

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет «Одеська політехніка»
Кафедра фізики

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до лабораторних робіт
з розділу «Коливання та хвилі»
для здобувачів усіх спеціальностей

Лабораторна робота
«Визначення характеристик затухаючих коливань в домашніх
умовах на прикладі математичного маятника»

Одеська політехніка 2023

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет «Одеська політехніка»
Кафедра фізики

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до лабораторних робіт
з розділу «Коливання та хвилі»
для здобувачів усіх спеціальностей

Лабораторна робота
«Визначення характеристик затухаючих коливань в домашніх
умовах на прикладі математичного маятника»

Розглянуто на засіданні
кафедри фізики.
Протокол №
від 2023 року

Одеська політехніка 2023

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ до лабораторних робіт з розділу «Коливання та хвилі» для здобувачів усіх спеціальностей «Визначення характеристик затухаючих коливань в домашніх умовах на прикладі математичного маятника» /Уклад.: Н.М. Корнева, О. Н. Богданова – Одеська політехніка, 2023. – 12 с.

Лабораторна робота.

Визначення характеристик затухаючих коливань в домашніх умовах на прикладі математичного маятника.

Метою цієї роботи є вивчення затухаючих механічних коливань математичного маятника в домашніх умовах. Також- визначення основних характеристик механічних затухаючих коливань, тобто

логарифмічного декременту Δ , коефіцієнта затухання δ , часу релаксації τ , коефіцієнта тертя r , добротності системи Q .

Ці характеристики визначаються різними методами .

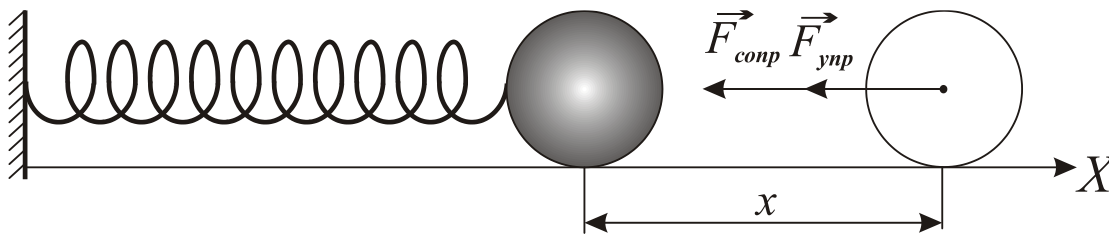
Робота може бути виконана в домашніх умовах , що дуже важливо в сучасній ситуації в Україні.

1. Теоретичний вступ

Затуханням коливань зветься поступове зменшення амплитуди коливань протягом часу, обумовлене втратою енергії коливальною системою.

При механічних коливаннях ці втрати обумовлені роботою проти сил тертя і опору середовища, а також збудженням у середовищі пружній хвиль.

1). Розглянемо механічну систему- **пружний маятник**, на який діють сили тяжіння $\vec{m}g$, реакції опори \vec{N} , тертя $\vec{F}_{\text{тр}}$ і пружна сила $\vec{F}_{\text{пр}}$ (мал.1).



Мал.1

$$F_{\text{пр}} = -kX$$

$$F_{\text{опір}} = -rv = -r \frac{dX}{dt}$$

де k -коефіцієнт пружності, а r - коефіцієнт тертя.

Запишемо другий закон Ньютона для кульки:

$$-kX - r \frac{dX}{dt} = m \frac{d^2X}{dt^2}$$

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dX}{dt} + \frac{k}{m} X = 0$$

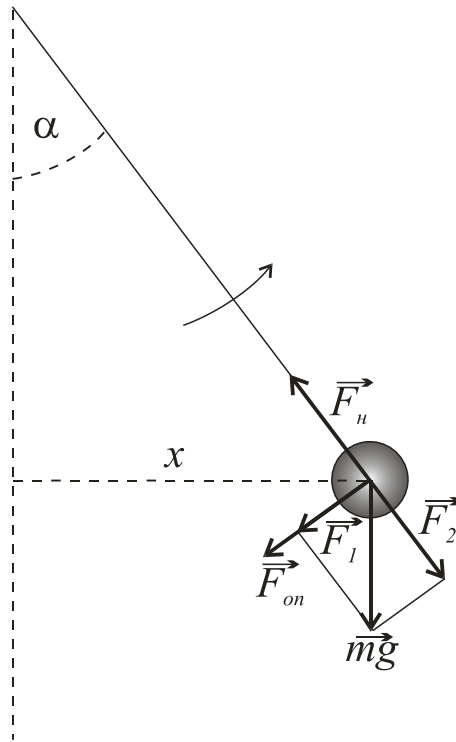
$$\frac{r}{2m} = \delta - \text{коефіцієнт затухання.}$$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ -циклічна частота вільних незатухаючих коливань.

Тоді диференціальне рівняння затухаючих механічних коливань виглядає таким чином:

$$\frac{d^2X}{dt^2} + 2\delta \frac{dX}{dt} + \omega_0^2 X = 0 \quad (1)$$

2). Розглянемо **математичний маятник** (мал. 2)



Мал. 2

Математичним маятником зветься коливальна система, яка складається з матеріальної точки (тягарця), що підвішена на довгій неростяжній ниті. Момент інерції цього маятника дорівнює:

$$I = ml^2,$$

де l – довжина ниті, m – маса тягарця.

На маятник діє поворотальна сила:

$$P_1 = mg \sin \alpha.$$

І сила опору :

$$F_{\text{опор}} = rv = rwl$$

Де r - коефіцієнт тертя. v – швидкість тягарця, w - кутова швидкість маятника. Момент цих сил, згідно з основним законом обертального руху, дорівнює:

$$M = -P_1 l - F_{\text{опор}} l = I \varepsilon = I \frac{d\omega}{dt} = I \frac{d^2\alpha}{dt^2}.$$

Знак мінус показує, що напрям дії сил є протилежним до відхилення маятника. I – момент інерції математичного маятника, ε – кутове прискорення маятника. Тоді :

$$-mgl \sin \alpha - rwl^2 = -mgl \sin \alpha - rl^2 \frac{d\alpha}{dt} = I \frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{rl^2}{I} \frac{d\alpha}{dt} + \frac{mgl}{I} \sin \alpha = 0 \quad (2).$$

Підставимо момент інерції математичного маятника в формулу (4) :

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{d\alpha}{dt} + \frac{g}{l} \sin \alpha = 0 \quad (3).$$

$$\frac{r}{2m} = \delta - \text{коефіцієнт затухання} \quad (4)$$

З формули (3) видно, що математичний маятник в загальному випадку не здійснює гармонічних коливань.

Тільки при малих кутах (не більше за 15 градусів), коли $\sin \alpha = \alpha$, математичний маятник здійснює власні гармонічні коливання з власною циклічною частотою

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (5)$$

Період цих коливань

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (6)$$

Тоді диференціальне рівняння затухаючих механічних коливань математичного маятника виглядає таким чином:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2\delta \frac{d\alpha}{dt} + \omega_0^2\alpha = 0 \quad (7)$$

Для невеликих кутів:

$$\sin \alpha = \frac{X}{l} = \alpha$$

Таким чином, α пропорційно X . Тому рівняння (6) можна переписати:

$$\frac{d^2X}{dt^2} + 2\delta \frac{dX}{dt} + \omega_0^2 X = 0 \quad (8)$$

Шукати рішення рівнянь (1) і (8) будемо у вигляді:

$$X = X_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (9)$$

$$\frac{dX}{dt} = -\delta X_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi) - \omega X_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \delta^2 X_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi) + 2\omega\delta X_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi) - \omega^2 X_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

Підставимо отримані вирази для першої і другої похідних в рівняння (1):

$$e^{-\delta t} X_0 [\delta^2 \cos(\omega t + \varphi) + 2\omega\delta \sin(\omega t + \varphi) - \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) - 2\delta^2 \cos(\omega t + \varphi) - 2\omega\delta \sin(\omega t + \varphi) + \omega_0^2 \cos(\omega t + \varphi)] = 0$$

Приведемо подібні члени і розділимо на

$$e^{-\delta t} X_0 \cos(\omega t + \varphi) :$$

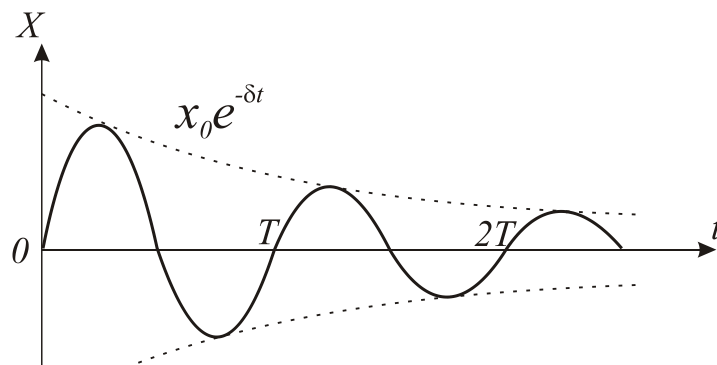
$$\omega_0^2 - \omega^2 - \delta^2 = 0$$

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ (10) – циклічна частота затухаючих коливань.

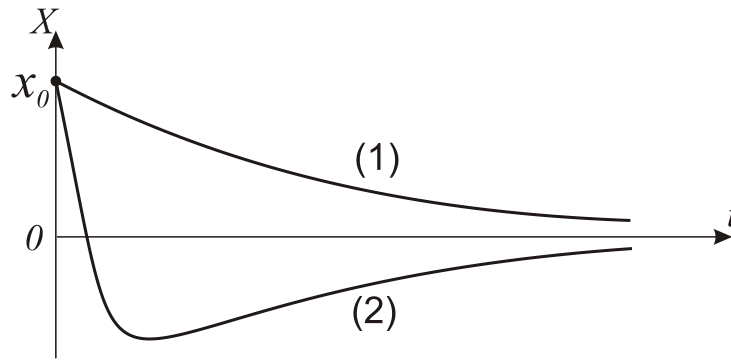
Таким чином, рівняння (9) є рішенням виразу (8) при циклічній частоті затухаючих коливань (10).

При $\omega_0^2 > \delta^2$ залежність струму від часу є періодична негармонічна функція (мал. 3):

При $\omega_0^2 < \delta^2$ графік залежності струму від часу стає аперіодичним (мал. 4 криві 1 чи 2).



Мал..3



Мал.4

При $\delta \rightarrow \omega_0$ період коливань прямує до нескінченності.

Таким чином, при зростанні коефіцієнта затухання період затухаючих коливань збільшується.

Визначимо основні характеристики затухаючих коливань:

1. Декремент – відношення двох послідовних (через період) максимальних відхилень в один бік :

$$\frac{X(t)}{X(t+T)} = \frac{X_0 e^{-\delta t}}{X_0 e^{-\delta(t+T)}} = e^{\delta T} \quad (11)$$

2. Час релаксації τ .

Проміжок часу τ , протягом якого амплітуда затухаючих коливань зменшується в e раз, зветься часом релаксації.

$$\frac{X(t)}{X(t+\tau)} = \frac{X_0 e^{-\delta t}}{X_0 e^{-\delta(t+\tau)}} = e^{-\delta \tau} = e^{-1}$$

$$\delta \tau = 1$$

Тоді коефіцієнт затухання дорівнює:

$$\delta = \frac{1}{\tau} \quad (12)$$

3. Логарифмічний декремент:

$$\Delta = \ln e^{\delta T} = \delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N} \quad (13)$$

де N - число коливань, протягом яких амплітуда зменшується в e раз.

Проміжок часу τ , протягом якого амплітуда затухаючих коливань зменшується в e раз, зветься часом релаксації.

3). Добротністю коливальної системи зветься безрозмірна величина Q , яка дорівнює добутку 2π на відношення енергії $W(t)$ коливальної системи в довільний момент часу t до зменшення цієї енергії за проміжок часу від t до $t+T$, тоб то за один умовний період затухаючих коливань.

$$Q = 2\pi \frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)} \quad (14)$$

Тому, що енергія коливальної системи пропорційна квадрату амплітуди коливань, то:

$$Q = 2\pi \frac{X_0^2 e^{-2\delta t}}{X_0^2 e^{-2\delta t} - X_0^2 e^{-2\delta(t+T)}} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\delta T}} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\Delta}} \quad (15)$$

При малих значеннях логарифмічного декремента $\Delta \ll 1$:

$$e^{-2\Delta} \approx 1 - 2\Delta$$

При цьому добротність коливальної системи буде дорівнювати:

$$Q = \frac{\pi}{\Delta} \quad (9)$$

Тому, що при малих значеннях логарифмічного декременту період затухаючих коливань прямує до значення періода власних коливань $T_3 \rightarrow T_0$, то:

$$Q = \frac{\pi}{\Delta} \approx \frac{\pi}{\delta T_0} = \frac{\omega_0}{2\delta} \quad (16)$$

2. Обладнання

В домашніх умовах треба зробити математичний маятник. Для цього потрібно взяти довгу (Не менш 1 м) нитку і прив'язати до неї досить важкий (30-40г) , але ж маленький вантаж. Верхній кінець нитки треба прив'язати до нерухомого тіла.

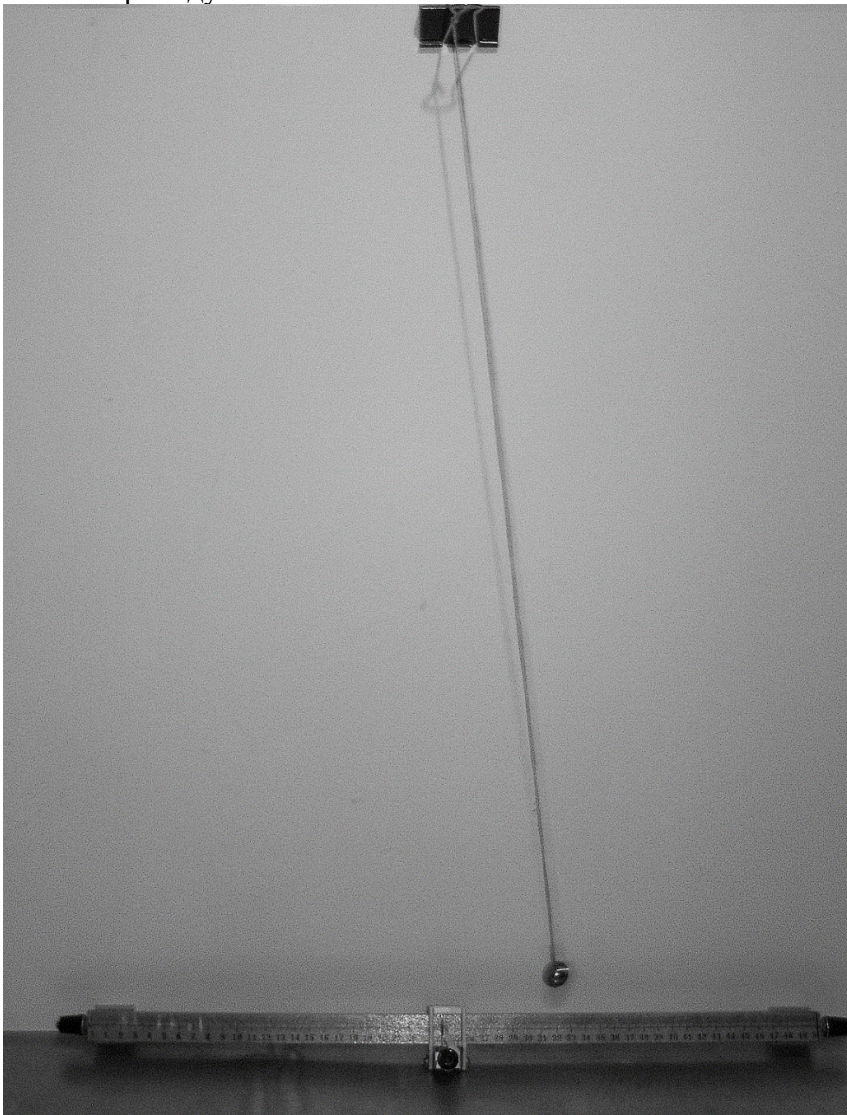
Під маятником розташувати лінійку з міліметровою шкалою і нулем в середині.

Освітити цю систему так, щоб тінь від вантажа падала на лінійку. По чіткому краю цієї тіні треба визначити величину відхилення маятника від положення рівноваги.

Ще треба придбати секундомір для обчислення часу коливань. Для цього можна використовувати секундомір з смартфона.

Робота була проведена авторами повністю в домашніх умовах.

Фото приладу показано на мал.5.



Мал.5

3. Експериментальна частина

Вправа 1. Визначення характеристик затухаючих коливань по відношенню амплітуд.

1. Визначити масу вантажа m за допомогою валізів.
2. Вивести математичний маятник з положення рівноваги і за допомогою лінійки визначити першу амплітуду A_1 . Результат ввести в таблицю 1.
3. Відпустити вантаж і після N (10 чи 20) коливань визначити амплітуду A_N . Результат ввести в таблицю 1. При цьому за допомогою секундоміра визначити час t_N N коливань і ввести його в таблицю 1.
4. Вимірювання провести ще 4 рази для різних амплітуд. Результати ввести в таблицю 1.
5. Знайти значення логарифмічного декременту для всіх 5 дослідів. Для цього треба використовувати формулу:

$$\Delta = \frac{1}{N-1} \ln \frac{A_1}{A_N} \quad (17)$$

6. Результати ввести в таблицю 1.
7. Визначити для кожного дослідів період T по формулі:

$$8. \quad T = \frac{t_N}{N} \quad (18)$$

9. Результати ввести в таблицю 1.
10. Визначити для кожного дослідів коефіцієнт затухання δ згідно з формулою (4).
11. Результати ввести в таблицю 1.
12. Визначити для кожного дослідів коефіцієнт тертя r по формулі:

$$13. \quad r = 2\delta m \quad (19)$$

14. Результати ввести в таблицю 1.
15. Знайти середні величини всіх вимірюваних характеристик. Для $k=5$ вимірювань і надійності $P=0,9$ ($t_s=2,73$) знайти абсолютні і відносні похибки, використовуючи теорію Стюдента.

Записати повну відповідь для логарифмічного декременту Δ , коефіцієнта затухання δ , коефіцієнта тертя r ,

Таблиця 1.

k	A_1	N		A_N	t_N	T	Δ	δ	m	r
1										
2										
3										
4										
5										

Вправа 2. Визначення характеристик затухаючих коливань по часу релаксації.

1. Вивести математичний маятник з положення рівноваги і за допомогою лінійки визначити першу амплітуду A_1 . Результат ввести в таблицю 2.
2. Визначити амплітуду маятника через проміжок часу, який дорівнює часу релаксації по формулі:

$$A_2 = \frac{A_1}{2,7} \quad (20)$$

3. Позначимо цю амплітуду на лінійки під маятником.

4. Відхилимо маятник на амплітуду A_1 і включимо секундомір. При цьому треба зчитати коливання. Коли амплітуда маятника буде дорівнювати A_2 , виключимо секундомір.
5. Запишемо в таблицю 2 значення другої амплітуди, часу релаксації і число $N\tau$ коливань, які відповідають часу релаксації.
6. Повторимо ці дії ще 4 рази, починаючи з різних амплітуд. Результати занесемо в таблицю 2.
7. По формулам (12), (13), (19), (9) визначить логарифмічного декременту Δ , коефіцієнта затухання δ , коефіцієнта тертя r і добротність Q .
8. Результати занести в таблицю 2.
9. Знайти середні величини всіх вимірюваних характеристик. Для $N=5$ вимірювань і надійності $P=0,9$ ($t_s = 2,73$) визначить абсолютні і відносні похибки, використовуючи теорію Стюдента.
10. Записати повну відповідь для логарифмічного декременту Δ , коефіцієнта затухання δ , часу релаксації τ , коефіцієнта тертя r , добротності системи Q .
11. Порівняти результати вправи 1 і вправи 2. Зробити висновки.

Таблиця 2.

N	A_1	A_2	$N\tau$	τ	δ	Δ	m	r	Q
1									
2									
3									
4									
5									

Контрольні питання

1. Що зветься затухаючими коливаннями?
2. Які є характеристики затухаючих коливань?
3. Що зветься логарифмічним декрементом?
4. Що зветься часом релаксації?
5. Що зветься добротністю коливальної системи?
6. Отримати диференціальне рівняння затухаючих коливань для математичного маятника.
7. Отримати рішення диференціального рівняння затухаючих коливань для математичного маятника.

ЛІТЕРАТУРА.

1. Воловик П.М. Фізика для університетів.- Київ.ІРПНЬ: Перун, 2005.- 860 с.
2. Навчальний посібник. «Коливання та хвилі для студентів усіх спеціальностей», Укл: Н.М.Корнєва.-Одеса : ОНПУ, 2016, 45с.
3. Методичні вказівки до виконання лабораторної роботи «Вимірювання геометричних розмірів тіл і визначення їх об'єму і площі поверхні» Рекомендовано до видання Вченою радою ОНПУ, протокол № 4 від 26.12.2017 р.24 стор.

.....

.....