад біфуркації Андронова-Хопфа.

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + \alpha y - y(x^2 + y^2) \end{cases}, \quad (x_*, y_*) = (0, 0) \quad (5.20)$$

Перейдемо до полярних координат

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned} \quad (5.21)$$

У цих змінних вихідна система набуває вигляду

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\alpha - r^2) \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases} \quad (5.22)$$

З цієї системи рівняння видно, що кутова змінна φ , грає роль часу. Стаціонарні точки визначаються оберненням на нуль \dot{r}

$$r_*(\alpha - r_*^2) = 0 \quad (5.23)$$

Звідси випливає, що коли $\alpha \leq 0$, є єдина стаціонарна точка $r_* = 0$; коли $\alpha \geq 0$ стаціонарних точок дві: $r_* = 0$ і $r_* = \sqrt{\alpha}$.

З самого рівняння для r отримаємо, що точка $r_* = 0$ при $\alpha \geq 0$ є нестійкою, в той же самий час коло $r_* = \sqrt{\alpha}$, є стійким.

Відповідний фазовий портрет має вигляд

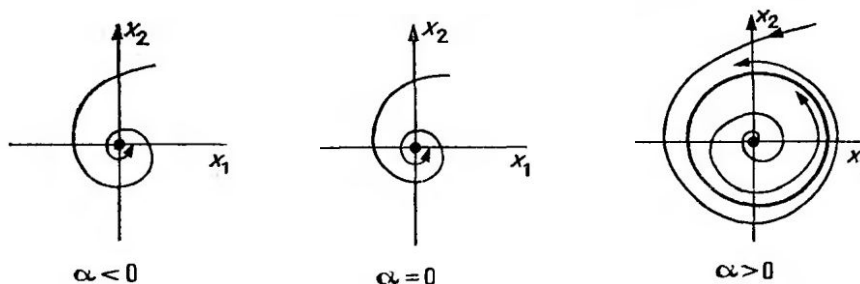


Рисунок 26 – Фазовий портрет системи (5.22)

Про біфуркацію, що відбувається за таким сценарієм, кажуть, що відбувається м'яка втрата стійкості. Ми бачимо, що при зміні параметра керування α відбувається біфуркація і замість вузла з'являється стаціонарна точка, яка називається фокусом або центром. Подібна біфуркація була вперше вивчена Андроном, у разі коливань генератора. Розглянута біфуркація описує м'яке збудження, у якому радіус фокусу постійно збільшується, зі збільшенням параметра α . Часова залежність однієї зі змінних від часу змінюється так

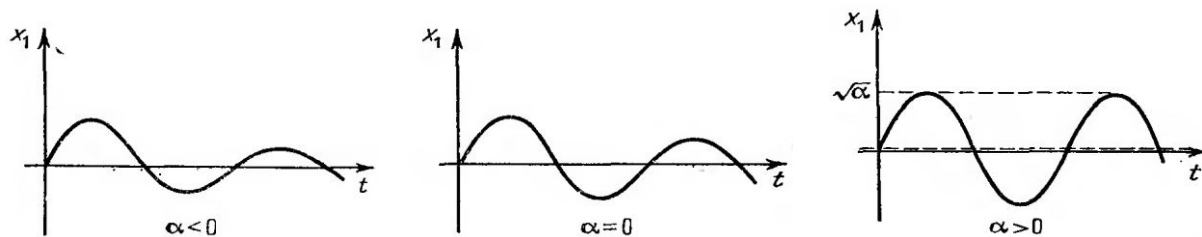


Рисунок 27 – Часова залежність x_1

Крім м'якої втрати стійкості для систем, що містять фокус, можлива ситуація жорсткої втрати стійкості. Система, що описує подібну ситуацію, має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - y + x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + \alpha y + y(x^2 + y^2) \end{cases} \quad (5.24)$$

Після переходу до полярних координат отримаємо

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\alpha + r^2) \\ \dot{\phi} = 1 \end{cases} \quad (5.)$$

Біфуркація цієї системи на фазовій площині за зміни параметра α має вид

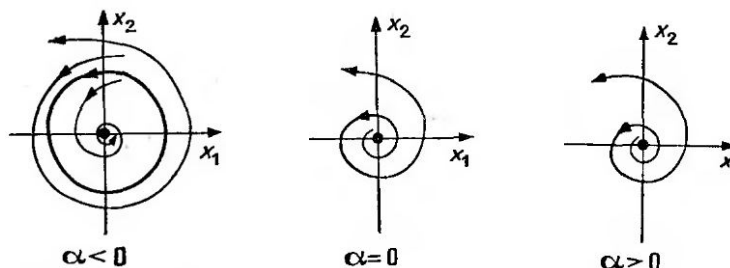


Рисунок 28 – Фазовий портрет системи (5.24)

Для $\alpha \leq 0$ всі фазові території траєкторії, що починаються в області $r \leq \sqrt{|\alpha|}$, а само α - негативне стискаються в точку початку координат, а траєкторії, що починаються в області $r \geq \sqrt{|\alpha|}$, розкручуються до нескінченності. У міру збільшення після переходу його через точку нуль, всі траєкторії розкручуються на нескінченність незалежно від того де вони починаються. Для обмеження зростання радіусу в такій системі необхідно враховувати члени вищого порядку. Така втрата стійкості називається жорсткою.

Біфуркація Андронова-Хопфа призводить до виникнення автоколивань. Їх частота визначається не зовнішнім впливом, а внутрішніми параметрами системи. Відповідне автоколивання можна розглядати як часову структуру. Крім часових структур, у природі також має місце виникнення просторових структур, які виникають також у результаті біфуркації.

Розглянемо тепер біфуркації із втратою симетрії. Вони виникають у тих випадках, коли рівняння, яке описує біфуркацію, має яку-небудь симетрію. Тоді, в принципі, цією ж симетрією має його рішення. Це відбувається доти, доки відповідне рівняння не зазнає біфуркації. Після біфуркації симетрія рішення виявляється втраченою. Подібного роду біфуркації називаються біфуркації зі втраченою або порушеною симетрією. Так рівняння

$$\dot{x} = \alpha x - x^3 \quad (5.26)$$

Симетрично щодо заміни $x \rightarrow -x$.

Для $\alpha \leq 0$, єдина стаціонарна точка $x_* = 0$. І видно, що рішення також задовольняє умову симетрії $x \rightarrow -x$.

Коли $\alpha \geq 0$, $x_* = \pm\sqrt{\alpha}$. Це рішення вже не задовольняє вихідній симетрії.

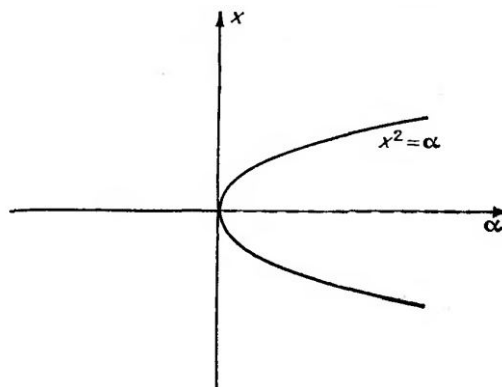


Рисунок 29 – Діаграма стаціонарних рішень – біфуркація типу «вилка».

5.7 Автоколивання в моделі Лотки – Вольтера

Для моделі Лотки-Вольтера

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy \\ \frac{dy}{dt} = k\beta xy - my \end{cases} \quad (5.27)$$

де α - швидкість розмноження жертв, m - швидкість вимирання хижака.

Стаціонарне рішення цієї системи

$$x_* = \frac{m}{k\beta}, \quad y_* = \frac{\alpha}{\beta} \quad (5.28)$$

Введемо безрозмірні змінні

$$X = \frac{x}{x_*}, \quad Y = \frac{y}{y_*} \quad (5.29)$$

У цих змінних $(X_*, Y_*) = (1, 1)$ і система має вид

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = \alpha X(1 - Y) \\ \frac{dY}{dt} = mY(X - 1) \end{cases} \quad (5.30)$$

Вважатимемо, що розглянута система знаходиться поблизу стаціонарної точки. В цьому випадку, $X = 1 + x'$, $Y = 1 + y'$, тоді зберігаючи тільки лінійні члени по x', y' , знайдемо

$$\begin{cases} \frac{dx'}{dt} = \alpha y' \\ \frac{dy'}{dt} = mx' \end{cases} \quad (5.31)$$

Звідси випливає, що чисельність хижаків та жертв осцилює із частотою $\omega = \sqrt{m\alpha}$.

Фазовим портретом системи, що розглядається, є сімейство еліпсів.

$$\frac{x'^2}{\alpha} + \frac{y'^2}{m} = const \quad (5.32)$$

Період T , представляє час обходу еліпса, буде дорівнювати

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{m\alpha}} \quad (5.33)$$

5.8 Система Лотки-Вольтерра з урахуванням обмеженого елемента їжі

Розглянута у попередньому параграфі система Лотки-Вольтерра не враховує обмеженості джерела харчування жертв.

Якщо раніше передбачалося, що швидкість розмноження жертв є постійною величиною ($\alpha = const$), то тепер вважатимемо, що

$$\alpha = \delta S - n \quad (5.33)$$

де S - це запас їжі; δ - коефіцієнт споживання їжі; n - визначає природну смерть жертв. В результаті отримуємо перехід від звичайної системи Лотки-Вольтерра до системи Лотки-Вольтерра з обмеженим харчуванням

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy \\ \frac{dy}{dt} = k\beta xy - my \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = (\delta S - n)x - \beta xy \\ \frac{dy}{dt} = k\beta xy - my \\ x + y + S = \Sigma = const \end{cases} \quad (5.34)$$

Останні рівняння висловлює замкнутість нашої системи. Величина називається загальним запасом лімітуючого елемента живлення у системі.

Отримана система має три стаціонарні точки

$$1) x_* = 0, \quad y_* = 0, \quad S_* = \Sigma$$

$$2) x_* = \Sigma - S_*, \quad y_* = 0, \quad S_* = \frac{n}{\delta}$$

$$3) x_* = \frac{m}{k\beta}, \quad y_* = \frac{\delta\Sigma - \delta x_* - n}{\beta + \delta}, \quad S_* = \Sigma - x_* - y_*$$

Перші дві стаціонарні точки не становлять інтересу, оскільки в першому випадку немає ні жертв, ні хижаків, а в другому немає хижаків. Тому досліджуватимемо на стійкість лише третю стаціонарну точку. Уявімо, що наша система збурена

$$x = x_* + x', \quad y = y_* + y', \quad S = S_* + S' \quad (5.35)$$

З рівняння виражаючого замкнутість системи випливає, що

$$x' + y' + S' = 0 \quad (5.36)$$

Перші два рівняння дають

$$\begin{cases} \frac{dx'}{dt} = (x_* + x')[\delta(S_* + S') - n - \beta(y_* + y')] \\ \frac{dy'}{dt} = (y_* + y')[k\beta(x_* + x') - m] \end{cases} \quad (5.37)$$

Зберігши в отриманих рівняннях члени лінійні за збуреннями, будемо мати такі диференціальні рівняння для збурень x', y'

$$\begin{cases} \frac{dx'}{dt} = -\delta x_* x' - (\delta + \beta) x_* y' \\ \frac{dy'}{dt} = y_* k \beta x' \end{cases} \quad (5.38)$$

Складаємо характеристичне рівняння для цієї системи

$$\begin{vmatrix} \lambda + \delta x_* & (\delta + \beta) x_* \\ -k \beta y_* & \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + \lambda \delta x_* + (\delta + \beta) k \beta x_* y_* = 0 \quad (5.39)$$

Його рішення

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\delta x_*}{2} \pm \sqrt{\frac{\delta^2 x_*^2}{4} - k \beta (\delta + \beta) x_* y_*} \quad (5.40)$$

З отриманого результату видно, що обидва корені негативні. Таким чином, стаціонарна точка є стійкою. Однак ця точка – стійкий вузол, а не фокус. Тому розглянута модель не дає автоколивального процесу.

5.9 Формула Моно

У 1942 році було запропоновано формулу, яка пов'язує швидкість зростання популяції з концентраціями лімітуючого субстрату (їжі). Ця формула дозволяє врахувати залежність зростання популяції від їжі. Формула Моно має вигляд

$$\mu = \mu_{\max} \frac{S}{K + S} \quad (5.41)$$

для рівняння динаміки популяції

$$\frac{dx}{dt} = \mu x \quad (5.42)$$

Стала K називається константою напівнасичення, S - живильний субстрат. Характер залежності, що визначається формулою Моно видно з рис.30, де зображена питома швидкість розмноження водоростей як функція вмісту в середовищі а) фосфатів і б) силікатів

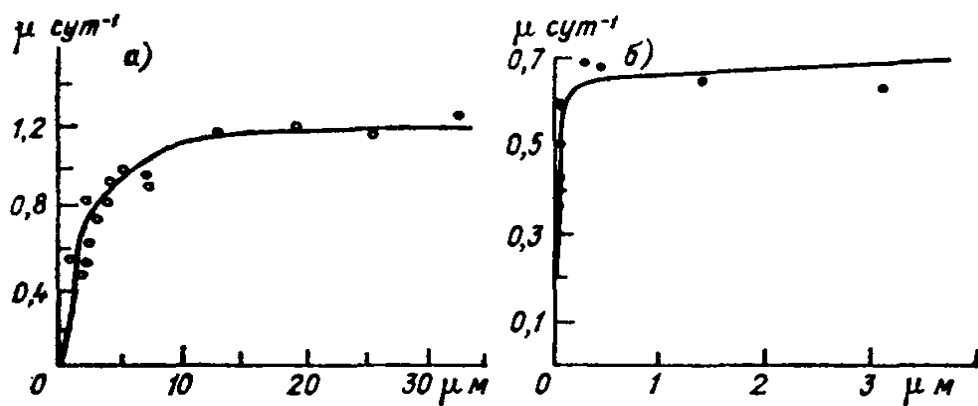


Рисунок 30 – Питома швидкість розмноження водоростей *Diatoma elongatum* як функція вмісту фосфатів (а) і силікатів (б).

З графіка видно, коли їжі мало, тоді мала швидкість розмноження. При великій кількості їжі досягається максимальна швидкість зростання популяції. Зрозуміло, що рівняння динаміки популяції з формулою Моно має бути доповнено рівнянням для живильного субстрату.

Розглянемо відповідний приклад

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\varepsilon x + \mu_{\max} \frac{Sx}{K+S} \\ x + S = \Sigma \end{cases} \quad (5.43)$$

У цій системі ε визначає швидкість природної загибелі, а швидкість зростання визначено формулою Моно. Замкнутість системи виражається тією самою умовою, як і вище.

Знайдемо стаціонарну точку для системи

$$S_* = \frac{\varepsilon K}{\mu_{\max} - \varepsilon}, \quad x_* = \Sigma - S_* \quad (5.44)$$

Досліджуємо на стійкість розглянуту точку. Поклавши

$$x = x_* + x', \quad S = S_* + S' \quad (5.45)$$

Отримаємо $S' + x' = 0$ і в лінійному наближенні

$$\frac{dx'}{dt} = -\frac{\mu_{\max} K x_*}{(K + S_*)^2} x' \quad (5.46)$$

Звідси видно, що якщо $x_* \geq 0$, то популяція стійка і в цьому відношенні динаміка популяції з формулою Моно аналогічна логістичному рівнянню. Як щож $x_* \geq 0$ популяція у разі вимре.

5.10 Система Лотки-Вольтерра з формулою Моно

У моделі Лотки-Вольтерра їжею для хижака є жертва, тому модель Лотки-Вольтерра набуває вигляду

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy \\ \frac{dy}{dt} = k\beta xy - my \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta \frac{x}{K+x} y \\ \frac{dy}{dt} = k\beta \frac{x}{K+x} y - my \end{cases} \quad (5.47)$$

Записана система має тривіальну стаціонарну точку та нетривіальну точку

$$x_* = \frac{Km}{k\beta - m}, \quad y_* = \frac{\alpha(K + x_*)}{\beta} = \frac{\alpha Kk}{k\beta - m} \quad (5.48)$$

Отримана точка відповідає кінцевому числу жертв та хижаків у системі. Досліджуємо стійкість одержаної стаціонарної точки. У лінійному наближенні для збурень маємо

$$\begin{cases} \frac{dx'}{dt} = \left[\alpha - \frac{\beta K}{(K + x_*)^2} \right] y_* x' - \frac{\beta x_*}{K + x_*} y' \\ \frac{dy'}{dt} = \frac{k\beta K}{(K + x_*)^2} x' \end{cases} \quad (5.49)$$

Характеристичне рівняння має вид

$$\begin{vmatrix} \lambda - \left[\alpha - \frac{\beta K}{(K + x_*)^2} \right] y_* & \frac{\beta x_*}{K + x_*} \\ -\frac{k\beta K}{(K + x_*)^2} & \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - \lambda \left[\alpha - \frac{\beta K}{(K + x_*)^2} \right] + \frac{k\beta^2 K x_*}{(K + x_*)^3} = 0 \quad (5.50)$$

В системі виникнути коливання в тому випадку, якщо відповідне рівняння матиме комплексно спряжені рішення. Це станеться, коли член при λ у характеристичному рівнянні дорівнюватиме нулю

$$\alpha - \frac{\beta K}{(K + x_*)^2} = 0 \quad (5.51)$$

Тоді

$$\lambda = \pm i \sqrt{\frac{k\beta^2 K x_*}{(K + x_*)^3}} \quad (5.52)$$

Отримана умова накладає обмеження на коефіцієнти Лотки-Вольтерра. Таким чином, ми бачимо, що використання формули Моно дійсно призводить до коливань у системі Лотки-Вольтерра.

5.11 Автоколивання в моделях популяцій з запізненням. Рівняння Хатчінсона

Модель Лотки-Вольтерра не єдиний приклад популяції з автоколиваннями в екології. Покажемо, що автоколивання виникають також у системі, де є кілька стадій розвитку. Наявність цих стадій призводить до того, що є запізнення у розвитку популяції від виникнення до деякого розвиненого стану. Найпростішим прикладом таких систем є популяція мух з обмеженим запасом їжі. Муха відкладає яйця, коли на неї припадає досить багато їжі, і вона має достатній запас протеїну. Тому зрозуміло, що з обмеження їжі, найбільша інтенсивність відкладання яєць відбуватиметься тоді, коли мало мух. Після того, як з яєць з'являється молоде покоління мух (імаго), яких багато і для яких запас їжі, що припадає на одну мало, відбувається припинення відкладання яєць. Таким чином, у системі виникають автоколивання; чисельність мух та яєць у протифазі: мух мало – яєць багато; мух багато – яєць мало тощо. Подібного роду коливання виникають у будь-якій популяції вікової структурою (вік особин змінюється в міру розвитку).

Для пояснення подібних коливань Хатчінсон у логістичному рівнянні ввів запізнення. Відповідне рівняння називається рівнянням Хатчінсона

$$\frac{dN}{dt} = N(\alpha - \gamma N) \Leftrightarrow \frac{dN(t)}{dt} = r \left[1 - \frac{N(t-\tau)}{K} \right] N(t) \quad (5.53)$$

τ - час запізнення.

Стаціонарним рішенням рівняння Хатчінсона є дві точки

$$N_* = 0, \quad N_* = K \quad (5.54)$$

Досліджуємо стійкість другої стаціонарної точки. Покладемо $N(t) = N_* + x(t)$, де $x(t)$ - збурення.

Підставляючи в рівняння Хатчінсона, отримаємо

$$\frac{dx(t)}{dt} + rx(t-\tau) = 0 \quad (5.55)$$

Будемо шукати розв'язок цього рівняння у вигляді $x(t) \propto e^{\lambda t}$, тоді отримаємо

$$\lambda e^{\lambda \tau} + r = 0 \quad (5.56)$$

Отримане рівняння вирішують щодо λ графічно. Виявляється, що за деяких значень r система починає мати комплексне рішення, що відповідає виникненню у цій системі автоколивання. Значення r , при якому це відбувається, визначається формулою $r = \frac{\pi}{2K\tau}$.

Коли $0 \leq r \leq \frac{\pi}{2K\tau}$

- стійка стаціонарна точка $N_* = 0$. Коли $r \geq \frac{\pi}{2K\tau}$ - стаціонарна точка $N_* = K$ є стійким фокусом.

ГЛАВА 6

ХВИЛІ І СТРУКТУРИ В ЕКОЛОГІЧНИХ СИСТЕМАХ

6.1 Розподілені екологічні системи

Раніше розглядалися системи однорідні у просторі, насправді багато біоценозів є просторово розподіленими. У таких системах збурення розповсюджуються із кінцевою швидкістю. Величина швидкості розповсюдження збурень визначається взаємодією сусідніх областей простору у біоценозі.

Розподілені екологічні системи належать до класу активних середовищ. У таких середовищах за втрати стійкості однорідного стану можливе виникнення хвиль або просторово неоднорідних структур.

Механізм виникнення просторової неоднорідності може бути пов'язаний з явищем дифузії, або з вибором напрямку міграції організмів біоценозу по градієнту їжі або будь-якого іншого фактора середовища.

Нехай $\bar{X}(\bar{r}, t)$ – біомаса (число особин) в одиниці простору, що залежить від часу та координат. Рівняння динаміки такої біомаси з урахуванням просторової дифузії має вигляд

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = F(X_1, X_2, \dots, X_n, \bar{r}) + D_i \frac{\partial^2 X_i}{\partial r^2} \quad (6.1)$$

Рівняння відрізняється від раніше вивчених тим, що в члені з F з'являється просторова залежність та додається дифузійний член. Система передбачається обмеженою у просторі з деякими граничними умовами на кордоні.

Наприклад, умова непроникності на кордонах для i -тої компоненти має вид

$$\left. \frac{\partial X_i}{\partial r} \right|_{r=0} = \left. \frac{\partial X_i}{\partial r} \right|_{r=L} = 0 \quad (6.2)$$

Нехай $\bar{X}(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n)$ - однорідне за простором рішення нашої системи. Ясно, що воно задовольняє рівняння

$$\frac{\partial \bar{X}_i}{\partial t} = F(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n) \quad (6.3)$$

Для збурень такого стану матимемо

$$x_i = X_i - \bar{X}_i \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + D_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial r^2} \quad (6.5)$$

$$\text{де } a_{ij} = \left. \frac{\partial F}{\partial X_i} \right|_{X_i = \bar{X}_i}$$

Рішення системи для збурень шукатимемо у вигляді

$$x_i = \alpha_i e^{p_k t + i k r} \quad (6.6)$$

де k - хвильове число моди з довжиною хвилі $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, тобто. рішення для збурень ми представляємо у вигляді просторової гармоніки $e^{i k r}$, амплітуда якої залежить від часу $A = e^{p_k t}$. Індекс в p_k означає залежність p від k .

Підставимо відповідний вираз для збурень у рівняння, ми отримаємо систему алгебраїчних рівнянь для визначення p_k . Відповідна система є однорідною

$$-(p_k + D_i k^2) \delta_{ij} + a_{ij} = 0 \quad (6.7)$$

де δ_{ij} - символ Кронекера.

Для того щоб ця система мала відмінне від нуля рішення, визначник системи повинен обернутися на нуль. Для двох змінних маємо

$$\begin{vmatrix} -(p_k + D_1 k^2) + a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -(p_k + D_2 k^2) \end{vmatrix} = 0 \quad (6.8)$$

Таке рівняння називається характеристичним чи дисперсійним. В результаті його рішення, виходить залежність $p_k \equiv p(k)$. Для двох змінних маємо квадратичне рівняння

$$p_k^2 - p_k (a_{11} + a_{22} + D_1 k^2 + D_2 k^2) + (a_{11} + D_1 k^2)(a_{22} + D_2 k^2) - a_{12} a_{21} = 0 \quad (6.9)$$

В результаті рішення отримуємо

$$p_{k,1} = \delta_1 + i\omega_1, \quad p_{k,2} = \delta_2 + i\omega_2 \quad (6.10)$$

Загалом дисперсійне рівняння для змінних має вигляд

$$p_k^n + q_{n-1}(k^2)p_k^{n-1} + q_{n-2}(k^2)p_k^{n-2} + \dots + q_0(k^2) = 0 \quad (6.11)$$

Якщо хоча б один корінь p_k має $\delta_k \geq 0$, це призведе до нестійкості однорідного рішення. Нестійкості поділяються на два види: коливальну та нестійкість Тьюринга. Перша нестійкість має місце коли парне число коренів має $\delta_k \geq 0$. Однорідність простору у разі зберігається. У разі коли непарне число коренів має $\delta_k \geq 0$ відбувається нестійкість Тьюринга та виникає просторова структура з хвильовим числом k_c та довжиною хвилі λ_c звана дисипативною.

6.2 Поширення збурень у популяції з дифузією. Модель Колмогорова – Петровского – Піскунова

Розглянемо логістичне рівняння для популяції з дифузійним членом

$$\frac{\partial N}{\partial t} = (\alpha - \gamma N)N + D \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \quad (6.12)$$

Вважається, що збурення поширюються вздовж вісі x . Записане рівняння відноситься до розглянутого вище класу рівнянь.

Припускаючи, що збурення малі, лінеарізуємо останнє рівняння, додавши до нього такі граничні умови: $N(-\infty) = \frac{\alpha}{\gamma}$, $N(\infty) = 0$.

Розглянемо область перед фронтом хвилі, коли N - мале і тоді рівняння для збурення буде таким

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + F'(0)N \quad (6.13)$$

Якщо шукати рішення рівняння у вигляді $N = ne^{-F'(0)t}$, то тоді для n отримаємо звичайне рівняння дифузії

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \quad (6.14)$$

Вирішення цього рівняння добре відоме. Воно виражається інтегралом Пуассона

$$n(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} n(z,0) e^{-\frac{(x-z)^2}{4Dt}} dz \quad (6.15)$$

$n(x,0)$ - початковий розподіл популяції n . Для дослідження цього рішення припустимо, що наша популяція в початковий час зосереджена у вузькій області Δx , $n(x,0) = N_0 \Delta x$.

В цьому випадку отримаємо

$$n(x,t) = \frac{N_0 \Delta x}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \quad (6.16)$$

Тоді вираз для популяції $N(x,t)$ буде

$$N(x,t) = \frac{N_0 \Delta x}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{\left(-\frac{x^2}{4Dt} + F'(0)t\right)} \quad (6.17)$$

Логарифмуючи, отримаємо

$$\ln N(x,t) = -\frac{x^2}{4Dt} + F'(0)t + \ln \frac{N_0 \Delta x}{2\sqrt{\pi D}} - \frac{1}{2} \ln t \quad (6.18)$$

Якщо термін часу великий, то член, що містить початкові значення популяції, можна опустити, крім того, можна опустити також член $\ln N$ и $\frac{1}{2} \ln t$ за їх малості, в результаті

$$\frac{x^2}{4Dt} = F'(0)t \quad (6.19)$$

І звідси для швидкості поширення популяції v отримаємо

$$v = \frac{x}{t} = 2\sqrt{DF'(0)} \quad (6.20)$$

Для логістичної популяції

$$v = 2\sqrt{D\alpha} \quad (6.21)$$

6.3 Модель УПХ (усамітнена популяційна хвиля) в популяції амброзієвого листоїду (жука)

Амброзію було завезено до СРСР у роки, коли було послаблено митний контроль. Цей бур'ян посилено розмножувався і зайняв територію України та півдня Росії. Має винятковий алергічний вплив на людину. Для боротьби з амброзією з Америки був завезений амброзійний листоїд (жук), який її посилено поїдає. Виявилось, що кількість жука на амброзійному полі поширюється як УПХ. Розглянемо модель, що дозволяє описати подібне поширення жука. Ця модель базується на класичній моделі КПП. Відповідну модель КПП доповнимо потоковим членом, який описує рух популяції жука у напрямку, в якому щільність амброзії зростає найбільшим чином.

Відповідні рівняння, що описують явище, що вивчається, мають вигляд

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{I} + f(n) \\ \vec{I} = -D \vec{\nabla} n + B \vec{\nabla} p \\ \frac{\partial p}{\partial t} = -An \end{cases} \quad (6.22)$$

У цих рівняннях n - щільність жука (кількість жуков на $1 m^2$), p - густина амброзії.

Поток жука \vec{I} складається з дифузійного потоку та потоку, пов'язанного з рухом жука у бік найбільшого зростання амброзії.

Останнє рівняння описує той факт, що швидкість знищення амброзії жуком пропорційна щільності жука.

$f(N)$ - нелінійна функція жука, що враховує розмноження жука і якісь обмеження його поширення у просторі.

Підставляючи формулу для потоку до першого рівняння, знайдемо

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} = D\Delta n - B\Delta p + f(n) \\ \frac{\partial p}{\partial t} = -An \end{cases} \quad (6.23)$$

Розглянемо рух жука в одному напрямку, який позначимо буквою x . Тоді від оператора Лапласа залишиться друга похідна по x

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - B \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + f(n) \\ \frac{\partial p}{\partial t} = -An \end{cases} \quad (6.24)$$

Шукатимемо рішення розглянутої системи у вигляді хвилі

$$\begin{aligned} n &= n(x - x_0 - vt) \\ p &= p(x - x_0 - vt) \end{aligned} \quad (6.25)$$

Ввівши координату $\xi = x - x_0 - vt$, і враховуючи що

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial n}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -v \frac{\partial n}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial n}{\partial x} = \frac{\partial n}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial n}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 n}{\partial \xi^2} \quad (6.26)$$

отримаємо

$$\begin{aligned} -vn' &= Dn'' - Bp'' + f(n) \\ p' &= \frac{A}{v}n \end{aligned} \quad (6.27)$$

де штрих означає похідну по ξ .

Таким чином, ми перейшли від системи приватних рівнянь до системи звичайних диференціальних рівнянь.

Виключаючи звідси p отримаємо

$$Dn'' + \left(v - \frac{AB}{v}\right)n' + f(n) = 0 \quad (6.28)$$

Якщо $f(n)$ буде лінійною функцією від n $f(n) = \alpha n$, то тоді ми можемо написати характеристичне рівняння, яке визначає експоненційне зростання жука

$$\lambda^2 D + \left(v - \frac{AB}{v}\right)\lambda + \alpha = 0 \quad (6.29)$$

Його рішенням буде експоненційно зростаюча або спадна залежність, оскільки

$$\lambda_{1,2} = -\left(v - \frac{AB}{v}\right) \pm \sqrt{\frac{\left(v - \frac{AB}{v}\right)^2 - 4D\alpha}{2D}} \quad (6.30)$$

Насправді експоненційного зростання чи спадання жука немає. Тому в нашому рівнянні до щільності жука повинен бути відсутнім член n . Ця умова дозволяє одразу визначити швидкість УПХ жука.

$$v = \sqrt{AB} \quad (6.31)$$

Таким чином, швидкість поширення УПХ визначається коренем квадратним зі швидкості поїдання амброзії та швидкості пошуку жуком їжі.

При цій умові досліджувана система зводиться до вигляду

$$\begin{cases} Dn'' + f(n) = 0 \\ p' = \frac{A}{v} n \end{cases} \quad (6.32)$$

Ця система має бути доповнена граничними умовами

$$n(\xi)|_{\xi \rightarrow \pm\infty} = 0, \quad p(\xi)|_{\xi \rightarrow -\infty} = 0, \quad p(\xi)|_{\xi \rightarrow \infty} = p_0 \quad (6.33)$$

Вирішимо отриману систему припускаючи, що $f(n)$ є квадратичною функцією від n

$$f(n) = E \left(\frac{n^2}{n_0} - n \right) \quad (6.34)$$

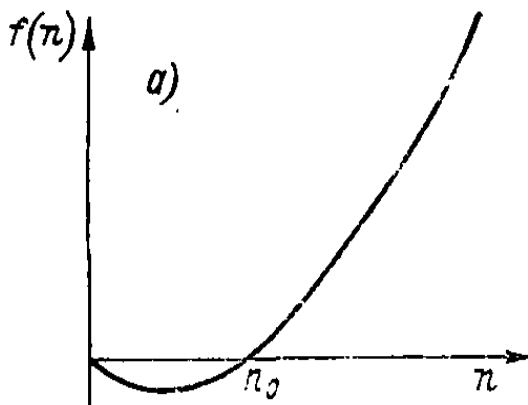


Рисунок 31 – Функція (5.88)

При цьому виникає рівняння, що не містить явно аргумент ξ

$$Dn'' + E \left(\frac{n^2}{n_0} - n \right) = 0 \quad (6.35)$$

Такого типу рівняння вирішуються підстановкою $n' = z$, тоді

$$n'' = \frac{dz}{dn} \frac{dn}{d\xi} = \frac{dz}{dn} z \quad (6.36)$$

В результаті отримуємо рівняння з змінними, що розділяються

$$Dzdz = E \left(n - \frac{n^2}{n_0} \right) dn \quad (6.37)$$

Інтегруючи і вважаючи, постійну інтегрування рівної нулю, в силу граничних умов, отримаємо

$$z = \sqrt{\frac{E}{D}} n \left(1 - \frac{2}{3} \frac{n}{n_0} \right)^{1/2} \quad (6.38)$$

Підставляючи сюди вираз для z , отримаємо рівняння для n

$$\frac{dn}{d\xi} = \sqrt{\frac{E}{D}} n \sqrt{1 - \frac{2}{3} \frac{n}{n_0}} \quad (6.39)$$

Це рівняння знову ж таки зі змінними, що розділяються

$$\frac{dn}{n \sqrt{1 - \frac{2}{3} \frac{n}{n_0}}} = \sqrt{\frac{E}{D}} d\xi \quad (6.40)$$

Проводимо заміну змінної

$$1 - \frac{2}{3} \frac{n}{n_0} = -t^2 \quad (6.41)$$

Заміна $-t^2$ пов'язана з тим, що за великих n , вираз зліва негативний. Звідси

$$n = \frac{3}{2} n_0 (1 + t^2), \quad dn = 3n_0 t dt \quad (6.42)$$

І, далі,

$$\int \frac{3n_0 t dt}{\frac{3}{2} n_0 (1 + t^2) i t} = \sqrt{\frac{E}{D}} \xi, \quad \frac{2}{i} \arctgt = \sqrt{\frac{E}{D}} \xi, \quad (6.43)$$

$$t = tgi\omega\xi, \quad \frac{2}{3} \frac{n}{n_0} = 1 + tg^2 i\omega\xi = \frac{1}{\cos^2 i\omega\xi}, \quad n = \frac{3n_0}{2ch^2 \omega\xi}$$

де $\omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E}{D}}$.

Остаточно,

$$n(x, t) = \frac{3n_0}{2ch^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{E}{D}} (x - vt) \right]} \quad (6.44)$$

Для щільності амброзії отримуємо

$$p(\xi) = \frac{A}{v} \int_{-\infty}^{\xi} n(\xi) d\xi \quad (6.45)$$

Звідки після обчислень

$$p = p_0 \left(th \omega \xi + \frac{1}{e^{2\omega \xi} + 1} \right) \quad (6.46)$$

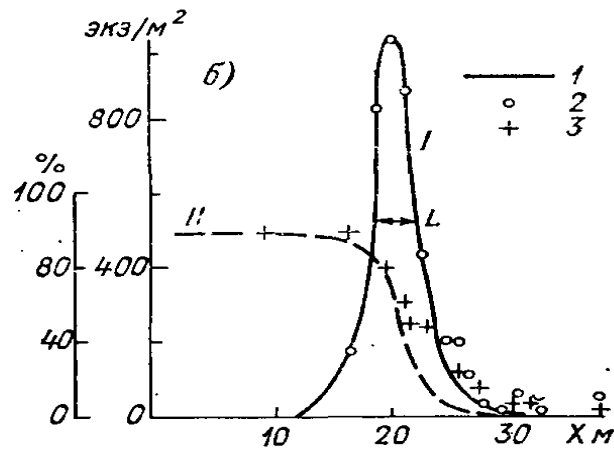


Рисунок 32– Графіки залежностей n і p

У всій вище викладеній теорії визначальним елементом харчування є недостатній елемент, що визначає зростання популяції – p . Такий підхід є наслідком закону Лібіха, або принципом мінімуму Лібіха.

Сучасне формулювання принципу Лібіха стверджує, що швидкість зростання популяції визначається безпосередньо не всіма елементами харчування, а лише тими, які знаходяться у найбільшому відносному дефіциті, тобто в екологічному мінімумі.

6.4 «Плямні структури» в біологічних спільнотах

Агрегування особин у просторі може спостерігатися не тільки в окремі моменти часу за несприятливих умов середовища, але існує досить тривалий час, утворюючи просторово неоднорідні структури. Ці структури прийнято називати плямами, або плямистими структурами.

Виникнення плям відображає взаємодію двох наступних факторів:

1. необхідність концентрації особин одного виду в групах для підвищення виживання за рахунок кооперативних ефектів, а саме спільне виділення метаболітів для кондиціонування середовища та хімічного захисту, поліпшення умов розмноження;

2. боротьба кожної особини за індивідуальне виживання.

Розглянемо ці взаємодії з прикладу фітопланктону.

Незважаючи на рухливість і хорошу перемішуваність поверхні, «цвітіння» мікро водоростей планктону відбувається не рівномірно по всій площі водойма, а окремими плямами від кількох метрів до кількох кілометрів. Простір між плямами збіднений планктоном. Встановлено, що плямистість водоростей пов'язана не тільки з неоднорідним розподілом біогенних елементів та температури, але також виникає в місцях з рівномірним розподілом цих показників.

Хоча математичні моделі типу «хижак – жертва» з дифузією і міграцією хижаків вказує на можливість утворення плямистих структур, проте, використання таких моделей не можна визнати задовільним, оскільки в місцях плям фітопланктон створює таку концентрацію метаболітів, що зоопланктон (хижак) уникає великих скупчень. Від метаболітів гине не лише зоопланктон, а й риба. Звідси можна дійти невтішного висновку, що утворення плям є суто популяційним ефектом.

Розглянемо наступну модель утворення плям з трьома змінними: щільністю фітопланктону X , лімітуючим елементом живлення S , концентрацією метаболітів M .

Відповідні рівняння мають вид

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 X}{\partial r^2} + X[-\delta + (\alpha + \gamma M)S] \\ \frac{\partial S}{\partial t} = D_s \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} - (\alpha + \gamma M)XS + C \\ \frac{\partial M}{\partial t} = D_m \frac{\partial^2 M}{\partial r^2} + \beta X - \varepsilon M \end{cases} \quad (6.47)$$

Ця система рівнянь має єдине стаціонарне однорідне у просторі рішення, яке визначається за умов

$$\begin{cases} -\delta + (\alpha + \gamma M)S_* = 0 \\ (\alpha + \gamma M)X_*S_* + C = 0 \\ \beta X_* - \varepsilon M_* = 0 \end{cases} \quad (6.48)$$

Звідси

$$X_* = \frac{C}{\delta}, \quad M_* = \frac{\beta}{\varepsilon} X_*, \quad S_* = \frac{\delta}{\alpha + \gamma M_*} \quad (6.49)$$

Досліджуємо стійкість одержаних стаціонарних рішень. Пишемо рівняння для збурень $\delta X = X - X_*$, $\delta S = S - S_*$, $\delta M = M - M_*$ цього стаціонарного стану, в результаті отримаємо характеристичне рівняння

$$\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0 \quad (6.50)$$

Це рівняння відноситься до рівняння виду

$$\lambda^N + a_1 \lambda^{N-1} + a_2 \lambda^{N-2} + a_3 \lambda^{N-3} + \dots + a_N = 0 \quad (6.51)$$

Для того, щоб коріння записаного рівняння мали негативні і дійсні частини необхідно і достатньо, щоб усі головні мінори матриці Гурвіца

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_N \end{pmatrix}. \quad (6.52)$$

були додатними. У загальному випадку рішення умов, що виходять з критерію Рауса – Гурвіца, досить складне і проводиться на комп'ютері.

В нашому випадку

$$a_1 \geq 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} \geq 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ 1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} \geq 0 \quad (6.53)$$

або

$$a_1 \geq 0, \quad a_1 a_2 - a_3 \geq 0, \quad a_3(a_1 a_2 - a_3) \geq 0 \quad (6.54)$$

Нестійкість настає коли

$$a_3(a_1 a_2 - a_3) = 0 \quad (6.55)$$

З цього рівняння можна визначити за якого значення, наприклад, параметра C у вихідному рівнянні виникає нестійкість. В результаті її розвитку, вихідний стаціонарний стан розпадається на окремі області в просторі, що пояснює утворення плям.

6.5 Хвилі цунамі

Раніше було показано, що нелінійні рівняння призводять до утворення усамітнених популяційних хвиль. Подібна ситуація має місце й у інших нелінійних явищах, зокрема у гідродинаміці. Так усамітнена хвиля може поширюватися вздовж морської поверхні. Причиною виникнення такої хвилі є землетруси або вулканічні виверження. Така хвиля зароджується досить далеко від берега у відкритому океані. Вона має досить велику довжину і є пологою (довжина хвилі близько 10-100 м, висота 1-2 м). Через малу висоту в океані таку хвилю не видно. Однак, коли така хвиля підходить до берега, її висота різко зростає за рахунок зменшення довжини хвилі і може досягатися десятків метрів. Швидкість поширення такої хвилі в Тихому океані, середня глибина якого становить 4 км, дорівнює 700 км/год. На поширення хвиль цунамі великий вплив мають топографічні особливості дна.

6.6 Гравітаційні хвилі

Розглянемо лінійну теорію хвиль на поверхні рідини в полі сили тяжкості. Такі хвилі називаються гравітаційними.

Уявімо, що рідина відхилилася від первісної плоскої поверхні. Для опису процесу поширення хвилі скористуємося рівняннями Ейлера

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = \vec{g} - \frac{\text{grad} p}{\rho} \\ \text{div} \vec{v} = 0 \end{cases} \quad (6.56)$$

Розглянемо розповсюдження лінійних хвиль. Це означає, що конвективним прискоренням можна нехтувати проти локального, тобто

$$\left| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right| \gg |(\vec{v} \nabla) \vec{v}| \quad (6.57)$$

Якщо a - амплітуда хвилі, λ - її довжина, τ - період, то записана умова означає, що

$$\frac{a}{\tau} \frac{1}{\tau} \gg \frac{1}{\lambda} \frac{a}{\tau} \frac{a}{\tau}, \quad \lambda \gg a \quad (6.58)$$

тобто довжина хвилі значно більша за амплітуду, і мова йде за довгі хвилі.

Будемо вважати, що хвильовий рух, що розглядається, є безвихровим

$$\vec{v} = \text{grad} \varphi \quad (6.59)$$

Для потенціалу швидкості φ отримаємо

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \Rightarrow p = -\rho g z - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (6.60)$$

і, крім того, потенціал задовольняє рівняння Лапласа $\Delta \varphi = 0$.

До цих умов слід додати умови на поверхні рідини. Вважатимемо, що на поверхні рідини, відхилення обумовлене хвилею ξ , p_0 - атмосферний тиск, тоді

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=\xi} \\ p_0 &= -\rho g \xi - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{aligned} \quad (6.61)$$

Також будемо вважати, що амплітуда хвилі не залежить від x і визначається глибиною

$$\varphi(x, z) = \Phi(z) \cos(\omega t - kx) \quad (6.62)$$

Підставляючи цей вираз в рівняння Лапласа, знайдемо

$$-k^2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (6.63)$$

Звідси

$$\Phi(z) = Ae^{kz} + Be^{-kz} \quad (6.64)$$

Враховуючи, що при $z \rightarrow -\infty$ рішення має залишатися кінцевим в отриманому рішенні слід обмежитися лише першим членом. Таким чином, потенціал швидкості, обумовлений довжиною гравітаційної хвилі, має вид

$$\varphi(x, z) = Ae^{kz} \cos(\omega t - kx) \quad (6.65)$$

Повернемося до нашої системи рівнянь. Покладемо, що $p_0 = 0$. Тоді маємо таку систему

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=\xi} \\ -g\xi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{cases} \quad (6.66)$$

Диференціюючи друге рівняння за часом, отримаємо

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (6.67)$$

Підставляючи в отримане рівняння вираз (6.62), будемо мати

$$-\omega^2 + gk = 0 \quad (6.68)$$

Звідси видно, що частота довгих гравітаційних хвиль дорівнюватиме

$$\omega = \sqrt{gk} = \sqrt{\frac{2\pi g}{\lambda}} \quad (6.69)$$

Чим довша хвиля, тим менша її частота.

Швидкість поширення гравітаційної хвилі дорівнює

$$c = \frac{\lambda}{\tau} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \quad (6.70)$$

Чим довша хвиля, тим більша її швидкість.

6.7 Гравітаційні хвилі в шарі рідини кінцевої товщини

Нехай рідина має глибину h . Раніше ми використали $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=-\infty} = 0$, що висловлює умову

обернення на нуль швидкості на границі. Тепер ця умова заміниться на $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=-h} = 0$.

Через це в рішенні рівняння Лапласа слід зберегти обидва члени $\Phi(z) = Ae^{kz} + Be^{-kz}$, тоді гранична умова дає

$$Ae^{-kh} = Be^{kh} \quad (6.71)$$

Вираз для Φ прийме вид

$$\Phi = Achk(z+h) \quad (6.72)$$

Як бачимо наявність границі призводить, до того, що e^{kz} замінюється на гіперболічний косінус, і, таким чином, потенціал швидкості в шарі рідини приймає вид

$$\varphi(x, z) = Achk(z+h)\cos(\omega t - kx) \quad (6.73)$$

Підставляючи цей вираз в хвильове рівняння для φ , отримаємо

$$\left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right|_{z=\xi} + g \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=\xi} = 0 \quad (6.74)$$

Звідки с урахуванням виразу для φ знайдемо циклічну частоту

$$\omega = \sqrt{gk \cdot th(kh)} \quad (6.75)$$

Якщо товщина шару рідини мала у порівнянні з довжиною хвилі, то $th(kh) \approx kh$, і для довгих хвиль на поверхні шару частота буде дорівнювати

$$\omega = k\sqrt{gh} \quad (6.76)$$

Швидкість розповсюдження буде

$$c = \sqrt{gh} \quad (6.77)$$

Тобто. швидкість гравітаційної хвилі пропорційно до кореня квадратного з глибини. Чим менша глибина, тим менша швидкість хвилі.

Глибина моря чи океану зменшується з наближенням до берега. Введемо систему координат (рис. 33)

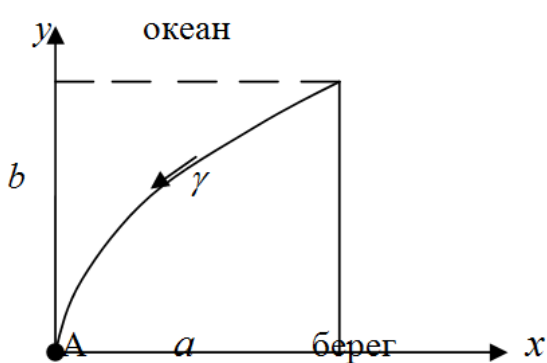


Рисунок 33 –Траекторія хвилі

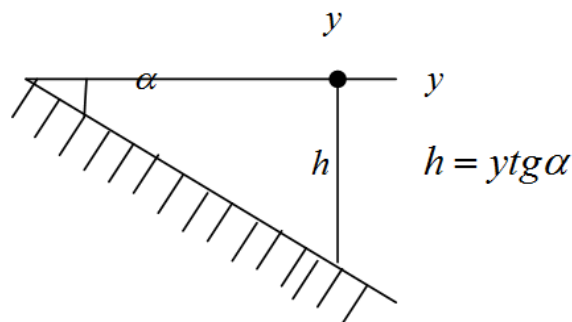


Рисунок 34 – Профіль дна

Припустимо, що кут, який визначає збільшення глибини у міру віддалення від берега дорівнює α . Тоді $h = ytg\alpha$.

Визначимо час за який гравітаційна хвиля досягіє точки А, рухаючись по лінії γ

$$T = \int_{\gamma} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{c} = \int_{\gamma} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{gh}} = \int_{\gamma} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{gylg\alpha}} dx \quad (6.78)$$

З усіх можливих шляхів, по яким розповсюджуються хвилі від джерела до точки А, нас буде цікавити шлях, для якого T мінімальне. Як бачимо задача зводиться до знаходження такого значення $y = y(x)$, при якому розглядаємий інтеграл має екстремум.

6.8 Варіаційне числення

Вище був розглянений принцип Гамільтона, згідно з яким класична механіка може бути побудована з умови мінімальності дії. Принцип Гамільтона як і розглядаєма вище задача відноситься до задач варіаційного числення. У цьому розділі математики вивчаються екстремуми функціоналу

$$v[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx \quad (6.79)$$

Функціонал уявляє собою визначений інтеграл і його значення залежить від функції $y = y(x)$. Таким чином, серед можливих значень функцій $y(x)$, які проходять через точки x_1 і x_2 , треба вибрати таку функцію, для якої наш функціонал досягав би екстремального значення.

Варіаційне числення було створено Ейлером і його основу складають три задачі:

1) задача про брахістохрону, в цій задачі слід знайти криву, по якій треба рухатися з точки А в точку В, які розташовуються в полі сили тяжіння в вертикальній площині для того, щоб час з'їзду був мінімальним;

2) задача про геодезичні лінії. Нехай задана поверхня $z = z(x, y)$, на якій задано дві точки. Запитується по якій лінії слід йти від точки А до точки В, щоб її довжина була мінімальною;

3) ізопериметрична задача. Полягає в тому, щоб лінією заданої довжини охопити на площині найбільшу площу.

Ейлер показав, що задача про екстремум функціонала зводиться до рішення диференціального рівняння, яке тепер носить його ім'я.

Розглянемо варіацію функціонала при зміні функції $y(x) \rightarrow y(x) + \delta y$. Очевидно, що якщо функція $y(x)$ обумовлює екстремуми функціонала, то варіація функціонала має дорівнювати нулю

$$\delta v = 0 = \int_{x_1}^{x_2} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y') dx \quad (6.80)$$

Перетворюючи другий інтеграл інтегруванням частинами, отримаємо

$$\int_{x_1}^{x_2} (F_y - \frac{dF_{y'}}{dx}) \delta y dx = 0 \quad (6.81)$$

Звідси маємо рівняння Ейлера

$$F_y - \frac{dF_{y'}}{dx} = 0 \quad (6.82)$$

яка визначає функцію. функціоналу, що доставляє екстремум.

Записане рівняння Ейлера можна розписати докладніше

$$F_y - F_{xy'} - F_{yy'} y' - F_{y'y'} y'' = 0 \quad (6.83)$$

Як приклад використання рівняння Ейлера розглянемо задачу про брахістохрону. Виберемо систему координат так, щоб початок збігався з точкою з'їзду і вісь прямувала вертикально вниз.

Швидкість будь-якої в точці шуканої кривої визначається законом збереження енергії. Час з'їзду визначається інтегралом

$$T = \int \frac{dS}{v} = \int_0^x \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{2gy}} = \int_0^x \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx \quad (6.84)$$

Отже, у нашому випадку,

$$F(x, y, y') = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}} \quad (6.85)$$

Як бачимо функція F не залежить від x . Для такої функції рівняння Ейлера спрощується

$$F_y - F_{yy'} y' - F_{y'y'} y'' = 0 \quad (6.86)$$

Його можна представити як

$$\frac{d}{dx} (F - y' F_{y'}) = 0 \quad (6.87)$$

Таким чином, задача знаходження функції зводиться до рішення рівняння

$$F - y' F_{y'} = C \quad (6.88)$$

Для функції $F = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}}$ рівняння перетворюється на

$$y(1 + y'^2) = C_1 \quad (6.89)$$

де $C_1 = \frac{1}{C^2}$.

Рішення рівняння дає шукану криву в параметричному виді

$$x = R(t - \sin t), \quad y = R(1 - \cos t) \quad (6.90)$$

де $R = C_1/2$.

Отриманий вираз є параметричним рівнянням кривої, яка забезпечує мінімальний час з'їзду. Відповідна крива називається циклоїдою. Вона виникають при описі руху точки колеса щодо дороги. Коли колесо обернеться на кут φ , відстань між точкою торкання дороги A і новим положенням B складе AB . Точка B буде знаходитися на висоті y :

$$\begin{aligned} AB &= 2R \sin \frac{\varphi}{2} \\ y &= AB \sin \frac{\varphi}{2} = 2R \sin \frac{2\varphi}{2}. \end{aligned} \quad (6.91)$$

Якщо пройшов проміжок часу t , то колесо повернулося на кут $\varphi = \omega t = \frac{V}{R}t$.

В результаті для координати y отримаємо:

$$\begin{aligned} y &= 2R \sin^2 \left(\frac{Vt}{2R} \right) = R \left(1 - \cos \frac{Vt}{R} \right); \\ x &= Vt = AB \cos \frac{\varphi}{2} = Vt - 2R \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = Vt - R \sin \varphi = Vt - R \sin \frac{Vt}{R} = \\ &= R \left(\frac{Vt}{R} - \sin \frac{Vt}{R} \right). \end{aligned} \quad (6.92)$$

Введемо позначення: $\tau = \frac{Vt}{R}$ - безрозмірний час.

$$\begin{aligned} y &= R(1 - \cos \tau) \\ x &= R(\tau - \sin \tau) \end{aligned} \quad \text{- рівняння циклоїди.}$$

Таким чином, точка колеса рухається по циклоїді.

6.9 Час спуску по брахістохроні

Час спуску з точки A в точку B очевидно визначається інтегралом

$$T = \int \frac{dS}{v} = \int_0^a \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{2gy}} = \int_0^a \frac{\sqrt{1 + y_x'^2}}{\sqrt{2gy}} dx. \quad (6.93)$$

В точці B будемо мати:

τ^* - в час з'їзду.

$$\begin{aligned} a &= R \left(\tau^* - \sin \tau^* \right) \\ b &= R \left(1 - \cos \tau^* \right). \end{aligned} \quad (6.94)$$

З другого рівняння для τ^* маємо: $\tau^* = \arccos\left(1 - \frac{b}{R}\right)$.

Використовуючи цей результат, виразимо цікавлячий нас час T (розмірний) через безрозмірний час з'їзду τ^* , для чого зробимо заміну змінних в формулі (6.93) x на τ .

$$T = \int_0^{\tau^*} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\tau}{2}}}{\sqrt{2g} \sqrt{2R} \sin \frac{\tau}{2}} 2R \sin^2 \frac{\tau}{2} d\tau = \sqrt{\frac{R}{g}} \tau^*. \quad (6.95)$$

Тут ми скористалися раніше отриманими співвідношеннями, а саме

$$y'_x = \operatorname{ctg} \frac{\tau}{2}; \quad y = R(1 - \cos \tau) = 2R \sin^2 \frac{\tau}{2}. \quad (6.96)$$

$$dx = R(1 - \cos \tau) d\tau = 2R \sin^2 \frac{\tau}{2} d\tau. \quad (6.97)$$

В результаті маємо вираз для розмірного часу з'їзду:

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{\frac{R}{g}} \tau^*; \\ T &= \sqrt{\frac{R}{g}} \arccos\left(1 - \frac{b}{R}\right). \end{aligned} \quad (6.98)$$

6.10 Карти часів добігання цунамі

Хвилі цунамі належать до найбільш небезпечних природних катастроф. Висока швидкість поширення цунамі в океані на відстані від берега (сотні кілометрів на годину) не дозволяє прогнозувати еволюцію хвилі в реальному часі, тобто не залишає часу на будь-яку підготовку зустрічі з хвилею. Тому в багатьох країнах діють національні служби, які покликані сповіщати населення прибережної зони про наближення хвилі в той момент, як тільки землетрус в океані стався.

Знайдемо час добігання цунамі до якогось прибережного пункту, вважаючи, що глибина океану лінійно зростає з відстанню від берега.

Для часу добігання хвилі з початкової точки C в кінцеву A дорівнює:

$$T = \int_{\gamma} \frac{dS}{v} = \int_{\gamma} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{gH}}. \quad (6.99)$$

З рис.34 видно, що $H = ytg\alpha$. Таким чином, вираз для часу добігання хвилі приймає такий самий вид як і у разі часу з'їзду по брахістохроні. Відмінність полягає в заміні двійки на $tg\alpha$.

$$T = \int_0^a \frac{\sqrt{1+y_x^2}}{\sqrt{gytg\alpha}} dx. \quad (6.100)$$

В результаті для часу добігання ми отримуємо наступний вираз:

$$T = \sqrt{\frac{R}{gtg\alpha}} \arccos\left(1 - \frac{b}{R}\right). \quad (6.101)$$

На основі цієї формули складається вся сукупність часу добігання для цього населеного пункту в залежності від місця виникнення цунамі. Відповідна сукупність називається картою добігання цунамі.

Вперше така карта була створена 1947 року для кількох населених пунктів Тихоокеанського прибережжя США (1946 року мала місце катастрофічна голлівудська цунамі). Надалі подібні карти були створені для Тихоокеанського узбережжя СРСР, Японії, Індонезії.

Постійно ведеться спостереження за місцями в океані, де можливий землетрус або виверження вулканів. Після виявлення такого виверження на підставі наявних карток, населенню повідомляють про наявний у нього запас часу.

6.11 Форма усамітненої хвилі (цунамі) в океані

Раніше було знайдено дисперсійне рівняння для поверхневої хвилі з глибиною рідиною h

$$\omega^2 = gkh(th(kh)) \quad (6.102)$$

Будемо вважати, що глибина рідини достатньо мала, так що $th(kh)$ можна розкласти по степеням kh , в результаті

$$\omega^2 = gh\left(kh - \frac{(kh)^3}{3}\right) \quad (6.103)$$

Звідси

$$\omega = \sqrt{ghk} \left(1 - \frac{(kh)^2}{3}\right)^{1/2} \approx \sqrt{ghk} \left(1 - \frac{(kh)^2}{6}\right) \quad (6.104)$$

Оскільки $\sqrt{gh} = c$, то

$$\omega = ck - \frac{ck^3 h^2}{6} \quad (6.105)$$

Помножимо обидві частини рівняння на $A \sin(\omega t - kx)$. Вважаючи, що зміщення, обумовлене хвилею

$$\xi = A \sin(\omega t - kx) \quad (6.106)$$

де A - залежить від x і t .

Враховуючи, що

$$\omega A \sin(\omega t - kx) = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad k A \sin(\omega t - kx) = -\frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad k^3 A \sin(\omega t - kx) = \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} \quad (6.107)$$

отримаємо для зміщення викликаного хвилею наступне рівняння

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + c \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{ch^2}{6} \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} = 0 \quad (6.108)$$

Отримане рівняння має бути доповнено нелінійним членом. Він виникає через наявність у рівнянні Ейлера конвективного прискорення і виявляється рівним $\frac{3c}{2h} \xi \frac{\partial \xi}{\partial x}$. В результаті рівняння, що описує поширення хвилі в досить тонкому шарі рідини, набуває остаточної форми

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + c \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{3c}{2h} \xi \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{ch^2}{6} \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} = 0 \quad (6.109)$$

і називається рівнянням Кортевега-де Фріза. Воно описує усамітнену хвилю на поверхні рідини. У цьому рівнянні міститься нелінійний член, який відповідає за укручування хвилі та дисперсійний член (з третьою похідною), який відповідає за розпливання хвилі. Внаслідок боротьби цих протилежних тенденцій утворюється стійка усамітнена хвиля, яка отримала назву солітону. Такі хвилі мають властивість частинок. Так при зіткненні двох солітонів вони потім розходяться не змінюючи своєї форми. Вперше усамітнену хвилю спостерігав Рассел.

Шукатимемо рішення рівняння Кортевега де Фріза у виді

$$\xi = h\zeta(X) = h\zeta(x - ut) \quad (6.110)$$

Тим самим, ми вважаємо що хвиля розповсюджується зі швидкістю u . Враховуючи, що похідні за часом та координатою дорівнюють

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial t} = -u \frac{\partial}{\partial X}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X} \quad (6.111)$$

з рівняння Кортевега-де Фріза отримаємо звичайне рівняння

для ζ , в якому штрих означає похідну по X

$$\frac{h^2}{6}\zeta'''' + \frac{3}{2}\zeta\zeta' - \left(\frac{u}{c} - 1\right)\zeta' = 0 \quad (6.112)$$

Домноживши рівняння на dx і інтегруючи, получимо

$$\frac{h^2}{6}\zeta''' + \frac{3}{4}\zeta^2 - \left(\frac{u}{c} - 1\right)\zeta + C_1 = 0 \quad (6.113)$$

Домноживши (6.113) на $d\zeta$ і інтегруючи, отримаємо

$$\frac{h^2}{12}\zeta'^2 + \frac{1}{4}\zeta^3 - \left(\frac{u}{c} - 1\right)\frac{\zeta^2}{2} + C_1\zeta + C_2 = 0 \quad (6.114)$$

Константи інтегрування C_1 і C_2 дорівнюють нулю, так как ζ і ζ' на нескінченності обертаються на нуль. Таким чином, остаточно маємо наступне рівняння

$$\frac{h^2}{3}\left(\frac{d\zeta}{dX}\right)^3 = \zeta^2(\alpha - \zeta), \quad \alpha = 2\left(\frac{u}{c} - 1\right) \quad (6.115)$$

Інтегрування цього рівняння повністю аналогічне інтегрування рівняння для амброзії жука. В результаті маємо для форми відокремленої хвилі таку ж залежність як для амброзієвого листоїду

$$\zeta = \frac{\alpha}{ch^2\left(\sqrt{\frac{3\alpha}{4h^2}}(x - ut)\right)} \quad (6.116)$$

Хвилі з такою формою називаються кноїдальними.

ГЛАВА 7

ВИПАДКОВІСТЬ В ЕКОЛОГІЇ

7.1 Загальні відомості з теорії ймовірностей

Розглянуті раніше рівняння носять детерміністичний характер. Це означає, що коефіцієнти, які входять до них, вважаються заданими. Насправді такі величини як швидкість народження, або швидкість загибелі мають випадковий характер, і в записаних раніше рівняння всі коефіцієнти слід розглядати як деякі середні. Подальше викладення враховує випадковість усіх таких величин.

Усі випадкові величини можна поділити на дискретні та безперервні. Кожна величина характеризується законом розподілу. Відповідний закон встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкових величин та відповідними їм ймовірностями.

Кожна випадкова величина має певний закон розподілу.

Випадкові величини характеризуються:

- 1) рядом розподілу. Це таблиця, в якій вказано значення випадкової величини та її ймовірності

x_1	x_2	x_3	x_n
p_1	p_2	p_3	p_n

Випадкову величину прийнято позначати X , а її значення x_i . Очевидно, що сума $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

- 2) функцією розподілу $F(x)$. Ця функція виражає ймовірність того, що випадкова змінна набуде значення менше, ніж x

$$F(x) = P(X \leq x), \quad F(-\infty) = 0, \quad F(\infty) = 1$$

Для дискретної випадкової змінної функція розподілу є східчастою.

- 3) щільністю розподілу. Для безперервної випадкової величини щільністю називається функція

$$f(x) = F'(x), \quad f(x) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad (7.1)$$

З визначення слідує, що $f(x)dx$ є ймовірність випадкової величини X мати значення на елементарному інтервалі dx . Має місце також зворотне співвідношення

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx \quad (7.2)$$

Ймовірність влучення випадкової величини X у кінцевий інтервал $\alpha \leq X \leq \beta$ дорівнює

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = F(\beta) - F(\alpha) \quad (7.3)$$

4) математичним очікуванням випадкової величини. Їм називається величина рівна

а) для дискретної випадкової величини

$$M[X] = \sum_{i=1}^n p_i x_i \quad (7.4)$$

б) для безперервної величини

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (7.5)$$

Для математичного очікування використовується також позначення $m_x = M[X]$.

Математичне очікування є середнім значенням випадкової величини.

5) дисперсією випадкової величини. За визначенням

$$\text{а) } D[X] = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2 p_i \quad (7.6)$$

$$\text{б) } D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx \quad (7.7)$$

Для дисперсії також використовується позначення $D_x = D[X]$.

б) середнім квадратичним відхиленням

$$\sigma = \sqrt{D[X]} \quad (7.8)$$

7) початковими та центральними моментами.

початкові моменти

$$\text{а) } \alpha_k = \sum_{i=1}^n x_i^k p_i \quad \text{б) } \alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx \quad (7.9)$$

центральні моменти

$$\text{б) } \mu_k = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^k p_i \quad \text{б) } \mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k f(x) dx \quad (7.10)$$

З визначення моментів видно, що математичне очікування є першим початковим моментом, а дисперсія є другим центральним моментом.

7.2 Розподіл випадкових величин

1. Випадкова величина X розподілена за біноміальним законом, якщо її можливе значення $0, 1, 2, \dots, n$, має ймовірність

$$P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad q = 1 - p \quad (7.11)$$

де $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ - кількість поєднань.

2. Випадкова величина X розподілена за законом Пуассона, якщо її можливе значення $0, 1, 2, \dots, n$, має ймовірність

$$P(X = m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \quad a = m_x \quad (7.12)$$

Розподіл Пуассона виходить із біноміального розподілу при виконанні наступних умов:
 $n \rightarrow \infty, n \geq m$.

Покажемо це

$$P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m} = \frac{(n-m)! n^m}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m} \approx \frac{(np)^m}{m!} (1-p)^n \quad (7.13)$$

Якщо p ймовірність події в одному досліді, а n - кількість дослідів, то величина $a = np$ є середнє значення випадкової величини.

В результаті для $n \rightarrow \infty$ отримаємо

$$P(X = m) = \frac{(a)^m}{m!} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n = \frac{a^m}{m!} e^{-a} \quad (7.14)$$

Неважко підрахувати, що для біноміального розподілу $m_x = np$, $D_x = npq$, а для розподілу Пуассона $m_x = D_x = a$, таким чином, розподіл Пуассона визначається єдиною величиною – середнім значенням.

Розподіл Пуассона часто зустрічається у природі. За Пуассоном розподілено число крапель дощу, що падають з часом на одиницю площі, число випадкових сигналів сприймається наступником з часом тощо. m випадкової величини. Якщо можливість випадання краплі або приходу сигналу в одиницю часу q , то середня кількість крапель або сигналів за проміжок часу t буде дорівнювати qt . Тоді ймовірність надходження n сигналів або такого числа крапель дорівнюватиме

$$p_n = \frac{(qt)^n}{n!} e^{-qt} \quad (7.15)$$

3. Розподіл Гауса має місце для безперервної випадкової величини. Його щільність ймовірності

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (7.16)$$

Ймовірність того, що випадкова величина потрапляє в інтервал $(\alpha \leq X \leq \beta)$ визначається формулою

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right), \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt \quad (7.17)$$

Розподіл Гауса впливає з розподілу Пуассона за умови малих відхилень від середнього значення та великої кількості дослідів ($n \rightarrow \infty$).

7.3 Процеси народження – загибелі (генерація – рекомбінація)

Відповідні процеси називаються однокроковими процесами. Безліч значень, які приймають випадкові величини є безліч цілих чисел від нуля до N .

Випадкові величини можуть змінювати своє значення на сусідні (зі значення n переходить на значення $n+1$ або $n-1$).

Тут сукупність величин $g_0, g_1, g_2, \dots, g_{N-1}$, визначає ймовірність генерації чи народження в одиницю часу у відповідному стані. Сукупність чисел $r_1, r_2, r_3, \dots, r_N$ визначає ймовірність загибелі або рекомбінації в одиницю часу відповідного стану.

Складемо основне кінетичне рівняння, яке описує зміну з часом ймовірності p_n для значення випадкової величини n

$$\dot{p}_n = r_{n+1}p_{n+1} + g_{n-1}p_{n-1} - r_n p_n - g_n p_n \quad (7.18)$$

Наведене рівняння можна спростити, якщо ввести оператор народження E та загибелі E^{-1} , ($EE^{-1} = 1$). Дія цих операторів на функції n визначається за правилом

$$Ef(n) = f(n+1), \quad E^{-1}f(n) = f(n-1) \quad (7.19)$$

Для великих N має місце також очевидна рівність, пов'язана зі зміною місцями функцій,

$$\sum_{n=0}^{N-1} g(n)Ef(n) = \sum_{n=1}^N f(n)E^{-1}g(n) \quad (7.20)$$

У цих операторах основне кінетичне рівняння набуває вигляду

$$\dot{p}_n = (E-1)r_n p_n + (E^{-1}-1)g_n p_n$$

7.4 Основне кінетичне рівняння

З основного кінетичного рівняння (7.18) впливає рівняння для початкових моментів

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^N n p_n, \quad \langle n^2 \rangle = \sum_{n=0}^N n^2 p_n \quad (7.21)$$

Помноживши основне кінетичне рівняння на n і підсумовуючи, отримаємо, використовуючи зазначену вище рівність зі змінною місць,

$$\langle \dot{n} \rangle = \sum_{n=0}^N n(E-1)r_n p_n + \sum_{n=0}^N n(E^{-1}-1)g_n p_n = \sum_{n=0}^N r_n p_n (E^{-1}-1)n + \sum_{n=0}^N g_n p_n (E-1)n = -\langle r_n \rangle + \langle g_n \rangle \quad (7.22)$$

Таким чином,

$$\langle \dot{n} \rangle = -\langle r_n \rangle + \langle g_n \rangle \quad (7.23)$$

Отримане вираз є рівнянням для середньої величини $\langle n \rangle$. Рівняння такого типу вивчалася раніше. Що стосується, коли процес випадковий, цього рівняння мало. І потрібні рівняння для моментів вищого порядку. Зокрема, для другого моменту основне кінетичне рівняння слід помножити на n^2 і провести ті самі перетворення, після яких, отримаємо

$$\langle n^2 \rangle = 2\langle n(g_n - r_n) \rangle + \langle g_n \rangle + \langle r_n \rangle \quad (7.24)$$

Цього рівняння не було у тому випадку, коли ми описували відповідний процес детерміністичним чином.

Знайдемо тепер загальне рішення для стаціонарного розподілу процесу народження загибелі.

У стаціонарному випадку основне кінетичне рівняння має вигляд

$$p_n^S = 0, \quad (E-1)r_n p_n^S + (E^{-1}-1)g_n p_n^S = 0, \quad (E-1)(r_n p_n^S - E^{-1}g_n p_n^S) = 0 \quad (7.25)$$

Де під час запису останньої рівності ми використовували тотожність $E^{-1}-1 = -E^{-1}(E-1)$

Вважаючи, що $r_n p_n^S = E^{-1}g_n p_n^S = g_{n-1} p_{n-1}^S$, знайдемо

$$p_n^S = \frac{g_{n-1}}{r_n} p_{n-1}^S = \frac{g_{n-1}}{r_n} \frac{g_{n-2}}{r_{n-1}} p_{n-2}^S = \dots = \frac{g_{n-1}}{r_n} \frac{g_{n-2}}{r_{n-1}} \dots \frac{g_0}{r_1} p_0^S \quad (7.26)$$

Таким чином, стаціонарне рішення дорівнює добутку всіх швидкостей генерації (або народження) на ймовірність початкового стану поділене на добуток всіх швидкостей рекомбінації (загибелі). Ймовірність початкового стану у стаціонарному стані перебуває з умови нормування

$$\sum_{n=0}^N p_n^S = 1 \Rightarrow p_0^S + \sum_{n=1}^N p_n^S = p_0^S + \sum_{n=1}^N \frac{g_{n-1}}{r_n} \frac{g_{n-2}}{r_{n-1}} \dots \frac{g_0}{r_1} p_0^S = 1, \quad \frac{1}{p_0^S} = 1 + \sum_{n=1}^N \frac{g_{n-1}}{r_n} \frac{g_{n-2}}{r_{n-1}} \dots \frac{g_0}{r_1} \quad (7.27)$$

Розглянемо приклади

а) хімічна реакція $A \xrightleftharpoons[k']{k} X$. Для цієї реакції швидкість процесу народження молекули X

рівна $g_n = k n_A$, а швидкість загибелі $r_n = k' n$

n_A - число молекул A ; n - число молекул X ; k - швидкість реакції; k' - швидкість зворотної реакції.

Основне кінетичне рівняння для цієї реакції має вид

$$\dot{p}_n = (E-1)k'np_n + (E^{-1}-1)kn_Ap_n \quad (7.28)$$

Звідси для середнього значення n знайдемо

$$\langle \dot{n} \rangle = -k'\langle n \rangle + kn_A \quad (7.29)$$

У випадку стаціонарного стану $\langle \dot{n} \rangle_s = 0$. Тоді, $\langle n \rangle_s = \frac{kn_A}{k'}$.

Знайдемо стаціонарний розподіл для цього процесу,

$$\frac{1}{p_0^S} = 1 + \sum_{n=1}^N \frac{g_{n-1}}{r_n} \frac{g_{n-2}}{r_{n-1}} \dots \frac{g_0}{r_1} \Rightarrow \frac{1}{p_0^S} = 1 + \sum_{n=1}^N \frac{(kn_A)^n}{n!k'^n} = 1 + \sum_{n=1}^N \frac{\left(\frac{kn_A}{k'}\right)^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^N \frac{(\langle n \rangle_s)^n}{n!} = e^{\langle n \rangle_s}, p_0^S = e^{-\langle n \rangle_s} \quad (7.30)$$

Таким чином, стаціонарне рішення аналізованої реакції буде розподілом Пуассона

$$p_n^S = \frac{g_{n-1}}{r_n} \frac{g_{n-2}}{r_{n-1}} \dots \frac{g_0}{r_1} p_0^S = \frac{(kn_A)^n}{k'^n n!} e^{-\langle n \rangle_s} = \frac{\langle n \rangle_s^n}{n!} e^{-\langle n \rangle_s} \quad (7.31)$$

б) зростання популяції : $g_n = \beta n$, $r_n = \alpha n$

Основне кінетичне рівняння із записаними швидкістю генерації та швидкістю рекомбінації не має стаціонарного рішення, якщо $\alpha \neq \beta$. Це відповідає тому, що населення або вмирає, або розмножується згідно із законом Мальтуса.

Рівняння для першого моменту має вид

$$\langle \dot{n} \rangle = (\beta - \alpha)\langle n \rangle \quad (7.32)$$

в) Логістичне рівняння

$$\dot{n} = (\alpha - \gamma n)n \quad (7.32)$$

відразу дозволяє записати вирази для швидкості рекомбінації та генерації $r_n = \gamma n^2$, $g_n = \alpha n$,

а також основне кінетичне рівняння та рівняння для моментів

$$\langle \dot{n} \rangle = \alpha\langle n \rangle - \gamma\langle n^2 \rangle \quad (7.33)$$

$$\langle \dot{n}^2 \rangle = 2\alpha\langle n^2 \rangle - 2\gamma\langle n^3 \rangle + \alpha\langle n \rangle + \gamma\langle n^2 \rangle \quad (7.34)$$

г) Однокроковий генераційний процес.

Для такого однокрокового процесу $r_n = 0$ (рекомбінації нема); $g_n = q$, де q - ймовірність будь-яких подій в одиницю часу. Початковою умовою в цьому випадку є $p_n(0) = \delta_{n,0}$. Тут $\delta_{n,0}$ - символ Кронекера.

Основне кінетичне рівняння має вид

$$\dot{p}_n = q(p_{n-1} - p_n) \quad (7.35)$$

Якщо записати такі ж рівняння для менших значень n і вирішити їх у зворотному порядку, то ми отримаємо розподіл Пуассона

$$p_n = \frac{(qt)^n}{n!} e^{-qt} \quad (7.36)$$

з середнім значенням $\lambda = qt$.

7.5 Система випадкових величин

В більшості задач випадкових величин зазвичай кілька. У разі двох випадкових величин функція розподілу цих величин є

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) \quad (7.37)$$

Так само, як і для однієї випадкової величини, можна ввести щільність розподілу системи двох випадкових величин

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (7.38)$$

Введені функції мають такі властивості.

1. $F(-\infty, \infty) = F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0$
2. $F(\infty, \infty) = 1$
3. $f(x, y) \geq 0$
4. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$

Зв'язок між функцією розподілу та щільністю розподілу задається формулою

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x', y') dx' dy' \quad (7.39)$$

Якщо щільність розподілу проінтегрована по одній із величин, то ми отримаємо щільності розподілу для однієї величини, що залишилася

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy, \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \quad (7.40)$$

Використовуючи щільність розподілу, можна ввести початкові та центральні моменти, які визначають весь випадковий процес

$$\alpha_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^i y^j f(x, y) dx dy, \quad \mu_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^i (y - m_y)^j f(x, y) dx dy \quad (7.41)$$

Кореляційним моментом K_{xy} двох випадкових величин називається центральний момент першого порядку

$$K(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y) f(x, y) dx dy \quad (7.42)$$

Якщо випадкові величини X, Y незалежні, то K_{xy} дорівнює нулю. Коефіцієнт кореляції двох випадкових величин X, Y визначений формулою

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \quad (7.43)$$

Коефіцієнт кореляції характеризує ступінь повноти лінійної залежності між випадковими величинами. Якщо величини не корелює, то коефіцієнт кореляції та кореляційний момент дорівнюють нулю. Якщо ж випадкові величини пов'язані лінійною залежністю $Y = aX + b$, то коефіцієнт кореляції равняется $r_{xy} = \pm 1$, где знак визначається знаком коефіцієнта a . Якщо ця залежність має наближено лінійний характер, то $|r_{xy}| \leq 1$.

7.6 Метод найменших квадратів

Нехай у результаті проведених експериментів отримано таблицю двох змінних x, y .

x_1	x_2	...	x_n
y_1	y_2	...	y_n

В цьому разі виникає важлива задача: визначити залежність $y = \bar{f}(x)$, таку, яка була б максимально наближена до точної залежності $y = f(x)$.

Для знаходження наближеної залежності найчастіше користуються степенними функціями (багаточленами)

$$\bar{f}(x) = \sum_{i=1}^m a_i x^i \quad (7.47)$$

де коефіцієнт a_i визначається за умови найкращого збігу з отриманими експериментальними значеннями. Іноді замість статечної залежності використовують дрібно-лінійну функцію, логарифмічні функції, показові.

Таким чином, задача полягає у знаходженні коефіцієнтів a_1, a_2, \dots, a_n . Введемо ухилення

$$\varepsilon_i = \bar{f}(x_i, a_1, a_2, \dots, a_m) - f(x_i) \quad (7.48)$$

Згідно з методом найменших квадратів найкращими коефіцієнтами a_1, a_2, \dots, a_m вважаються ті, для яких сума квадратів ухилень

m	7	12	17	22	27	32	37
Q	83,7	72,9	63,2	54,7	47,5	41,4	36,3

В нашому випадку $n = 7$, $m = 3$. Будемо шукати цю залежність у виді параболи

$y = c + bx + ax^2$. Система рівнянь для коефіцієнтів наступна

$$\begin{cases} 7c + 15b + 4088a = 399,7 \\ 154c + 4088b + 120736a = 7688,9 \\ 4088c + 120736b + 3795092a = 186054,3 \end{cases} \quad (7.57)$$

Звідси $a = 0,023381$, $b = -2,6066$, $c = 100,791$. Таким чином,

$$y = 100,791 - 2,6066x + 0,023381x^2.$$

7.7 Метод розмірностей

Дуже часто доводиться мати справу з системою, для якої невідомі рівняння, що описують її динаміку. У цьому випадку зв'язок між різними параметрами, що характеризують систему, можна встановити методом розмірностей. Невідомий параметр шукається у вигляді степенної залежності від параметрів, що характеризують систему. Показники ступенів визначаються за умови рівності розмірностей лівої та правої частин рівняння.

Розглянемо як приклад, як знайти частоту коливань пружинного маятника, не користуючись жодними рівняннями. Параметрами, що характеризують систему, є жорсткість та маса. Вважаємо

$$\omega = k^x m^y \quad (7.58)$$

Розмірності, що входять до записаного рівняння величин, дорівнюють

$$[\omega] = s^{-1}, \quad [m] = kg, \quad [k] = \frac{kg}{s^2} \quad (7.59)$$

Повинна виконуватись така рівність

$$s^{-1} = \left(\frac{kg}{s^2} \right)^x kg^y \quad (7.60)$$

Звідси

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ -2x = -1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2}, \quad y = -\frac{1}{2} \quad (7.61)$$

І, отже,

$$\omega = k^{1/2} m^{-1/2} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (7.62)$$

Узагальненням методу розмірності є π -теорема, або теорема Бенджамена. Відповідно до цієї теореми залежність між N розмірними величинами, що характеризують систему залежності між $N - m$ безрозмірними комплексами, або π -числами

$$f(a_1, a_2, \dots, a_N) = 0, \Rightarrow \varphi(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{N-m}) = 0 \quad (7.63)$$

де m – число основних одиниць вимірювання, в механіці $m = 3$ (kg, m, s). Кожне з π -чисел знаходиться так само, як в розгляненому вище прикладі.

7.8 Імітаційне моделювання випадкових процесів

Розглянемо, слідуючи Шеннону, модель випадкового процесу, що дозволяє усвідомити ідею імітаційного моделювання випадкових процесів.

Розглянемо чергу покупців до контрольного прилавку магазину. Припустимо, проміжки часу між послідовними появами покупців розподіляється рівномірно в інтервалі від 1 до 10 хвилин. Нехай час необхідний обслуговування кожного покупця розподіляється рівномірно в інтервалі від 1 до 6 хвилин. Потрібно знайти середній час, який покупець проводить біля прилавка (включаючи очікування та обслуговування), та відсоток часу, протягом якого продавець не навантажений роботою.

Для моделювання системи нам знадобиться десять пронумерованих фішок та гральна кістка. Витягуючи фішки, ми могли б у такий спосіб уявити проміжки часу між появою попереднього та наступного покупців. Кидаючи кістку і зчитуючи з верхньої грані число, ми могли б імітувати час обслуговування. Нижче наведено приклад моделі обслуговування двадцяти покупців.

Імітаційне моделювання роботи контрольного прилавку

Покупець	Час після прибуття попереднього покупця, хвил	Час обслуговування, хвил.	Моделний час в момент прибуття покупців	Початок обслуговування	Кінець обслуговування	Час покупця біля прилавку, хвил.	Час продавця без роботи, хвил
1	-	1	0.00	0.00	0.01	1	0
2	3	4	0.03	0.03	0.07	4	2
3	7	4	0.10	0.10	0.14	4	3
4	3	2	0.13	0.14	0.16	3	0

5	9	1	0.22	0.22	0.23	1	6
6	10	5	0.32	0.32	0.37	5	9
7	6	4	0.38	0.38	0.42	4	1
8	8	6	0.46	0.46	0.52	6	4
9	8	1	0.54	0.54	0.55	1	2
10	8	3	1.02	1.02	1.05	3	7
11	7	5	1.09	1.09	1.14	5	4
12	3	5	1.12	1.14	1.19	7	0
13	8	3	1.20	1.20	1.23	3	1
14	4	6	1.24	1.24	1.30	6	1
15	4	1	1.28	1.30	1.31	3	0
16	7	1	1.35	1.35	1.36	1	4
17	1	6	1.36	1.36	1.42	6	0
18	6		1.42	1.42	1.43	1	0
19	7	2	1.49	1.49	1.51	2	6
20	6		1.55	1.55	1.57	2	5
						Всього 68	Всього 55

З цієї таблиці легко підрахувати середній час перебування покупця біля прилавка, що дорівнює $68/20=3,40$ хв і відсоток непродуктивного часу продавця $55/117 \times 100=47\%$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРИ

1. В.В.Алексеев, И.И.Крышев, Т.Г.Сазыкин, Физическое и математическое моделирование экосистем, Санкт-Петербург, Гидрометеиздат,1992.
2. А.А.Самарский, А.П.Михайлов, Математическое моделирование: идеи, методы, примеры. Москва, Наука, 2001.
3. Г.И.Марчук, Математическое моделирование в проблеме окружающей среды, Москва, Наука,1982.
4. В.М.Белолипецкий, Ю.И.Шокин, Математическое моделирование в задачах охраны окружающей среды, Новосибирск, ИНФОЛИО-пресс,1997.
5. Н.Г.Ван-Кампен, Стохастические процессы в физике и химии, Москва, Высшая школа, 1990.
6. Р.Шенон, Имитационное моделирование систем –искусство и наука, Москва, Мир, 1978.