

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ЗАВДАННЯ  
до виконання лабораторних робіт  
з дисципліни «Системний аналіз »  
для здобувачів спеціальності 122 – Комп'ютерні науки

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»  
Кафедра інформаційних технологій проектування та дизайну

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ЗАВДАННЯ  
до виконання лабораторних робіт з дисципліни «Системний аналіз»

Затверджено  
на засіданні кафедри  
інформаційних технологій проектування  
та дизайну  
Протокол № від 13.04.2023

НУ «Одеська політехніка» 2023

Методичні вказівки та завдання до виконання лабораторних робіт (змістовний модуль № 1) з дисципліни «Системний аналіз» для здобувачів спеціальності 122 – Комп’ютерні науки / Укл.: Л.В. Бовнегра, В.О. Вайсман, К.Г. Кіркопуло — Одеса: НУ «Одеська політехніка», 2022. — 36 с.

Укладач: Бовнегра Л.В., к.т.н., доц.  
Вайсман В.О., д.т.н., проф.  
Кіркопуло К.Г., PhD, доц.

## Вступ

Сучасний системний аналіз (СА) – прикладна наука, яка орієнтована на прояснення причин виникнення проблем і на формування варіантів їх усунення. Системний аналіз – це сукупність методологічних засобів, які використовуються для підготовки і обґрунтування рішень із складних проблем політичного, соціального, економічного, технічного і наукового характеру. Основою є системний підхід і ряд методів, математичних дисциплін і сучасної теорії управління. Основна процедура – це побудова узагальненої моделі, яка відображає взаємозв'язки реальної ситуації. Технічною основою є ЕОМ і інформаційні системи. Виникнення «системного аналізу» пов'язано з необхідністю проведення комплексних досліджень при створенні складних технологічних і виробничих комплексів, систем управління ними, аналізі економічної ситуації тощо.

Як дисципліна, системний аналіз займається проблемами ухвалення рішень в умовах, коли вибір альтернативи потребує аналізу складної інформації різної фізичної природи. Результатом системних досліджень є вибір конкретної альтернативи, наприклад, план розвитку, параметри конструкції, структура тощо. Основним завданням дисципліни можна вважати показ того, як різні знання (математика, теорія управління, методи оптимізації) можуть допомагати вирішенню складних прикладних завдань, а системний інтегратор є головним помічником для архітекторів, конструкторів складних систем, ін.. При цьому для конструювання і дослідження складних систем системний аналіз не пропонує набори рецептів, а лише методологію.

Методи системного аналізу для вирішення складних комплексних проблем застосовуються з урахуванням того, що в процесі ухвалення рішень вибір необхідно робити в умовах невизначеності. Процес системного аналізу з кожної проблеми можна розділити на чотири стадії:

- постановка проблеми, визначення мети і критеріїв оцінки;
- структурний аналіз досліджуваної системи;
- розробка концепції розвитку системи і підготовка можливих варіантів;
- безпосередній аналіз відібраних варіантів рішень і їх наслідків за допомогою ПЕВМ.

Засвоєння практичних знань з системного аналізу і об'єктно-орієнтованого проектування комп'ютерних інформаційних систем (КІС), як методологічної основи аналізу та моделювання складних систем, необхідно для розв'язування інформаційних проблем в них та розвитку навиків використання практичних методологій системного аналізу для об'єктно-орієнтованого моделювання та проектування КІС.

Мета проведення лабораторних занять полягає у тому, щоб виробити у студентів практичні навички системного аналізу та об'єктно-орієнтованого проектування комп'ютерних інформаційних систем.

Завдання проведення лабораторних занять:

- розрізняти проблеми, до яких застосування СА є доцільним;
- інтерпретувати основні поняття СА та принципи системного підходу до КІС та об'єктів комп'ютеризації;
- класифікувати системи та методи системного моделювання;
- застосовувати аналітичний та синтетичний підходи до моделювання КІС та об'єктів комп'ютеризації;
- побудувати життєвий цикл системи, застосовувати методології, методи та алгоритми системного аналізу для розв'язування проблем на складних об'єктах комп'ютеризації;
- організувати збір інформації для СА відповідно до принципів системного підходу;
- застосовувати об'єктно-орієнтовану методологію при проектуванні конкретних КІС.

## Лабораторна робота № 1. Системне дослідження процесів, заданих емпіричними формулами

### 1.1. Дослідження зміни атмосферного тиску в системах вентиляованих фасадів

У системах вентиляованих фасадів будівель застосовуються, окрім інших утеплителів, мінераловатні панелі, фанеровані полотном із скляних волокон. Необхідність такого облицювання пов'язана з тим, що при певних поєднаннях температурного режиму, атмосферного тиску, щільності тиску, незважаючи на відносно невелику швидкість протікання повітря у вентиляюючому шарі (близько 0,3 м/с), можливе виникнення повітряних турбулентних течій, здібних привести до емісії волокон мінераловати.

У холодний і теплий періоди року температура зовнішнього повітря знижується приблизно на 1°C через кожні 150 м висоти, атмосферний тиск знижується на 1 гПа через кожні 8 м висоти, а швидкість вітру збільшується.

Для моделювання зміни атмосферного тиску на різних висотах використовують барометричний метод виміру висоти. Барометричний метод виміру висоти ґрунтований на використанні закономірної зміни атмосферного тиску з висотою. Залежність тиску повітря від висоти до 11 км виражається формулою:

$$pT(h) = p_0 \cdot \left(1 - \frac{6.5 \cdot h}{T_0}\right)^{5.255} \quad (1.1)$$

де  $p_0 = 101.325$  кПа або 1 атм.=760 мм рт. ст;

$h$  – висота, км.

$T_0$  – температура воздуха, °С.

Якщо не враховувати температуру повітря ( $T = const$ ) при  $h > 11$  км атмосферний тиск обчислюється за наступною емпіричною формулою:

$$p(h) = p_0 \cdot \exp\left(\frac{-h}{7.99}\right) \quad (1.2)$$

Щільність повітря у свою чергу визначається по формулі:

$$\rho(h) = 1.2255 \cdot \left(1 - \frac{6.5 \cdot h}{T_0}\right)^{4.255} \quad (1.3)$$

Завдання:

- 1) провести математичне моделювання зміни атмосферного тиску і щільності повітря на різних висотах  $h$ .
- 2) побудувати графіки зміни атмосферного тиску  $pT(h)$  ( $T = const$ ) та  $p(h)$  ( $T = var$ ).
- 3) побудувати графік зміни тиску. Перевірити, що при  $h < 11$  км та  $T = 288$  °С тиск  $pT(h)$  та щільність  $\rho(h)$  мають однаковий характер розподілу.
- 4) зробити висновки про залежність атмосферного тиску і щільності від висоти. Встановити закон зміни атмосферного тиску відносно зміни висоти ртутного стовпа.

### 1.2. Дослідження подолання літаком звукового бар'єру

У момент подолання літаком звукового бар'єру обтікання його повітрям різко міняється, що породжує звук пострілу або грому. Для моделювання вказаного ефекту застосовують деяке число Маха, яке співвідносить швидкість тіла або газового струменя до швидкості звуку в газі. Для літака функція  $M(u, h)$  залежить від швидкості літака  $u$  і висоти польоту  $h$ :

$$M(u, h) = \sqrt{5 \cdot \left( \left( \left( \left( \left( \left( \left( 1 + 0.2 \cdot \left( \frac{u}{1222.5} \right)^2 \right)^{3.5} - 1 \right) \cdot \left( 1 - 6.875 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{h}{0.3048} \right)^{-5.2656} \right) + 1 \right)^{0.286} - 1 \right) \right) \right) \right) \right) \right) \right) \quad (1.4)$$

Звуковий бар'єр долається в момент  $M(u, h) = 1$ .

**Завдання:**

1) побудувати графіки  $M(u, h)$  для  $h = 1000$  м,  $h = 5000$  м,  $h = 10000$  м та  $h = 20000$  м. Початкова швидкість польоту літака  $u = 200$  м/с. Визначити графічно моменти подолання звукового бар'єру, коли відповідні залежності  $M(u, h)$  криві перетнуть рівень одиниці.

2) дослідити залежність швидкості літака від його висоти в момент подолання звукового бар'єру. Знаючи висоту польоту  $h$  (м), порахувати швидкість  $u$  (м/с), потрібну для подолання звукового бар'єру. Швидкість близько 1250 км / год характерна при польотах на низькій висоті.

*Примітка.* Для виконання завдання №2 необхідно вирішити нелінійне рівняння  $M(u, h) - 1 = 0$  відносно швидкості  $u$  для заданого значення висоти  $h$ . Для вирішення нелінійного рівняння використовуйте системну функцію Mathcad – root (див. рис. 1.1).

3) перевірити, що швидкість, на якій долається звуковий бар'єр, падає зі збільшенням висоти польоту літака.

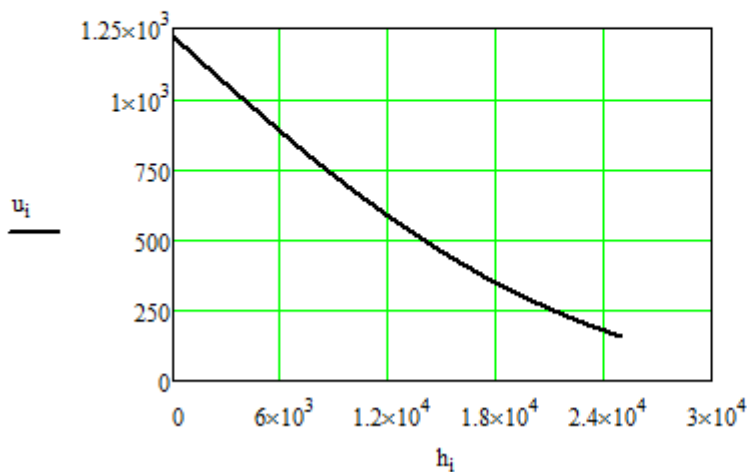
Вычисление зависимости  $u(h)$  для которой выполняется условие  $M(u, h) - 1 = 0$

$i := 0..10$

$u := 10$

$h_i := 2500 \cdot i$

$u_i := \text{root}(M(u, h_i) - 1, u)$



$h =$	$u_i =$
0	1221.832
2500	1076.9
5000	936.709
7500	803.05
10000	677.635
12500	561.945
15000	457.114
17500	363.864
20000	282.504
22500	212.973
25000	154.903

Рис. 1 – Побудова залежності  $u(h)$  для випадку, коли  $M = 1$

## Лабораторна робота № 2. Системне дослідження процесів, заданих ітераційними формулами

### 2.1. Дослідження Броунівського руху часток для створення стохастичних фракталів

Роль фракталів в машинній графіці сьогодні досить велика. Вони застосовуються, наприклад, коли вимагається, за допомогою декількох коефіцієнтів, задати лінії і поверхні дуже складної форми. З точки зору машинної графіки, фрактальна геометрія незамінна при генерації штучних хмар, гір, поверхні моря. Фактично за допомогою фракталів можливе представлення складних неевклідових об'єктів, образи яких дуже схожі на природні.

Однією з основних властивостей фракталів є самоподібність. У найпростішому випадку невелика частина фрактала містить інформацію про увесь фрактал.

Визначення фрактала: "Фракталом називається структура, що складається з частин, які в якомусь сенсі подібні до цілого".

Згідно прийнятої класифікації, стохастичні фрактали з'являються у тому випадку, якщо в ітераційному процесі випадковим чином міняти будь-які його параметри. При цьому отримуються об'єкти дуже схожі на природні – несиметричні дерева, порізані берегові лінії тощо. Двовимірні стохастичні фрактали використовуються при моделюванні рельєфу місцевості і поверхні моря.

Простим випадковим фракталом є траєкторія частки, що здійснює броунівський рух, та моделюється за допомогою кінцево-різницевого методів. Цей вид руху часток є прикладом моделювання при випадкових приростах параметрів. Відсутність часу в імітації Броунівського руху не випадкова, оскільки його характер практично не залежить від часу. Можна у багато разів зменшити час спостереження, і при цьому спостерігати хаотичні рухи часток, хоча і на меншій відстані, ніж при значному часі спостереження. Такі процеси називаються самоподібними.

#### Завдання:

Дослідити 2-D систему, в якій частка переміщається в площині  $(x, y)$ . Дослідження побудувати таким чином, щоб до кожної координати  $x$  і  $y$  щоразу додавати випадкові числа. Для цього застосувати генератор випадкових чисел з нормальним розподілом, який в системі Mathcad визначений функцією  $rnorm$ .

- 1) задати число кроків імітації. наприклад,  $N = 500$ .
- 2) визначити початкову точку  $x_0 = 0$  та  $y_0 = 0$ .
- 3) прийняти для функції  $rnorm$  вектор випадкових чисел  $= 2$ , оскільки визначаємо координати  $(x, y)$ , середнє значення  $= 0$ , СКО  $= 1$ . Тобто.  $rnorm(2, 0, 1)$
- 4) формула для проведення моделювання:

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_{i-1} \\ y_{i-1} \end{pmatrix} + rnorm(2, 0, \sigma) \quad (2.1)$$

де  $i = \overline{1, N}$

- 5) побудувати графічну залежність  $y(x)$  для дослідження Броунівського руху частинки.

- б) формула для проведення моделювання:

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_{i-1} \\ y_{i-1} \end{pmatrix} + rnorm(2, 0, \sigma) \quad (2.2)$$

де  $i = \overline{1, N}$

- 7) побудувати графічну залежність  $y(x)$  для графічного моделювання Броунівського руху.

Обчислення доцільно проводити в ручному режимі за допомогою опції Calculate / Calculate Worksheet. Тоді при кожному розрахунку виходить нове зображення з 500 переміщень часток. Наприклад так, як на рис. 2.1

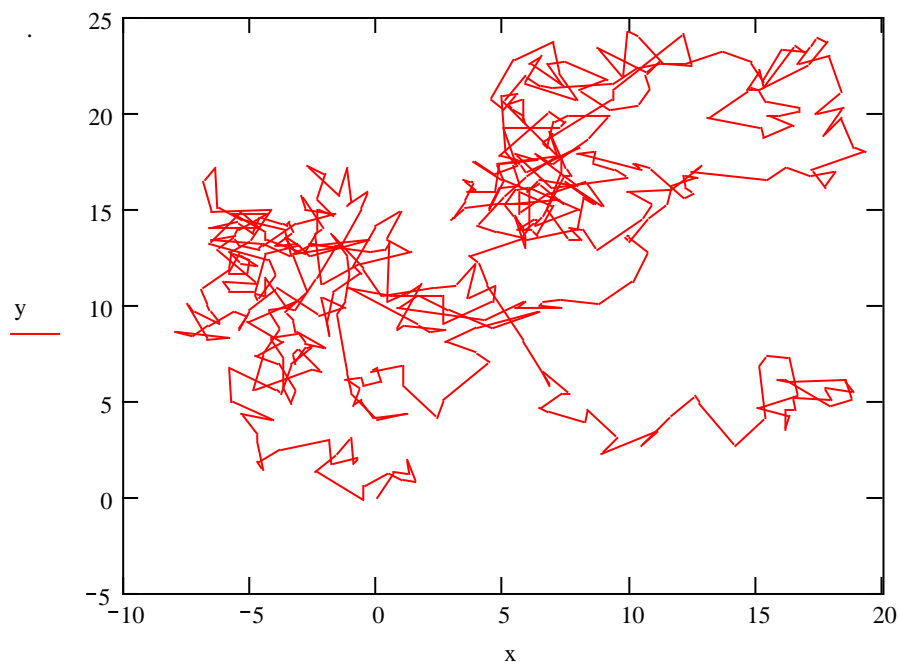


Рис. 2.1 – Моделювання Броунівського руху часток

## 2.2. Дослідження процесу дифузії

У комп'ютерній графіці, яка використовується в web-дизайні, прагнуть використовувати мінімальну можливу кількість кольорів. Зазвичай при переведенні створеного зображення з True Color в Indexed Color є можливість скласти кольори, які не можна передати точно, «змішуючи» їх з близько розташованими точками іншого кольору. Цей процес називається dithering (дифузія). Dithering істотно погіршує стискування.

Одним з прикладів системного дослідження ітераційних процесів є аналіз дифузії кольору. У теорії дифузія описується диференціальним рівнянням другого порядку

$$f(x,t) = \frac{d^2}{dx^2} f(x,t) \quad (2.3)$$

Вирішується це завдання за допомогою кінечно-різницевого методу, тобто ітераційної формули

$$f_{t+1,x} = f_{t,x} + \alpha \cdot (f_{t,x-1} - 2 \cdot f_{t,x} + f_{t,x+1}) \quad (2.4)$$

де  $\alpha$  – коефіцієнт дифузії;

$t$  – час протикання процесу дифузії.

Таке рішення дозволяє графічно визначити розподіл заданого кольору в сусідні точки іншого кольору в різні моменти часу.

### Завдання

1) задати часовий інтервал спостереження за процесом дифузії. Нехай  $t = \overline{0,10}$ , а зміна величина  $x$  змінюється в інтервалі  $x = \overline{20,30}$ .

2) визначити коефіцієнт дифузії  $\alpha = 0.35$ .

3) початкові умови для початку ітерації.

$$f_{0,x} := 0 \quad f_{0,0} := 0 \quad f_{0,25} := 1 \quad f_{0,50} := 0$$

4) задати ітераційну формулу для моделювання має вигляд:

5) результати моделювання представити у вигляді графіка для моментів часу  $t = 0, t = 1, t = 5, t = 10$ , так, як показано на рис. 2.2



б) дослідити розчинення кольору та його переміщення відповідно до початкового розташування.

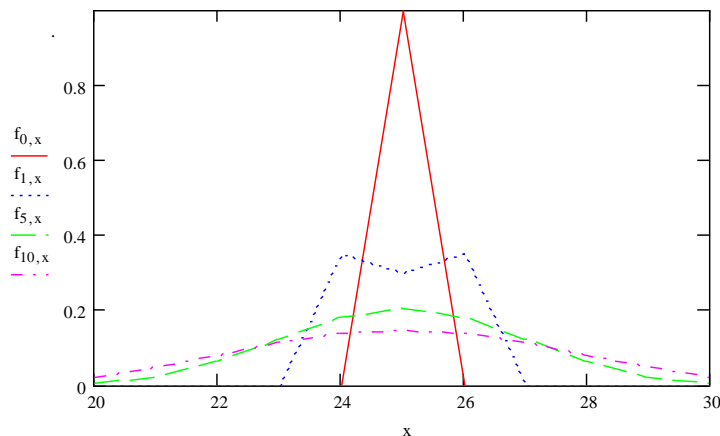


Рис. 2.2 – Моделювання дифузії кольору

### 2.3. Дослідження розвитку та згасання епідемії

Класичним прикладом застосування ітераційних методів в системному аналізі є моделювання епідемії. Припустимо, епідеміологічна обстановка в місті  $N$  характеризується чотирма параметрами: інфекцією  $i$ , сприйнятливістю до неї  $g$ , смертністю  $d$  і виживаністю  $r$ . Емпірична залежність описує взаємозв'язок між параметрами з урахуванням коефіцієнтів, що відображають вплив різних чинників епідемії і початкові значення зазначених параметрів:

$$\begin{pmatrix} i_{t+1} \\ g_{t+1} \\ d_{t+1} \\ r_{t+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0.0001 \cdot g_t \cdot i_t \\ g_t - 0.0001 \cdot g_t \cdot i_t \\ d_t + 0.55 \cdot i_t \\ r_t + 0.45 \cdot i_t \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Початкові значення вказаних параметрів:

$$\begin{pmatrix} i_0 \\ g_0 \\ d_0 \\ r_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 50 \\ 22000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Завдання: дослідити графічні залежності зміни параметрів епідемії, що залежать від часу  $t = 0 \dots 12$ . Зробити висновки про розвиток процесів в часі.

### 2.4. Моделирование торможения автомобиля

Проведемо системне дослідження, в якому необхідно визначити час втрати енергії і зупинки автомобіля з дисковим гальмівним пристроєм та промодельємо процес його гальмування.

Процес втрати енергії в математичній теорії пов'язаний з рішенням нелінійного диференціального рівняння, яке вирішується за допомогою кінцево-різницевої методів. При цьому рішення виражається ітераційною або рекурентною формулою, що описує втрати енергії автомобіля при гальмуванні:

$$E_{j+1} = E_j - \sqrt{2 \cdot \frac{E_j}{M} \cdot \frac{Rd}{Rw} \cdot Fb \cdot \sigma \cdot \Delta t} \quad (2.6)$$

де  $E_j$  – втрата енергії автомобілем при гальмуванні в  $j$  циклі;

$j = 1, 80$  – цикл моделювання;  $M = 1000$  – маса автомобіля, кг;

$Rd = 25$  – радіус гальмівного диска, см;  $Rw = 14$  – радіус колеса, см;

$Fb = 2000$  – гальмівна сила, Н;  $\sigma = 0.8$  – коефіцієнт треття;

$\Delta t = 0.8$  – шаг часу, сек.

Початкову енергію визначимо за формулою:

$$E_0 = \frac{1}{2} \cdot M \cdot (80 \cdot \text{км/ч})^2 \quad (2.7)$$

Завдання: Дослідити втрату енергії при гальмуванні автомобіля.

1) визначити початкові данні задачі в документі Mathcad, задавши при цьому розмірність величин відповідно до фундаментальних одиниць програми (для виконання завдання використайте інформацію довідкового посібника і меню Insert / Unit.)

2) задати кінцево-різницева формулу розрахунку втрати енергії при гальмуванні автомобіля. Інтервал зміни величини  $j = 0 \dots 80$ .

3) побудувати графічну залежність енергії  $E_j$  від  $j$  (див. рис. 2.3).

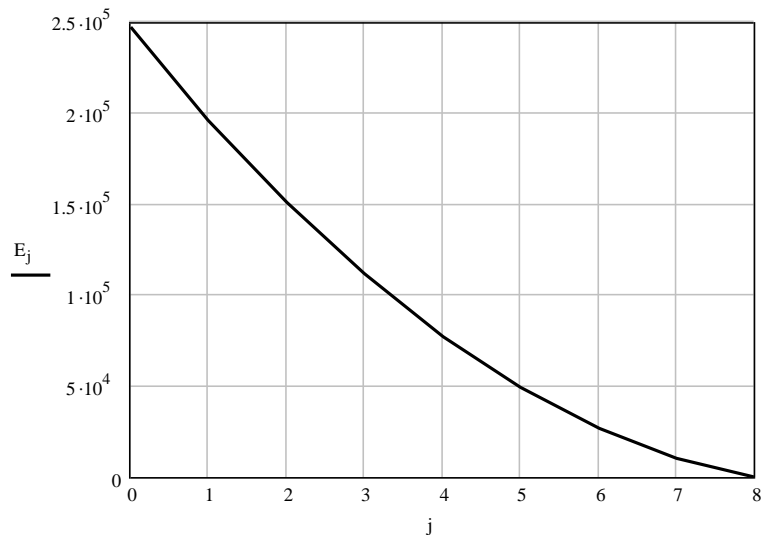


Рис. 2.3 – Графічна залежність енергії  $E_j$  від  $j$

4) Змінюючи значення вихідних величин зробити висновок про характер процесу втрати енергії при гальмуванні автомобіля. Виділити найбільш істотні фактори і їх інтервали.

## Лабораторна робота №3 Системний аналіз динамічних дисипативних систем

### 3.1. Дослідження нелінійної автоколивальної системи Ван дер Поля та Ван дер Поля-Дуффінга

Можливість існування періодичного асимптотично стійкого руху, що зображується ізольованою замкнутою траєкторією у фазовому просторі, до якої з часом притягуються траєкторії з деякої околиці незалежно від початкових умов, забезпечується тільки в нелінійних дисипативних системах. Цей тип динамічних систем називається автоколивальними системами. Математичним образом автоколивань служить граничний цикл Пуанкаре – замкнута ізольована траєкторія у фазовому просторі, що відповідає періодичному руху. Як приклад динамічної системи з граничним циклом Пуанкаре розглянемо класичний нелінійний осцилятор Ван дер Поля. Рівняння Ван дер Поля описує простий випадок виникнення генерації в автоколивальній системі і має вигляд:

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) - \mu \cdot (1 - x(t)^2) \cdot \frac{d}{dt}x(t) + x(t) = 0 \quad (3.1)$$

где  $\mu$  – параметр системи, який характеризує підкочування енергії в систему від зовнішнього джерела, і називається параметром збудження. Задає характер рішення і початкові умови для  $x(t)$  і  $x'(t)$ .

При позитивних  $\mu$  коливання в системі наростають, але внаслідок нелінійності системи їх амплітуда обмежується, а форма помітно відрізняється від синусоїдальної. Система Ван дер Поля описує складний коливальний контур, характер дисипації в якому залежить від змінної  $x$ .

Завдання: (перший варіант вирішення задачі)

- 1) нехай  $\mu = 0.5$ , а початкові умови  $x(0) = 0.1$ ,  $x'(0) = 0.1$ .
- 2) рівняння Ван дер Поля вирішити за допомогою блоку **Given...Odesolve**.
- 3) дослідити фазовий портрет рішення системи (рис. 3.1) та графік коливань (рис. 3.2)

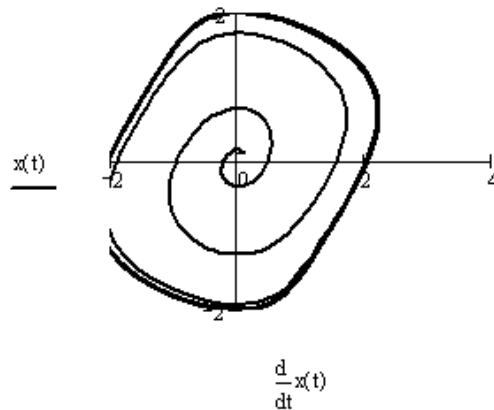


Рис. 3.1. Фазовий портрет системи Ван дер Поля

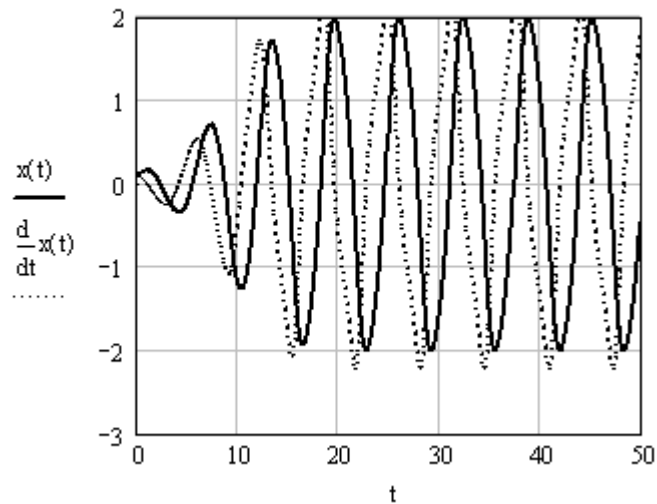


Рис. 3.2. Графіки коливань

Висновок: Положення рівноваги на початку координат, в якій поблизу нуля можна нехтувати нелінійністю, є нестійким фокусом. Траєкторії з околиці стану рівноваги асимптотично прагнуть до граничного циклу. Як показує системний аналіз таких систем, граничний цикл є стійкою ізольованою структурою, що притягує до себе траєкторії з будь-якої точки на фазовій площині.

Таким чином, в динамічних системах з нелінійною залежністю дисипації енергії від змінної, що здійснює коливання, з'являється принципово новий тип стійкої граничної множини фазових траєкторій – граничний цикл. На граничному циклі за час періоду коливань долі розсіяваної енергії, що вноситься, строго компенсуються.

Розвитком системи Ван дер Поля є система Ван дер Поля - Дуффінга, введеною за типом осцилятора Дуффінга. Ця модель враховує можливість синхронізації автоколивальних систем імпульсами.

Проаналізуємо систему Ван дер Поля - Дуффінга. Рівняння системи – диференціальне рівняння другого порядку, яке можна розбити на два рівняння першого порядку

$$D(t, x) := \begin{bmatrix} \mu \cdot x_0 - x_1 - x_0 \cdot \left[ (x_0)^2 + (x_1)^2 \right] \\ \mu \cdot x_1 + x_0 - x_1 \cdot \left[ (x_0)^2 + (x_1)^2 \right] \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Завдання 2 (другий варіант вирішення задачі)

1) нехай  $\mu = -0,1$ , а вектор початкових умов:  $x := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) систему нелінійних диференціальних рівнянь Ван дер Поля - Дуффінга вирішити за допомогою функції **rkfixed**. Наприклад,

$$Z := \text{rkfixed}(x, 0, 20, 100, D)$$

3) отримати фазовий портрет рішення системи (рис. 3.3) та графік коливань (рис. 3.4)

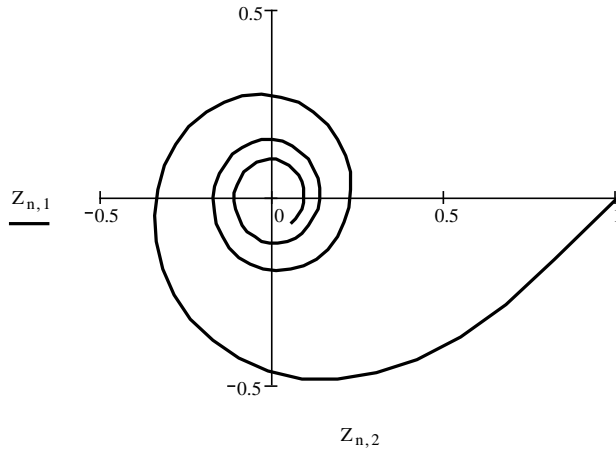


Рис. 3.3. Фазовий портрет системи Ван дер Поля – Дуффінга

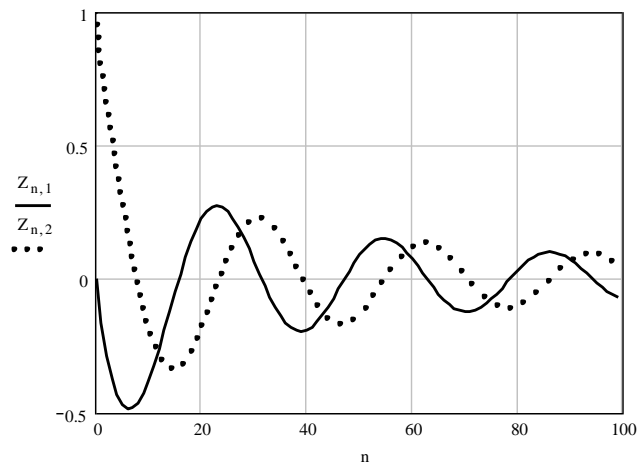


Рис. 3.4. Графік коливань

Висновок: системи, коливання в яких виникають без зовнішніх дій, називаються автономними системами. До них також відносяться автогенератори синусоїдальних і релаксаційних коливань. Періодична модуляція граничного циклу автономної системи призводить до того, що фазова траєкторія обертається навколо граничного циклу і лежить на двовимірній поверхні, що є поверхнею тора. Ця поверхня буде стійкою граничною множиною, до якої стягуються з часом усі траєкторії з деякої околиці тора (як зсередини його, так і зовні). Графік коливань показує, що виниклі спочатку коливання відразу ж затухають в часі.

### 3.2. Дослідження динамічної системи Дуффінга з зовнішнім впливом

Рух будь-якої механічної системи, наприклад, машини, гіроскопічного пристрою, літака, снаряда, залежить від діючих сил і початкових умов, т. е. від положень і швидкостей точок системи у момент початку руху. Знаючи діючі сили і початкові умови, можна теоретично розрахувати, як рухатиметься система – цей рух називається необуреним. Але на практиці істинні значення початкових умов зазвичай дещо відрізняються від розрахункових. Крім того, механічна система може під час руху піддатися незначним випадковим діям, не врахованим при розрахунку, що теж еквівалентно зміні початкових умов. Відхилення початкових умов, що виникають з різних причин, від їх розрахункових

значень на-зываются початковими обуреннями, а рух, який система здійснює за наявності цих обурень, – обуреним рухом.

Якщо при досить малих початкових обуреннях характер руху в увесь подальший час мало відрізняється від свого значення в необуреному русі, то рух системи по відношенню до цієї характеристики називається стійким. Якщо ж при скільки завгодно малих, але не рівних нулю початкових обуреннях, ця характеристика з часом все більш і більш відрізнятиметься від свого значення в необуреному русі, то рух системи по відношенню до цієї характеристики називається нестійким.

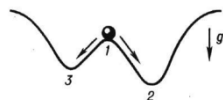


Рис. 1.

Наочним прикладом, що демонструє вказані поняття, є проста динамічна система: важка кулька на нерівній поверхні. У т. 1 потенційна енергія кульки має максимум, і це положення рівноваги нестійке: під дією малих обурень кулька скачується в нижчу точку (2 або 3), де її потенційна енергія має мінімум. Якщо нехтувати тертям, то кулька впродовж нескінченного часу здійснюватиме коливання поблизу положення стійкої рівноваги (точок 2 і 3). Якщо кулька почне скачуватися з точки, нижчої, ніж точка 1, то амплітуда коливань буде меншою. Проте близьким початковими даним відповідатимуть траєкторії з близькими періодами і амплітудами. У тому випадку, коли тертя не мале, швидкість кульки убаватиме, і вона зупиниться в точці стійкої рівноваги. Цей стан стійко асимптотичний, у фазовому просторі є притягуючою множиною, або аттрактором.

Розглянемо систему Дуффінга, що описує процеси, наприклад, в лазерних резонаторах. Диференціальне рівняння Дуффінга другого порядку має додатковий кубічний член в лівій частині, а права частина представляє зовнішню косинусоїдальну дію:

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + c \cdot \frac{d}{dt}x(t) - x(t) + x(t)^3 = A \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (3.3)$$

Прикладами фізичних явищ, які описуються таким рівнянням, можуть служити вимушені коливання маси, встановленої на пружині, підвіска автомобіля, гойдання математичного маятника при великих кутах відхилення.

Форма коливань такої системи досить складна внаслідок накладення внутрішніх коливань на зовнішні, причому частоти коливань сильно розрізняються. В результаті може наставати автосинхронізація коливань, але із-за нелінійності системи і зміни амплітуди власних коливань може спостерігатися зрив синхронізації, що супроводжується стрибкоподібними і досить хаотичними змінами параметрів системи.

Завдання:

- 1) задати рівняння Дуффінга;
- 2) визначити параметри рівняння:  $c = 0,2$  ,  $\omega = 1$  ,  $A = 0,25$ ,  $ic = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 1 \end{pmatrix}$
- 3) розділити початкове рівняння на два рівняння:

$$D(t, X) := \begin{bmatrix} X_1 \\ A \cdot \cos(\omega \cdot t) + X_0 - (X_0)^3 - c \cdot X_1 \end{bmatrix}$$

- 4) вирішити рівняння за допомогою функції **rkfixed**. Наприклад:  
`S := rkfixed(ic, 0, 200, 1000, D)`
- 5) побудувати фазовий портрет системи (рис. 3.5). Прийняти, що  $i = 0 \dots last(S^{(0)})$

Провести системний аналіз системи та показати, що фазовий портрет системи має два фокуси, що відповідають більше низькочастотній компоненті коливань. Ці фокуси відповідають статистичній оцінці найбільш вірогідних видів (мод) коливань.

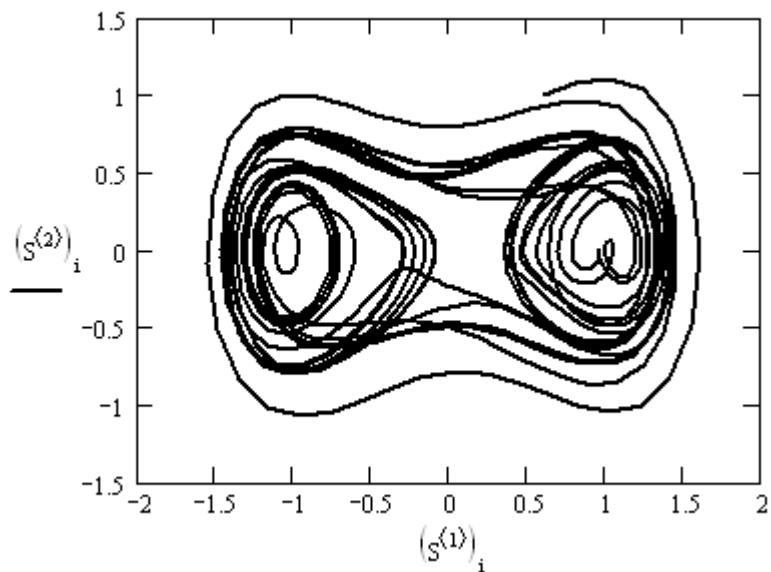


Рис. 3.5. Фазовий портрет системи Дуффінга

### 3.3. Дослідження детермінованого хаосу на прикладі аттрактора Лоренца

Броунівський рух часток і коливання в системі Дуффінга є проявами хаосу в природі. Спостерігаючи, наприклад, за коливаннями температури, можна переконатися в тому, що разом з цілком передбачуваними змінами температури (наприклад, підвищенням влітку і пониженням взимку) нерідко спостерігаються хаотичні зміни, які важко або неможливо заздалегідь передбачати.

Іноді «розвал», здавалося б, стійкої системи призводить до різких змін її поведінки – різкий стрибок курсу валюти тому наочний приклад. Хаотична поведінка систем характерніша для природи, чим стаціонарна, яка відбувається з незмінними в часі параметрами. Чим складніше система і чим більшою кількістю диференціальних рівнянь вона описується, тим більше вірогідності виникнення в системі хаотичних режимів – навіть якщо вона автономна.

У теорії показано, що вже в системах з трьох диференціальних рівнянь можливе виникнення хаотичних режимів. Наочним прикладом цього є аттрактор Лоренца. Аттрактором в теорії коливань називається притягуюча область у фазовому просторі. Причини нестійкості аттракторів пов'язані з експоненціальною нестійкістю системи в малих областях фазового простору. При цьому спостерігаються хаотичні переходи з однієї області фазового простору в інші області, але при цьому коливання можуть не виходити з деякої більшої області фазового простору. «Розвал» системи означає перехід в деякий стан, що різко відрізняється від інших станів, тобто вихід за межі обмеженого фазового стану системи. Такий стан може виявитися стійким і призвести до переходу системи в статичний стан, при якому зміни її параметрів відсутні.

Аттрактор Лоренца ґрунтується на трьох диференціальних рівняннях, трьох константах і трьох початкових умовах:

$$\underset{\text{Lorenz}}{F}(t, x) := \begin{pmatrix} -\sigma \cdot x_0 + \sigma \cdot x_1 \\ r \cdot x_0 - x_1 - x_0 \cdot x_2 \\ x_0 \cdot x_1 - b \cdot x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma \\ r \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 10 \\ 35 \\ 2.7 \end{pmatrix} \quad x := \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Завдання:

- 1) задати константи системи диференціальних рівнянь.
- 2) задати початкові значення.
- 3) задати систему рівнянь Лоренца :
- 4) знайти рішення системи диференціальних рівнянь за допомогою функції  $X := \text{rkfixed}(x, 0, 30, 2001, F)$
- 5) побудувати графіки фазового простору системи Лоренца (рис. 3.6)

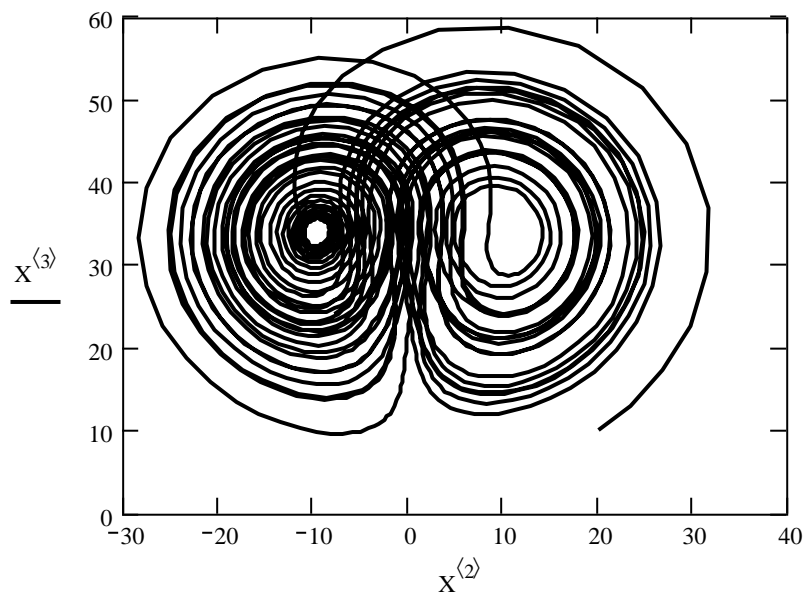
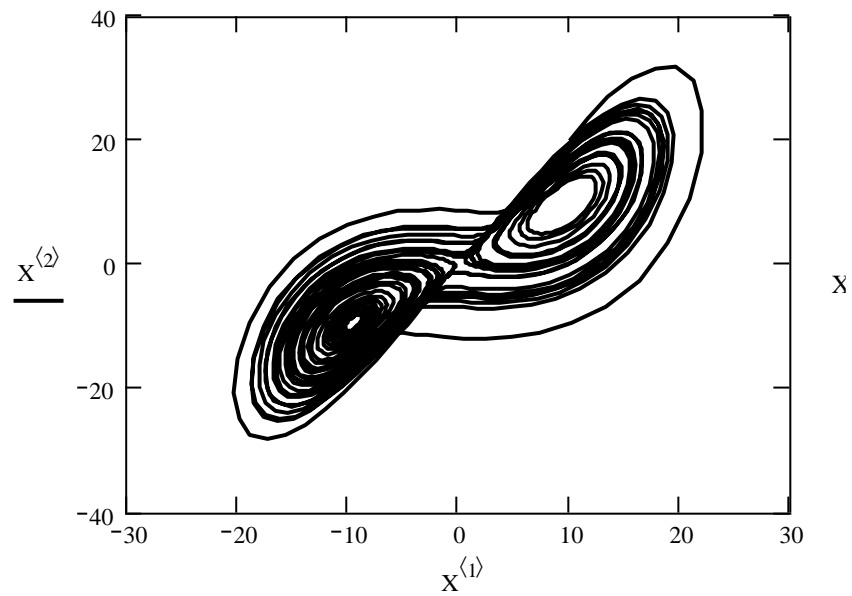


Рис. 3.6 – Моделювання аттрактора Лоренца



Висновок: При певних значеннях параметрів  $r$  і  $b$  і початкових параметрах змінних поведінка аттрактора (він в цьому випадку називається дивним аттрактором) дуже нагадує хаотичні коливання в системі Дуффінга.

Аттрактор представляє поведінку системи у будь-який заданий час, і її стан в певний момент залежить від її стану в моменти часу, що передували даному. Якщо початкові дані змінити навіть на дуже маленькі величини, перевірка стану аттрактора покаже абсолютно інші числа. Це відбувається тому, що маленькі відмінності збільшуються в результаті рекурсії.

Проте, незважаючи на це, графік аттрактора виглядатиме досить схоже. Обидві системи матимуть абсолютно різні значення у будь-який заданий момент часу, але графік аттрактора залишиться тим же самим, оскільки він виражає загальну поведінку системи.

## Лабораторна робота №4. Системне дослідження біологічних систем

### 4.1. Аналіз системи Лотки-Вольтерра

Розглянемо модель взаємодії двох популяцій, одну з яких назвемо хижаком, іншу - жертвою.

Хижак і його жертви мешкають спільно. Жертв їдять хижаки – їх число скорочується, а число хижаків росте. Проте через деякий час хижакам починає не діставати їжі, і їх популяція перестає зростати і навіть зменшується. У результаті жертви починають розмножуватися більше інтенсивно і їх число росте. Далі ці процеси повторюються так, що в них простежується певна періодичність або закономірність.

Нехай  $x$  – чисельність популяції жертв, а  $y$  – чисельність популяції хижаків.

Припустимо, що відносний приріст жертв  $dx/dt$  дорівнює

$$a - b \cdot y,$$

де  $a > 0$  – швидкість розмноження жертв у відсутності хижаків;

$-b \cdot y$  – втрати від хижаків ( $b > 0$  – ймовірність того, що при зустрічі з хижаком жертву буде з'їдено).

Розвиток популяції хижаків залежить від кількості їжі, тобто жертв. За відсутності їжі, при  $x = 0$ , відносна швидкість зміни розміру популяції хижаків  $dy/dt$  дорівнює  $-c$ , де  $c > 0$ .

Наявність їжі компенсує убування хижаків, і при  $x > 0$  відносний приріст чисельності популяції хижаків  $dy/dt$  складає

$$(-c + d \cdot x), \text{ где } d > 0.$$

Таким чином, система диференціальних рівнянь, задаючих модель Лотки - Вольтерра, має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (a - by)x, \\ \frac{dy}{dt} = (-c + dx)y, \end{cases} \quad (4.1)$$

где  $a, b, c, d > 0$

**Завдання:** побудувати фазовий портрет (рис. 4.1) і дослідити динаміку популяцій (рис. 4.2, 4.3) системи Лотки-Вольтерра

$$a := 0.1 \quad b := 0.01 \quad c := 0.05 \quad d := 0.001$$

Записати диференціальні рівняння системи:

$$\frac{d}{dt}x(t) = (a - b \cdot y(t)) \cdot x(t)$$

$$\frac{d}{dt}y(t) = (-c + d \cdot x(t)) \cdot y(t)$$

при початкових умовах:

$$x(0) = 50 \quad y(0) = 15$$

Знайти рішення за допомогою функції:

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} := \text{Odesolve} \left[ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, t, T \right]$$

при

$$T := 200 \quad t := 0, 0.1 .. T$$

Провести системний аналіз вказаної моделі та дослідити, що модельовані процеси можуть мати не лише коливальний, але і аперіодичний характер. Зробити висновки.

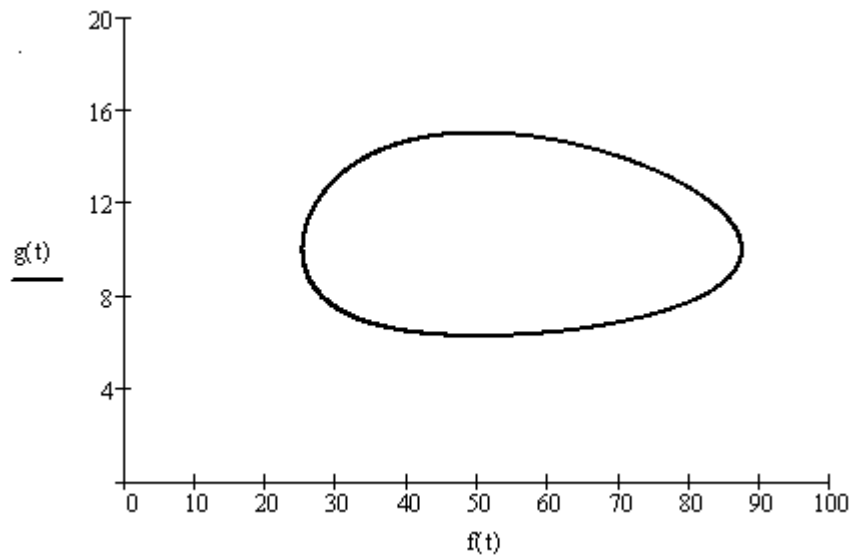


Рис. 4.1 – Фазовий портрет системи Лотки–Вольтерра

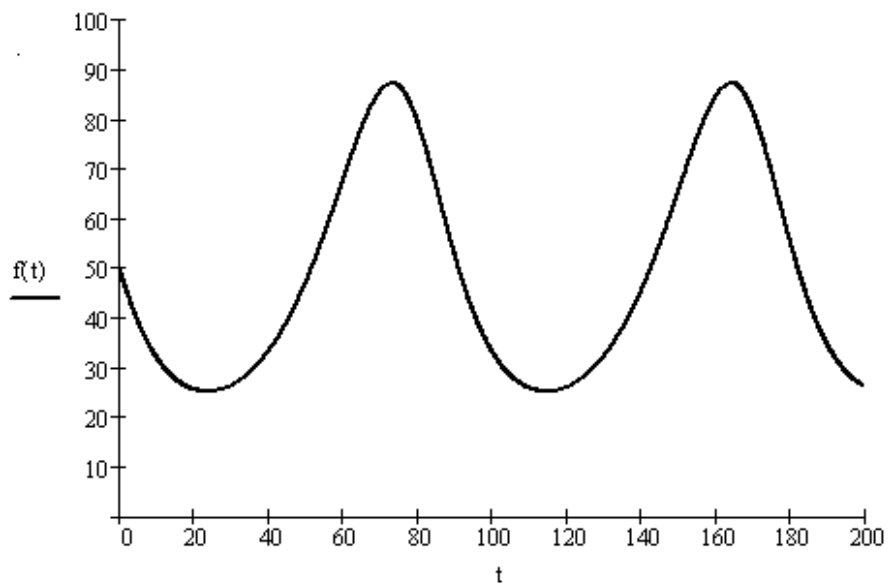


Рис. 4.2 – Динаміка популяції жертв

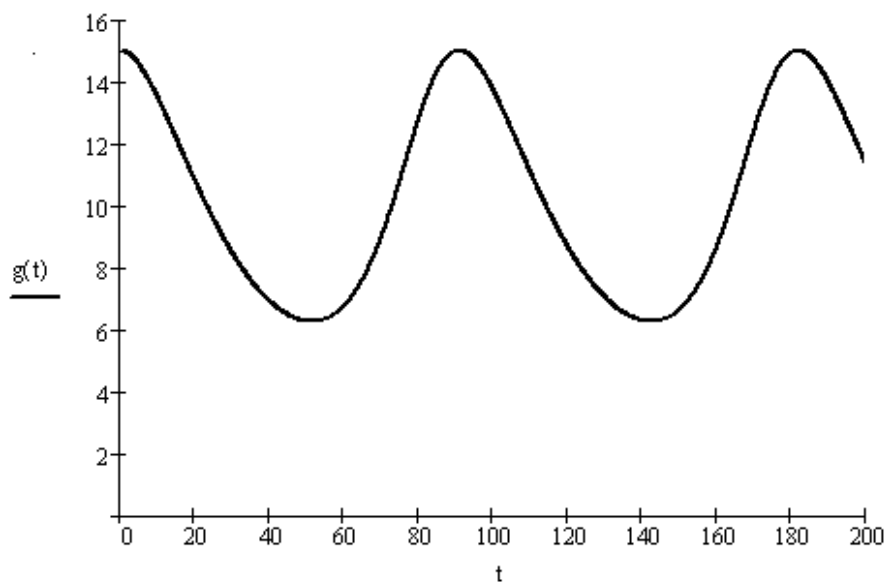


Рис. 4.3 – Динаміка популяції хижаків

Висновки: Видно, що процес носить коливальний характер. Кількість жертв коливається навколо величини  $x = 50$ , а кількість хижаків – навколо величини  $y = 10$ .

На мові диференціальних рівнянь це означає, що система має стаціонарний стан (т.е.  $x'(t) = 0, y'(t) = 0$ ) в точці  $x = 50, y = 10$ . Якщо в початковий момент система знаходилася в стаціонарній точці, то рішення  $x(t), y(t)$  не будуть змінюватися в часі, а залишаться постійними.

Всякий інший початковий стан призводить до періодичного коливання рішень. Періодичність процесу виразно видно на фазовій діаграмі: фазова крива  $f(t), g(t)$  – замкнена лінія.

Найлівіша точка цієї кривої – це точка, в якій число жертв досягає мінімального значення. Найправіша точка – це точка найбільшого розміру популяції жертв. Між цими точками кількість хижаків спочатку убуває до нижньої точки фазової кривої, де досягає свого мінімального значення, а потім росте до верхньої точки фазової кривої. Фазова крива охоплює точку  $x = 50, y = 10$ .

Таким чином, модель Лотки-Вольтерра характеризує структурну нестійкість. При малій зміні параметрів моделі фазова крива не буде замкнутою. Модель нестійка відносно обурень, оскільки її стаціонарний стан – фазовий центр.

Оскільки більшість моделей є ідеалізацією дійсності, то в них увага зосереджена на основних змінних і співвідношеннях між ними. Стійкість моделей відносно малих обурень важлива в додатках. Модель може характеризувати не лише зміну популяцій хижаків і жертв, але і поведінку конкуруючих фірм, зростання народонаселення, зміну екологічної обстановки, розвиток науки і т.д.

#### 4.2. Аналіз системи Лотки-Вольтерра з «логістичною поправкою»

Коливання популяцій хижаків і жертв насправді спостерігаються не завжди. Нерідко спостерігають стабільну кількість тих і інших, хоча процес з'їдення жертв хижаками йде постійно.

Для такої моделі системи "хижак-жертва" необхідно ввести деяку «логістичну поправку» у вигляді параметра  $\alpha$ :

Система диференціальних рівнянь моделі прийме вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (a - by)x - \alpha \cdot x^2, \\ \frac{dy}{dt} = (-c + dx)y - \alpha \cdot y^2, \end{cases} \quad (4.2)$$

**Завдання:** побудувати фазову площину (рис. 4.4) і динаміку популяцій хижаків і жертв (рис. 4.5) системи Лотки-Вольтерра з логістичною поправкою при наступних параметрах:

$$a := 3 \quad b := 2 \quad c := 1.8 \quad d := 1 \quad \alpha := 0.08$$

та початкових умовах:

$$x(0) = 3 \quad y(0) = 1$$

Проаналізувати поведінку системи при  $a < 0$ . Переконайтеся в тому, що при  $a < 0$  утворюється нестійкий фокус і коливання починають наростати.

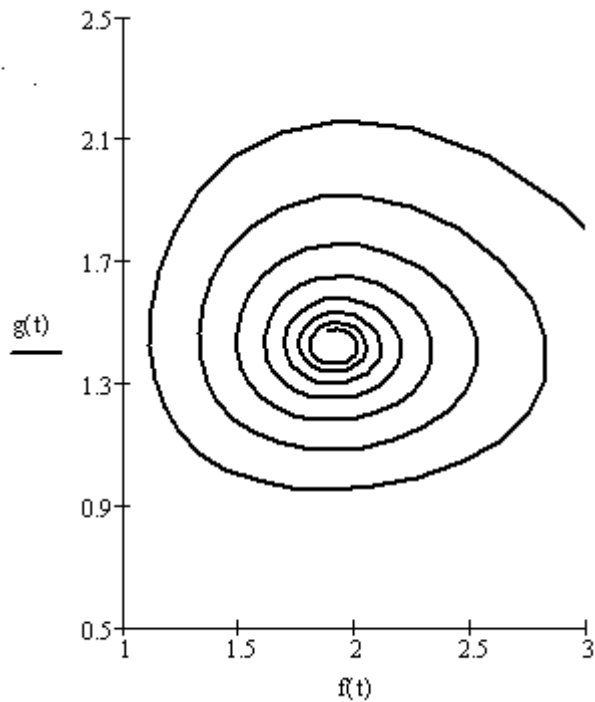


Рис. 4.4 – Фазовий портрет системи «хижак-жертва» Лотки-Вольтерра с логістичною поправкою

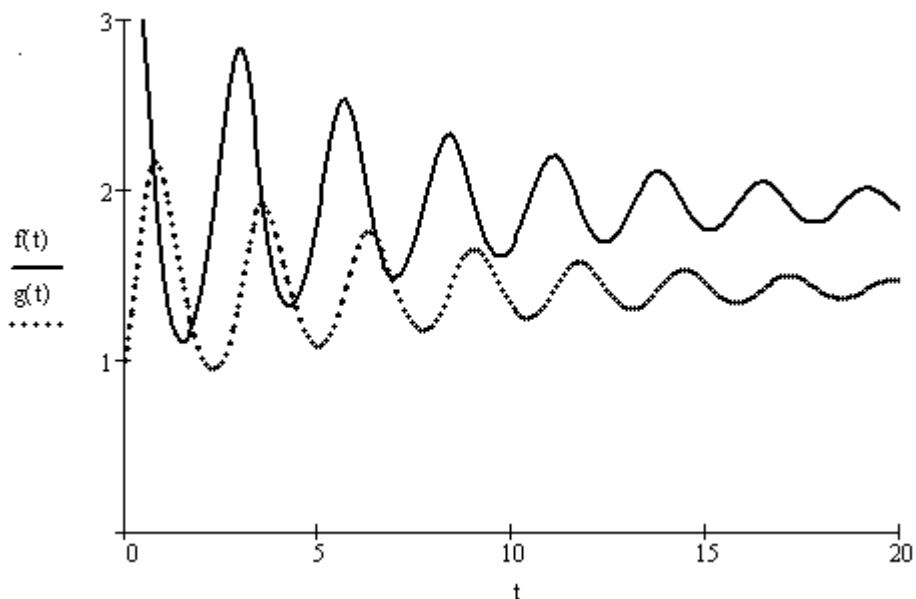


Рис. 4.5 – Динаміка популяцій хижаків і жертв

**Висновки:** Додатковий параметр  $a$  у цій моделі дозволяє управляти загасанням осциляцій (коливань) моделі. Видно, що при вказаних параметрах моделі коливальний процес в ній явно затухає і встановлюється тривала рівновага між числом хижаків і жертв. Фазовий портрет придбає стійкий фокус. Форма фазового портрета свідчить про досить малу нелінійність цієї системи. Тому коливання нагадують затухаючу синусоїду.

#### 4.3. Аналіз системи «хижак-жертва» Холлінга-Теннера

На прикладі моделі Лотки-Вольтерра і моделі Лотки-Вольтерра з «логістичною поправкою» була продемонстрована одна з найважливіших якісних властивостей фазових центрів – вони легко руйнуються навіть при найменших змінах правої частини диференціальних рівнянь.

Існує інший вид моделей, в яких виникають незгасаючі коливання, – це моделі, що мають на фазових портретах граничні цикли.

- Така модель існує для системи конкуруючих видів – це модель Холлінга-Теннера. Швидкість зростання популяції жертв  $x'$  у цій моделі дорівнює сумі трьох величин:
- швидкості розмноження у відсутність хижаків:  $r \cdot x$ ;
  - впливу міжвидової конкуренції за їжу при обмежених ресурсах (для випадку конкуруючих виробників це вплив обмежених сировинних ресурсів):

$$r \cdot x \cdot \frac{x}{K} \quad (4.3)$$

- впливу хижаків, в припущенні, що хижак перестає вбивати, коли насичується:

$$w \cdot y \cdot \frac{x}{D + x} \quad (4.4)$$

Швидкість зростання популяції хижаків  $y'$  будується так само, як і в моделі Лотки-Вольтера, в припущенні, що жертви зустрічаються рідко. Якщо для підтримування життя одного хижака потрібно  $J$  жертв, то популяція з  $x$  жертв зможе забезпечити їжею  $x/J$  хижаків. Модель зростання популяції хижаків, в якій їх число не може перевищити цю критичну величину, має вигляд:

$$\frac{dy}{dt} = y \left( s - \frac{sJ}{x} y \right) \quad (4.5)$$

Таким чином, модель Холлінга-Теннера має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = r \left( 1 - \frac{x}{K} \right) x - wy \frac{x}{D + x}, \\ \frac{dy}{dt} = s \left( 1 - \frac{Jy}{x} \right) y, \end{cases} \quad (4.6)$$

де  $r, s, K, D, J > 0$ .

**Завдання:** дослідити систему при

$$r := 1 \quad K := 7 \quad w := 1.5 \quad D := 1 \quad s := 0.2 \quad J := 0.5$$

та двох початкових станах:

- $x(0)=3, y(0)=1$  (рис. 4.6)
- $x(0)=1, y(0)=1$  (рис. 4.7)

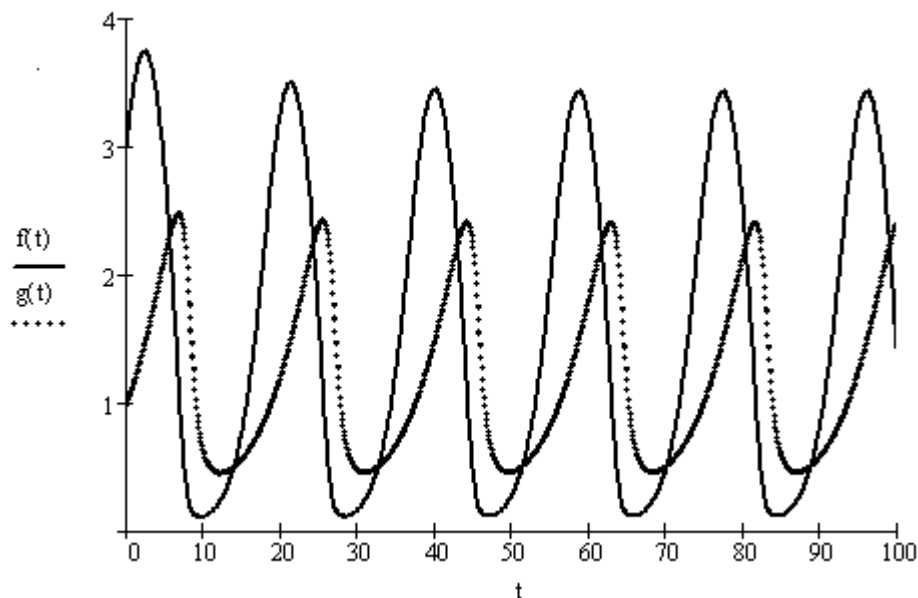


Рис. 4.6 – Рішення системи Холлінга-Теннера при  $x(0)=3, y(0)=1$

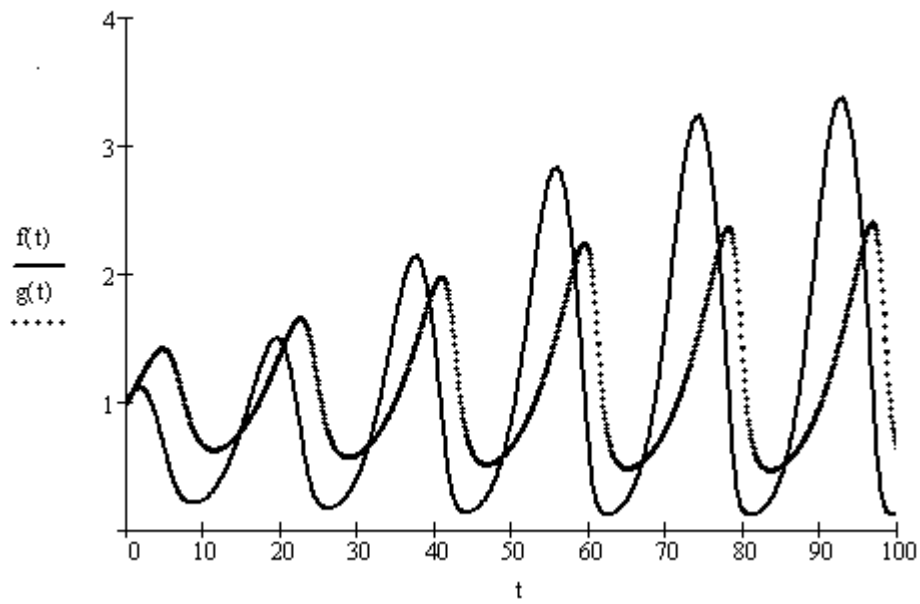


Рис. 4.7 – Рішення системи Холлінга-Теннера при  $x(0)=1, y(0)=1$

Фазові портрети, що відповідають вказаним початковим умовам, приведені на рис. 4.8, 4.9 відповідно:

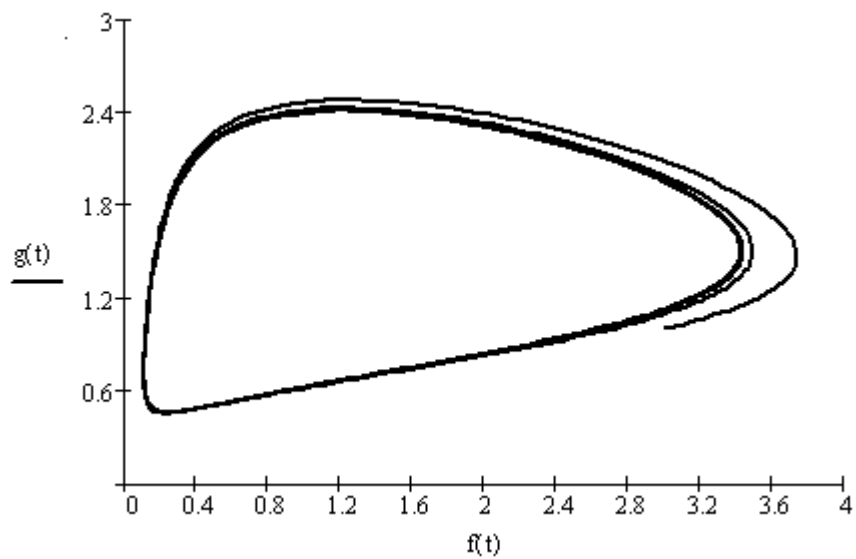


Рис. 4.8 – Фазовий портрет системи Холлінга-Теннера для

$$x(0) = 3 \quad y(0) = 1$$

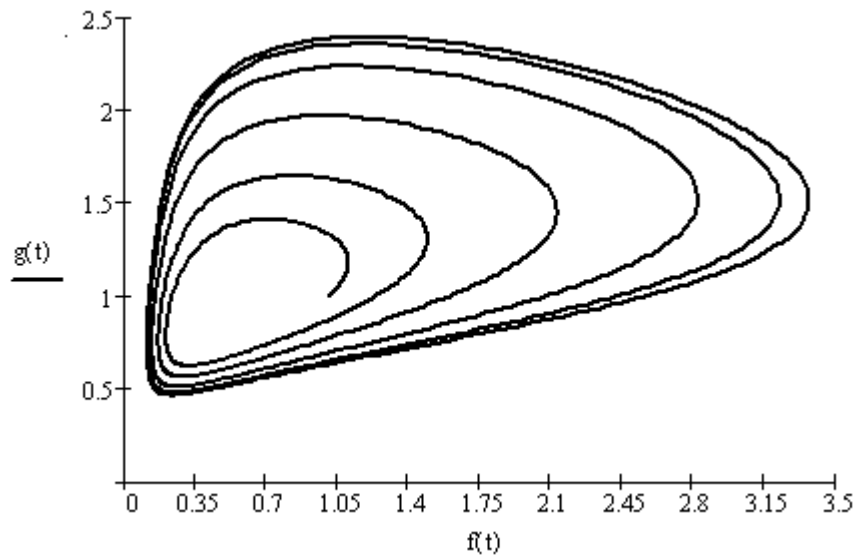


Рис. 4.9 – Фазовий портрет системи Холлінга–Теннера для

$$x(0) = 1 \quad y(0) = 1$$

Показати, що при

$$s < \frac{r}{K} \cdot \frac{K-D-2}{1+D} \quad (4.7)$$

на фазовому портреті системи буде стійкий граничний цикл.

Висновок: модель має дві важливі особливості. Її нелінійність досить сильна, що видно з виду фазового портрета, витки якого помітно відмінні від еліпсів.

Головна властивість цієї моделі полягає в тому, що коливання задаються граничним циклом фазового портрета, який може бути стійким. Він і визначає амплітуду коливань, які встановлюються в стаціонарному режимі роботи системи. При цьому коливання можуть як затухати в часі, так і зростати, наближуючись при цьому до стаціонарних коливань.



## Лабораторна робота №5. Системне дослідження економічних систем

Велику групу в системному аналізі складають задачі, що відносяться до задач ухвалення оптимальних рішень, де необхідно вибрати виробничу програму, постачальників, розподіл ресурсів, маршрут транспортування. Вимога оптимальності в плануванні і управлінні призводить до завдань оптимального (математичного) програмування.

Необхідно знайти таке управлінське рішення  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , яке в деякій області допустимих рішень  $D$  забезпечувало б найкраще значення деякого критерію оптимальності – економічного показника, наприклад, максимум прибули або мінімум витрат.

Завдання оптимізації в загальному вигляді записується так:

знайти максимум або мінімум функції

$$f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (5.1)$$

при обмеженнях

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) (\leq, =, \geq) b_i, \text{ где } i = 1 \dots m \quad (5.2)$$

$$x_j \geq 0, j = 1 \dots n \quad (5.3)$$

Якщо функція і обмеження (5.1) - (5.3) лінійні, то вирішувана задача зводиться до задачі лінійного програмування в якій потрібно знайти оптимальне використання обмежених ресурсів (завдання про планування випуску продукції, про суміші, транспортне завдання і так далі)

У загальному випадку завдання лінійного програмування може бути записане так:

знайти максимум або мінімум цільової функції

$$f(X) = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \quad (5.4)$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j = b_i, x_j \geq 0, b_i \geq 0, i = 1 \dots m, j = 1 \dots n \quad (5.5)$$

Універсальним методом рішення завдань лінійного програмування є симплексний метод. Симплекс – це багатокутник, що переміщується в просторі рішення так, щоб, звужуючись, він міг охопити точку шуканого рішення, наближуючись до нього із заданою погрешністю.

При цьому методі задається початкове наближення, що задовольняє усім обмеженням задачі, але не обов'язково оптимальне. Оптимальність результату досягається послідовним поліпшенням початкового варіанту за певне число кроків (ітерацій). Напряму переходу від однієї ітерації до іншої вибирається на основі критерію оптимальності цільової функції задачі.

### 5.1. Задача планування випуску тканини

Розглянемо задачу планування випуску тканини. Максимальний обсяг випуску тканин може бути заданий у грошовому відношенні. Постановка задачі, а також її вирішення засобами системи Mathcad представлено на рис. 5.1.

ORIGIN := 1

$$f(x) := 80 \cdot x_1 + 70 \cdot x_2 + 60 \cdot x_3$$

Знайти максимум цільової функції

$$x_1 := 10 \quad x_2 := 10 \quad x_3 := 10$$

Given

Задані обмеження

$$2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 \leq 780$$

$$x_1 + 4 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 \leq 850$$

$$3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 \leq 790$$

$$x_1 \geq 90 \quad x_2 \geq 70 \quad x_3 \geq 60$$

+

R := Maximize(f, x)

$$R = \begin{pmatrix} 112.5 \\ 70 \\ 86.25 \end{pmatrix} \quad \text{Кількість виробів 1, 2 та 3}$$

$f(R) = 19075$  Максимальний об'єм випуску продукції

Рис. 5.1. Вирішення задачі на планування обсягу випуску тканини

## 5.2. Задача мінімізації ресурсів

Розглянемо задачу мінімізації вартості бензину. Стандартом потрібно, щоб октанове число бензину А-90 було не нижче 90, а утримання сірки - не більше 0.2%. Для виготовлення бензину використовується суміш з чотирьох компонентів. Дані про компонентах наведені в табл. 5.1. Вирішення задачі наведено на рис. 5.2.

Таблиця 5.1 – Вихідна інформація

Характеристика	Компонент бензину			
	1	2	3	4
Октанове число	68	76	80	90
Зміст сірки, %	35	35	30	20
Ресурси, т	700	600	500	300
Собівартість, гр.од./т	40	45	60	90

Необхідно визначити, скільки тонн кожного компонента слід використовувати для отримання 1000 т автомобільного бензину А-90, щоб його собівартість була мінімальною.

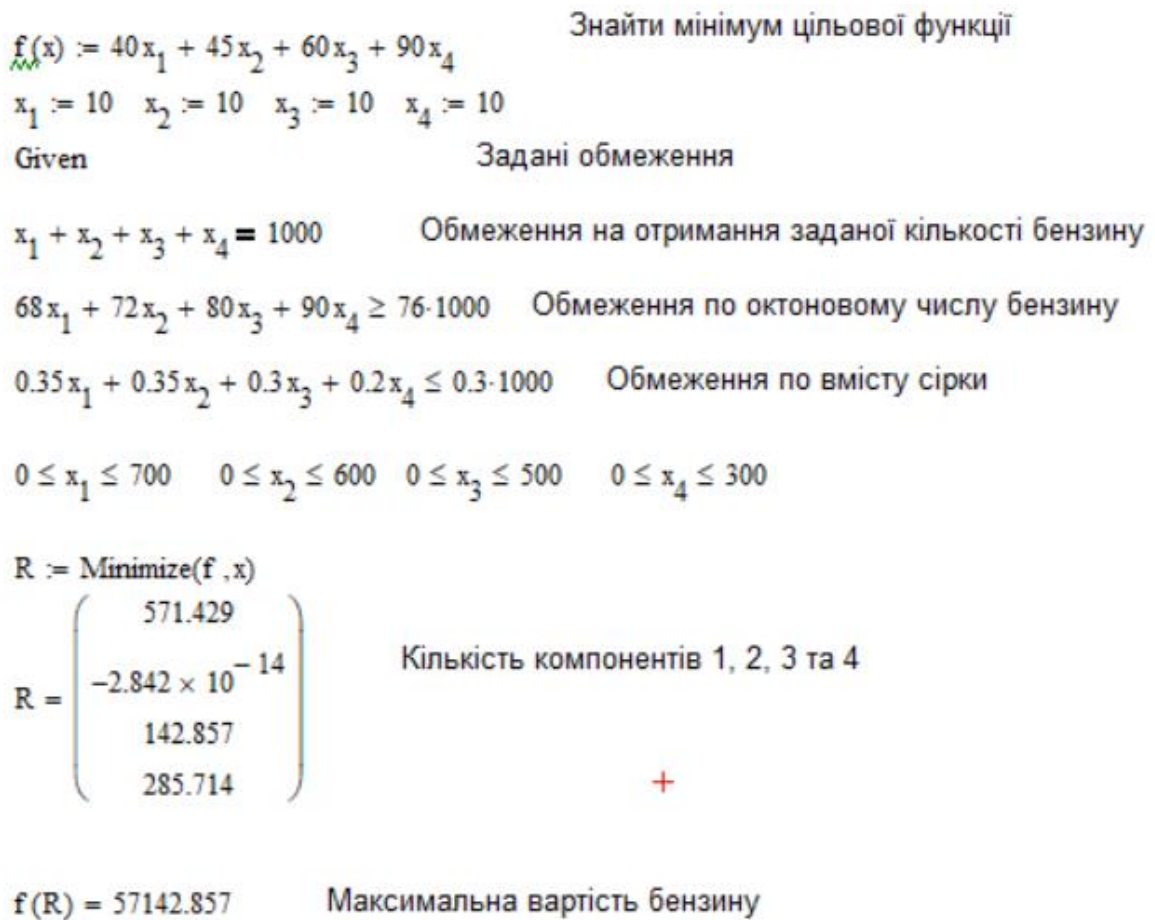


Рис. 5.2. Рішення задачі мінімізації

### 5.3. Транспортна задача

Постановка завдання в загальному вигляді: В  $n$  пунктах – складах постачальників знаходиться певна кількість  $S_i$  ( $i = 1 \dots n$ ) одиниць деякого однорідного продукту. Продукт споживається  $m$  споживачами в певному об'ємі  $B_j$  ( $j = 1 \dots m$ ). Відомі витрати на перевезення одиниці продукту з  $i$ -го складу  $j$ -му споживачу, які дорівнюють  $C_{ij}$  та наведені в таблиці транспортних витрат. Необхідно скласти такий план перевезень, при якому повністю задовольняються вимоги споживачів з мінімальними транспортними витратами.

Початкові дані: Нехай на трьох складах зберігається 310, 260 і 280 одиниць вантажу відповідно. Необхідно його доставити п'яти споживачам, замовлення яких дорівнюють 180, 80, 200, 160, 220 одиниць. Вартості перевезення одиниці вантажу із складу споживачеві вказані в транспортній таблиці. Розробити модель, що описує витрати при перевезенні вантажів із складів споживачам, що дозволяє оптимізувати витрати на транспортування.

Доповнення до завдання:

- товар на усіх складах однаковий;
- товар є в наявності на усіх складах;
- усі споживачі зробили замовлення товару;
- задана вартість перевезення товару з  $i$ -го складу  $j$ -му споживачу.
- пропускна спроможність дороги от кожного складу не обмежена;
- тривалість перевезення від складу до споживача не враховується при виборі переважного плану перевезень;
- загальна кількість товарів на складах завжди більше або дорівнює замовленню споживачів.

Введемо позначення:

- $n$  – кількість постачальників;
- $m$  – кількість споживачів;
- $A_i$  – поставки від  $i$  –го постачальника споживачам, обмежено кількістю товару  $S_i$  ;
- $B_j$  – заказ  $j$  –го споживача. Споживач замовляє товар в усіх постачальниках;
- $X_{ij}$  – перевезення від  $i$  –го постачальника  $j$  –му споживачу;
- $C_{ij}$  – ціна поставки одиниці товару від  $i$  –го постачальника  $j$  –му споживачу.

Необхідно забезпечити повне виконання усіх замовлень  $B_j$  при мнімалних витратах на усі замовлення. Загальні витрати на перевезення дорівнюють  $F(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m C_{ij} \cdot x_{ij}$  где  $F(X)$  – функція, що мінімізується, залежна від  $n \times m$  змінних  $X_{ij}$ .

При виконанні наступних обмежень:  $A_i = \sum_{j=1}^m x_{ij} \leq S_i$

Тобто не можна поставити товару більше, ніж є на складі.  $B_j = \sum_{i=1}^n x_{ij}$

тобто споживач повинен отримати точну кількість замовленого товару  $x_{ij} \geq 0$ ,

тобто товаропоток не може бути негативним.

Рішення задачі в середовищі пакету Mathcad здійснюється за допомогою вбудованої функції **Minimize**. Рішення транспортної задачі представлено на мал. 5.4.

$$B := \begin{pmatrix} 180 \\ 80 \\ 200 \\ 160 \\ 220 \end{pmatrix} \text{ Закази споживачів} \quad S := \begin{pmatrix} 310 \\ 260 \\ 280 \end{pmatrix} \text{ Запаси продукції на складах}$$

$$C := \begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 & 5 & 4 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 5 & 9 \end{pmatrix} \text{ Матриця транспортних витрат}$$

Цільова функція

$$f(x) := \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^5 (C_{i,j} \cdot x_{i,j}) \quad x := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ Матриця початкових приближень}$$

Обмеження по запасам продукції на складах

$$\sum_{j=1}^5 x_{1,j} \leq S_1 \quad \sum_{j=1}^5 x_{2,j} \leq S_2 \quad \sum_{j=1}^5 x_{3,j} \leq S_3$$

Виконання вимог заказа споживача

$$\sum_{i=1}^3 x_{i,1} = B_1 \quad \sum_{i=1}^3 x_{i,2} = B_2 \quad \sum_{i=1}^3 x_{i,3} = B_3 \quad \sum_{i=1}^3 x_{i,4} = B_4 \quad \sum_{i=1}^3 x_{i,5} = B_5$$

$x \geq 0$  Об'єм перевозок не може бути від'ємним

$$R := \text{Minimize}(f, x)$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 80 & 220 \\ 0 & 0 & 180 & 80 & 0 \\ 180 & 80 & 20 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ Оптимальний план перевозок. Рядок - склад (виробник), стовпчик - споживач. Елемент матриці - об'єм перевозок.}$$

$f(R) = 3200$  Затрати на транспортування

Рис. 5.3. Рішення транспортної задачі

## Лабораторна робота №6. Системне дослідження задач на основі графових моделей

### 6.1. Задача пошуку найкоротшого шляху

Для представлення багатьох технічних об'єктів, опису технологічних процесів і функціонування технічних систем часто використовуються графові моделі. До моделі у вигляді графа можна звести такі практичні завдання, як пошук найкоротшого шляху в заданій транспортній системі і завдання про розподіл потоку в мережі.

У загальному вигляді задача формулюється так: є деяка кількість пунктів, сполучених певним чином одно- або двонаправленими зв'язками. Кожен зв'язок має визначену вагу – довжину. Необхідно знайти найкоротший шлях з пункту  $i$  в пункт  $j$ .

При складанні математичної моделі задача враховує наступні допущення:

- маршрут має бути безперервним;
- кожен проміжний пункт на шляху дотримання може бути відвіданий тільки один раз.

Транспортна система в задачі представляється орієнтованим графом – двухполюсною мережею, где  $N_1$  - вхід,  $N_n$  - вихід, вагові коефіцієнти  $c_{ij}$  ребер  $s_{ij}$  являються довжиною шляху між пунктами  $i$  та  $j$ . Необхідно визначити найкоротший шлях з  $N_1$  в  $N_n$ . Кожному ребру графа ставиться у відповідність булева змінна, тобто  $s_{ij} \in \{0,1\}$ . Якщо ребро входить в маршрут прямування, то  $s_{ij} = 1$ , інакше  $s_{ij} = 0$ .

Цільова функція - функція мінімізації при пошуку найкоротшого шляху має вигляд:

$$F = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot s_{ij} \quad (6.1)$$

Усі пункти маршруту розділяються на початковий, проміжний і кінцевий. Очевидно, в кожному проміжному пункті може бути по одному ребру, що входить і одному ребру, що виходить, а для початкового і кінцевого пунктів може бути ребро, що виходить або ребро, що входить відповідно. Математично ці обмеження записуються наступним чином:

- для перерахування усіх  $k$ , що входять в  $i$ -ий пункт маршруту ребер ( $i = 2, \dots, n$ ):

$$\sum_k s_{ki} = 1 \quad (6.2)$$

- для перерахування усіх  $j$ , що виходять з  $i$ -го пункту ребер ( $i = 1, \dots, n - 1$ ):

$$\sum_j s_{ij} = 1 \quad (6.3)$$

Якщо пункт  $i$  не входить в найкоротший маршрут, то відповідна сума як для тих ребер, що входять, так і ребер, що виходять з вершини графа, має дорівнювати нулю. Тоді для будь-якого пункту мережі (окрім початкового і кінцевого) повинна виконуватися умова:

$$\sum_k s_{ki} - \sum_j s_{ij} = 0 \quad (6.4)$$

В початковому пункті:  $\sum_j s_{1j} = 1$

В кінцевому пункті:  $\sum_k s_{kn} = 1$

та  $s_{ij} \geq 0 \forall i, \forall j$ .

Таким чином, із-за вказаних обмежень в рішенні можуть бути тільки значення нуля або одиниці, що дозволяє отримати завдання лінійного програмування з булевими змінними.

До подібної математичної моделі можна звести таким завдання, як планування послідовності виконання технологічних процесів і робіт. Вага ребра при цьому може мати різний сенс: тривалість, трудомісткість, вартість і так далі.

Задача пошуку найкоротшого шляху – розв'язок наведено на рис. 6.1 (б)

Умова задачі. Нехай необхідно знайти найкоротший шлях маршруту з пункту А до пункту Б, якщо схема руху та відстань між об'єктами задані схемою (рис. 6.1 (а)):

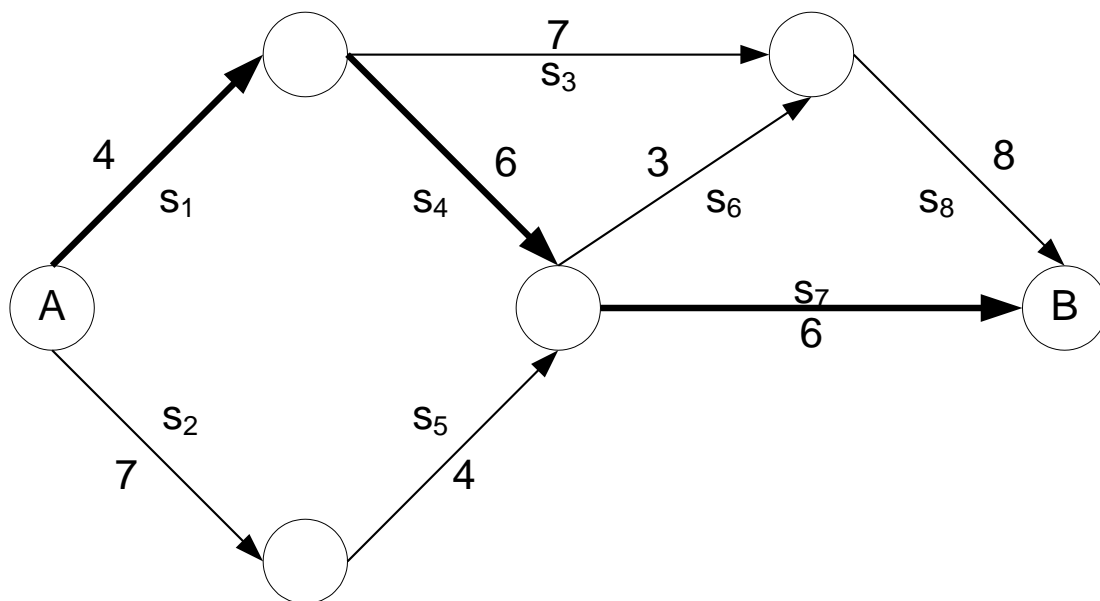


Рис. 6.1 (а). Схема маршруту

```

ORIGIN := 1

f(s) := 4 s1 + 7 s2 + 7 s3 + 6 s4 + 4 s5 + 3 s6 + 6 s7 + 8 s8

s1 := 1  s2 := 1  s3 := 1  s4 := 1  s5 := 1  s6 := 1  s7 := 1  s8 := 1

Given
s1 ≥ 0  s2 ≥ 0  s3 ≥ 0  s4 ≥ 0  s5 ≥ 0  s6 ≥ 0  s7 ≥ 0  s8 ≥ 0

1 = s1 + s2  s1 = s3 + s4  s2 = s5  s4 + s5 = s6 = s7  s3 + s6 = s8  s7 + s8 = 1

Solver
R := minimize(f, s)

RT = [1 0 1 0 0 0 0 1]

```

Рис. 6.1 (б). Схема маршруту

## 6.2. Задача о розподіленні потоку в мережі

У задачах подібного типу необхідно знайти оптимальний варіант транспортування продукту по мережі певної конфігурації. В цьому випадку елементи мережі мають наступні характеристики:  $c_{ij}$  – вартість транспортування одиниці продукції для ребра мережі між вершинами  $i$  та  $j$ ;  $D_{ij}$  – пропускна спроможність цього ребра ( $0 \leq D_{ij} \leq \infty$ ), тобто якщо ребро між цими вершинами  $i$  та  $j$  графа відсутнє, то пропускна спроможність дорівнює нулю, якщо потік нічим не обмежений – то некінченості. Тому повинна виконуватися вимога збереження потоку: сумарний потік, що входить і виходить з вузла, мають бути рівні.

Нехай  $x_{ij}$  – потік в ребрі графа, тоді для проміжної вершини мережі:

$$\sum_k x_{ki} - \sum_j x_{ij} = 0 \quad (6.5)$$

де  $k$  – перерахування усіх ребер, що входять, для вершини  $i$ ,  $j$  – перерахування усіх ребер, що виходять, для вершини  $i$ .

Для потоку необхідно, щоб  $0 \leq x_{ij} \leq D_{ij}$ . Для початкової і звичайної вершини потрібне виконання умови:  $\sum_j x_{1j} = A_1$

де  $A_1$  – максимальний вихідний потік, що створюється початковою вершиною мережі. Необхідно, щоб він був менше, ніж сумарна пропускна спроможність усіх ребер, що виходять з вершини,  $\sum_k x_{kn} = B_n$  де  $B_n$  – максимальний потік, споживаний кінцевою вершиною мережі. Він також не повинен перевищувати пропускної спроможності ребер, що входять.

Таким чином, можливі дві постановки задачі оптимізації: мінімізації вартості транспортування і максимізації потоку мережі. Відповідно, отримуємо два формулювання математичної моделі завдання.

1. Мінімізації вартості транспортування.

Цільова функція – функція мінімізації загальної вартості транспортування:

$$\sum_i \sum_j c_{ij} \cdot x_{ij} \quad (6.6)$$

При обмеженнях: 1)  $A_1 = B_n$  – потік не може накопичуватися в проміжних вершинах, тобто  $\sum_j x_{1j} = \sum_k x_{kn}$

2) – по пропускній спроможності  $0 \leq x_{ij} \leq D_{ij}$ ;

3) зберігання безперервності потоку, тобто  $\sum_k x_{ki} - \sum_j x_{ij} = 0$

2. Максимізація потоку.

Цільова функція – функція максимізації сумарного потоку, що входить в кінцевий вузол:  $F = \sum_k x_{kn}$

При обмеженнях: 1) сумарні витрати не повинні перевищувати величину наявних засобів  $C_s$ :  $\sum_i \sum_j c_{ij} \cdot x_{ij} \leq C_s$

2)  $A_1 = B_n$  – потік не може накопичуватися в проміжних вершинах, тобто  $\sum_j x_{1j} = \sum_k x_{kn}$

3) – по пропускній спроможності  $0 \leq x_{ij} \leq D_{ij}$ ;

4) зберігання безперервності потоку, тобто  $\sum_k x_{ki} - \sum_j x_{ij} = 0$

Розглянемо задачу на пошук максимального потоку для системи автодоріг, приведеної на рис. 6.2.

Умова задачі. Знайти максимальний потік для системи автодоріг, що представлена на рис. 6.2 (а). Цифрами позначено максимальну пропускну здатність ділянок транспортної мережі, наприклад тисяч машин на день.

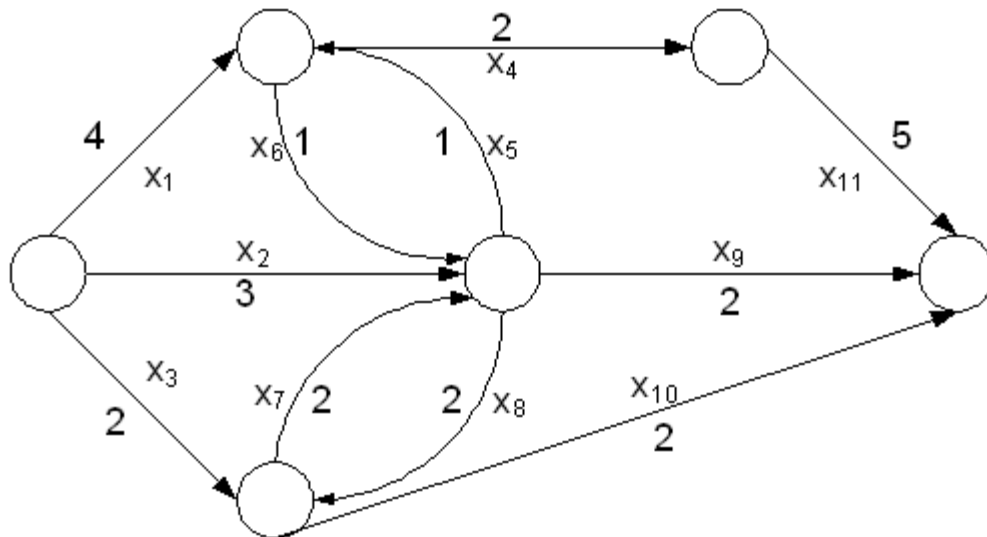


Рис. 6.2 (а) – Схема системи автодоріг

```

ORIGIN := 1

f(x) := x9 + x10 + x11

i := 1..11   xi := 1

Given
x1 + x5 = x4 + x6   x2 + x6 + x8 = x5 + x7 + x9   x4 = x11   x3 + x7 = x8 + x10
0 ≤ x1 ≤ 4   0 ≤ x2 ≤ 3   0 ≤ x3 ≤ 2   0 ≤ x4 ≤ 2   0 ≤ x5 ≤ 1
0 ≤ x6 ≤ 1   0 ≤ x7 ≤ 2   0 ≤ x8 ≤ 2   0 ≤ x9 ≤ 2   0 ≤ x10 ≤ 2   0 ≤ x11 ≤ 5

Solver
R := maximize(f, x)

RT = [2 2 2 2 1 1 0 0 2 2 2]

f(R) = 6
  
```

Заданий граф є частково орієнтованим. Для того, щоб побудувати математичну модель, необхідно перетворити його в орієнтовану сутність. Це можна зробити, замінивши кожне неорієнтоване ребро – дорогу з двостороннім рухом двома орієнтованими – односторонніми смугами руху, кожна з початковою пропускнуною спроможністю. Так, дороги  $x_4$  і  $x_5$  стали односторонніми, оскільки можливість протилежного напрямку руху в цій задачі несуттєва.



Задача може бути вирішена геометрично: згідно з теоремою, максимальна пропускна спроможність мережі дорівнює мінімальній пропускній спроможності перерізів мережі. Аналітичне рішення задачі зводиться к методам лінійного програмування. Крім того, тоді можливо визначити потоки, що відповідають йому, в кожному ребрі мережі.

Порівняння максимально можливого потоку, що виходить з початкового вузла мережі, з результатом рішення (9>6) показує, що ця транспортна мережа вимагає додаткового розширення для його пропуску.

### **Посилання на рекомендовані джерела**

1. Опорний конспект лекцій з дисципліни «Системний аналіз» для здобувачів вищої освіти за спеціальністю 122 – Комп’ютерні науки / Укл.: К.Г. Кіркопуло, Л.В. Бовнегра, В.М. Тонконогий, В.О. Вайсман – Одеса: НУ «Одеська політехніка», 2023. – 60 с.
2. Навчальний посібник з дисципліни «Системний аналіз» для здобувачів вищої освіти за спеціальністю 122 – Комп’ютерні науки / В.М. Тонконогий, В.О. Вайсман, Л.В. Бовнегра, К.Г. Кіркопуло – Одеса: НУ «Одеська політехніка», 2022. – 80 с.