

**Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”
Інститут комп'ютерних систем
Кафедра інформаційних систем**

Теорія інформації та цифрова обробка сигналів

Конспект лекцій

Затверджено на засіданні кафедри ІС
Протокол №1 , від 30.08.2022 р.
Зав.каф. інформаційних систем

Проф.д.т.н. Арсірій О.О.

Одеса: НУОП, 2022

Конспект лекцій з дисципліни "Теорія інформації та цифрова обробка сигналів " розроблений для студентів інституту комп'ютерних систем усіх форм навчання за спеціальністю 122 - Комп'ютерні науки / Укладач: Г. Ю. Щербакова - Одеса: НУОП, 2022.

-

97

с.

Укладач: Щербакова Г. Ю., докт. техн. наук, проф.

Г. Ю. Щербакова 122 – Комп'ютерні науки. **Конспект лекцій з дисципліни "Теорія інформації та цифрова обробка сигналів "**. Конспект лекцій містить матеріал, мінімально необхідний для висвітлення мети, задач, завдань окремих лекцій; зміст кожного заняття, посилання на необхідну літературу та контрольні запитання.

Зміст

| | |
|---------------------------|-----------|
| <u>Лекція № 1</u> | 4 |
| <u>Лекція № 2</u> | 11 |
| <u>Лекція № 3</u> | 16 |
| <u>Лекція № 4</u> | 25 |
| <u>Лекція № 5</u> | 34 |
| <u>Лекція № 6</u> | 41 |
| <u>Лекція № 7</u> | 56 |
| <u>Лекція № 8</u> | 60 |
| <u>Лекція № 9</u> | 65 |
| <u>Лекція № 10</u> | 71 |
| <u>Лекція № 11</u> | 75 |
| <u>Лекція № 12</u> | 78 |
| <u>Лекція № 13</u> | 85 |
| <u>Лекція № 14</u> | 89 |
| <u>Лекція № 15</u> | 93 |

Лекція № 1

Тема: ОСНОВИ ЦИФРОВОЇ ОБРОБКИ ПРИ АНАЛІЗІ СИГНАЛІВ.

Мета заняття Вивчити базові положення та визначення щодо основ цифрової обробки при аналізі сигналів

1.1 Базові складові аналізу сигналів

Основою аналізу сигналів часто є порівняння сигналів одного з іншим для визначення їхньої різниці (або подібності).

Тому можна визначити 3 основних складових аналізу сигналів.

1. Вимірювання числових параметрів сигналів (енергії, середньої потужності, середньоквадратичне значення та інше).
2. Розкладання сигналу на елементарні складові для того, щоб розглядати їх окремо, або порівнювати властивості різних сигналів. Таке розкладання ми будемо проводити з допомогою рядів Фур'є та перетворень Фур'є.
3. Також можливе вимірювання кількісної подібності різних сигналів. Ми спробуємо це робити з допомогою кореляційного аналізу.

1.2 Класифікація сигналів

Фізична природа сигналів може бути дуже різноманітною. Це може бути напруга, струм та інше. В нашому курсі найчастіше будемо розглядати (особливо спочатку) залежність напруги від часу.

Сигнали бувають детерміновані та випадкові, вони можуть мати кінцеву довжину (або бути фінітними). Важливою групою сигналів є гармонійні коливання, дельта функція, функція одиничного стрибка (функція Хевісайда). Тому вони часто використовуються як тестові сигнали, що допомагають визначати характеристики кіл.

З математичної точки зору сигнал – це функція. Детермінований сигнал відомий точно в будь-який момент часу; випадковий сигнал в будь-який момент часу є випадковою величиною, яка приймає конкретні значення з деякою ймовірністю.

Наступний клас сигналів – сигнали з обмеженою енергією. Для таких сигналів $S(t)$ виконується умова

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) dt < \infty.$$

Якщо ця умова не виконується, часто потрібно використовувати апарат узагальнених функцій.

Важливою ознакою класифікації сигналів – періодичність. Для періодичного сигналу з періодом T при будь-якому t виконується умова

$$s(t + nT) = s(t),$$

де n – довільне ціле число.

Частота сигналу визначається як $f = \frac{1}{T}$, кругова частота $\omega = 2\pi f$ (вимірюється в радіанах у секунду).

Гармонічні коливання $s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ визначаються трьома числовими параметрами: амплітудою A , частотою ω і початковою фазою φ .

1.3 Енергія та потужність сигналу.

Ці параметри досить часто використовують на практиці. Визначимось з поняттями потужності і енергії.

Відомо, що в резисторі з опором R та прикладеною напругою U потужність буде дорівнювати $P = \frac{U^2}{R}$. За час T в цьому резисторі виділиться теплова енергія $E = \frac{U^2 T}{R}$. Якщо до цього резистору

прикладений сигнал $s(t)$ миттєва потужність буде $p(t) = \frac{s^2(t)}{R}$. Щоб вичислити енергію за час T миттєву потужність необхідно інтегрувати

$$E = \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{R} \int_0^T s^2(t) dt .$$

Середня потужність за проміжок часу

$$P_{cp} = \frac{1}{RT} \int_0^T s^2(t) dt .$$

Для порівняння сигналів приймають $R=1$.

Середня потужність сигналу на всій часовій вісі

$$P_{cp} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt$$

Середньоквадратичне значення сигналу на всій часовій вісі

$$\sigma_s = \sqrt{P_{cp}} = \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt}.$$

1.4 Ряд Фур'є. Загальні положення.

Розкладанню в ряд Фур'є можуть підлягати періодичні сигнали. При цьому вони представляються у вигляді суми гармонічних функцій (або комплексних експонент з частотами, які створюють арифметичну прогресію). Для того, щоб таке розкладання існувало, фрагмент сигналу, який довжиною в один період, має задовольняти умовам Діріхле:

- відсутні розриви другого роду (з нескінченними гілками функції);
- кількість розривів першого роду має бути скінченною;
- кількість екстремумів має бути скінченною.

Розрізняють кілька форм запису ряду Фур'є.

Синусно-косинусна форма ряду Фур'є

В цьому варіанті ряд Фур'є має наступний вигляд:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)).$$

Тут $\omega_1 = 2\pi/T$ - кругова частота, відповідає періоду сигналу T . Кратні ω_1 частоти $k\omega_1$ називають гармоніками; вони нумеруються відповідно з індексом k ; частота $\omega_k = k\omega_1$ буде k -ою гармонікою сигналу. Коефіцієнти ряду a_k і b_k розраховуються по формулам

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos(k\omega_1 t) dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin(k\omega_1 t) dt.$$

Якщо $s(t)$ парна функція, всі b_k будуть дорівнювати 0 і в формулі ряду Фур'є будуть присутні тільки складові з косинусом, якщо $s(t)$ непарна

функція, всі a_k будуть дорівнювати 0 і в формулі ряду Фур'є будуть присутні тільки складові з синусом.

Дійсна форма ряду Фур'є

Отримана шляхом тригонометричних перетворень. Має вигляд

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t + \varphi_k).$$

Комплексна форма ряду Фур'є

Ця форма може бути отримана за допомогою формули Ейлера

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x, \text{ а саме } \cos x = \frac{1}{2} (e^{jx} + e^{-jx}).$$

Тоді комплексна форма запису ряду Фур'є

$$s(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \dot{C}_k e^{-jk\omega_1 t}.$$

Комплексні коефіцієнти ряду пов'язані з амплітудами A_k і фазами φ_k з дійсної форми ряду Фур'є наступними співвідношеннями

$$\dot{C}_k = \frac{1}{2} A_k e^{j\varphi_k}, \quad A_k = 2 \left| \dot{C}_k \right|, \quad \varphi_k = \arg(\dot{C}_k)$$

Для синусно-косинусної форми ряду Фур'є

$$\dot{C}_k = \frac{a_k}{2} - j \frac{b_k}{2}, \quad a_k = 2 \operatorname{Re}(\dot{C}_k), \quad b_k = -2 \operatorname{Im}(\dot{C}_k).$$

Тоді для безпосереднього розрахунку коефіцієнтів \dot{C}_k ряду Фур'є у комплексній формі:

$$\dot{C}_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \exp(-jk\omega_1 t) dt.$$

Сукупність амплітуд гармонік ряду Фур'є часто звать амплітудним спектром, а сукупність їхніх фаз – фазовим спектром.

1.5. Ряд Фур'є. Додаткові положення та визначення

Сигнали: "сигнал" (signal, від латинського signum – знак).

Термин "signal" характеризує форму представлення даних, при котрій дані розглядаються як результат деяких вимірів об'єкту досліджень у вигляді послідовності значень скалярних величин (аналогових, числових, графічних та інше) залежно від змінення деяких змінних значень (часу, енергії, температури, просторових координат) [1]. Сигнал – це інформаційна функція, яка несе сповіщення про фізичні властивості, стан чи поведінку фізичної системи, об'єкту чи середовища. Метою обробки сигналів можна вважати визначення інформаційних відомостей, котрі відображені в цих сигналах (коротко – корисна чи цільова інформація) і перетворення цих відомостей в форму, корисну для сприйняття і подальшого використання.

Сигнал – це залежність однієї величини від іншої (функція). Наприклад, залежність тиску повітря від часу в окремій точці простору можна розглядати як звуковий сигнал. Залежність яскравості точки на площині від її координат можна розглядати як чорно-біле зображення.

Будемо поки розглядати одномірні сигнали, які залежать від часу, і позначати їх $x(t)$ [2].

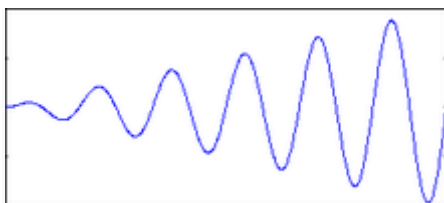
Сигнали можна класифікувати:

По фізичній природі носія інформації: електромагнітні, електричні, акустичні, оптичні та інш.

По характеру сигналу:

Детерміновані (регулярні) – котрі повторюються на завданому проміжку часу і можуть бути описані аналітичною функцією. Нерегулярні (випадкові) – вони приймають довільні значення в будь-який момент часу. Для описування таких сигналів використовують апарат теорії імовірностей. Залежно від функції, що описує параметри сигналу: аналогові, дискретні, квантовані, цифрові.

Аналоговий сигнал (АС)

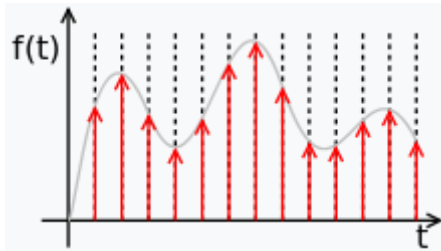


Більшість сигналів мають аналогову природу, тобто вони змінюються безперервно в часі і можуть приймати будь-які значення на деякому інтервалі. Аналогові сигнали описують, як деяку математичну функцію часу.

Приклад АС — гармонічний сигнал: $s(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$.

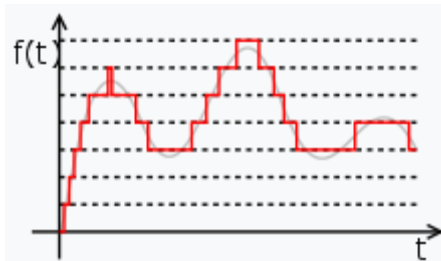
Аналогові сигнали можуть використовуватись в телефонії, радіо, телебаченні. Ввести такий сигнал в цифрову систему для обробки неможливо, оскільки на будь-якому інтервалі часу він може мати безліч значень, і для точного (без погрішності) представлення його значення потрібні числа безкінечної розрядності. Тому часто необхідно перетворювати аналоговий сигнал так, щоб можна було уявити його послідовністю чисел заданої розрядності.

Дискретний сигнал



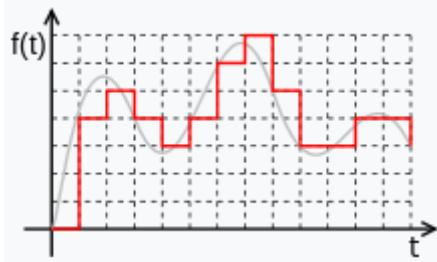
Дискретизація аналогового сигналу складається з того, що сигнал надають у вигляді послідовності значень, які визначають у дискретні моменти часу t_i (де i — індекс). Зазвичай проміжки часу між послідовними відліками ($\Delta t_i = t_i - (t_i - 1)$) постійні; у такому випадку Δt звать інтервалом дискретизації. Самі значення сигналу $x(t)$ в моменти вимірювання, тобто $x_i = x(t_i)$, називають відліками.

Квантований сигнал



При квантуванні область значень сигналу розбивається на рівні, кількість котрих має бути надана числами заданої розрядності. Відстань між цими рівнями називають кроком квантування Δ . Кількість цих рівнів N (від 0 до $N-1$). Кожному рівню присвоюється деяке число. Відліки сигналу порівнюються з рівнями квантування і в якості сигналу обирається число, яке відповідає деякому рівню квантування. Кожен рівень квантування кодується двійковим числом з n розрядами. Кількість рівнів квантування N і кількість розрядів n двійкових чисел, які кодують ці рівні, пов'язані співвідношенням $n \geq \log_2(N)$.

Цифровий сигнал



Для того, щоб представити аналоговий сигнал послідовністю чисел кінцевої розрядності, його треба спочатку перетворити в дискретний сигнал, а надалі піддати квантуванню. Квантування є окремим випадком дискретизації, коли дискретизація відбувається по однаковій величині, яку звать квантом. У результаті сигнал буде представлений таким чином, що на кожному проміжку часу відоме наближене (квантоване) значення сигналу, котре можна записати цілим числом. Послідовність таких чисел і буде цифровим сигналом.

Яким же чином можна задати дискретний гармонічний сигнал?

Важливу роль в техніці обробки сигналів виграють гармонічні коливання, котрі у загальному вигляді записуються так:

$$S(t) = \cos(\omega t + \phi) \quad \text{чи} \quad S(t) = \sin(\omega t + \phi) \quad (3)$$

Гармонічний сигнал визначається трьома числовими параметрами: амплітудою A , частотою f і фазой ϕ .

Шум — сукупність неперіодичних звуків різної інтенсивності і частоти.

- Основні «кольори» шумів
 - 1.1 Білий шум
 - 1.2 Рожевий (фліккер) шум
 - 1.3 Броунівський (червоний) шум
 - 1.4 Синій (голубий) шум
 - 1.5 Бузковий шум
 - 1.6 Сірий шум
- Інші
 - 2.1 Жовтогарячий шум
 - 2.2 Червоний шум
 - 2.3 Зелений шум
 - 2.4 Чорний шум



Джерела завад та шумів бувають зовнішні і внутрішні. Внутрішні шуми можуть бути пов'язані з фізичною природою джерел сигналів. Наприклад, теплові шуми електронних джерел у електричних колах чи дробові ефекти в електронних приладах. Вони також виникають у вимірювальних пристроях та системах передачі та обробки сигналів під впливом різних дестабілізуючих факторів - температури, вологості, нестабільності джерел живлення, впливу механічних вібрацій на гальванічні з'єднання та інше. Зовнішні джерела шумів бувають штучного та істотного походження. До штучних джерел завад традиційно відносять індустріальні заводи - двигуни, перемикачі, генератори сигналів різноманітної форми та інші. Істотними джерелами завад є блискавки, флюктуації магнітних полів, сонячної енергії та інше.

Контрольні запитання:

1. Класифікація сигналів
2. Енергія та потужність сигналу.
3. Дійсна форма ряду Фур'є.
4. Комплексна форма ряду Фур'є.

Література

1. Обробка випадкових сигналів та процесів: навч. посібник / А. Н. Беседін, А. А. Зеленський, Г. П. Кулемін, В. В. Лукин; под ред.: А. А. Зеленського, Г. П. Кулеміна. – Х. : ХАИ, 2017. – 469 с.
2. Рибальченко М.О., Єгоров О.П., Зворикін В.Б. Цифрова обробка сигналів. Навчальний посібник. – Дніпро: НМетАУ, 2018. – 79 с.

Лекція 2

Тема: ПЕРІОДИЧНІ СИГНАЛИ ТА РЯДИ ФУР'Є.

Мета заняття: Навчитися представляти періодичні сигнали рядом Фур'є і будувати амплітудну спектральну діаграму (лінійчатий амплітудний спектр) та розкласти періодичні сигнали за ортогональним базисом.

Важливими завданнями при засвоєнні базових засад аналізу сигналів є навички з представлення періодичних сигналів рядами Фур'є; з побудови амплітудної спектральної діаграми; з розкладу періодичних сигналів за ортогональним базисом.

Тому наша лекція а також друга лабораторна робота буде присвячена саме цим питанням. Основні завдання, які ми маємо виконати: побудувати графіки сигналів s_1 і s_2 (уявивши їх рядом Фур'є); сформувати ідеальний меандр, побудувати графік; знайти помилку апроксимації ідеального меандру рядом Фур'є; побудувати графік залежності помилки

апроксимації від кількості гармонік; побудувати амплітудну спектральну діаграму сигналів s_1 і s_2 (лінійчатий амплітудний спектр).

Враховуючи ці складові мети роботи, спробуємо надати відповідні теоретичні та практичні рекомендації.

Розглянемо приклади розкладу декотрих видів періодичних сигналів в ряд Фурє:

a) послідовність прямокутних імпульсів. (Для формування послідовності прямокутних імпульсів можна використовувати, наприклад, програмний код на мові Scilab [3])

Зображення послідовності імпульсів, яку ми маємо отримати, надано на рис. 2.1,а.

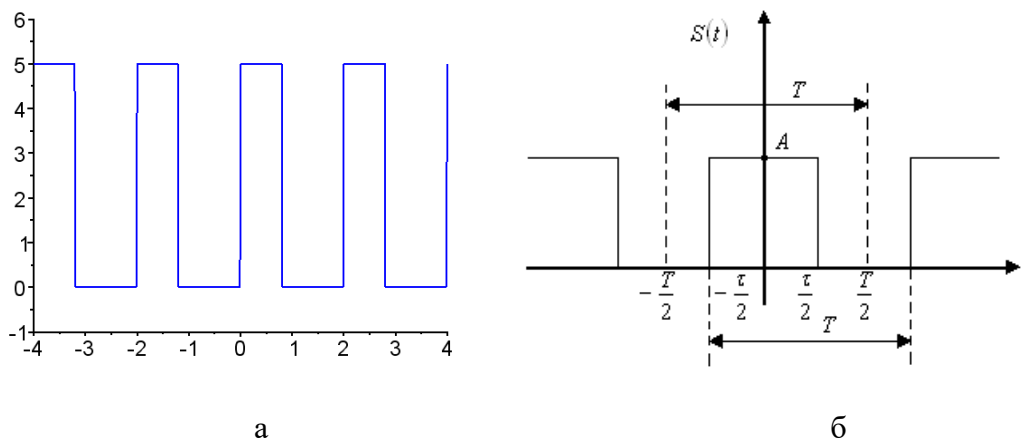


Рис 2.1. Послідовність прямокутних імпульсів.

Зауваження. Для формування послідовності імпульсів довільної форми (в тому числі прямокутної) можна використовувати функцію **pulstran** (див. розділ Help (довідка) в Scilab).

Розглянемо сигнал, який є парною функцією (рис. 2.1,б), для уявлення котрого використано **сінусно-косінусну форму** ряду Фур'є:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A \cos\left(\frac{2\pi k}{T} \cdot t\right) dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A \cos\left(\frac{2\pi k}{T} \cdot t\right) dt = \frac{2A}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi k \tau}{T}\right). \quad (2.1)$$

Довжина імпульсів і період їх надходження входять в цю формулу у вигляді відношення, котре звать **скважністю послідовності імпульсів**: $q = \frac{T}{\tau}$.

$$a_k = \frac{2A}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi k}{q}\right) = \frac{2A}{q} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi k}{q}\right)}{\frac{\pi k}{q}}. \quad (2)$$

Значення постійної складової ряду з урахуванням $x \rightarrow 0, \frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ буде

$$\frac{a_0}{2} = \frac{A}{q} = \frac{A\tau}{T}.$$

Уявлення послідовності прямокутних імпульсів у вигляді ряду Фур'є:

$$S(t) = \frac{A}{q} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2A}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi k}{q}\right) \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right). \quad (2.3)$$

Побудуємо амплітудний спектр для цього ряду. Графік функції $\frac{\sin x}{x}$ має пелюстковий характер. Горизонтальну вісь розмічено в номерах гармонік і в частотах (рис. 2.2,а). Для розрахунку значень функції $\frac{\sin x}{x}$ в Scilab наявна функція *sinc(x)*

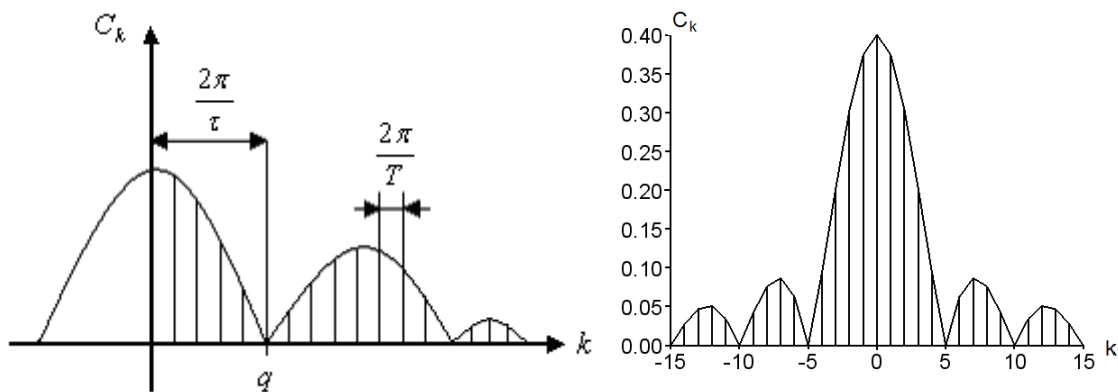


Рисунок 2.2. Коефіцієнти ряду Фур'є для послідовності прямокутних імпульсів

Ширина пелюстків, яку вимірюють в кількості гармонік, дорівнює скважності (при $k = nq$, отримуємо $\sin \frac{\pi k}{q} = 0$, коли $n \neq 0$). Звідси випливає важлива властивість спектру послідовності прямокутних імпульсів – в ньому **відсутні гармоніки з номерами, які кратні скважності**. Відстань по частоті між сусідніми гармоніками дорівнює круговій частоті надходження імпульсів $\frac{2\pi}{T}$. Ширина пелюстків, яку можна виміряти в одиницях кругової частоти, дорівнює $\frac{2\pi}{\tau}$, тобто вона обернено пропорційна довжині сигналу. Можна зробити висновок: **коротший імпульс надає ширший спектр**.

Кількість складових в ряді Фур'є вирає істотну роль в наближенні послідовності імпульсів (рис. 2.3). Наступний фрагмент програмного коду може дозволити побачити, як саме впливає кількість гармонік, які ми враховуємо, на форму імпульсів.

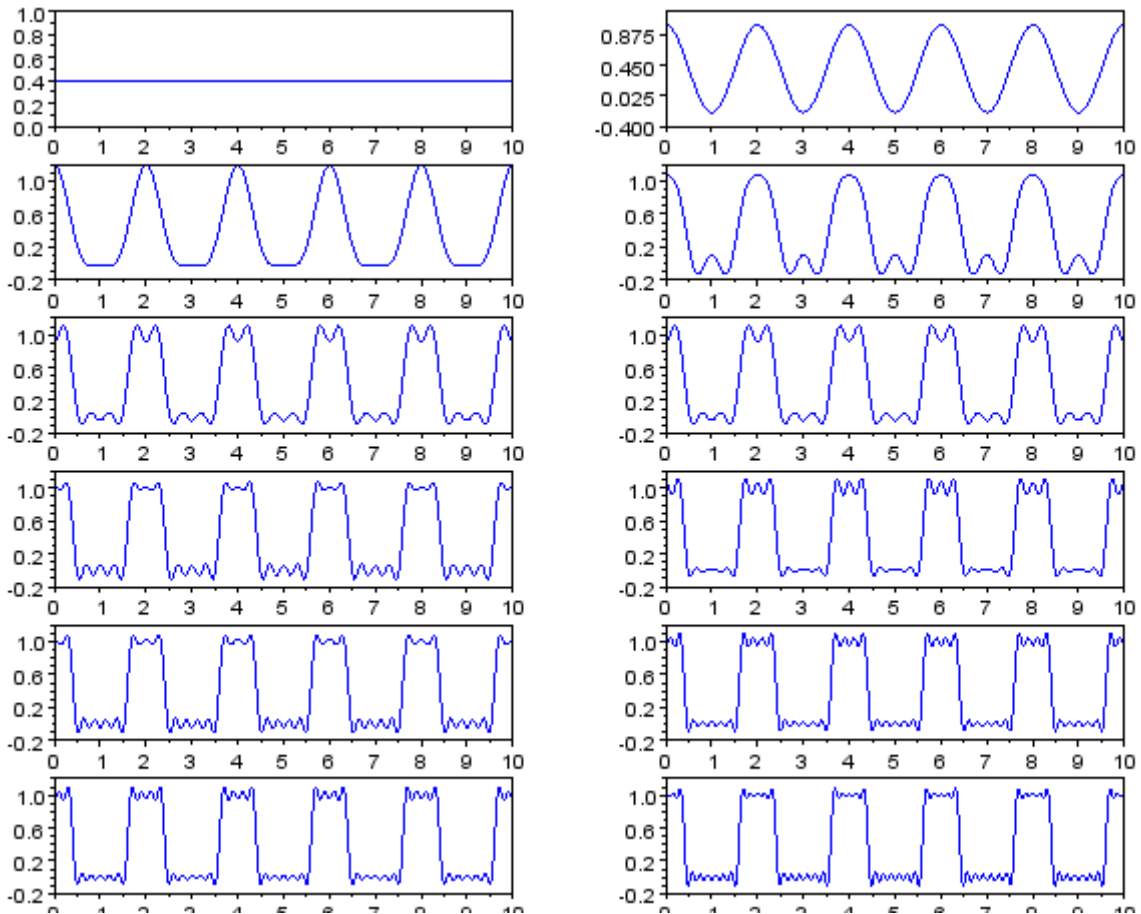


Рисунок 2.3. Представлення послідовності прямокутних імпульсів рядом Фур'є з різною кількістю гармонік

Узагальнений ряд Фур'є складається з нескінченної кількості членів. На практиці це не завжди потрібно, тому ряд обмежують числом членів N . Це призводить до **помилки апроксимації**:

$$\xi(t) = S(t) - \sum_{k=1}^N C_k \varphi_k(t).$$

Зазвичай розглядають норму помилки

$$\|\xi\| = \sqrt{\int_T |\xi(t)|^2 dt}. \quad (2.4)$$

Обчислимо помилку апроксимації (4) послідовності прямокутних імпульсів рядом Фур'є. Це буде залежати від кількості гармонічних складових. Ураховуючи періодичність послідовності, доцільно знайти помилку на інтервалі періоду $[-T/2, +T/2]$. Нижче наведений програмний код. Цей код може дозволити виконати розкладання в ряд послідовності прямокутних імпульсів та обчислити похибку апроксимації.

Результати представлені на рис.2.4. Як можна побачити, зі зростанням кількості гармонік похибка апроксимації зменшується. В послідовності прямокутних імпульсів є різкі зміни амплітуди, тому вона не дуже добре апроксимується рядом Фур'є (ми ж

пам'ятаємо про умови Дирихле з першої лекції?). В околі точок розриву вихідної послідовності на графіку суми ряду Фур'є (рис. 2.4,б) можна побачити пульсації, їх амплітуда практично не змінюється з зростанням кількості гармонік, але при цьому пульсації зжимаються по горизонталі, наближаючись до точки розриву. Це явище зветься ефектом Гиббса.

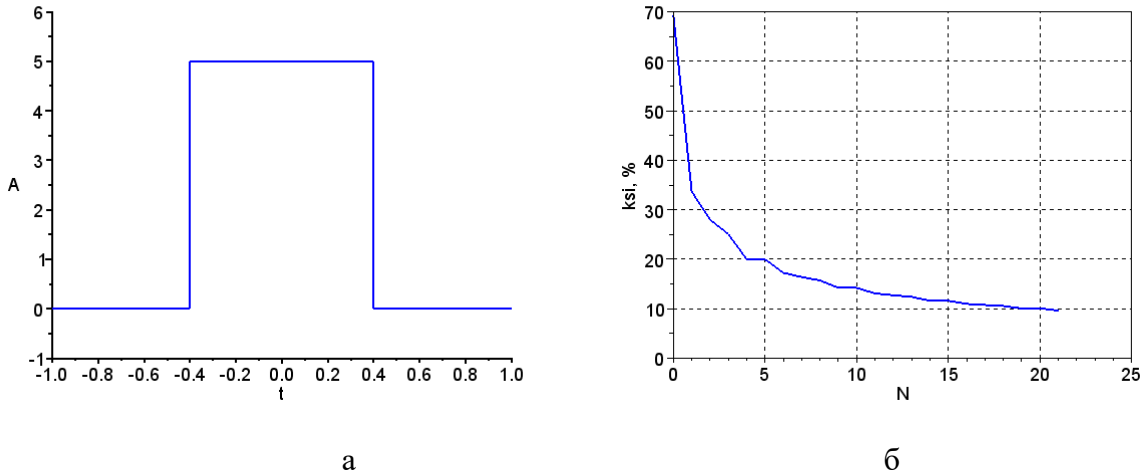


Рисунок 2.4.

б) пилкоподібний сигнал.

Загальний вигляд пилкоподібного сигналу наведений на рис. 2.5.

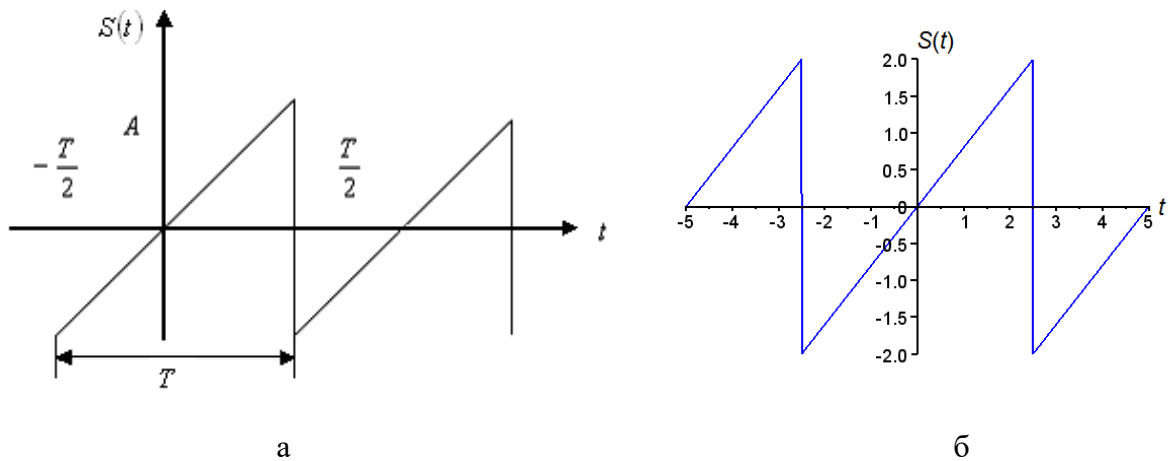


Рисунок 2.5. Пилкоподібний сигнал: а – загальний вигляд; б – пилкоподібний сигнал, що побудований засобами Scilab

Пилкоподібний сигнал в межах періоду описується лінійною функцією

$$S(t) = \frac{2A}{T}(t - nT), \left(n - \frac{1}{2}\right) \cdot T < t \leq \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot T, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots (2.5)$$

Для побудови пилкоподібного сигналу в Scilab можна використати функцію *sawtooth*. Результати розрахунку представлені на рис. 2.5,б.

Сигнал, що розглядається, є непарною функцією, тому його ряд Фур'є в синусно-косинусній формі утримує тільки синусні складові:

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{2A}{T} t \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt = -\frac{2A}{\pi k} (-1)^k. \quad (2.6)$$

Ряд Фур'є пилоподібного сигналу має вигляд:

$$S(t) = \frac{2A}{\pi} \left(\sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) - \frac{1}{2} \sin\left(2 \frac{2\pi}{T} t\right) + \frac{1}{3} \sin\left(3 \frac{2\pi}{T} t\right) - \frac{1}{4} \sin\left(4 \frac{2\pi}{T} t\right) + \dots \right). \quad (2.7)$$

Для спектрів прямокутного і пилоподібного сигналів характерно, що амплітуди гармонік зі зростанням їхніх номерів *зменшуються пропорційно* номеру k .

Контрольні запитання:

1. Представлення періодичної функції рядом Фур'є.
2. Тригонометрична та експонентна форми представлення сигналів.
3. Коефіцієнти розкладання в ряд Фур'є.
4. Амплітудна і фазова спектральні діаграми.
5. Поняття ортогонального та ортонормованого базису.
6. Оцінка помилки апроксимації.

Література

1. Рибальченко М.О., Єгоров О.П., Зворикін В.Б. Цифрова обробка сигналів. Навчальний посібник. – Дніпро: НМетАУ, 2018. – 79 с.
2. Основи та методи цифрової обробки сигналів: від теорії до практики: навч. посібник / уклад. : Ю.О. Ушенко, М.С. Гавриляк, М.В. Талах, В.В. Дворжак. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2021. – 308 с.
3. Campbell, S.; Chancelier J.-P., Nikoukhah R. (2006). *Modeling and Simulation in Scilab/Scicos*. New York: Springer. [ISBN 9780387278025](https://doi.org/10.1007/978-0-387-27802-5).

Лекція 3

Тема: ВЛАСТИВОСТІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є.

Мета заняття: Засвоїти основні властивості перетворення Фур'є.

Базові положення

Перетворення Фур'є використовують для спектрального аналізу неперіодичних сигналів. Для ілюстрації переходу від ряду Фур'є до перетворення Фур'є використовують наступне уявлення. Уявімо собі періодичну послідовність імпульсів довільного виду і сформуємо ряд Фур'є для неї. Далі, не змінюючи форми імпульсів, збільшимо період їх

повторення (при цьому заповнюємо проміжки нульовими значеннями) і знов розрахуємо коефіцієнти ряду Фур'є.

Згідно з формулою

$$\dot{C}_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \exp(-jk\omega_1 t) dt$$

можна побачити, що ми маємо розрахувати саме такий же інтеграл, але для більш щільно розташованих частот $\omega_k = k\omega_1$. Змінення діапазону інтегрування не змінює суті – бо на тому просторі, що додатково додалося, сигнал має нульове значення. Отримуємо тільки ту зміну, що загальний рівень гармонік зменшиться через те, що маємо розділити результат інтегрування на збільшений період T .

Таким чином, зі збільшенням періоду слідування імпульсів, гармоніки розташовуються все ближче одна до одної по частоті, а загальний рівень спектральних складових стає все нижче. При цьому вигляд інтегралу

$$\dot{C}_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \exp(-jk\omega_1 t) dt \text{ не змінюється.}$$

Якщо спрямувати період до безкінечності (таким чином послідовність перетвориться в одиночний імпульс), гармоніки спектру будуть щільно займати всю частотну вісь, а їхні амплітуди зменшаться до нуля. Тому при спектральному аналізі неперіодичних сигналів формула для розрахунку коефіцієнтів комплексного ряду Фур'є має бути модифікована наступним чином:

- частота стає неперервним параметром перетворення (тобто $k\omega_1$ змінюється на ω);

- видаляється множник $\frac{1}{T}$;

- результатом обчислень замість нумерованих коефіцієнтів ряду \dot{C}_k є

функція частоти $S(\omega)$ - спектральна функція сигналу $s(t)$ (її ще називають спектральною щільністю).

Як результат подібних модифікацій отримують формулу прямого перетворення Фур'є:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(-j\omega t) dt.$$

В формулі ряду Фур'є сума замінюється на інтеграл. Вираз, що буде в результаті отриманий, називають **зворотнім перетворенням** Фур'є:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \exp(j\omega t) d\omega.$$

Щоб можна було використовувати перетворення Фур'є, сигнал має задовольняти наступним вимогам:

- мають бути виконані умови Дирихле;
- інтеграл від модулю сигналу має бути скінченною величиною (тобто

мають виконуватись вимоги $\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty$.

Якщо сигнал, який піддається аналізу $S(t)$ - речовинна функція, то значення спектральної функції на частотах ω та $-\omega$ будуть комплексно-спряжені одна до одної, тобто $\dot{S}(-\omega) = \dot{S}^*(\omega)$. Якщо $S(t)$ - функція парна, її спектр буде чисто речовинним (та парною функцією), якщо $S(t)$ - функція непарна, її спектр буде чисто уявним (та непарною функцією).

Модуль спектральної функції називають амплітудним спектром, а її аргумент - фазовим спектром. Для речовинного сигналу амплітудний спектр є парною, а фазовий - непарною функцією частоти, а саме

$$|\dot{S}(-\omega)| = |\dot{S}(\omega)|, \quad \varphi_S(-\omega) = -\varphi_S(\omega).$$

Таким чином перетворення Фур'є ставить у відповідність сигналу, який задано в часі, його спектральну функцію. При цьому здійснюється перехід з часової області в частотну. При цьому спектральна функція містить стільки ж інформації, скільки є у вихідному сигналі, який задано у часовій області.

Приклад розрахунку перетворення Фур'є для прямокутного імпульсу

Прямокутний імпульс центровано відносно початку відліку часу:

$$s(t) = \begin{cases} A, & |t| \leq \tau/2, \\ 0, & |t| > \tau/2. \end{cases}$$

Його спектральна функція буде

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j\omega t} dt = \frac{2A}{\omega} \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = A\tau \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}}.$$

Як можна побачити з цього виразу, спектр являє собою функцію вигляду $\sin(x)/x$. Амплітудний спектр має пелюстковий характер, ширина пелюстків дорівнює $2\pi/\tau$, тобто обернено пропорційна довжині імпульсу. Значення спектральної функції на нульовій частоті дорівнює площі імпульсу $A\tau$, спектральна функція – речовинна, тому фазовий спектр приймає лише два значення (0 та π), в залежності від знаку функції $\sin(x)/x$. Для прикладу, можна також визначитись з характеристиками прямокутного імпульсу у випадку зсуву в часі. Нехай імпульс починається в нульовий момент часу. Його перетворення Фур'є буде

$$\dot{S}(\omega) = \int_0^{\tau} A e^{-j\omega t} dt = A\tau \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}} \exp\left(-j \frac{\omega\tau}{2}\right).$$

В лекціях під терміном «властивість» ми будемо мати на увазі взаємну відповідність трансформації сигналів та їхніх спектрів.

Розглянемо два абстрактних сигнали $f(t)$ та $g(t)$ з їхніми спектральними функціями $\dot{F}(\omega)$, $\dot{G}(\omega)$. На базі цього сформулюємо **основні властивості перетворення Фур'є**.

3.1 Лінійність.

Перетворення Фур'є є *лінійним*:

$$S(t) = \alpha \cdot f(t) + \beta \cdot g(t); \quad \dot{S}(\omega) = \alpha \cdot \dot{F}(\omega) + \beta \cdot \dot{G}(\omega). \quad (3.1)$$

3.2 Затримка

$$S(t) = f(t - \tau),$$

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) e^{-j\omega(t - \tau)} d(t - \tau) e^{-j\omega\tau} = \dot{F}(\omega) e^{-j\omega\tau} \quad (3.2)$$

(тобто у цьому випадку спектр вихідного сигналу помножується на $e^{-j\omega\tau}$). Тобто можна сказати, що **амплітудний спектр сигналів не змінюється**, оскільки модуль комплексної експоненти дорівнює 1, а фазовий спектр отримує додаткову складову $-\omega\tau$. Ця складова залежить від частоти лінійним чином.

3.3 Змінення масштабу в часі

Відомо, що **чим коротший сигнал, тим ширшим буде його спектр**:

$$S(t) = f(\alpha \cdot t), \quad (3.3)$$

Тобто коли $\alpha > 1$ – сигнал зжимається, коли $\alpha < 1$ – сигнал розтягується, а коли $\alpha < 0$ – відбувається дзеркальне відображення сигналу відносно вісі OY .

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha t) e^{\frac{-j\omega}{\alpha} \alpha t} d(\alpha t) = \frac{1}{\alpha} \dot{F}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right). \quad (3.4)$$

Змінення довжини сигналу призводить до змінення ширини спектру в протилежний бік, тобто $\left(t \cdot \alpha \rightarrow \frac{\omega}{\alpha}\right)$ в сполученні зі збільшенням ($\alpha < 1$) чи (відповідно) зменшенням ($\alpha > 1$) рівня спектральних складових.

Якщо $\alpha < 0$, то $t \rightarrow \alpha t$ викликає зміну меж інтегрування і несе за собою змінення знаку у результаті:

$$\dot{S}(\omega) = -\frac{1}{\alpha} \dot{S}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right); \quad \alpha < 0$$

чи (в загальному випадку):

$$\dot{S}(\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \dot{S}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right); \quad \alpha \neq 0, \quad (3.5)$$

при $\alpha = -1$ $\dot{S}(\omega) = \dot{F}(-\omega) = \dot{F}^*(\omega)$.

Дзеркальне відображення сигналу відносно початку відліку часу призводить до дзеркального відображення спектру відносно нульової частоти, що спонукає до **комплексного спряження спектра**.

3.4 Диференціювання сигналу

Для пояснення цієї властивості спробуємо використати поняття **похідної**:

$$S(t) = \frac{df}{dt} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{f(t + \xi) - f(t)}{\xi}, \quad (3.6)$$

тді отримуємо

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{f(t + \xi) - f(t)}{\xi} e^{-j\omega t} dt = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\dot{F}(\omega) e^{j\omega \xi} - \dot{F}(\omega)}{\xi} = \dot{F}(\omega) \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{e^{j\omega \xi} - 1}{\xi} = j\omega \dot{F}(\omega) \quad (3.7)$$

де $j\omega$ – оператор диференціювання в частотній області.

При диференціюванні спектр можна отримати шляхом множення спектру вихідного сигналу на $j\omega$. Фазовий спектр отримує зсув на 90° для $\omega > 0$ та на -90° для $\omega < 0$.

Також треба відмітити, що при диференціюванні *низькі частоти послаблюються, а високі – підсилюються.*

3.5 Інтегрування сигналу

Інтегрування сигналу – операція, яку вважають оберненою до диференціювання:

$$\dot{S}(\omega) = \frac{\dot{F}(\omega)}{j\omega}. \quad (3.8)$$

Ця формула є справедливою для сигналів, які не мають постійної складової:

$$\dot{F}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 0, \quad (3.9)$$

або:

$$\dot{S}(\omega) = \frac{\dot{F}(\omega)}{j\omega} + \pi\dot{F}(0)\delta(\omega), \quad (3.10)$$

де $\frac{1}{j\omega}$ – оператор інтегрування, $\delta(\omega)$ – дельта-функція.

Під час інтегрування *високі частоти послаблюються, а низькі – підсилюються.* Фазовий спектр піддається зсуву на 90° для $\omega < 0$ та на -90° для $\omega > 0$.

3.6 Спектр згортки сигналів

Згортка сигналів досить часто використовується при обробці сигналів. Це пов'язане з тим, що як інтегральна операція, вона описує проходження сигналу через лінійну систему з постійними параметрами:

$$S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t')g(t-t')dt'. \quad (3.11)$$

Якщо таку згортку піддати перетворенню Фур'є, можна отримати:

$$\begin{aligned} \dot{S}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t')g(t-t')dt'e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t')e^{-j\omega t'} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(t-t')e^{-j\omega(t-t')}d(t-t')dt' = \\ &= \dot{F}(\omega) \cdot \dot{G}(\omega) \end{aligned} \quad (3.12)$$

З цього витікає важливе правило. *Спектр згортки двох сигналів дорівнює добутку спектрів цих сигналів.*

3.7 Спектр добутку сигналів

Нехай

$$S(t) = f(t) \cdot g(t), \quad (3.13)$$

тоді:

$$\begin{aligned}\dot{S}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega')e^{-j\omega' t} d\omega' \right) g(t)e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{F}(\omega') \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j(\omega-\omega')t} dt d\omega' = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{F}(\omega') \cdot \dot{G}(\omega-\omega') d\omega'\end{aligned}\quad (3.14)$$

Як і треба було сподіватись, *спектр добутку* двох сигналів – це *згортка спектрів* цих сигналів.

3.8 Множення (добуток) сигналу на гармонічну функцію

Помножимо вихідний сигнал, спектр якого нам відомий, на *гармонічну функцію*:

$$S(t) = f(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (3.15)$$

Тоді можна побачити, що відбулося зі спектром сигналу:

$$\begin{aligned}\dot{S}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t + \varphi) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{e^{j\omega t + j\varphi} + e^{-j\omega t - j\varphi}}{2} e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(\omega-\omega_0)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\varphi} e^{-j(\omega-\omega_0)t} dt = \frac{1}{2} e^{j\varphi} \dot{F}(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2} e^{-j\varphi} \dot{F}(\omega+\omega_0).\end{aligned}\quad (3.16)$$

Відбулися досить значні зміни. Можна сказати, що спектр став як би «*двоїстим*»: розділився на дві складові в два рази меншого рівня (множник $\frac{1}{2}$), які зміщені на ω_0 вправо: $\omega - \omega_0$ та вліво: $\omega + \omega_0$ по вісі частот. Крім того, при кожній складовій тепер є множник, який враховує початкову фазу гармонічного коливання.

3.9 Зв'язок перетворення Фур'є і коефіцієнтів ряду Фур'є

Нехай $S(t)$ – сигнал кінцевої довжини, а $S(\omega)$ – його спектральна функція. Тепер ми можемо отримати на основі $S(t)$ періодичний сигнал. При цьому період повторення T має бути не менше довжини сигналу:

$$S_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(t - kT). \quad (3.17)$$

Таким чином можна побачити, що між спектральною функцією $S(\omega)$ одиночного імпульсу і коефіцієнтами C_k ряду Фур'є для періодичної послідовності таких імпульсів існує досить *простий зв'язок*:

$$C_k = \frac{1}{T} \dot{S}\left(\frac{2\pi k}{T}\right). \quad (3.18)$$

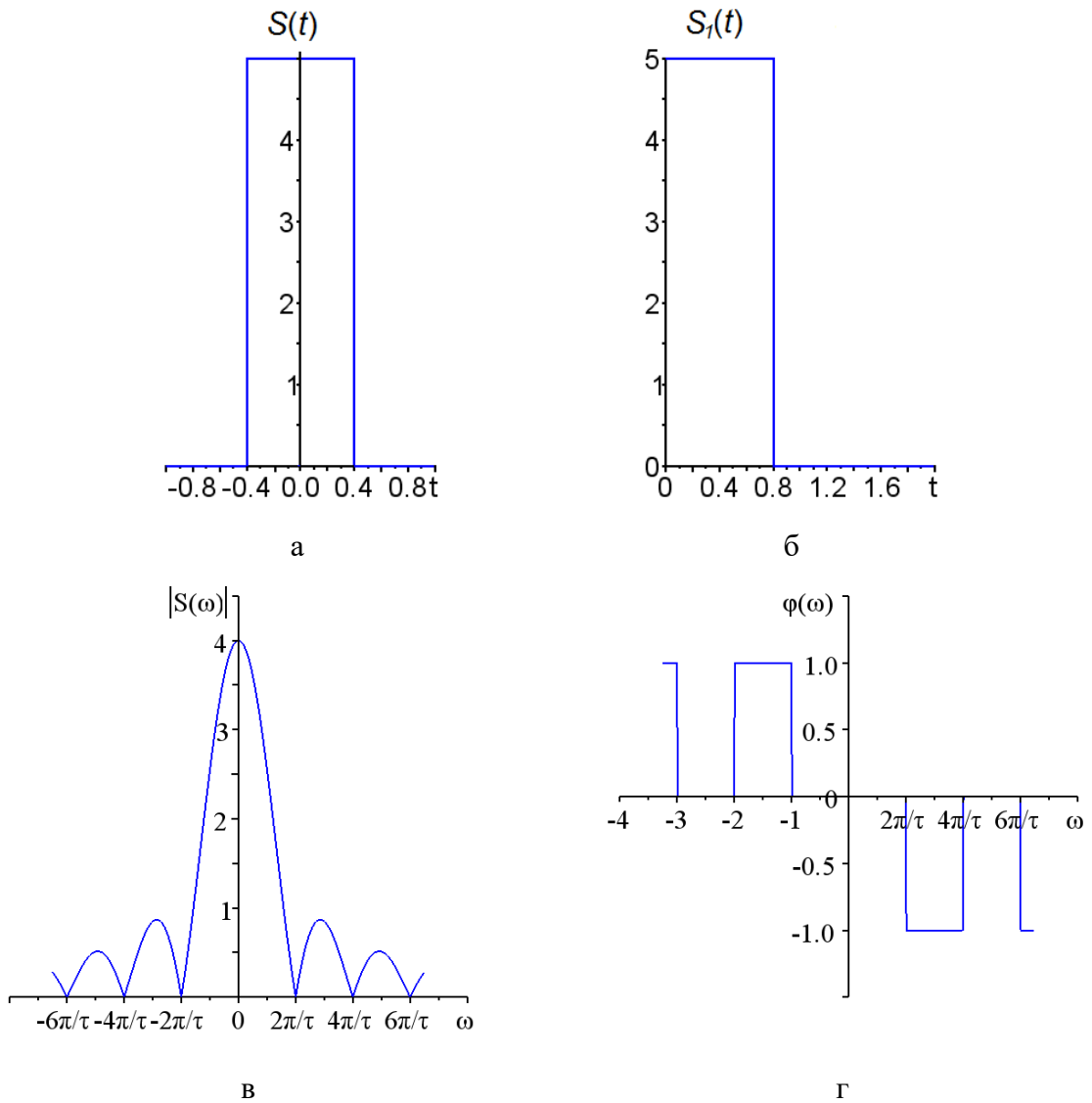
Тепер можна розглянути приклад розрахунку перетворення Фур'є. А саме, розглянемо прямокутний імпульс з центром відносно початку координат (рис. 3.1,а)

$$S(t) = \begin{cases} A & \text{при } -\tau/2 \leq t \leq \tau/2, \\ 0 & \text{при } t < -\tau/2 \text{ и } t > \tau/2. \end{cases} \quad (3.19)$$

Спектральна щільність такого сигналу

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j\omega t} dt = \frac{A}{-j\omega} \left(e^{-\frac{j\omega\tau}{2}} - e^{\frac{j\omega\tau}{2}} \right) = \frac{2A}{\omega} \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = A\tau \left[\frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \right]. \quad (3.20)$$

Спектр являє собою функцію вигляду $|\text{sinc}(x)| = |\sin(x)/x|$ (рис. 3.1, в).



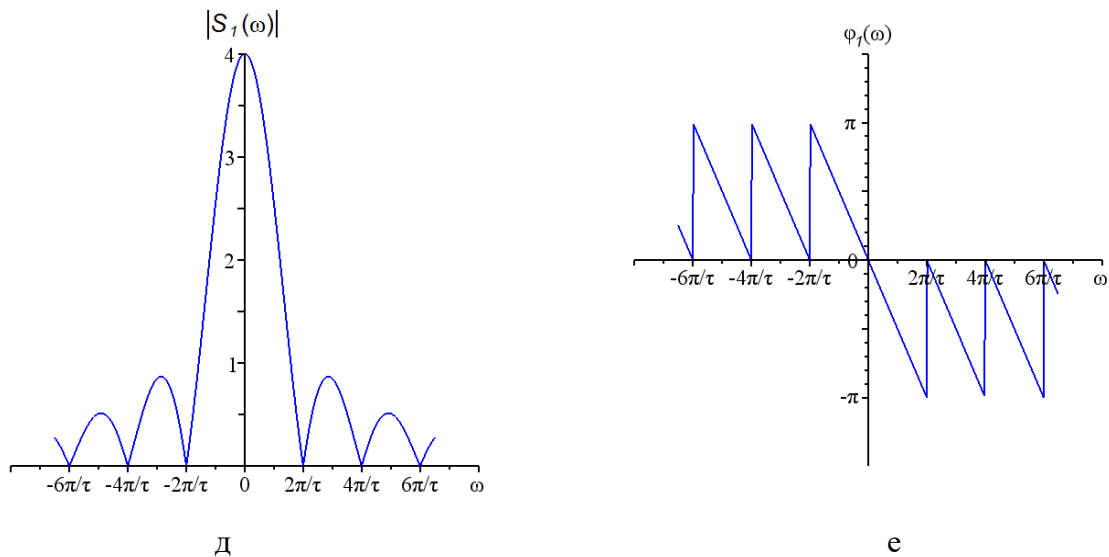


Рисунок 3.1 – Приклади імпульсів та їхніх спектрів

а) – прямокутний імпульс; б) – прямокутний імпульс, який має затримку в часі; в) – амплітудний та г) – фазовий спектри прямокутного імпульсу; д) – амплітудний та е) – фазовий спектри прямокутного імпульсу, який має затримку в часі.

Амплітудний спектр має пелюстковий характер, але ширина пелюстка дорівнює $2\pi/\tau$. Значення спектральної щільності на нульовій частоті дорівнює площі імпульсу $A\tau$. Спектральна функція є речовою, тому фазовий спектр приймає лише два значення 0 та π , в залежності від знаку функції $\sin(x)/x$. Значення фази $-\pi$ та π не розрізняються, різні знаки для фазового спектру при $\omega > 0$ та $\omega < 0$ використовуються для його представлення у вигляді непарної функції.

Наразі розглянемо прямокутний імпульс, який затримано на величину $\tau/2$, тобто він починається в нульовий момент часу та має ту ж амплітуду та довжину (рис. 3.1, б).

$$S(t) = \begin{cases} A & \text{при } 0 \leq t \leq \tau, \\ 0 & \text{при } t < 0 \text{ и } t > \tau \end{cases} \quad (3.21)$$

З урахуванням властивості затримки перетворення Фур'є спектральна щільність затриманого імпульсу має вигляд

$$\dot{S}(\omega) = A\tau \left[\frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \right] e^{-j\frac{\omega\tau}{2}} \quad (3.22)$$

Графік модулю спектральної щільності (амплітудний спектр) і фазовий спектр затриманого імпульсу наведені на рис. 3.1 д, е відповідно. Як можна побачити з цього рисунку, після зсуву імпульсу в часі його амплітудний спектр не змінився, а фазовий спектр набув зсуву, який лінійно залежить від частоти. Подібні розрахунки можна провести на мові SciLab.

Зауваження. В прикладі, який розглянуто, перетворення Фур'є виконується аналітично. При цьому прийнято засади, що сигнал (вихідна функція) має аналітичний вираз. Для побудови амплітудного та фазового спектрів достатньо виконати розрахунок значень відповідних функцій з декотрим кроком та побудувати графіки. На практиці досить часто програмувальник має справу з сигналами, які отримані в результаті вимірів декотрих

фізичних величин з зазначеним кроком дискретизації в часі. Для таких сигналів можна використовувати дискретне перетворення Фур'є. Для цього, наприклад, в Scilab розроблені спеціальні команди *fft*, *ifft*, *dft*. Ці команди відтворюють пряме та обернене дискретне перетворення. Використання цих команд для аналізу сигналів – в плані наших наступних занять.

Контрольні запитання:

1. Основні властивості перетворення Фур'є.
2. Лінійність перетворення Фур'є.
3. Властивість затримки в перетворенні Фур'є.
4. Спектр згортки сигналів.
5. Зв'язок перетворення Фур'є і коефіцієнтів ряду Фур'є.

Література

1. Рибальченко М.О., Єгоров О.П., Зворикін В.Б. Цифрова обробка сигналів. Навчальний посібник. – Дніпро: НМетАУ, 2018. – 79 с.
2. Основи та методи цифрової обробки сигналів: від теорії до практики: навч. посібник / уклад. : Ю.О. Ушенко, М.С. Гавриляк, М.В. Талах, В.В. Дворжак. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т
3. Campbell, S.; Chancelier J.-P., Nikoukhah R. (2006). *Modeling and Simulation in Scilab/Scicos*. New York: Springer. [ISBN 9780387278025](https://doi.org/10.1007/978-0-387-27802-5).

Лекція 4

Тема: ОБРОБКА СИГНАЛІВ З ДОПОМОГОЮ ВІКОННОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

Мета заняття: Засвоїти основні властивості віконного перетворення Фур'є.

4.1. Функції вікна та критерії вікна у перетворенні Фур'є

Зазвичай найчастіше використовують таку обробку з допомогою вікон Блекмана, Хеммінга, прямокутного та трикутного вікон. Вихідними даними для подібних розрахунків є зазвичай потрібний тип вікна (визначаємо потрібну N – кількість відліків), а надалі – проводиться оцінка частотних і спектральних характеристик. З цією метою ми будемо користуватись стандартними функціями середовища Scilab [3]. Для початку розглянемо деякі приклади.

При аналізі сигналів широко використовують віконне перетворення Фур'є.

Нехай нам наданий сигнал $s(t)$ на інтервалі часу $(0, t \rightarrow \infty)$. Коли ми розглядаємо подібний сигнал на інтервалі часу $[t_{\min}, t_{\max}]$, ми «виділяємо» з вихідного сигналу $s(t)$ декотрий сигнал $sw(t)$. Цей сигнал співпадає з $s(t)$ на інтервалі $[t_{\min}, t_{\max}]$ та дорівнює нулю за його межами.

Математично це можна записати у вигляді добутку вихідного сигналу $s(t)$ та обраної віконної функції $w(t)$. Вона визначається наступним чином:

$$w(t) = \begin{cases} 1, & t_{\min} \leq t \leq t_{\max} \\ 0, & t < t_{\min} \text{ и } t > t_{\max} \end{cases} \quad (4.1)$$

У наведеному випадку ця віконна функція - прямокутна.

Спектральну функцію такого «вирізанного» сигналу $sw(t)$ можна знайти з допомогою перетворення Фур'є. Використовують при цьому важливу властивість – добутку оригіналів в часовій області відповідає згортка спектральних функцій з частотною:

$$\dot{S}w(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} sw(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} w(t)s(t)e^{-j\omega t} dt = \dot{S}(\omega) * \dot{W}(\omega), \quad (4.2)$$

де $\dot{S}(\omega)$, $\dot{W}(\omega)$ – спектральні функції сигналу і вікна, * – символ згортки.

Як можемо побачити з виразу (4.2) спектр «вирізанного» сигналу $sw(t)$ викривлений по відношенню до спектру сигналу $s(t)$ за рахунок згортки спектру вихідного сигналу і спектру вікна. Це призводить до появи фальшивих спектральних ліній. Типовий спектр вікна наведений на рис.4.1. Він складається з основного пелюстка з амплітудою $A_{ОЛ}$ і додаткових пелюстків. Ці додаткові пелюстки характеризуються амплітудою $A_{НДЛ}$ найбільшого з них.



Рисунок 4.1. Спектр вікна.

На практиці використовують ряд типів вікон, котрі дозволяють знизити вплив викривлень амплітуди та інших небажаних явищ.

При виборі вікна зазвичай треба врахувати:

Час нагляду (ширина вікна) має складати число, кратне періоду основного коливання.

Спектр повторюється з частотою вибірок $f_D = \frac{1}{T}$, де T – період дискретизації.

Відстань між частотними лініями: $\Delta f = \frac{1}{NT}$, де N – обсяг вибірки.

Критерії оцінки вікна:

а) Відношення амплітуди найбільшого з додаткових пелюстків до амплітуди основного пелюстка:

$$\alpha = \frac{A_{\text{НДЛ}}}{A_{\text{ОЛ}}} \quad (4.3)$$

ДПФ $W_d(j\omega)$ функції вікна $w(t)$ надає при $\omega = 0$ максимальну амплітуду основного пелюстка, амплітуди додаткових пелюстків - менші. Значення α використовують для порівняння різних функцій вікон.

б) максимальна похибка дискретизації:

$$b = \frac{\text{амплітуда ДПФ окна при } f = \frac{\Delta f}{2}}{\text{амплітуда ДПФ окна при } f = 0} \quad (4.4)$$

дозволяє оцінювати, наскільки максимально невірно була виміряна амплітуда.

Спектральні лінії функції, яка була виміряна вибірками, не обов'язково збігаються з нулями ДПФ і знаходяться на відстані Δf одна від іншої.

в) ширина основного пелюстка.

Функції вікна, в яких додаткові пелюстки малі, зазвичай мають особливо широкий основний пелюсток. Це призводить до розходження спектральних ліній.

Для характеристики основного пелюстка використовують *граничну частоту*, при котрій амплітуда основного пелюстка зменшується на 3 дБ :

$$c = \frac{\text{амплітуда при } f_0 = 0}{\text{амплітуда при } f_c} = 3 \text{ дБ} \quad (4.5)$$

Ширина основного пелюстка L , яка складає більшу частину функції вікна, має бути якнайменшою.

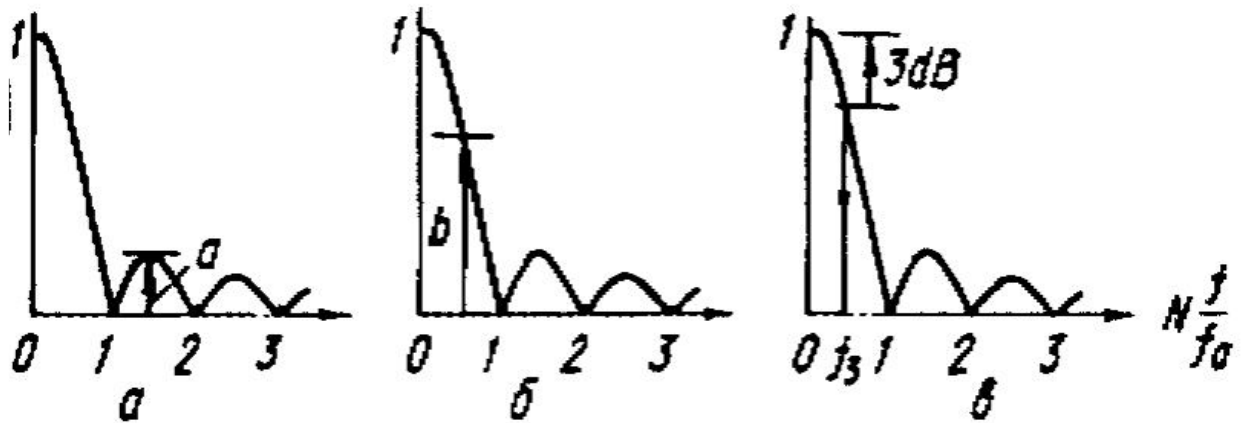


Рисунок 4.2. Критерії оцінки прямокутного вікна ($N = 17$)

а) – співвідношення між амплітудою найбільшого додаткового пелюстка і амплітудою основного пелюстка; б) – максимальна похибка дискретизації; в) – ширина основного пелюстка, надана різницею частот $z = f_0 - f_3$

4.2 Види вікон

Для реалізації вікон в середовищі Scilab використовується вбудована функція *window*, котра обчислює симетричне вікно потрібного типу. Розглянемо окремі види вікон та їхні особливості.

Прямокутне вікно

Прямокутне вікно задається функцією $W = \text{window}('re', n)$, де 're' – скорочення від англійського rectangle (прямокутник), n – кількість відліків. Вектор, що отримуємо, заповнений одиницями: $W = \text{ones}(1, n)$, n – його довжина. Вид вікна і його спектр відповідає спектру прямокутного імпульсу з одиничною амплітудою і шириною n . Нижче представлено прямокутне вікно та його спектр для $n=16$. Амплітуда спектру наведена в дБ.

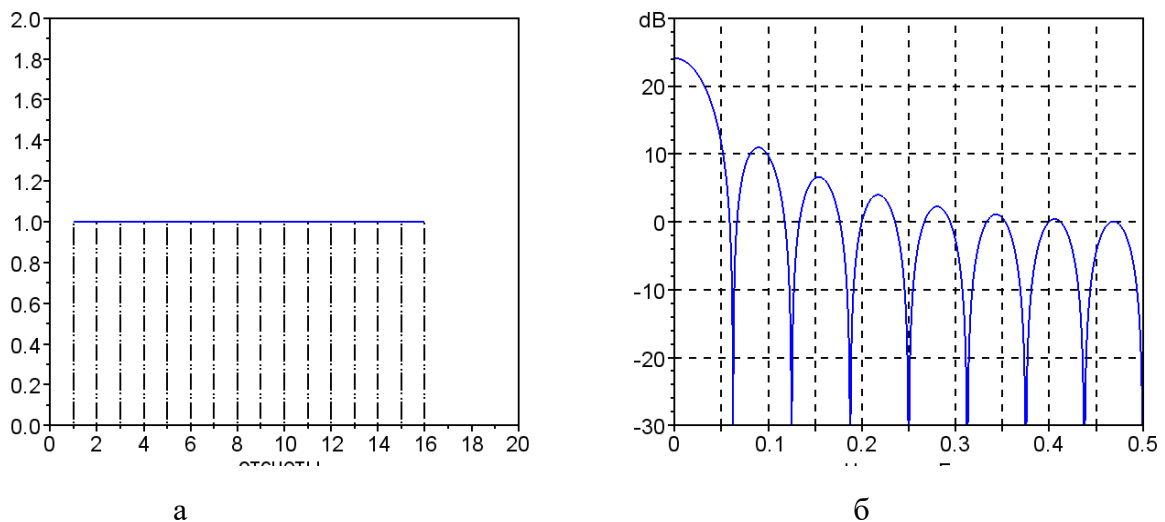


Рисунок 4.3. Прямокутне вікно: а) – форма вікна; б) – амплітудний спектр вікна

Зауваження. В наведеному спектрі вікна та в наступних спектрах вікон по вісі абсцис відмічена частота в діапазоні від 0 до $f_D/2 = 0.5$ Гц (якщо обрано крок дискретизації $T=1$ с, тоді $f_D = \frac{1}{T} = 1$ Гц). Якщо $f_D \neq 1$ Гц, то діапазон частот пропорційно змінюється. Наприклад, при $f_D = 100$ Гц діапазон частот буде від 0 до 50 Гц. Останню обставину треба мати на увазі при використанні вікон для обробки дискретних сигналів, які отримані з частотою дискретизації $f_D \neq 1$ Гц.

Трикутне вікно

Трикутне вікно задається функцією $W = \text{window}(tr', n)$, де tr' – скорочення від англійського triangle (трикутник), n – кількість відліків [3].

Відліки трикутного вікна розраховуються по формулам:

$$W(k) = \begin{cases} \frac{2k}{n+1}, & 1 \leq k \leq \frac{n+1}{2} \\ \frac{2(n-k+1)}{n+1}, & \frac{n+1}{2} < k \leq n \end{cases} \quad (4.6)$$

Необхідно враховувати, що $k = \overline{1, n}$ – число ціле (номер відліку).

При непарнім n трикутне вікно буде симетричним, його крайні значення (при $k = 1$ і $k = n$) дорівнюють $\frac{2}{n+1}$, а в середині вікна досягається одиничне значення для непарного

n (при $k = \frac{n+1}{2}$). При парному n трикутне вікно також буде симетричним, його крайні

значення такі ж, як і в попередньому випадку, але в середині вікна в двох точках (при $k = \frac{n}{2}$

і $k = \frac{n}{2} + 1$) досягається максимальне значення $\frac{n}{n+1}$. Нижче представлено трикутне вікно

і його спектр для $n=16$. Амплітуда спектру надана в дБ.

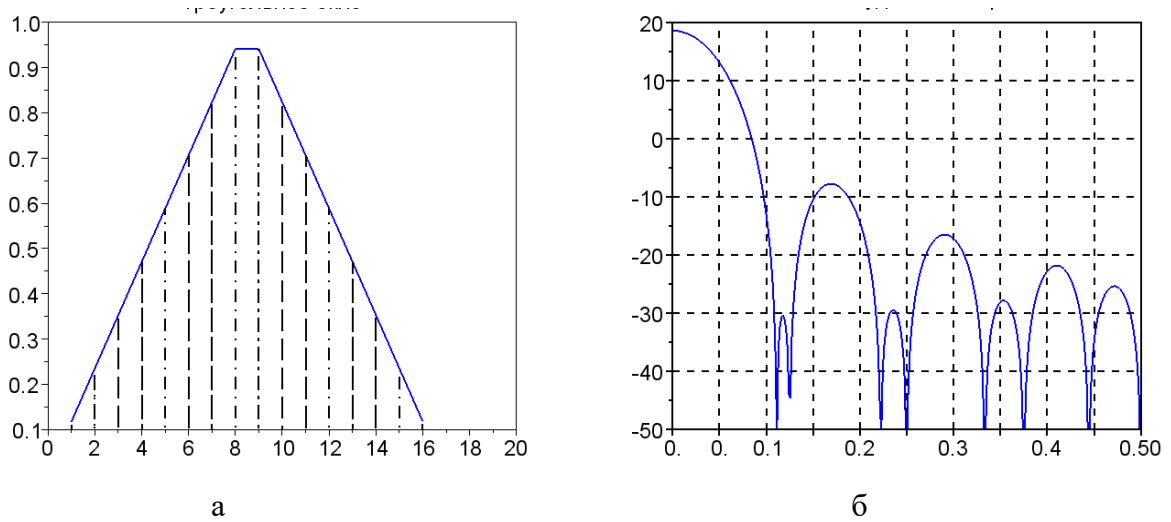


Рисунок 4.4 Трикутне вікно: а) – форма вікна, б) – амплітудний спектр вікна

Вікно Хемінга

Функція $W=window('hm',n)$, (n – кількість відліків) реалізує вікно Хемінга [3]. Відліки вікна Хемінга розраховують за формулою:

$$W(k) = 0,54 - 0,46 \cos\left(2\pi \frac{k-1}{n-1}\right) \quad (4.7)$$

Необхідно врахувати, що $k = \overline{1, n}$ – число ціле (номер відліку), n – кількість відліків. Нижче представлено вікно Хемінга та його спектр для $n=16$. Амплітуда спектру наведена в дБ.

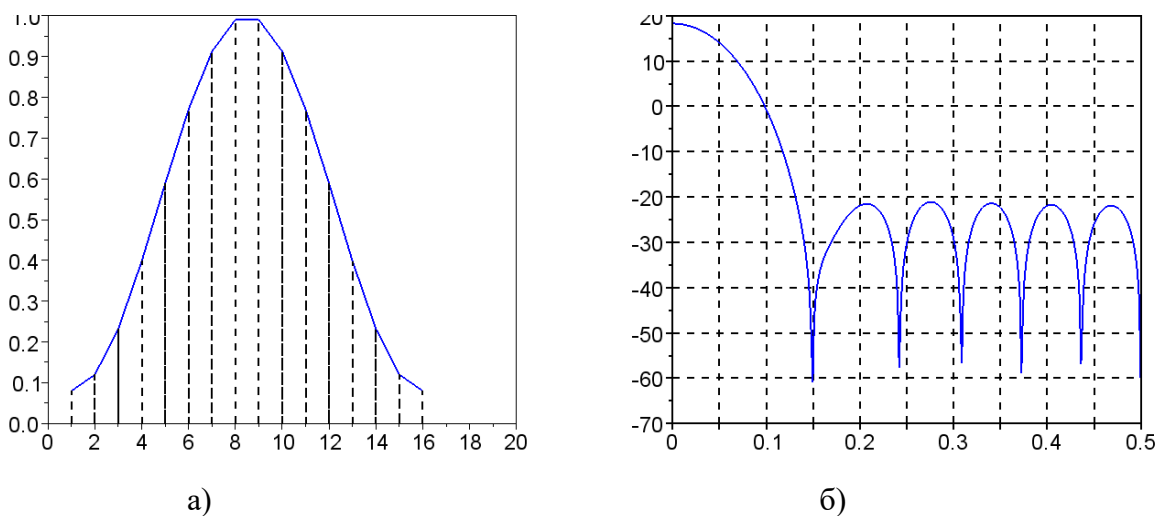


Рисунок 4.5. Вікно Хемінга: а) – форма вікна; б) – амплітудний спектр вікна.

Вікно Блекмана

Відліки вікна Блекмана розраховують по формулі:

$$W(k) = 0.42 - 0.5 \cos\left(2\pi \frac{k-1}{n-1}\right) + 0.08 \cos\left(4\pi \frac{k-1}{n-1}\right). \quad (4.8)$$

Необхідно враховувати, що $k = \overline{1, n}$ – число ціле (номер відліку), n – кількість відліків. В Scilab вікно Блекмана можна також отримати на основі вікна Кайзера при $\alpha=8.6$. Нижче представлено вікно Блекмана і його спектр для $n=16$. Розрахунок проведений по формулі (4.8). Амплітуда спектру виражена в дБ.

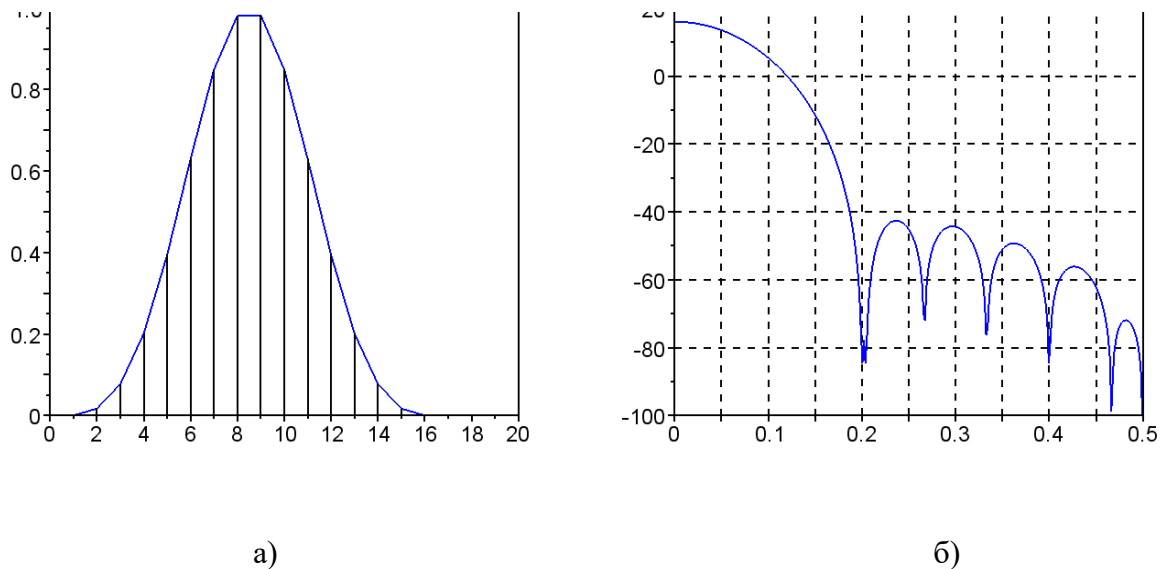


Рисунок 4.6. Вікно Блекмана: а) – форма вікна; б) – амплітудний спектр вікна.

4.3 Порівняння вікон

Для порівняння можна отримати графіки віконних функцій в одному вікні [3].

4.4 Визначення критеріїв оцінки вікна

Для порівняння характеристик вікон необхідно визначити наведені раніше критерії його оцінки: 1) визначення відношення амплітуди найбільшого з додаткових пелюстків до

амплітуди основного пелюстка: $\alpha = \frac{A_{\text{НДЛ}}}{A_{\text{ОЛ}}}$

2) максимальна похибка дискретизації:

$$b = \frac{\text{амплитуда ДПФ окна при } f = \frac{\Delta f}{2}}{\text{амплитуда ДПФ окна при } f = 0},$$

де відстань між частотними лініями: $\Delta f = \frac{1}{NT}$, N – обсяг вибірки, T – період дискретизації;

3) ширина основного пелюстка L .

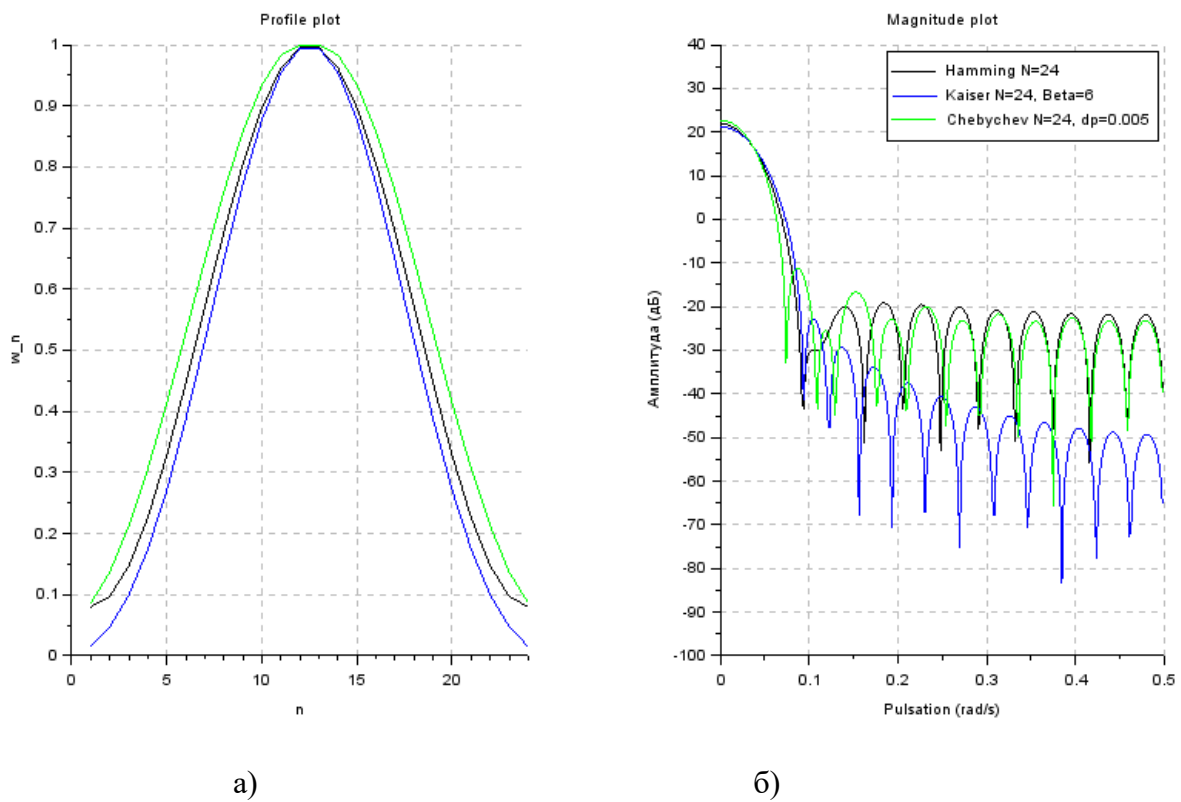


Рисунок 4.7. Порівняння віконних функцій: а) – форма вікна; б) – амплітудний спектр вікна.

Визначення цих критеріїв можна надати на прикладі вікна Кайзера для $n=16$ і $alpha=4$. Для полегшення вирішення такої задачі проформуємо відліки вікна так, щоб сума відліків була 1. Для цього розраховані з допомогою функції $Wl=window('kr',16,5)$ відліки розділимо на їх суму: $Wl=Wl/sum(Wl)$. В цьому випадку амплітуда постійної складової перетворення Фур'є буде 1 (чи 0 дБ), а амплітуда найбільшого з додаткових пелюстків покаже значення α в дБ.

Як можна побачити з рис. 4.7, відношення амплітуди найбільшого з додаткових пелюстків (-32.2 дБ) до амплітуди основного пелюстка (0 дБ):

$$\alpha = \frac{A_{\text{НДЛ}}}{A_{\text{ОЛ}}} = -32.2 \text{ дБ} \text{ чи } \alpha = \frac{A_{\text{НДЛ}}}{A_{\text{ОЛ}}} = 10^{-32.2/20} = 0.025.$$

Для визначення максимальної погрішності дискретизації b визначимо амплітуду спектру вікна при частоті $f = \frac{\Delta f}{2} = \frac{1}{2n} = \frac{1}{32}$ Гц. Цій частоті відповідають точки А (див. рис. 4.7.), для якої $A_A = -2$ дБ. Відповідно $b = -2$ дБ чи $b = 10^{-2/20} = 0.79$.

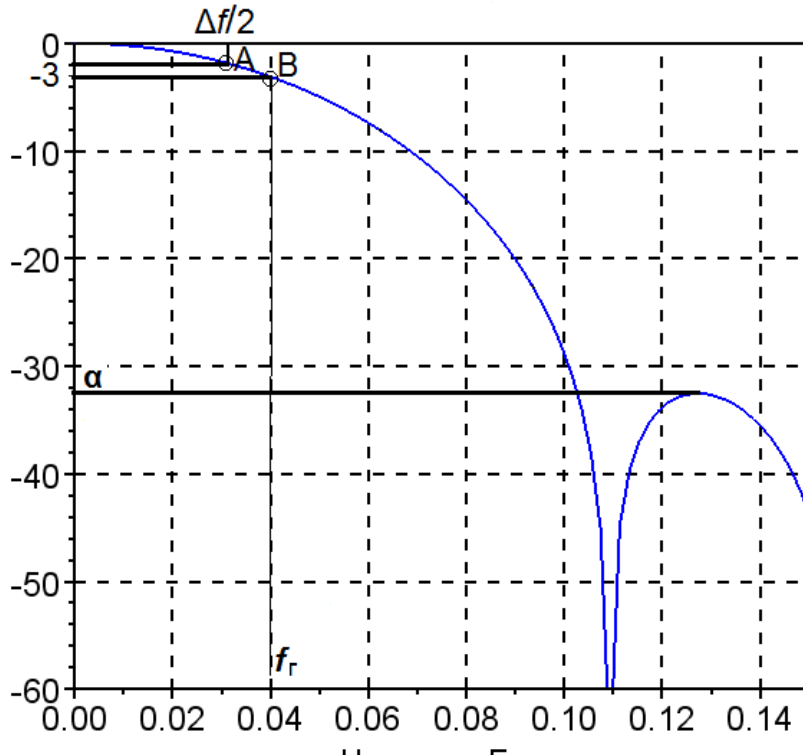


Рисунок 4.8. Визначення критеріїв вікна.

Для визначення ширини основного пелюстка треба відмітити на вісі координат точку -3дБ та провести горизонтальну лінію до перетину з кривою спектру. Таким чином можна отримати точку В на рис. 4.8). Абсциса цієї точки буде відповідати граничній частоті $f_z = 0.04$ Гц. Це і буде визначати ширину основного пелюстка $L = 0.04$ Гц. Ширину основного пелюстка можна також визначити в долях від відстані між частотними лініями Δf . А саме

$$\text{як } \frac{f_z}{\Delta f} = \frac{f_z}{1/n} = \frac{0.04}{1/16} = 0.64, \text{ тобто } L = 0.64 \Delta f.$$

Для інших типів вікон розрахунок критеріїв виконується аналогічно.

Контрольні запитання:

1. Критерії вікна.
2. Функції вікна та їхні спектри.

3. Поняття частотного спектра періодичного сигналу.
4. Види вікон та їхні особливості.

Література

1. Рибальченко М.О., Єгоров О.П., Зворикін В.Б. Цифрова обробка сигналів. Навчальний посібник. – Дніпро: НМетАУ, 2018. – 79 с.
2. Основи та методи цифрової обробки сигналів: від теорії до практики: навч. посібник / уклад. : Ю.О. Ушенко, М.С. Гавриляк, М.В. Талах, В.В. Дворжак. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т
3. Campbell, S.; Chancelier J.-P., Nikoukhah R. (2006). *Modeling and Simulation in Scilab/Scicos*. New York: Springer. [ISBN 9780387278025](https://doi.org/10.1007/978-0-387-27802-5).

Лекція 5

Тема: БАЗОВІ ПОЛОЖЕННЯ СИНТЕЗУ ФІЛЬТРІВ

Мета заняття: Засвоїти основи синтезу фільтрів.

5.1 Аналогово-цифрове та цифро-аналогове перетворення

Узагальнена структура системи цифрової обробки сигналів включає такі основні фрагменти. На вхід надходить аналоговий сигнал. Його дискретизація в часі і квантування по рівню проводиться в аналогово-цифровому перетворювачі (АЦП). На виході АЦП – з'являється послідовність чисел, що надходить до цифрового процесору (ЦП), який виконує потрібну обробку. Цей процесор здійснює різні математичні операції над вхідними відліками. Результатом роботи процесора буде нова послідовність чисел, яка являє собою відліки сигналу на виході. Аналоговий вихідний сигнал відтворюється по цій послідовності чисел за допомоги цифро-аналогового перетворювача (ЦАП). Напряга (наприклад) на виході ЦАП має ступінчасту форму. За необхідності вона може бути перетворена в плавно змінюваний вихідний сигнал за допомогою згладжуючого фільтру.

Пристрої, які можна реалізувати за допомоги цієї структури можуть мати різноманітний характер. В цифровій формі можна створювати фільтри, аналізатори спектру, нелінійні перетворювачі сигналів та багато інших.

5.2 Частота Найквіста

Гармонічний сигнал може бути адекватно представлений дискретними відліками, якщо його частота не перевищує половини частоти дискретизації. Ця частота зветься

частотою Найквіста. В залежності від співвідношення між частотою дискретизованого сигналу і частотою Найквіста можливі три випадки.

1. Коли частота гармонічного сигналу менша за частоту Найквіста, дискретні відліки дозволяють правильно відтворити аналоговий сигнал.
2. Коли частота гармонічного сигналу дорівнює частоті Найквіста, тоді дискретні відліки дозволяють правильно відтворити аналоговий сигнал тією ж частотою, але амплітуда і фаза відтвореного сигналу можуть бути викривлені [3, с.130].
3. Коли частота гармонічного сигналу більша за частоту Найквіста, відтворений аналоговий сигнал буде гармонічним, але з іншою частотою (це явище зветься явищем появи хибних частот) [3, с.130].

5.3 Теорема Котельнікова (Найквіста)

Будь який сигнал $s(t)$ спектр якого на має складових з частотами, вищими деякого значення $2\pi f_b$, може бути без втрат інформації представлений своїми дискретними відліками, які обирають з з інтервалом T , що задовільняє нерівності $T < (\pi/\omega_b)$.

5.4 Види фільтрів

Найбільш часто виникають задачі створення фільтрів, які пропускають сигнали певної полоси частот, але затримують всі інші. При цьому розрізняють: фільтри нижніх частот (ФНЧ) – вони пропускають частоти, менші певної заданої; фільтри верхніх частот (ФВЧ) – вони пропускають частоти, більші певної заданої; полосові фільтри (ПФ) – пропускають сигнали певної полоси частот; режекторні фільтри (РФ)- затримують сигнали певної полоси частот.

5.5 Визначення коефіцієнтів при синтезі НРФ

При синтезі НРФ виникає задача визначення вагових коефіцієнтів a_k так, щоб потрібна користувачеві передавальна функція була з його точки зору якнайкраща. Але як і в усіх галузях життя ідеал досягнути досить важко. Тому здійснення його ми досягаємо лише «по можливості». У випадку з фільтрами це «по можливості» досить не погано можна досягнути, якщо апроксимувати завдану передавальну функцію по *методу найменших квадратів*.

Таким чином, для визначення коефіцієнтів необхідно:

1. Задати вид передавальної функції ідеального фільтру $G_w(j\omega)$ (тобто бажану передавальну функцію) з граничною частотою ω_g (рис. 5.1):

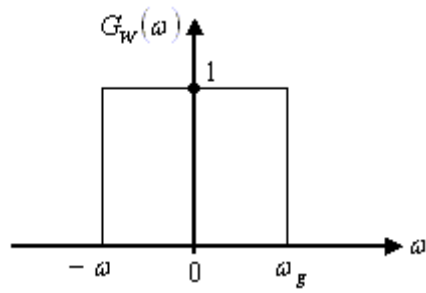


Рисунок 5.1 – Передавальна функція ідеального фільтру.

2. Врахувати властивість ДПФ – тобто пам'ятати про періодичність з частотою дискретизації $f_D = 1/T$ чи $\omega_D = 2\pi f_D = 2\pi/T$ (рис. 5.2):

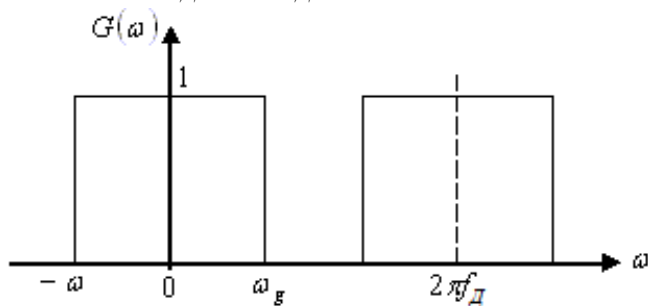


Рисунок 5.2 – Передавальна функція цифрового фільтру з урахуванням періодичності

3. Оскільки апроксимація передавальної характеристики $G_d(j\omega)$ проводиться з допомогою ряду Фур'є, то треба пам'ятати про таку його особливість: зі зростанням кількості членів ряду помилка апроксимації має зменшуватися (рис. 5.3):

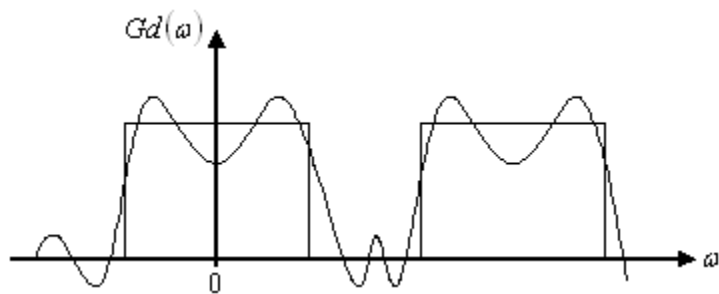


Рисунок 5.3 – Передавальна функція реалізованого фільтру.

4. Як ми домовились раніше, метод найменших квадратів Гаусса буде служити критерієм апроксимації:

$$\frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} (G_d(j\omega) - G_w(j\omega))^2 d\omega \Rightarrow \min. \quad (5.1)$$

5. Середньоквадратична погрішність апроксимації мінімальна, якщо вагові коефіцієнти a_k бажаного фільтру є коефіцієнтами розкладання $G_d(j\omega)$ в ряд Фур'є в частотній області.

В частотній області передавальна функція $G_d(j\omega)$ співпадає з ДПФ вагових коефіцієнтів фільтру. Тому для визначення коефіцієнтів фільтру по передавальній функції треба виконувати зворотнє перетворення преобразование Фур'є від $G_d(j\omega)$:

$$a_k = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} G_d(j\omega) e^{j\omega k T} d\omega. \quad (5.2)$$

Розіб'ємо даний вираз на два інтеграли з нижнім значенням $\omega = 0$.

$$a_k = \frac{T}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{T}} G_d(j\omega) e^{j\omega k T} d\omega + \frac{T}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{T}} G_d(-j\omega) e^{-j\omega k T} d\omega. \quad (5.3)$$

Якщо $G_d(j\omega)$ – парна, $G_d(j\omega) = G_d(-j\omega)$, то

$$a_k = a_{-k} = \frac{T}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{T}} G_d(j\omega) (e^{j\omega k T} + e^{-j\omega k T}) d\omega = \frac{T}{2\pi} 2 \int_0^{\frac{\pi}{T}} G_d(j\omega) \cos(k\omega T) d\omega. \quad (5.4)$$

Якщо $G_d(j\omega)$ – непарна, $G_d(j\omega) = -G_d(-j\omega)$, то

$$a_k = -a_{-k} = \frac{T}{2\pi} 2j \int_0^{\frac{\pi}{T}} G_d(j\omega) \sin(k\omega T) d\omega. \quad (5.5)$$

5.6 Розрахунок коефіцієнтів фільтру низької частоти (ФНЧ)

Визначимо коефіцієнти ідеального фільтру низької частоти (ФНЧ) з передавальною функцією $G_d(j\omega) = 1$ при $|\omega| \leq \omega_g$ і $G_d(j\omega) = 0$ при $|\omega| > \omega_g$; $G_d(j\omega)$ – парна. Використовуючи (5.4) можна отримати:

$$a_k = a_{-k} = \frac{T}{\pi} \int_0^{\omega_g} 1 \cdot \cos(k\omega T) d\omega = \frac{T}{\pi} \frac{\sin(k\omega_g T)}{kT}. \quad (5.6)$$

Таким чином, коефіцієнти фільтру залежать від граничної частоти та частоти дискретизації $f_D = 1/T$, тому часто при визначенні параметрів фільтру визначають нормовану *граничну кругову частоту*:

$$\Omega_g = \frac{\omega_g}{f_D} = 2\pi \frac{f_g}{f_D}, \quad (5.7)$$

Тоді рівняння для обчислення коефіцієнтів ФНЧ отримує вигляд:

$$a_k = a_{-k} = \frac{\Omega_g}{\pi} \frac{\sin(k\Omega_g)}{k\Omega_g}. \quad (5.8)$$

Приклад:

Розрахувати фільтр низьких частот, коли $N = 5$, $f_g = 25\text{Гц}$, $f_D = 100\text{Гц}$.

$$1) \Omega_g = 2\pi \frac{f_g}{f_D} = 0.5\pi;$$

$$2) k = 0 \quad a_0 = \frac{1}{2};$$

$$k = 1 \quad a_1 = a_{-1} = \frac{0.5\pi \sin(1 \cdot 0.5 \cdot \pi)}{\pi \cdot 1 \cdot 0.5 \cdot \pi} = \frac{1}{\pi};$$

$$k = 2 \quad a_2 = a_{-2} = 0.5 \cdot \frac{\sin(2 \cdot 0.5 \cdot \pi)}{2 \cdot 0.5 \cdot \pi} = 0;$$

$$k = 3 \quad a_3 = a_{-3} = 0.5 \frac{\sin(3 \cdot 0.5 \cdot \pi)}{3 \cdot 0.5 \cdot \pi} = -\frac{1}{3\pi};$$

$$k = 4 \quad a_4 = a_{-4} = 0.5 \frac{\sin(4 \cdot 0.5 \cdot \pi)}{4 \cdot 0.5 \cdot \pi} = 0;$$

$$k = 5 \quad a_5 = a_{-5} = 0.5 \frac{\sin(5 \cdot 0.5 \cdot \pi)}{5 \cdot 0.5 \cdot \pi} = \frac{1}{5\pi}.$$

Рівняння фільтру 10-го порядку ($2N = 2 \cdot 5 = 10$) буде виглядати:

$$\begin{aligned}
 y_n &= \frac{1}{5\pi} x_{n+5} - \frac{1}{3\pi} x_{n+3} + \frac{1}{\pi} x_{n+1} + \frac{1}{2} x_n + \frac{1}{\pi} x_{n-1} - \frac{1}{3\pi} x_{n-3} + \frac{1}{5\pi} x_{n-5} = \\
 &= \frac{1}{2} x_n + \frac{1}{\pi} (x_{n+1} + x_{n-1}) - \frac{1}{3\pi} (x_{n+3} + x_{n-3}) + \frac{1}{5\pi} (x_{n+5} + x_{n-5}),
 \end{aligned}$$

передавальна функція:

$$G_d(j\omega) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos(1 \cdot \omega T) - \frac{2}{3\pi} \cos(3 \cdot \omega T) + \frac{2}{5\pi} \cos(5 \cdot \omega T).$$

Для порівняння на рис. 5.4 представлені графік отриманої передавальної функції $G_d(j\omega)$ і тієї, яка була лише бажана $G_w(j\omega)$.

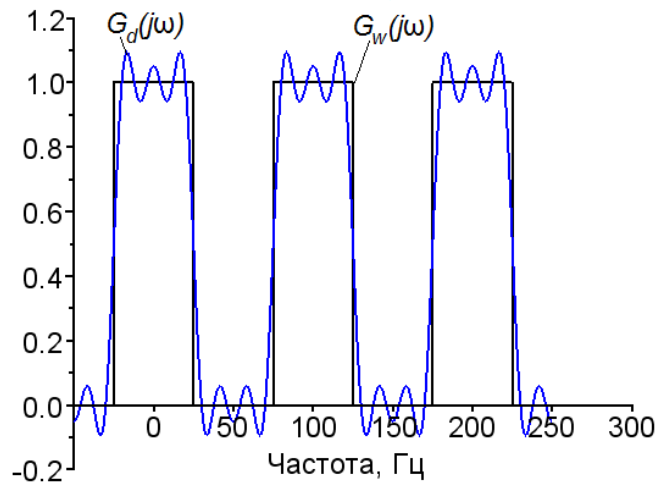


Рисунок 5.4 – Передавальна функція ФНЧ, параметри якого визначені по методу найменших квадратів.

Отриману передавальну функцію фільтра побудовано в Scilab для ділянки частот від 0 до $f_d/2$ (рис. 5.5) з використанням функції **frmag** [3]. Для перевірки якості фільтру синтезуємо сигнал $s = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t)$, який складається зі складових $f_1 = 5$ Гц < $f_g = 25$ Гц та $f_2 = 40$ Гц > $f_g = 25$ Гц. Отримаємо відліки цього сигналу на ділянці часу від 0 до 1с з частотою дискретизації $f_d = 100$ Гц. Графік цього сигналу представлено на рис. 5.6, а. Графік сигналу після цього фільтру з отриманими коефіцієнтами, представлений на рис. 5.6, б. Цей сигнал буде згорткою дискретизованого сигналу $s(nT)$ та отриманого вектору коефіцієнтів $A_k = [1/5\pi; 0; -1/3\pi; 0; 1/\pi; 1/2; 1/\pi; 0; -1/3\pi; 0; 1/5\pi]$. Як можна побачити з рис. 5.6, в результаті фільтрації складова з частотою $f_2 = 40$ Гц > $f_g = 25$ Гц знижується. Це впливає і з перетворення Фур'є вихідного та відфільтрованого сигналу (рис. 5.6, в). Можна також побачити, що через недостатню частоту дискретизації амплітуда перетворення Фур'є сигналу після фільтрації відрізняється від 1.

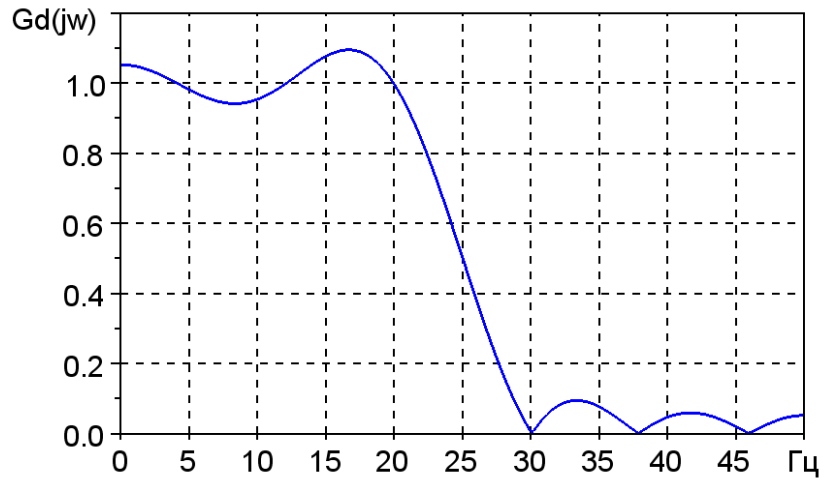
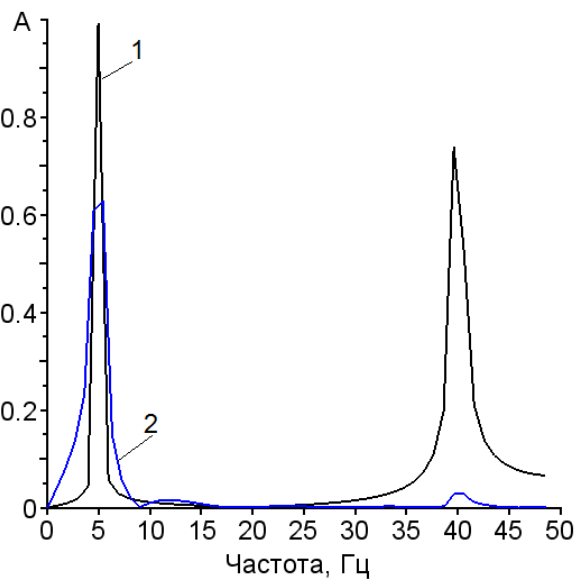
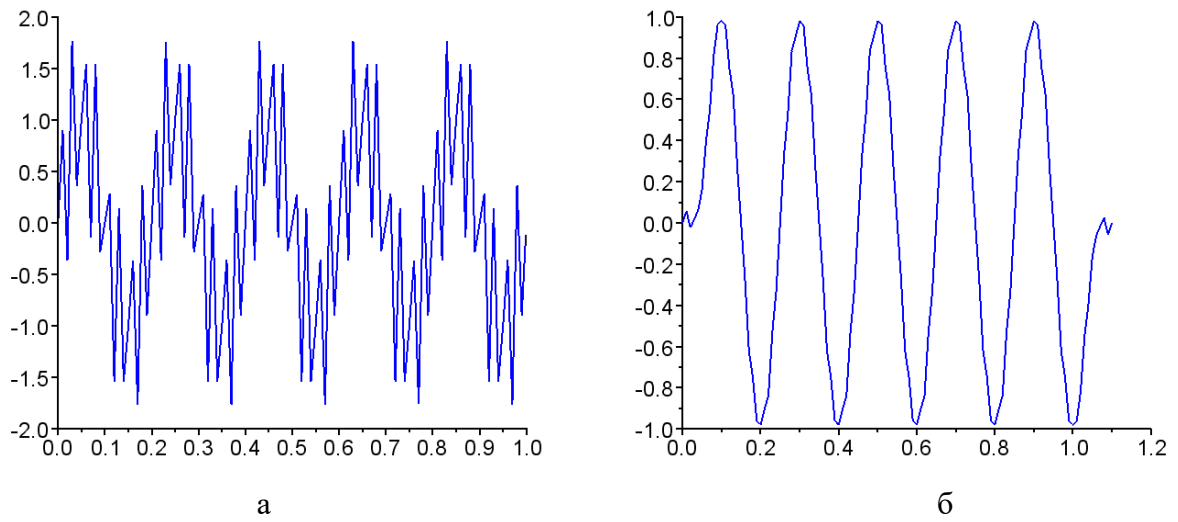


Рисунок 5.5 – Передавальна функція ФНЧ.



в

Рисунок 5.6 Фільтрація сигналу $s = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t)$ з допомогою розробленого фільтру: а – вихідний сигнал; б – сигнал після фільтрації; в – спектр вихідного сигналу (крива 1), спектр сигналу після фільтрації (крива 2)

Контрольні запитання:

1. Цифрові фільтри. Види цифрових фільтрів.
2. НРФ – поняття, особливості
3. Параметри НРФ
4. Алгоритм проектування цифрового фільтру.

Література

1. Рибальченко М.О., Єгоров О.П., Зворикін В.Б. Цифрова обробка сигналів. Навчальний посібник. – Дніпро: НМетАУ, 2018. – 79 с.
2. Основи та методи цифрової обробки сигналів: від теорії до практики: навч. посібник / уклад. : Ю.О. Ушенко, М.С. Гавриляк, М.В. Талах, В.В. Дворжак. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т
3. Campbell, S.; Chancelier J.-P., Nikoukhah R. (2006). *Modeling and Simulation in Scilab/Scicos*. New York: Springer. [ISBN 9780387278025](#).

Лекція 6

Тема: КОРЕЛЯЦІЙНІ ФУНКЦІЇ

Мета заняття: Засвоїти основи кореляційного аналізу в інформаційних системах.

Кореляція (correlation), і її окремий випадок для центрованих сигналів – коваріація, є відомим методом аналізу сигналів. Такий аналіз використовують для детермінованих та стохастичних, дискретних та неперервних сигналів.

Неперервні кореляційні функції

Такий аналіз дозволяє кількісно порівняти ступінь схожості різних сигналів. Для цього обчислюють кореляційні функції (КФ; з англійської – correlation function, CF). КФ детермінованого сигналу з скінченною енергією – це інтеграл від добутку двох копій сигналу s , зсунутих відносно один одного на час τ :

$$\Phi_{ss}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t-\tau)dt. \quad (6.1)$$

КФ показує ступінь схожості між сигналом і його зсунутою копією – чим більше значення КФ, тим схожість сильніша. Така КФ зветься *автокореляційною* (АКФ) і володіє наступними властивостями:

1. Значення АКФ при $\tau=0$ дорівнює енергії сигналу

$$\Phi_{ss}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt = E. \quad (6.2)$$

2. АКФ – парна функція свого аргументу τ :

$$\Phi_{ss}(\tau) = \Phi_{ss}(-\tau). \quad (6.3)$$

3. Значення АКФ при $\tau=0$ є максимально можливим значенням:

$$\Phi_{ss}(\tau) \leq \Phi_{ss}(0). \quad (6.4)$$

4. Зі зростанням τ АКФ сигналу з кінцевою енергією згасає:

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} \Phi_{ss}(\tau) = 0 \quad (6.5)$$

5. Коли сигнал $s(t)$ не містить особливостей у вигляді дельта-функцій, його АКФ не може мати розривів (тобто неперервна функція).

6. Коли сигнал – напруга, то розмірність його АКФ - В²с.

Обчислимо АКФ прямокутного імпульсу s довжиною $2T$, завданого виразом

$$s(t) = \begin{cases} A, & -T \leq t \leq T; \\ 0, & |t| > T. \end{cases} \quad (6.6)$$

При $0 \leq \tau \leq T$

$$\Phi_{ss}(\tau) = \int_{\tau}^T A^2 dt = A^2(T - \tau).$$

При $-T \leq \tau < 0$

$$\Phi_{ss}(\tau) = \int_0^{T+\tau} A^2 dt = A^2(T + \tau).$$

$$\text{При } |\tau| > T \quad \Phi_{ss}(\tau) = 0.$$

Тобто можна записати

$$\Phi_{ss}(\tau) = \begin{cases} A^2(T - |\tau|), & |\tau| \leq T \\ 0, & |\tau| > T \end{cases}. \quad (6.7)$$

Графік АКФ прямокутного імпульсу показаний на рис. 6.1.

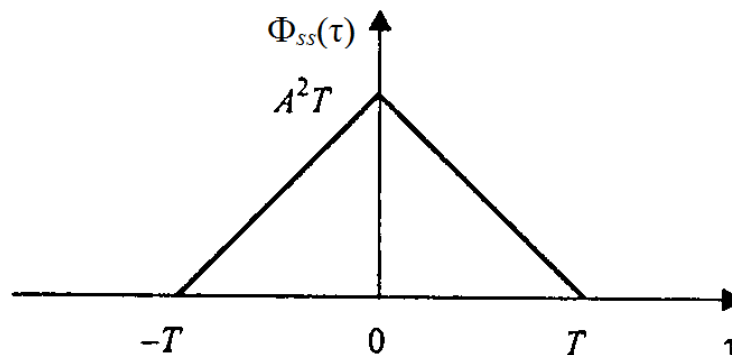


Рисунок 6.1 – Кореляційна функція прямокутного імпульсу

Для періодичного сигналу АКФ з періодом T обчислюють інакше:

$$\Phi_{ss}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t)s(t-\tau)dt. \quad (6.8)$$

Набор властивостей такої АКФ дещо зміниться.

1. Значення при $\tau=0$ дорівнює не енергії, а *середній потужності* сигналу, що аналізується:

$$\Phi_{ss}(0) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t)dt = P_{cp}. \quad (6.9)$$

2. Властивість парності збережеться:

$$\Phi_{ss}(\tau) = \Phi_{ss}(-\tau). \quad (6.10)$$

3. Значення АКФ при $\tau=0$ і тепер буде максимально можливим:

$$\Phi_{ss}(\tau) \leq \Phi_{ss}(0). \quad (6.11)$$

4. АКФ періодичного сигналу буде періодичною функцією з періодом, як у сигналу:

$$\Phi_{ss}(\tau + T) \leq \Phi_{ss}(\tau). \quad (6.12)$$

5. Коли сигнал не містить особливостей у вигляді дельта-функцій, його АКФ не може мати розривів (тобто неперервна функція).

6. Розмірність АКФ періодичного сигналу – квадрат розмірності сигналу (V^2 , якщо сигнал – напруга).

Обчислимо АКФ гармонічного сигналу з частотою ω_0

$$s(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Обчислимо кореляційний інтеграл з періодом $2\pi/\omega_0$:

$$\Phi_{ss}(\tau) = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) A \cos(\omega_0(t-\tau) + \varphi_0) dt = \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau) \quad (6.13)$$

Як можна побачити, АКФ гармонійного сигналу також є гармонійною функцією. Результат не залежить від початкової фази гармонійного сигналу (параметр φ_0 у вираз не ввійшов).

Взаємна кореляційна функція

Взаємна КФ (ВКФ; з англійської – cross-correlation function, CCF) дозволяє вимірювати аналогічну величину для зсунених екземплярів двох *різних* сигналів (під інтегралом – добуток двох сигналів, один из котрих затриманий на час τ):

$$\Phi_{s_1 s_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t-\tau)dt. \quad (6.14)$$

Тобто АКФ є окремим випадком ВКФ, коли сигнали однакові $s_1(t) = s_2(t) = s(t)$.

Як приклад обчислимо ВКФ прямокутного $s_1(t)$ і трикутного $s_2(t)$ імпульсів:

$$s_1(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t \leq T; \\ 0, & t < 0, \quad t > T. \end{cases} \quad s_2(t) = \begin{cases} A \frac{t}{T}, & 0 \leq t \leq T; \\ 0, & t < 0, \quad t > T. \end{cases}$$

При $0 \leq \tau \leq T$

$$\Phi_{s_1 s_2}(\tau) = \int_{\tau}^T s_1(t) s_2(t - \tau) dt = \int_{\tau}^T A^2 \frac{t - \tau}{T} dt = \frac{A^2}{2T} (T - \tau)^2;$$

При $-T \leq \tau \leq 0$

$$\Phi_{s_1 s_2}(\tau) = \int_0^{T+\tau} s_1(t) s_2(t - \tau) dt = \int_0^{T+\tau} A^2 \frac{t - \tau}{T} dt = \frac{A^2}{2T} (T^2 - \tau^2);$$

При $|\tau| > T$

$$\Phi_{s_1 s_2}(\tau) = 0.$$

З об'єднанням результатів можна записати

$$\Phi_{s_1 s_2}(\tau) = \begin{cases} \frac{A^2}{2T} (T - \tau)^2, & 0 \leq \tau \leq T; \\ \frac{A^2}{2T} (T^2 - \tau^2), & -T \leq \tau < 0; \\ 0, & |\tau| > T. \end{cases} \quad (6.15)$$

Графік отриманої ВКФ представлено на рис. 6.2.

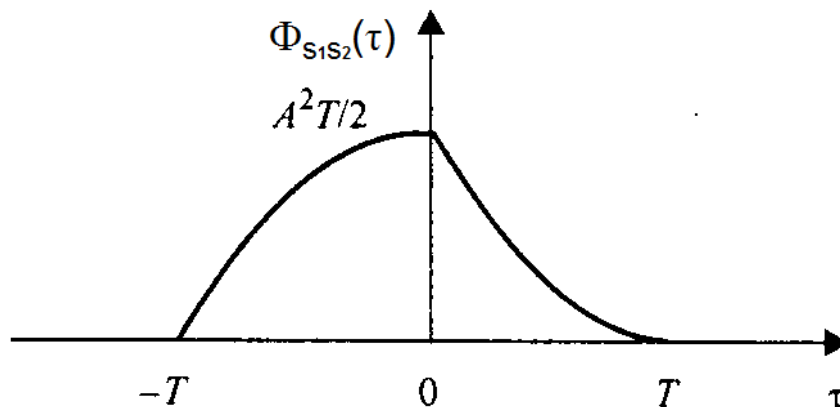


Рисунок 6.2 – ВКФ прямокутного $s_1(t)$ і трикутного $s_2(t)$ імпульсів

Властивості ВКФ дещо відрізняються від властивостей АКФ:

1. $|\Phi_{s_1 s_2}(\tau)| \leq \sqrt{E_1 E_2}$, де E_1 і E_2 – енергії сигналів $s_1(t)$ і $s_2(t)$.
2. $\Phi_{s_1 s_2}(-\tau) = \Phi_{s_2 s_1}(\tau)$, тобто зміна знаку τ рівносильна взаємній перестановці сигналів.
3. Значення ВКФ при $\tau = 0$ нічим не виділяється; максимум може бути розташований в будь-якому місці вісі τ .
4. Зі зростанням абсолютного значення τ ВКФ сигналів з скінченною енергією згасає:

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} \Phi_{s_1 s_2}(\tau) = 0.$$
5. Коли сигнали $s_1(t)$ і $s_2(t)$ не містять особливостей у вигляді дельта-функцій, їх ВКФ не може мати розривів (тобто неперервна функція).
6. Якщо сигнали – напруга, то розмірність їх ВКФ дорівнює V^2c .

Іноді також використовують термін *коваріантність* між сигналами $s_1(t)$ і $s_2(t)$:

$$\sigma_{s_1 s_2} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (s_1(t) - \bar{s}_1) \cdot (s_2(t) - \bar{s}_2) dt. \quad (6.16)$$

У випадку знакозмінних величин з нульовим середнім значенням ($\bar{s}_1 = 0$ і $\bar{s}_2 = 0$) коваріантність визначається

$$\sigma_{s_1 s_2} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T s_1(t) s_2(t) dt. \quad (6.17)$$

Зустрічається і таке визначення кореляційних функцій

$$\Phi_{ss}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T s(t) s(t - \tau) dt \quad (6.18)$$

$$\Phi_{s_1 s_2}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T s_1(t) s_2(t - \tau) dt. \quad (6.19)$$

Для *нормованої ВКФ* будемо мати:

$$\Phi_{\text{норм}}(\tau) = \frac{\Phi_{s_1 s_2}(\tau)}{\sqrt{\Phi_{s_1 s_1}(0) \cdot \Phi_{s_2 s_2}(0)}}. \quad (6.20)$$

Зв'язок між кореляційними функціями і спектрами сигналів

Для визначення такого зв'язку піддамо ВКФ перетворенню Фур'є (при цьому хай сигнали $s_1(t)$ і $s_2(t)$ мають спектральні функції $\dot{S}_1(\omega)$ і $\dot{S}_2(\omega)$):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{s_1 s_2}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(t-\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) e^{-j\omega t} dt \int_{-\infty}^{\infty} s_2(t-\tau) e^{-j\omega(t-\tau)} d(t-\tau) = \dot{S}_1(\omega) \dot{S}_2^*(\omega). \end{aligned} \quad (6.21)$$

Тобто ВКФ пов'язана з перетворенням Фур'є так званим *взаємним спектром* сигналів ($\dot{S}_{12}(\omega)$) для сигналів $s_1(t)$ і $s_2(t)$ і буде добутком їх спектральних функцій, одна з котрих піддана комплексному спряженню:

$$\dot{S}_{12}(\omega) = \dot{S}_1(\omega) \dot{S}_2^*(\omega). \quad (6.22)$$

Звідси висновок: коли спектри сигналів не перекриваються, то їх взаємний спектр дорівнює нулю на всіх частотах, а тоді дорівнює нулю їх ВКФ при будь-яких часових зсувах τ . Таким чином, *сигнали з не перекриваючимися спектрами є некорельованими*.

Прийнявши $s_1(t) = s_2(t) = s(t)$, можна отримати аналогічний результат для АКФ:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ss}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) s(t-\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \int_{-\infty}^{\infty} s(t-\tau) e^{-j\omega(t-\tau)} d(t-\tau) = \dot{S}(\omega) \dot{S}^*(\omega) = |\dot{S}(\omega)|^2. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Тобто АКФ сигналу пов'язана перетворенням Фур'є з квадратом модулю спектральної функції, чи з *енергетичним спектром* сигналу. Ще один факт: АКФ сигналу *не залежить від його фазового спектру*. Відповідно, сигнали, амплітудні спектри котрих однакові, а фазові різні, будуть мати однакову АКФ. Ще один наслідок у тому, що по АКФ не можна відновити вихідний сигнал.

Енергетичні розрахунки в спектральній області

Як відомо, ВКФ двох сигналів пов'язана перетворенням Фур'є з їх взаємним спектром, а саме:

$$\Phi_{s_1 s_2}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_{12}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (6.24)$$

Тепер підставимо в формулу значення $\tau = 0$ і після деяких перетворень отримуємо співвідношення, яке зветь *теоремою Релея*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_1(\omega) \dot{S}_2^*(\omega) d\omega \quad (6.25)$$

Якщо прийняти сигнали однаковими ($s_1(t) = s_2(t) = s(t)$), отримуємо вираз, який дозволить обчислювати енергію сигналу як у часовій, так і в частотній області (*рівність Парсеваля*):

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}(\omega)|^2 d\omega. \quad (6.26)$$

Можна показати, що для періодичного сигналу у вигляді ряду Фур'є $s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k e^{j\frac{2\pi k}{T}t}$ середня потужність за період через коефіцієнти ряду буде

$$P_{\text{cp}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\dot{C}_k|^2. \quad (6.27)$$

Тобто - середня потужність періодичного сигналу дорівнює сумі квадратів модулів його коефіцієнтів ряду Фур'є.

Теорема Вінера-Хінчина

Кореляційні функції залежать від часу. Їх можна трансформувати в частотну область.

При цьому отримують *автоспектральну щільність потужності (АСЩП)* $\dot{S}_{ss}(\omega)$, *взаємоспектральну щільність потужності (ВСЩП)* $\dot{S}_{s_1s_2}(\omega)$. Справедливо і зворотнє перетворення:

$$\begin{aligned} \dot{S}_{ss}(\omega) &= F(\Phi_{ss}(\tau)) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ss}(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau \\ \dot{S}_{s_1s_2}(\omega) &= F(\Phi_{s_1s_2}(\tau)) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{s_1s_2}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ \Phi_{ss}(\tau) &= F^{-1}(\dot{S}_{ss}(\omega)) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_{ss}(\omega) \cdot e^{j\omega\tau} d\omega \\ \Phi_{s_1s_2}(\tau) &= F^{-1}(\dot{S}_{s_1s_2}(\omega)) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_{s_1s_2}(\omega) \cdot e^{j\omega\tau} d\omega \end{aligned} \quad (6.28)$$

Таким чином, між кореляційними функціями і спектральними щільностями наявні такі перетворення (*теорема Вінера – Хінчина*).

$$\text{АКФ } \Phi_{ss}(\tau) \Leftrightarrow \dot{S}_{ss}(\omega) \text{ АСЩП}$$

$$\text{ВКФ } \Phi_{xy}(\tau) \Leftrightarrow S_{s_1s_2}(\omega) \text{ ВСЩП}$$

Рівність Парсеваля встановлює, що АСЩП дорівнює квадрату амплітудного спектру, поділеного на інтервал спостереження.

$$S_{ss}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|\dot{S}(\omega)|^2}{2T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \cdot \dot{S}(\omega) \cdot \dot{S}^*(\omega). \quad (6.29)$$

Аналогічно для ВКФ:

$$\dot{S}_{s_1 s_2}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \cdot \dot{S}_1(\omega) \cdot \dot{S}_2^*(\omega). \quad (6.30)$$

Використання теореми Вінера-Хінчина

Функції перетворення в часовій і спектральній областях наведені в табл. 6.1.

Для визначення кореляційних коефіцієнтів є два шляхи. По функції $s(t)$, що залежить від часу, з допомогою перетворення Фур'є обчислюють спектральну функцію $\dot{S}(\omega)$. Тобто стає відомим амплітудний спектр.

Тепер можна отримати АСЦП.

По функції $s(t)$, що залежить від часу, обчислюють відразу АКФ.

Таблиця 6.1. Трансформації між функціями часової і спектральної областей.

| Часова область | Спектральна область |
|---|--|
| $s(t)$ $s(t) = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$ $\Phi_{ss}(\tau) = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_{ss}(\omega) e^{j\omega \tau} d\omega$ $\Phi_{ss}(\tau) = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) s(t - \tau) dt$ | $\dot{S}(\omega)$ $\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt$ $\dot{S}_{ss}(\omega) = \frac{ \dot{S}(\omega) ^2}{2T}$ $\dot{S}_{ss}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ss}(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau$ |

Виділення корельованих складових сигналів

Хай на сигнал s_0 , додаються завади $S_1(t)$ і $S_2(t)$:

$$\begin{aligned} s_1(t) &= s_0 + S_1(t) \\ s_1(t) &= x_0 + S_2(t) \end{aligned} \quad (6.31)$$

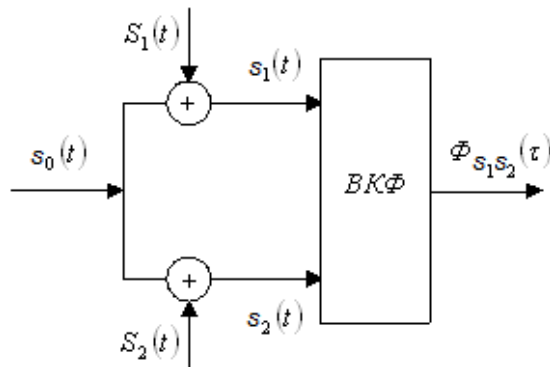


Рисунок 6.3 – Виділення корельованих складових сигналу.

$s_0(t)$ – смодельований вхідний сигнал;

$S_1(t), S_2(t)$ – некорельовані завади;

$s_1(t), s_2(t)$ – результуючі сигнали;

$\Phi_{s_1 s_2}(\tau)$ – ВКФ.

Знайдемо ВКФ:

$$\begin{aligned} \Phi_{s_1 s_2}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T s_1(t) s_2(t - \tau) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (s_0(t) + S_1(t))(s_0(t - \tau) + S_2(t - \tau)) dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left[\int_{-T}^T (s_0(t) + s_0(t - \tau)) dt + \int_{-T}^T S_1(t) S_2(t - \tau) dt \right] + \\ &+ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left[\int_{-T}^T S_1(t) s_0(t - \tau) dt + \int_{-T}^T S_2(t - \tau) s_0(t) dt \right]. \end{aligned}$$

Приймемо, що $S_1(t)$ і $S_2(t)$ не мають постійної складової, тоді

$$\Phi_{s_1 s_2}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T s_0(t) s_0(t - \tau) dt.$$

З результатів видно, що ВКФ не залежить від завад, тобто при обчисленні взаємної кореляції двох сигналів зберігаються тільки корельовані складові, а шум в значному ступеню усувається.

Дискретні кореляційні функції

Згадаємо деякі положення математичної статистики.

Хай для послідовностей $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$, де $n = \overline{1, N}$, відомі середні значення:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n, \quad \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y_n, \quad (6.32)$$

і дисперсії:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (x_n - \bar{x})^2, \quad \sigma_y^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (y_n - \bar{y})^2. \quad (6.33)$$

Мерою зв'язку цих послідовностей є **коваріантність** σ_{xy} :

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y}). \quad (6.34)$$

У випадку знакозмінної величини, тобто $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 0$:

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n y_n. \quad (6.35)$$

Коефіцієнтом кореляції двох випадкових величин є **нормована коваріантність**:

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}, \quad -1 < r < 1. \quad (6.36)$$

Послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$, можуть бути отримані як вибірка, що залежить від часу а саме $x(t)$ і $y(t)$, тобто. $x_n = x(nT)$ і $y_n = y(nT)$, де T – період дискретизації.

Можна також визначити функцію, що залежить від затримки kT . Вона зветься **взаємкореляційною функцією (ВКФ)** і може бути записана в різних формах:

$$\Phi(kT) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x(nT)y((n-k)T), \quad (6.37)$$

$$\Phi(kT) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x(n)y(n-k), \quad (6.38)$$

$$\Phi_{xy}(kT) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n y_{n-k}. \quad (6.39)$$

Кореляція **не залежить** від обраної нульової точки на вісі часу, тому:

$$\begin{aligned} \sum x_n y_{n-k} &= \sum x_{n+k} y_n; \\ \sum x_n y_{n+k} &= \sum x_{n-k} y_n. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Якщо замість y_n затримати x_n , то ВКФ дзеркально відображається:

$$\Phi_{xy}(kT) = \Phi_{xy}(-kT). \quad (6.41)$$

Можливе також вивчення залежності певного сигналу від його попередніх значень, у такому випадку отримуємо **автокореляційну функцію (АКФ)**:

$$\Phi_{xx}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n x_{n-k}, \quad \Phi_{yy}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y_n y_{n-k}. \quad (6.42)$$

Приклад:

Надане: $\{x_n\} = \{1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 2\}$, $\{y_n\} = \{4 \ 2 \ 1\}$.

Знайти: $\Phi_{xx} - ?$, $\Phi_{yy} - ?$, $\Phi_{xy} - ?$.

Будемо вважати, що послідовності не періодичні, тобто тоді зліва і справа можна додавати довільну кількість нулів. Також вважаємо, що для $k < 0$ зсув відбувається вліво, а для $k > 0$ – зсув відбувається вправо на k позицій.

Для Φ_{xx}

$$k = -5: \quad \Phi_{xx}(-5) = \frac{1}{5}(1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0) = 0;$$

$$k = -4: \quad \Phi_{xx}(-4) = \frac{1}{5}(1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0) = 0.4;$$

$$k = -3: \quad \Phi_{xx}(-3) = \frac{1}{5}(1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0) = 1.6;$$

$$k = -2: \quad \Phi_{xx}(-2) = \frac{1}{5}(1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0) = 3.4;$$

$$k = -1: \quad \Phi_{xx}(-1) = \frac{1}{5}(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 0) = 5.6;$$

$$k = 0: \quad \Phi_{xx}(0) = \frac{1}{5}(1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 2) = 6.8;$$

$$k = 1: \quad \Phi_{xx}(1) = \frac{1}{5}(1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 4) = 5.6;$$

$$k = 2: \quad \Phi_{xx}(2) = \frac{1}{5}(1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3) = 3.4;$$

$$k = 3: \quad \Phi_{xx}(3) = \frac{1}{5}(1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2) = 1.6;$$

$$k = 4: \quad \Phi_{xx}(4) = \frac{1}{5}(1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 1) = 0.4;$$

$$k = 5: \quad \Phi_{xx}(5) = \frac{1}{5}(1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0) = 0;$$

Для Φ_{yy}

$$k = -3: \quad \Phi_{yy}(-3) = \frac{1}{3}(4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0) = 0;$$

$$k = -2: \quad \Phi_{yy}(-2) = \frac{1}{3}(4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0) = 1.3333;$$

$$k = -1: \quad \Phi_{xx}(-1) = \frac{1}{3}(4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = 3.3333;$$

$$k = 0: \quad \Phi_{xx}(0) = \frac{1}{3}(4 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1) = 7;$$

$$k = 1: \quad \Phi_{xx}(1) = \frac{1}{3}(4 \cdot 0 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2) = 3.3333;$$

$$k = 2: \quad \Phi_{xx}(2) = \frac{1}{3}(4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 4) = 1.3333;$$

$$k = 3: \quad \Phi_{xx}(3) = \frac{1}{3}(4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0) = 0;$$

Для Φ_{xy}

$$k = -5: \quad \Phi_{xy}(-5) = \frac{1}{5}(1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0) = 0.$$

$$k = -4: \quad \Phi_{xy}(-4) = \frac{1}{5}(1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0) = 0;$$

$$k = -3: \quad \Phi_{xy}(-3) = \frac{1}{5}(1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0) = 0;$$

$$k = -2: \quad \Phi_{xy}(-2) = \frac{1}{5}(1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0) = 0.2;$$

$$k = -1: \quad \Phi_{xy}(-1) = \frac{1}{5}(1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0) = 0.8;$$

$$k = 0: \quad \Phi_{xy}(0) = \frac{1}{5}(1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0) = 2.2;$$

$$k = 1: \quad \Phi_{xy}(1) = \frac{1}{5}(1 \cdot 0 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0) = 3.6;$$

$$k = 2: \quad \Phi_{xy}(2) = \frac{1}{5}(1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1) = 4.4;$$

$$k = 3: \quad \Phi_{xy}(3) = \frac{1}{5}(1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 2) = 4;$$

$$k = 4: \quad \Phi_{xy}(4) = \frac{1}{5}(1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 4) = 1.6;$$

$$k = 5: \quad \Phi_{xy}(5) = \frac{1}{5}(1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0) = 0.$$

Графіки відповідних кореляційних функцій наведені на рис. 6.4. Для побудови використані функції `plot(Phi_xx,'o')` і `plot2d3(Phi_xx)` SciLab [3].

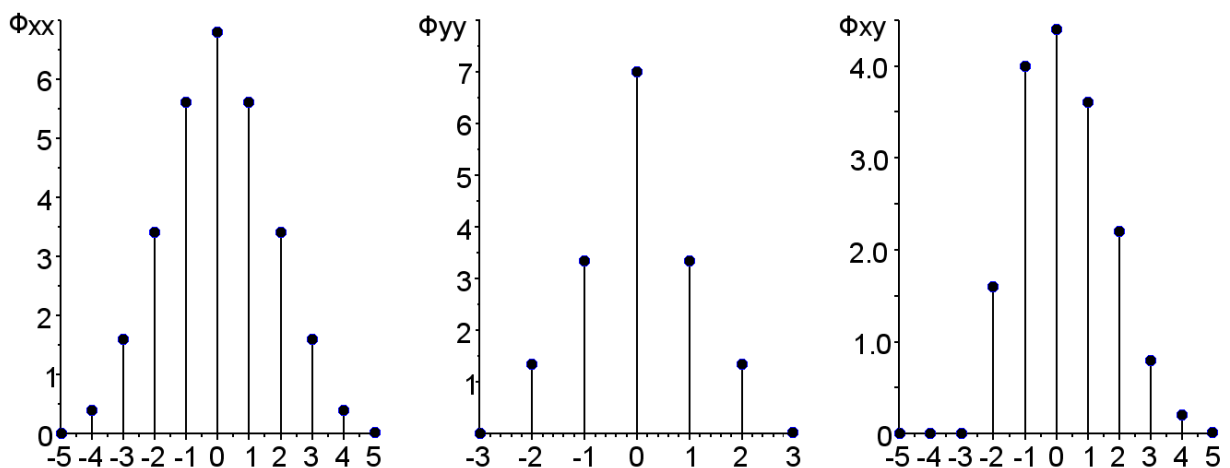


Рисунок 6.4 – Графіки кореляційних функцій

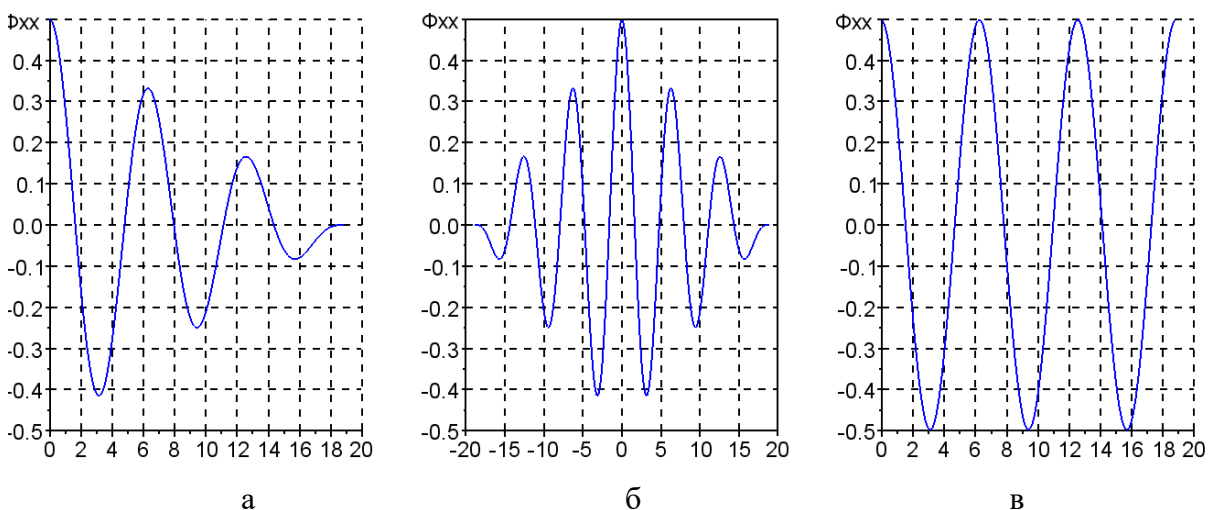


Рисунок 6.5 – АКФ періодичних сигналів, отримані з допомогою різних функцій: а – з `corr`, б – з `conv` (лінійна згортка), в – з `fft` (кругова згортка).

Нехай послідовності вважаються періодичними $\{x_n\} = \{1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 2\}$, $\{y_n\} = \{4 \ 2 \ 1\}$. В цьому випадку автокореляційні функції будуть:

Для Φ_{xx}

$$k = -5: \quad \Phi_{xx}(-5) = \frac{1}{5}(1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 2) = 6.8;$$

$$k = -4: \quad \Phi_{xx}(-4) = \frac{1}{5}(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1) = 6;$$

$$k = -3: \quad \Phi_{xx}(-3) = \frac{1}{5}(1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3) = 5;$$

$$k = -2: \quad \Phi_{xx}(-2) = \frac{1}{5}(1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2) = 5;$$

$$k = -1: \quad \Phi_{xx}(-1) = \frac{1}{5}(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1) = 6;$$

$$k = 0: \quad \Phi_{xx}(0) = \frac{1}{5}(1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 2) = 6.8;$$

$$k = 1: \quad \Phi_{xx}(1) = \frac{1}{5}(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1) = 6;$$

$$k = 2: \quad \Phi_{xx}(2) = \frac{1}{5}(1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3) = 5;$$

$$k = 3: \quad \Phi_{xx}(3) = \frac{1}{5}(1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2) = 5;$$

$$k = 4: \quad \Phi_{xx}(4) = \frac{1}{5}(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1) = 6;$$

$$k = 5: \quad \Phi_{xx}(5) = \frac{1}{5}(1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 2) = 6.8;$$

Для Φ_{yy}

$$k = -3: \quad \Phi_{yy}(-3) = \frac{1}{3}(4 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1) = 7;$$

$$k = -2: \quad \Phi_{yy}(-2) = \frac{1}{3}(4 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2) = 4.6667;$$

$$k = -1: \quad \Phi_{yy}(-1) = \frac{1}{3}(4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4) = 4.6667;$$

$$k = 0: \quad \Phi_{yy}(0) = \frac{1}{3}(4 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1) = 7;$$

$$k = 1: \quad \Phi_{yy}(1) = \frac{1}{3}(4 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2) = 4.6667;$$

$$k = 2: \quad \Phi_{xx}(2) = \frac{1}{3}(4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4) = 4.6667;$$

$$k = 3: \quad \Phi_{xx}(3) = \frac{1}{3}(4 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1) = 7;$$

Графіки АКФ для періодичних сигналів представлені нижче (рис. 6.6).

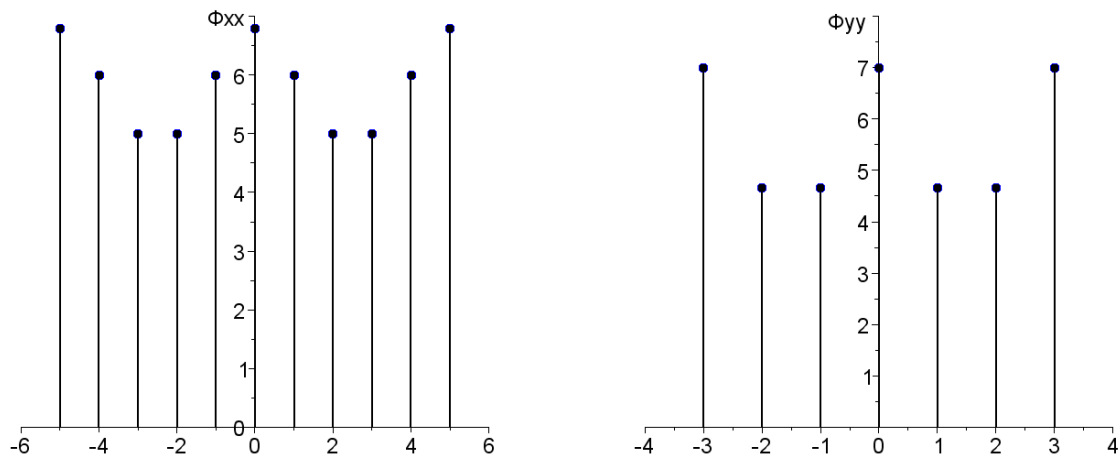


Рисунок 6.6 – Графіки АКФ для періодичних сигналів

Як можна побачити, АКФ періодичного сигналу також періодичні і з тим же періодом, що і сам сигнал.

Контрольні запитання:

1. Коефіцієнти кореляції, нормовані коефіцієнти кореляції.
2. Дискретні кореляційні функції.
3. Безперервні кореляційні функції.
4. АКФ, ВКФ. Їхні властивості.
5. АСЦП, ВСЦП.
6. Кореляційний аналіз у інформаційних системах. Вимір часу затримки, визначення місця розташування, вимір швидкості.

Література

1. Рибальченко М.О., Єгоров О.П., Зворикін В.Б. Цифрова обробка сигналів. Навчальний посібник. – Дніпро: НМетАУ, 2018. – 79 с.

2. Основи та методи цифрової обробки сигналів: від теорії до практики: навч. посібник / уклад. : Ю.О. Ушенко, М.С. Гавриляк, М.В. Талах, В.В. Дворжак. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т

3. Campbell, S.; Chancelier J.-P., Nikoukhah R. (2006). *Modeling and Simulation in Scilab/Scicos*. New York: Springer. ISBN 9780387278025.

Лекція 7

Тема: ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ ТЕОРІЇ ІНФОРМАЦІЇ.

Мета заняття: Засвоїти загальні положення теорії інформації.

7.1 Загальні положення

Інформація – це досить абстрактне судження. Воно має різні значення залежно від контексту. Тому на сьогодні наявні досить значна кількість визначень цього поняття. Оскільки вони відмінні в різних областях людської діяльності. На інтуїтивному рівні інформація означає зміст того, про що має довідатись отримувач.

Загалом можна сказати, що засоби масової інформації її поширюють, а інформаційні технології займаються її обробкою. Наявна також ідея інформаційного суспільства, до якого, можна вважати, прямує людство. Базисною основою подібного суспільства було б, можливо, виробництво і споживання інформації.

Термін «інформація» досить байдужий до істинності змісту. Інформація може бути правдивою – а може бути відвертою брехнею. Від даних інформація відрізняється доступністю для отримувача. Інформація також може бути товаром, тобто може продаватися, як будь-який інший товар. Цим активно користуються розвідувальні служби, які здійснюють збір інформації про потенційного або наявного супротивника.

Так, наприклад, спеціалістів з теорії зв'язку цікавить передача інформації від джерела до отримувача без спотворень, фахівця з комп'ютерних наук – процеси запису, зчитування, зберігання і обробки, а бабусю-пліткарку – розповідь сусідкам про те, що пані з другого поверху гуляє з трьома хлопцями одночасно.

Нас будуть скоріш цікавити такі позначення інформації:

- Документовані або публічно оголошені відомості про події та явища, що відбуваються у суспільстві, державі та навколишньому природному середовищі (Закон України «Про інформацію») [1];
- Розпізнаний системою сигнал, або комплекс сигналів (образ), який зменшує кількість варіантів вибору нею чергової дії (команди);
- Комунікація та зв'язок, в процесі якого усувається невизначеність (інформаційна ентропія) (теорія зв'язку, Клод Шеннон);
- Позначення змісту, отриманого з зовнішнього світу у ході нашого пристосування до нього і пристосування до нього наших почуттів (Норберт Вінер);
- Ймовірність вибору (Аківа та Ісаак Яглом);
- Міра упорядкування систем (Леон Бріллюен);
- Ступінь свободи матеріальних об'єктів (Олексій Андрійович Борисенко).

Ці підходи такі різноманітні на перший погляд є різними аспектами складного та багатопланового явища, яким є інформаційна реальність. Існують однак і інші визначення судження «інформація». Вони переважно можуть бути віднесені до однієї з двох концепцій – атрибутивної та функціональної. Атрибутивна концепція інформації наголошує на тому, що інформація є атрибутом (невід’ємною властивістю) об’єктів. Функціонально-кібернетична концепція вважає, що головним в інформації є та функція, яку вона виконує. Цікавою, на мій погляд, є функція, яку відіграє інформація, закладена, наприклад, у ДНК розвитку біологічних організмів та інших систем, в яких можлива самоорганізація. Так мені дуже цікавий факт щодо того, яка різниця в ДНК наприклад у людини та мавпи - кілька відсотків, а у людини та зеленого листя – десь 30 відсотків.

7.2 Властивості інформації (1)

В зв’язку з великою кількістю визначень поняття інформації існує досить велика кількість (кілька десятків) її властивостей.

Нас будуть цікавити тільки деякі з них. А саме:

- Цінність – визначається корисністю та здатністю її забезпечити суб’єкта необхідними умовами для досягнення ним поставленої мети;
- Достовірність – здатність інформації об’єктивно відбивати процеси та явища, що відбуваються в навколишньому світі. Як правило, це інформація, що несе безпомилкові та істинні дані. Під безпомилковістю будемо розуміти дані, які не мають прихованих, або випадкових помилок. Випадкові помилки в даних обумовлені, як правило, ненавмисними спотвореннями змісту людиною, чи збоями технічних засобів при переробці даних в інформаційній системі. Під істинними даними будемо розуміти дані, зміст яких неможливо оскаржити або заперечити;
- Актуальність – здатність інформації відповідати вимогам сьогодення (поточного часу або певного часового періоду);
- Властивість недоступності – враховує технічні аспекти захисту від несанкціонованого доступу (враховує властивість конфіденційності);
- Дискретність – одиницями інформації є слова, речення, уривки тексту, а у плані змісту – поняття, висловлювання, описання фактів, гіпотези, теорії, закони.

Також за способом сприйняття інформація буває зорова, слухова, тактильна, нюхова, смакова. За формою подання - текстова, числова, графічна, звукова.

7.3 Теорія інформації. Досліджувані процеси.

Теорія інформації досліджує процеси зберігання, перетворення, передачі інформації. Тому вона тісно пов’язана з теорією ймовірності, математичною статистикою, комунікаційними системами, криптографією, корекцією помилок та іншими областями знань.

7.4 Аксиоми теорії інформації.

1. Інформація є там, де функціонують пристрої керування.
2. Інформація зберігається і передається тільки на матеріальному носії.
3. Інформація має ідеальний характер.

4. Інформація має різні форми.

7.5 Базові закони теорії інформації

Закон 1. На отримання інформації будь-яка система витрачає не менше деякої мінімальної кількості енергії.

Закон 2. Кількість інформації, яку отримує система в процесі розпізнавання після прийняття певного сигналу, дорівнює логарифму при основі m від кількості варіантів вибору, що передували розпізнаванню.

Закон 3. Що меншою є ймовірність завершення якогось випробування з певним результатом, то більше інформації для будь-якої системи несе саме цей результат, і навпаки.

Закон 4. Будь-які сигнали, отримані кібернетичною системою, впливають на цю систему.

7.6 Властивості інформації (2)

1. Вірогідність – відповідність відображуваному об'єктові або реальному стану об'єктивної дійсності при відсутності прихованих помилок у такій інформації.

2. Повнота – властивість інформації, що дозволяє характеризувати об'єкт вичерпним для споживача способом, що надає можливість на основі такої інформації ухвалювати управлінські рішення.

3. Релевантність – відповідність потребам споживача, що характеризує, наскільки інформація сприяє досягненню поставлених перед споживачем цілей і завдань.

4. Доступність – можливість одержання будь-яким споживачем.

5. Актуальність – відповідність інформації теперішньому моменту часу.

6. Коректність – властивість, що полягає в такому її зображенні, щоб інформація однозначно сприймалася всіма її споживачами.

7. Захищеність – неможливість несанкціонованого доступу й цілеспрямованого спотворення інформації.

8. Ергономічність – достатність обсягу і форми інформації для даного споживача.

7.7 Кодування інформації

Кодування є переходом від повідомлення на вході каналу зв'язку до коду повідомлення на виході. Декодування – зворотній процес. Повідомлення на вході і виході каналу зв'язку повинні збігатися. Задачу кодування можна сформулювати і в такий спосіб. Нехай є два алфавіти: алфавіт A , що складається з n символів і алфавіт B , що складається з m символів. Під алфавітним кодуванням розуміють таке відображення F , яке кожному слову з непустиї підмножини слів з алфавіту A ставить у відповідність деяке слово з алфавіту B . Слова з алфавіту B називають кодовими послідовностями або кодами. Загалом відображення F задається у вигляді деякого алгоритму і повинне задовольняти наступним вимогам:

- Взаємна однозначність, тобто можливість для кожного повідомлення однозначно побудувати його код і, обернено, по кожному коду однозначно відновити вихідне повідомлення;
- Завадостійкість, тобто можливість виявляти помилки, які можуть виникнути при передачі коду повідомлення по каналу зв'язку під впливом джерела шуму;
- Економність, тобто можливість побудови кодів мінімальної довжини для повідомлень, що зустрічаються найчастіше (реалізація ефективного стиснення).

Побудова ефективного алгоритму кодування – це пошук компромісу між другою і третьою вимогами, які суперечать одна одній, оскільки завадостійкість досягається за рахунок збільшення довжини кодових послідовностей.

Кодування – це процес переходу повідомлення на вході каналу зв'язку до коду повідомлення на виході, при цьому інформаційна цінність повідомлення повинна залишатися незмінною.

У теорії інформації традиційно виділяють кілька методів кодування.

1. Кодування дискретних джерел. Це гіпотетична модель кодування інформації «без втрат», яка проходить через канал зв'язку без шуму, стисненням інформації.
2. Кодування інформації при її передачі по каналу з шумом. Цей метод направлений на захист інформації від перешкод в каналі зв'язку.

Код буде вважатись однозначно декодованим, якщо будь яка послідовність символів з алфавіту коду (найчастіше це 0 і 1) розбивається на окремі слова. Якщо жодне кодове слово не є початком іншого, код називається префіксним і є однозначно здатним до декодування. Вимога префіксності обмежує множину довжин кодових слів і не дає можливості вибирати кодові слова надто короткими.

Важливим представником цієї групи є код Шеннона-Фано – алгоритм префіксного неоднорідного кодування. Цей метод кодування використовує надмірність повідомлення, тобто замінює коди більш частих символів коротшими двійковими послідовностями, а коди більш рідкісних символів – довгими двійковими послідовностями. При кодуванні цим методом треба визначити впорядкованість букв зі спаданням ймовірностей. Кодовим словом коду Шеннона для повідомлення з номером M є двійкова послідовність. Докладніше цей метод ми розглянемо далі.

3. Кодування із заданим критерієм якості. З врахуванням того, що інформація з аналогових джерел не може бути представлена в цифровій формі без спотворень, цей метод кодування забезпечує найкращий компроміс між якістю і витратами на передачу інформації. Він використовується в разі, коли кодування джерела здійснюється таким чином, що закодовані повідомлення відновлюються з деякою помилкою, яка є не більшою за заданого значення. Це один з актуальніших методів кодування, оскільки знаходить широке застосування для цифрової передачі аудіо- та відеоінформації.
4. Секретний зв'язок, системи захисту інформації від несанкціонованого доступу.

7.8 Кількість інформації. Ентропійний підхід.

В основі теорії інформації лежить запропонований Шенноном спосіб обчислення кількості інформації, як випадкової величини, відносно іншої випадкової величини. Для

дискретних випадкових величин X і Y , заданих законами розподілу $P(X=X_i)=p_i$, $P(Y=Y_j)=q_j$ і спільним законом розподілу $P(X=X_i, Y=Y_j)=p_{ij}$ кількість інформації в X відносно Y дорівнює

$$I(X, Y) = \sum p_{ij} \log_2(p_{ij}/(p_i q_j)).$$

Кількість інформації в повідомленні визначається тим, наскільки зменшиться невизначеність після одержання повідомлення. З цього погляду, кількість інформації, що міститься в отриманому повідомленні, є тим більшою, чим більшою була невизначеність до передачі повідомлення.

Контрольні запитання:

1. Базові закони теорії інформації
2. Властивості інформації.
3. Процеси, що досліджує теорія інформації.
4. Аксиоми теорії інформації.
5. Процеси, що досліджує теорія інформації.
6. Кількість інформації. Ентропійний підхід.

Література

1. Закон України від 02.10.1992 року № 2657-ХІІ «Про інформацію»
2. Вікіпедія, Теорія інформації.

Лекція 8.

Тема: ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ КОДУВАННЯ

Мета заняття: Засвоїти загальні положення теорії кодування.

8.1. Загальні положення

Десятична позиційна система обчислення – це спосіб кодування натуральних чисел, двійкова система обчислення – це інший спосіб кодування тих самих чисел. Римські цифри – ще один варіант кодування. Декартові координати – спосіб кодування геометричних об'єктів. Заміна імен номерами також є кодуванням, запис текстового файлу на носій – також кодування, представлення фотографії в цифровому фотоапараті у вигляді файлу – також кодування.

Тому можна визначити, що кодування – спосіб представлення об'єктів однієї природи (точок площини, чисел, слів, та інше) скінченними послідовностями об'єктів іншої множини. Оскільки елементи цієї другої скінченної множини можна нумерувати, то її можна вважати набором чисел, однак це не обов'язково.

Набори символів, котрими користуються при кодуванні, звать абетками. Послідовність символів такої абетки - називають словами.

Як ми вже обговорювали раніше, багато задач кодування направлені на пошук кодування з визначеними властивостями, оптимального в деякому змісті. Критерій оптимальності може бути різним. Це може бути, наприклад, мінімізація довжини образів об'єктів. Властивості кодування також можуть бути різними. А саме такими властивостями

може бути існування однозначного оберненого відображення (декодування), можливість виправлення помилок при декодуванні та інше.

Найбільш розповсюджений випадок – коли код $V = \{0, 1\}$ тобто двійкове кодування. Саме такий випадок ми будемо розглядати надалі.

Типова задача теорії кодування сформулюється наступним чином: при заданих алфавітах A і B і множині сповіщень S знайти таке кодування F , котре володіє визначеними властивостями (тобто задовольняє завданім обмеженням) і оптимальне в деякому змісті. Критерій оптимальності часто пов'язаний саме з мінімізацією довжини кодів. Властивості, які потребують від кодування, бувають різноманітної природи:

- Існування декодування – однак і воно потрібне не завжди (наприклад, трансляція програми на мові високого рівня в машинні команди – це кодування, яке на потребує однозначного декодування);
- Завадостійкість, чи виправлення помилок;
- Задана складність (чи простота) кодування і декодування (наприклад, у криптографії вивчають такі способи кодування, при котрих є просте кодування, але процес декодування потребує складних обчислень).

При декодуванні повідомлення не має виникати проблем з тим, яку букву представляє елемент коду. Такий код зветься кодом, що однозначно декодується.

Часто необхідно стискати дані, щоб мінімізувати об'єм пам'яті для їх зберігання чи час для передачі даних. З цієї точки зору найбільш ефективним вважають код Хаффмана. Це префіксний код.

Різновидом префіксного коду вважають так званий кома-код. При його використанні кожен символ кодується рядком з одиниць, в кінці якого стоїть 0. Тоді множина рядків коду має вигляд $(1, 10, 110, \dots)$. Але у цього коду, зрозуміло, наявний недолік: елементи коду можуть бути дуже довгими та займати надто великий об'єм пам'яті.

Але при кодуванні бувають також випадки, коли потрібні коди, здатні виявляти наявність помилок. Іноді також трапляються випадки, коли дані не можуть бути передані ще раз (наприклад, дані від віддаленого космічного корабля). Тоді потрібна додаткова інформація про дані, з метою не тільки визначення, але й виправлення помилки. Коди, які дозволяють виправляти помилки, так і зветься – коди, з виправленням помилок.

Проблема з використанням такого типу кодів полягає в тому, що вони мають включати в себе додаткову інформацію, тому вони будуть менш ефективними з точки зору мінімізації об'єму пам'яті. Крім того, вони, зрозуміло, все одно не дають повної гарантії, що помилка буде виправлена чи знайдена. Проблема складається з того, що помилка може бути багато. Зрозуміло, помилку не дуже складно виявити, якщо вона одна. Все, що ми можемо зробити – зменшити ймовірність того, що помилки залишаться невиявленими та не виправленими. Проблема полягає в тому, що чим в більшому ступеню буде зменшена ця ймовірність, тим більше інформації треба буде переслати, і тем менш ефективним буде наш код.

8.2 Приклади кодування для стискання інформації. Код Шеннона-Фано і алгоритм Хаффмана

Використовуються в досить актуальному на сьогодні випадку – при потребі стискання. Зараз ці способи широко відомі завдяки архіваторам – сервісним програмам, що дозволяють стискати файли. Їхню основу заклали К.Шеннон і Р.Фано, які

запропонували конструкцію кода змінної довжини. В цьому коді у кожного символу своя довжина кодової послідовності, як у азбуці Морзе, де кінець кодової послідовності визначається додатковим символом - паузою. Але на відміну від такого підходу автори запропонували таке обмеження на код - ніяка кодова послідовність не може бути початком іншої кодової послідовності. Ця властивість називається властивістю префіксу, а код який володіє такою властивістю – називається префіксним кодом.

Розглянемо деякі приклади.

Приклад 1.

Розглянемо алфавіти $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $B=\{0,1\}$ і схему кодування

$$\sigma=\{0\rightarrow 0, 1\rightarrow 1, 2\rightarrow 10, 3\rightarrow 11, 4\rightarrow 100, 5\rightarrow 101, 6\rightarrow 110, 7\rightarrow 111, 8\rightarrow 1000, 9\rightarrow 1001\}.$$

Кодування не буде однозначним, оскільки $F(333)=111111$, та $F(77)=111111$. Це означає, що декодування неможливе.

Приклад 2.

Розглянемо алфавіти $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $B=\{0,1\}$. У цьому випадку при схемі кодування

$$\sigma=\{0\rightarrow 0000, 1\rightarrow 0001, 2\rightarrow 0010, 3\rightarrow 0011, 4\rightarrow 0100, 5\rightarrow 0101, 6\rightarrow 0110, 7\rightarrow 0111, 8\rightarrow 1000, 9\rightarrow 1001\},$$

яка відома як двійково - десятичне кодування, буде однозначне декодування.

На практиці важливо, щоб коди мали по можливості мінімальну довжину (ми пам'ятаємо, що економія – це важливо!). На практиці це означає, що вважаючи, що символи при кодуванні з'являються в тексті незалежно, ми маємо мету зменшувати середнє число бітів на один символ.

Шеннон і Фано запропонували будувати код, близький до оптимального, наступним чином. По-перше, розділити всі символи на дві групи з приблизно рівними частотами появи, по-друге, коди першої групи починати з нуля, а коди другої групи – з одиниці. Надалі в межах кожної групи робити те ж саме, поки в кожній групі не залишиться тільки по одному символу.

Приклад 3.

Коди, побудовані Фано для заданого розподілу ймовірностей ($n=7$).

| p_i | Перший символ | Другий символ | Третій символ | Код | l_i |
|-------|---------------|---------------|---------------|-----|-------|
| 0,20 | 0 | 0 | | 00 | 2 |
| 0,20 | 0 | 1 | 0 | 010 | 3 |
| 0,19 | 0 | 1 | 1 | 011 | 3 |
| 0,12 | 1 | 0 | 0 | 100 | 3 |
| 0,11 | 1 | 0 | 1 | 101 | 3 |
| 0,09 | 1 | 1 | 0 | 110 | 3 |
| 0,09 | 1 | 1 | 1 | 111 | 3 |

Вартість кодування буде

$$\sigma = 2 * 0.2 + 3 * (0.2 + 0.19 + 0.12 + 0.11 + 0.09 + 0.09) = 2.8.$$

В результаті в повідомленні, яке записане з використанням 7 символів з наведеними ймовірностями, середня довжина коду одного символу може бути 2.8 біта.

Елегантний алгоритм для точного вирішення цієї задачі запропонував Д.Хаффмен. Якщо оминати строго доведені автором лемми, сам алгоритм може бути описаний кількома рядками.

А саме:

Якщо в алфавіті два символи, то їх треба закодувати 0 і 1. Якщо більше – треба об'єднати два самих малоімовірних символи в новий символ, Вирішити задачу, яку отримали, і знов розділити цей новий символ приписавши 0 і 1 до його кодової послідовності.

Приклад 4.

Нехай алфавіт складається з п'яти символів - a, b, c, d, e. Ймовірності цих символів відповідно дорівнюють

0.37(a), 0.22(b), 0.16(c), 0.14(d), 0.11(e).

Якщо об'єднати **d** і **e** в один символ, можна отримати:

старий список **0.16(c), 0.22(b), 0.37(a);**

новий список **0.25(de).**

На наступному кроці об'єднуємо **b** і **c**:

старий список **0.37(a);**

новий список **0.25(de), 0.38(bc).**

Надалі об'єднуємо **a** і **de**:

старий список - порожній;

новий список **0.62(ade), 0.38(bc).**

Далі позначимо для **ade** код 0, а для **bc** код 1 та виконаємо «зворотне перетворення». Розділимо символи **ade** на **a** і **de** відповідно з кодами

00 і 01. Далі символ **bc** на **b** і **c** з кодами 10 і 11. І на останок, розціпивши **de**, отримуємо для вихідного алфавіту

00(a), 10 (b), 11(c), 010(d), 011(e).

При вирішенні подібних задач треба звертати увагу, що в тексті, який ми піддаємо кодуванню, символи (в тому числі об'єднані) можуть мати рівні ймовірності, а через це може існувати кілька оптимальних кодових дерев. У всіх цих дерев математичне очікування числа бітів на один символ буде однаковим.

Приклад 5.

Нехай алфавіт складається з семи символів. Процес кодування по Хаффману можна представити у вигляді алгоритму побудови «кодового» дерева

Наступним чином. Об'єднуємо пари символів з найменшими ймовірностями у вузол. Цьому вузлу надаємо ймовірність, яка дорівнює сумі ймовірностей вихідних символів. На наступному кроці об'єднуємо символи чи вузли з мінімальними ймовірностями, котрі будуть створювати наступний вузол. Йому надаємо ймовірність, яка дорівнює сумі ймовірностей складових. Процес повторюється доти, поки не зійдеться в один вузол з одиничною сумарною ймовірністю. Цей вузол буде верхівкою дерева. Для нашого прикладу таке дерево можна побачити на наступному рисунку 7.1.

Надалі, починаючи з вершини, надаємо верхнім ребрам нулі, а нижнім – одиниці (чи навпаки). Значення коду символу формується у вигляді послідовності кодів гілок (0 і 1) починаючи з верхівки дерева.

Отримані коди наведені справа від дерева.

Вартість кодування в прикладі буде дорівнювати

$$0.20*2+0.20*2+0.19*3+0.12*3+0.11*3+0.09*4+0.09*4=2.78,$$

Що в деякій мірі краще, ніж в кодуванні, яке ми отримали за допомоги алгоритму Фано в попередньому прикладі.

Метод кодування Хаффмана належить до групи методів стискання даних без втрат інформації. Він використовується також при запису графічних зображень в файли і є компонентом алгоритмів стискання даних JPEG і MPEG. Особливістю методу є використання кодів змінної довжини, при чому символам з найбільшою ймовірністю надаються найбільш короткі кодові слова, а менш ймовірним – довші. Завдяки такій стратегії код Хаффмана при алфавітному кодуванні дає мінімально можливу середню довжину кодової послідовності.

Приклад 7

Закодуємо слово abracadabra з допомогою алгоритму Хаффмана.

Алфавіт буде $A=\{a,b,r,c,d\}$, а частота появ символів алфавіту в слові, що підлягає кодуванню буде $W=\{5,2,2,1,1\}$. У дереві Хаффмана буде 5 вузлів

| Вузол | a | b | R | c | d |
|-------|---|---|---|---|---|
| Вага | 5 | 2 | 2 | 1 | 1 |

За рекомендаціями алгоритму візьмемо два символи з найменшою частотою – це c та d. Сформуємо з них новий вузол cd з вагою 2 та додаймо його до списку вузлів:

| Вузол | a | b | R | cd |
|-------|---|---|---|----|
| Вага | 5 | 2 | 2 | 2 |

Надалі знов об'єднаємо в один вузол два мінімальних по вазі вузла r та cd:

| Вузол | a | Rcd | b |
|-------|---|-----|---|
| Вага | 5 | 4 | 2 |

Та ще раз повторимо операцію для вузлів gcd та b :

| | | |
|-------|--------|-----|
| Вузол | $brcd$ | a |
| Вага | 6 | 5 |

На останньому кроці об'єднаємо два вузли $brcd$ та a :

| | |
|-------|---------|
| Вузол | $abrcd$ |
| вага | 11 |

Залишився 1 вузол, тобто досягнуто корень дерева Хаффмана. Тепер для кожного символу обирається кодове слово (бінарна послідовність, яка позначає шлях по дереву до цього символу від кореня):

| Символ | a | b | r | c | d |
|--------|-----|------|-------|--------|--------|
| Вага | 0 | 11 | 101 | 1000 | 1001 |

Таким чином закодоване слово $abracadabra$ буде виглядати як

01110101000010010111010 . Довжина закодованого слова 23 біти.

Контрольні запитання:

1. Приклади кодування для стискування інформації
2. Код Шеннона-Фано.
3. Код Хаффмана

Література

1. Закон України від 02.10.1992 року № 2657-ХІІ «Про інформацію»
2. Вікіпедія, Теорія інформації
3. Теорія інформації та обробка сигналів 1: навч. посіб. для студентів спеціальності 171 «Електроніка» освітньої програми «Електронні компоненти і системи»/ КПІ ім. Ігоря Сікорського: уклад.: Ю. С. Ямненко, К. С. Клен. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 120 с.

Лекція 9.

Тема: БАЗОВІ МЕТОДИ ПОКРАЩЕННЯ ЗОБРАЖЕНЬ

Мета заняття: Засвоїти загальні положення щодо базових методів покращення зображень.

Просторові методи покращення зображень

Головна мета цього покращення складається з такої обробки зображень, щоб результат був підходящим з точки зору конкретного використання.

Тобто методи, які будуть розглядатися далі проблемно орієнтовані.

Множина підходів до покращення зображень можна поділити на дві категорії: методи обробки в **просторовій** області (просторові методи) і методи обробки в **частотній** області (частотні методи). Просторові методи об'єднують підходи, засновані на прямому маніпулюванні пікселями зображення. Частотні методи засновані на модифікації сигналу, який формується шляхом використання щодо зображення перетворення Фур'є. Зрозуміло, що на практиці використовуються і різноманітні комбінації методів з цих категорій.

- Загальної теорії покращення зображень на сьогодні не існує. Коли зображення оброблюється для візуальної інтерпретації, споживач є суддею того, наскільки добре діє конкретний метод. Коли ж метою є обробка зображення для машинного сприйняття, кращим буде саме той метод обробки, зображень, який дасть найбільш точні результати машинного розпізнавання.

Просторова область – це множина пікселів, з яких складається зображення. Просторові методи – це методи і процедури, які оперують безпосередньо значеннями цих пікселів.

Визначення просторової області

Просторова область – це множина пікселів, з яких складається зображення. Просторові методи – це методи і процедури, які оперують безпосередньо значеннями цих пікселів. Процеси просторової обробки описуються рівнянням

$$g(x,y)=T[f(x,y)]$$

де $f(x,y)$ - зображення на вході, $g(x,y)$ – зображення після обробки; $T[]$ – оператор над $f(x,y)$ ((він визначений в деякому околі точки (x,y) , а також може оперувати над послідовністю зображень).

Головний підхід при визначенні околу навкруги точки (x,y)

Головний підхід при визначенні околу навкруги точки (x,y) – складається з використання квадратної (чи прямокутної) області – підмножини зображення, центрованою в точці (x,y) .

Центр даної підмножини переміщується від пікселю до пікселю, починаючи, наприклад, з верхнього лівого кута.

Оператор T виконується в кожній точці (x,y) , наслідком є вихідне значення для даної точки.

Процес використовує тільки внутрішні пікселі області зображення, яка обмежена деяким околom. Квадратні та прямокутні масиви використовуються найчастіше.

Визначення оператора T

Простіша форма оператору T досягається у випадку, коли окіл має розміри 1×1 (тобто 1 піксель). У цьому випадку залежить тільки від значення g у точці (x, y) . T у цьому випадку стає функцією **градаційного** перетворення (так званою функцією перетворення інтенсивностей) вигляду

$$s = T(g) \quad (8.1)$$

де g і s - це змінні, які визначають відповідно значення інтенсивностей зображення $f(x, y)$ і $g(x, y)$ у кожній точці (x, y) .

До таких перетворень відносять, наприклад, так звану порогову функцію.

Збільшення розмірів околу приводить до більшої гнучкості.

Принцип такої обробки полягає в тому, що для знаходження значення s в деякій точці (x, y) використовують значення функції $g(x, y)$ в деякій околі заздалегідь заданої форми, навкруги точки (x, y) .

Один з основних підходів при цьому базується на використанні так званих масок (фільтрів, ядер, шаблонів чи вікон).

Найчастіше маска являє собою невеликий (наприклад 3×3) масив. Значення коефіцієнтів маски визначають сутність процесу такої обробки, наприклад, підвищення різкості зображення. Методи покращення, які базуються на такому підході, часто відносять до обробки з маскою або фільтрації по масці.

Деякі основні градаційні перетворення

Градаційні перетворення відносяться до простіших методів перетворення та поліпшення зображень. Ці градаційні перетворення пов'язані з виразом $s = T(g)$

де T відображає значення пікселя g в значення пікселя s .

Логарифмічне перетворення

Загальний вигляд логарифмічного перетворення виражається формулою

$$s = C \log(1 + r), \quad (8.2)$$

де C - константа, $r > 0$.

Форма логарифмічної кривої показує, що дане перетворення відображує вузький діапазон малих значень яскравості на вихідному зображенні в більш широкий діапазон вихідних значень.

Найчастіше цей тип перетворення використовують для розтягнення діапазону темних пікселів на зображенні з одночасним стисканням діапазону значень яскравих пікселів.

Будь-яка крива, яка близька до логарифмічної функції, буде здійснювати таке розтягнення/стискання діапазонів яскравості на зображенні. Для цього також досить часто використовують ступеневі перетворення. Однак логарифмічна функція має важливу особливість, яка дозволяє стискати динамічний діапазон зображень, які мають великі варіації в значеннях пікселів (наприклад, спектр Фур'є, який трактується як зображення).

Ступеневі перетворення

Загальний вигляд ступеневого перетворення виражається формулою

$$s=cr^\gamma,$$

де c і γ – додатні константи.

Як і у випадку логарифмічного перетворення, криві ступеневих залежностей при малих відображують вузький діапазон малих значень на вході в широкий діапазон значень на виході. (Зрозуміло, що для великих значень на вході буде справедливим зворотне твердження). Однак, на відміну від логарифмічних функцій, тут виникає ціле сімейство кривих для можливих перетворень (при зміні γ).

Амплітудна характеристика багатьох пристроїв, які використовуються для введення, друку, візуалізації зображень, відповідає ступеневому закону. Процедура, яка використовується для корегування такої ступеневої залежності, називається гамма-корекцією. Вона використовується для моніторів, при скануванні та для пристроїв друку. Якщо цього не робити, зображення можуть виглядати або як занадто білі, або занадто темні. Деякі комп'ютерні системи включають до свого складу вбудовану гамма-корекцію.

Аналіз гістограм

Гістограмою цифрового зображення з рівнями яскравості в діапазоні $[0, L-1]$ називається дискретна функція $h(r_k)=n_k$,

де r_k – k -ий рівень яскравості, а n_k – число пікселів на зображенні, які мають яскравість r_k .

Загальною практикою є нормалізація гістограми шляхом ділення кожного з її значень на загальне число пікселів у зображенні, яке можна позначити як n .

У такому випадку значення нормалізованої гістограми будуть $p(r_k)=n_k/n$ для $k=0,1,\dots,L-1$. Маємо на увазі, що $p(r_k)$ – це оцінка ймовірності появи пікселя зі значенням яскравості r_k . При цьому сума всіх значень нормалізованої гістограми дорівнює одиниці.

Гістограми є основою численних методів просторової обробки. Зміна вигляду гістограми (гістограмна обробка) успішно використовується для покращення зображень, отримання корисної статистики про зображення, для сегментації та стискання зображень. Це пов'язано в значному ступені з тим, що гістограми достатньо прості для програмного обчислення, так і для апаратної реалізації.

Наприклад, розглянемо ілюстративний приклад (з книги авторів Гонсалеса і Вудса «Цифрова обробка зображень», Рис. 3.15, стор. 151).

На рисунку наведені чотири різних по яскравості (темний, світлий, високо контрастний, низько контрастний) та однакових за сюжетом зображень пилку рослини. Поряд з зображеннями наведені відповідні їм гістограми.

Можна побачити, що на гістограмі темного зображення більшість стовпчиків гістограми (i , зрозуміло, пікселів зображення) сконцентровані в області низьких (темних) значень діапазону яскравості. Аналогічно, значущі рівні гістограми яскравого зображення зміщені до верхньої частини діапазону. Зображення з низьким контрастом

має вузьку гістограму, яка розміщена поблизу центру діапазону яскравості. Для цього зображення (по шкалі сірого кольору) це означає бляклий, «сірий» вигляд. І для останнього (високо контрастного) зображення можна побачити, що ненульові рівні (стовпчики) гістограми покривають досить широку частину діапазону яскравості. При цьому можна побачити, що розподіл більшої частини пікселів майже рівномірний (за виключенням невеликої кількості піків).

Інтуїтивний висновок з цього аналізу – зображення, розподіл більшої частини пікселів якого майже рівномірний і займає весь діапазон можливих значень яскравості, буде виглядати високо контрастним з великою кількістю напівтонів. Важливим наслідком цього є те, що на основі інформації гістограми вихідного зображення можна побудувати функцію перетворення, котра може дозволити автоматично досягати такого ефекту. До подібного роду перетворень належать глобальні процедури еквалізації гістограм та приведення гістограм, локальні процедури покращення, наприклад – використання гістограмних статистик.

Основи просторової фільтрації

Деякі локальні перетворення оперують одночасно як зі значеннями пікселів в околі, так і з відповідними до них значеннями деякої матриці, яка має такі ж розміри, як і окіл. Таку маску називають фільтром, ядром, шаблоном, вікном. Значення елементів матриці називають коефіцієнтами.

На цьому етапі нас будуть цікавити операції фільтрації, котрі виконуються безпосередньо над елементами зображення. Для подібних операцій використовують термін **просторова** фільтрація, на відміну вже відомої нам фільтрації в частотній області.

Процес заснований на переміщенні маски фільтра від точки до точки зображення. В кожній точці відгук фільтра обчислюється з використанням попередньо завданих зв'язків. Наприклад, нехай елементи області зображення попід маскою

Наприклад, нехай елементи області зображення попід маскою

$$\begin{array}{ccc} f(x-1, y-1) & f(x-1, y) & f(x-1, y+1) \\ f(x, y-1) & f(x, y) & f(x, y+1) \\ f(x+1, y-1) & f(x+1, y) & f(x+1, y+1) \end{array}$$

а коефіцієнти маски з відносними значеннями координат

$$\begin{array}{ccc} w(-1,-1) & w(-1,0) & w(-1,1) \\ w(0,-1) & w(0,0) & w(0,1) \\ w(1,-1) & w(1,0) & w(1,1) \end{array}$$

У випадку лінійної просторової фільтрації відгук задається сумою добутків коефіцієнтів фільтру на відповідні значення пікселів в області, яка покрита маскою

фільтру. Так, для маски, яку ми розглядаємо в прикладі, результат (відгук) R лінійної фільтрації в точці зображення складе

$$R = w(-1,-1)f(x-1, y-1) + w(-1,0)f(x-1, y) + \dots \\ + w(0,0)f(x, y) + \dots + w(1,0)f(x+1, y) + \\ + w(1,1)f(x+1, y+1)$$

Відмітимо, що коефіцієнт $w(0,0)$ стоїть при значенні $f(x,y)$. Це вказує на той факт, що маска центрована в точці (x,y) .

В подальшому будемо розглядати маски непарних розмірів, найменшою з них буде маска розміром 3×3 .

Фільтрація зображення f , з розмірами $M \times N$, з допомогою фільтру розмірами $m \times n$ задається виразом:

$$g(x, y) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x + s, y + t),$$

де $a=(m-1)/2$ і $b=(n-1)/2$.

При фільтрації всього зображення дана формула має бути обчислена для всіх сполучень $x=0,1,2,\dots,M-1$ та $y=0,1,2,\dots,N-1$. Процедура лінійної фільтрації у такому випадку в частотній області аналогічна операції згортки. Тому таку лінійну просторову фільтрацію часто називають «згорткою маски з зображенням».

У випадку, коли користувачу цікаве тільки значення відгуку R по масці $m \times n$ в точці (x,y) , часто використовують вираз

$$R = w_1 z_1 + w_2 z_2 + \dots + w_{mn} z_{mn} = \sum_{i=1}^{mn} w_i z_i,$$

де w_i - коефіцієнти маски, z_i - значення пікселів, які відповідають цим коефіцієнтам, а mn - загальна кількість коефіцієнтів у масці.

Так, для маски розміром 3×3

$$W_1 \ W_2 \ W_3$$

$$W_4 \ W_5 \ W_6$$

$$W_7 \ W_8 \ W_9$$

відгук у точці (x,y) зображення буде

$$R = w_1 z_1 + w_2 z_2 + \dots + w_9 z_9 = \sum_{i=1}^9 w_i z_i,$$

Важливим питанням при реалізації просторової фільтрації по околу є розгляд ситуації, коли центр фільтру наближається до границь зображення. Для простоти розглянемо маску розміром $n \times n$. Коли така маска знаходиться на відстані $(n-1)/2$ елемента від границі зображення, то як мінімум одна сторона маски буде знаходитись на його краю. Коли ж центр маски наблизиться до границі, то один, або кілька рядків або стовпців маски будуть знаходитись зовні зображення. Існує кілька способів врахувати таку обставину. Простіший спосіб в тому, щоб обмежити пересування центру маски по зображенню – не ближче, ніж $(n-1)/2$ елементів від краю.

Зображення-результат після фільтрації буде за розмірами меншим, ніж оригінал, зате всі його точки будуть оброблені маскою повністю. Є підхід, який передбачає розширення зображення за його границі доданням рядків та стовпців з нулів (чи інших постійних значень) чи повторенням строк та стовпців. Після обробки додані Радки та стовпці видаляють. Це дозволяє зберегти розміри обробленого зображення такими ж, як у вихідного, однак значення елементів, які були використані для розширення будуть впливати на значення елементів зображення в аналогічній смузі, котра буде тим ширшою, чим більше розміри маски.

Контрольні запитання:

1. Логарифмічне перетворення
2. Ступеневе перетворення.
3. Приклади просторової фільтрації

Література

1. Рибальченко М.О., Єгоров О.П., Зворикін В.Б. Цифрова обробка сигналів. Навчальний посібник. – Дніпро: НМетАУ, 2018. – 79 с.
2. Основи та методи цифрової обробки сигналів: від теорії до практики: навч. посібник / уклад. : Ю.О. Ушенко, М.С. Гавриляк, М.В. Талах, В.В. Дворжак. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т
3. Campbell, S.; Chancelier J.-P., Nikoukhah R. (2006). *Modeling and Simulation in Scilab/Scicos*. New York: Springer. [ISBN 9780387278025](#).

Лекція 10.

Тема: ОСНОВИ ПРОСТОРОВОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ ДЛЯ ЗОБРАЖЕНЬ. ЗГЛАДЖУЮЧІ ПРОСТОРОВІ ФІЛЬТРИ

Мета заняття: Засвоїти загальні положення щодо базових методів просторової фільтрації.

Згладжуючі просторові фільтри для зображень

Згладжуючі фільтри використовуються для розфокусування зображень і зменшення шумів. Розфокусування може використовуватись як попередній крок обробки

зображення, наприклад, для видалення мілких деталей перед визначенням великих об'єктів, або для видалення розривів у лініях або деталях.

Для зменшення рівня шумів може використовуватись розфокусування з використанням лінійної або нелінійної фільтрації.

Вихід (відгук) простішого лінійного згладжуючого просторового фільтра є середнє значення елементів по околу, який покритий маскою фільтра. Такі фільтри також називають фільтрами низької частоти (ФНЧ).

Ідею використання таких фільтрів можна скоротити так. Заміною вихідних значень елементів зображення на середні значення по масці фільтра досягають зменшення «різких» переходів рівнів яскравості. Оскільки випадковий шум характеризується саме такими стрибками яскравості, найбільш вагомим результатом буде згладжування шуму. Однак контури, котрі зазвичай цікаві на зображенні, також характеризуються «різкими» перепадами рівнів яскравості. Тому **негативним наслідком** використання таких фільтрів буде «розмивання» контурів.

Головне використання згладжуючих просторових фільтрів – у можливості подавити «неістотні» деталі на зображенні.

Під «неістотними» деталями розуміємо тут сукупність пікселів, які є малими в порівнянні з розмірами маски фільтра.

На рисунку (рис.10.1) дві маски згладжуючих просторових фільтрів по околу 3.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

а)

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 |
| 2 | 4 | 2 |
| 1 | 2 | 1 |

б)

Рисунок 10.1. Маски згладжуючих фільтрів по околу 3: а) усереднюючий фільтр; б)

На рис. 10.1 наведені два згладжуючих фільтра по околу 3*3. Перший з них (рис.10.1,а) дає звичайне середнє значення по масці. Якщо в рівнянні

$$R = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 z_i,$$

врахувати значення коефіцієнтів маски, отримаємо середнє значення яскравості по околу 3*3. Такий просторовий фільтр зветься однорідним усереднюючим фільтром.

Друга маска з рис.10.1, б дає так зване зважене середнє. В ній значення коефіцієнтів помножуються на різні коефіцієнти. Це дозволяє присвоїти їм такі вагові коефіцієнти, які дозволяють надати різні «важливості» (ваги) в порівнянні з іншими. Так у масці рис. 10.1,б коефіцієнт у центрі маски має найбільше значення (вагу), тим самим він надає відповідному елементу більшу важливість при обчисленні середнього. Значення інших коефіцієнтів зменшуються при віддаленні від центру маски.

Такий підхід направлений на те, щоб зменшити ефект «розфокусування» при згладжуванні.

Фільтри на порядкових статистиках

Ці фільтри належать до класу **нелінійних просторових фільтрів**.

Відгук такого фільтру визначається попереднім упорядкуванням значень пікселів, які покриті маскою фільтру, і наступним вибором значення, яке знаходиться на деякій позиції упорядкованої послідовності.

Фільтрація в такому випадку зводиться до заміщення вихідного значення пікселю (в центрі маски) на обчислене значення відгуку фільтру.

Найбільш з цієї категорії фільтрів відомий **медіанний фільтр**.

Цей фільтр замінює значення пікселя (в центрі маски) на значення медіани розподілу інтенсивностей усіх пікселів в околі (включаючи вихідний).

Медіанні фільтри доволі популярні тому, що для деяких типів випадкових шумів вони демонструють відмінні можливості пригнічення шумів. При цьому ефект розфокусування значно менший, ніж у лінійних згладжуючих фільтрів аналогічних розмірів.

Наприклад, медіанні фільтри ефективні при фільтрації імпульсних шумів (іноді їх звать «сіть та перець»).

Медіана набору чисел – це таке число E, що половина чисел з набору менше чи дорівнюють E, а друга половина - більша, або дорівнює йому.

Щоб виконати **медіанну фільтрацію** для елемента зображення необхідно:

- упорядкувати по зростанню значення пікселів в околі;
- знайти значення медіани;
- присвоїти отримане значення елементу, який обробляється.

Так, наприклад, околу 3*3 елементів медіаною буде п'яте значення по величині, для околу 5*5 – тринадцяте значення, і так далі.

Якщо кілька елементів в околі мають однакові значення, ці значення будуть груповані. Наприклад, нехай в околі 3*3 елементи мають наступні значення (**10,20,20, 20, 15,20,20,25,100**). Після упорядкування вони будуть розташовані наступним чином (**10,15, 20,20, 20, 20, 20,25,100**), тобто медіана в цьому прикладі – **20**.

Головна мета **підвищення різкості** складається з того, щоб підкреслити маленькі деталі зображення чи покращити ті деталі, котрі розфокусовані внаслідок помилок або недосконалості самого методу зйомки.

Підвищення різкості може бути досягнуто за рахунок використання операторів диференціювання.

Таким чином диференціювання зображення дозволяє:

- **посилити перепади та інші розриви (шуми)**
- **не підкреслювати області з повільною зміною рівнів яскравості.**

Фільтри підвищення різкості засновані на **першій і другій похідних**. Розглядати будемо одновірний випадок. А саме – поведінку цих похідних на областях постійної яскравості (пласкі області), на початку та в кінці розривів, а також на протязі фрагментів більш повільної зміни яскравості. Похідні будемо розглядати в термінах різниць.

Перша похідна має:

- дорівнювати нулю на пласких ділянках (з постійним рівнем яскравості);
- бути ненульовою на початку та наприкінці сходинки або схилу яскравості;
- бути ненульовою на схилі яскравості.

Друга похідна має:

- дорівнювати нулю на пласких ділянках (з постійним рівнем яскравості);
- бути ненульовою на початку та наприкінці сходинки або схилу яскравості;
- бути нульовою на схилі постійної крутизни.

Перша похідна одновірної функції визначається як різниця значень сусідніх елементів:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f(x+1) - f(x).$$

Друга похідна одновірної функції визначається як різниця сусідніх значень першої похідної:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f(x+1) + f(x-1) - 2f(x)$$

Наприклад, проаналізуємо рядок зображення з інтенсивностями, та наведемо відповідні значення першої та другої похідних.

5 5 4 3 2 1 0 0 0 6 0 0 0 0 1 3 1 0 0 0 0 7 7 7 7
-1 -1 -1 -1 0 0 6 -6 0 0 0 1 2 -2 -1 0 0 0 7 0 0 0
-1 0 0 0 1 0 6 -12 6 0 0 1 1 -4 1 1 0 0 7 -7 0 0

Розглянемо поведінку першої і другої похідних при переміщенні вздовж профілю зліва направо.

Можна відмітити, що перша похідна не дорівнює нулю на протязі всього схилу, в той час, як друга похідна не дорівнює нулю лише на початку та в кінці схилу.

Оскільки границі об'єктів на зображенні відповідають саме такому типу переходів, можна зробити висновок, що перша похідна дає в результаті «товсті» контури, а друга – значно тонкіші.

Наступною при аналізі буде окрема точка. На ній (і поряд) відгук другої похідної значно сильніший відгуку першої похідної. Тому при вирішенні задачі **підкреслювання різких переходів друга похідна в порівнянні з першою вважається значно більш дієвою**. Але й **підсилення деталей (уключаючи шум) буде значно сильнішим, ніж при дії першої похідної**.

Тонка лінія в прикладі також являє собою мініатюрну деталь. На ній відгук другої похідної також більший.

На сходинці відгук обох похідних співпадає. Можна побачити, що значення другої похідної змінюються від додатних до від'ємних. На зображенні це буде мати вигляд подвійної лінії (тобто буде давати ефект завади).

Можна зробити такі висновки:

- **перша похідна** звичайно дає в результаті **більш товсті контури**;
- **друга похідна** дає **більший відгук на маленькі деталі**;
- відгук на сходинку у першої похідної більший, ніж у другої;
- **на нахилах друга похідна дає подвійний відгук**;
- при однакових амплітудах зміни сигналу друга похідна дає більший відгук на лінії, ніж на сходинці, а на окремій точці – відгук сильніший, ніж на лінії.

Контрольні запитання:

1. Медіанні фільтри
2. Фільтри підвищення різкості.
3. Вплив обробки з першою і другою похідними.

Література

1. Рибальченко М.О., Єгоров О.П., Зворикін В. Б. Цифрова обробка сигналів. Навчальний посібник. – Дніпро: НМетАУ, 2018. – 79 с.

2. Основи та методи цифрової обробки сигналів: від теорії до практики: навч. посібник / уклад. : Ю.О. Ушенко, М.С. Гавриляк, М.В. Талах, В.В. Дворжак. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т.

3. Gonzales R.C., Woods R.E. Digital image processing. – Pearson Education, Inc, publishing as Prentis Holl. – 2017. – 1192 p.

Лекція 11.

Тема: ПРОСТОРОВІ ФІЛЬТРИ ПІДВИЩЕННЯ РІЗКОСТІ

Мета заняття: Засвоїти загальні положення щодо просторових фільтрів підвищення різкості.

Просторові фільтри підвищення різкості

При обробці зображень перші похідні реалізуються через модуль градієнту. Для функції $f(x,y)$ градієнт у точці (x,y) визначається як двомірний вектор-стовпець (11.1)

$$\nabla \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_x \\ \mathbf{G}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{df}{dx} \\ \frac{df}{dy} \end{bmatrix}$$

Модуль такого вектора визначається наступним чином (11.2)

$$\nabla f = |\nabla \mathbf{f}| = \left[\mathbf{G}_x^2 + \mathbf{G}_y^2 \right] = \left[\left(\frac{df}{dx} \right)^2 + \left(\frac{df}{dy} \right)^2 \right]$$

Компоненти вектора градієнта є лінійними операторами, але **модуль** вектора **не** буде **лінійним** оператором.

Модуль вектора не буде лінійним оператором, тому що він виражається через оператори зведення в ступінь та визначення квадратного кореня. З іншого боку, приватні похідні в попередньому рівнянні (11.1) **не є інваріантними до повороту**, але модуль вектору градієнту таким буде (**інваріантними до повороту**).

Обсяг обчислень, який необхідний для обробки всього зображення оператором (11.2), досить великий. Тому часто на практиці приблизне значення модуля градієнту отримують як суму модулів окремих компонентів (11.3),

$$\nabla f = \left| \mathbf{G}_x + \mathbf{G}_y \right|$$

Це рівняння (11.3) простіше при обчисленні, зберігає відносні зміни у рівнях яскравостей, але властивість **ізотропності зникає**.

При подальших обчисленнях для позначення точок околу 3*3 будемо використовувати такі позначення – в масках центральна точка z_5 буде позначати $f(x,y)$, z_1 буде позначати $f(x-1,y-1)$, і так далі.

Можна також відмітити, що найпростішими наближеннями першої похідної є такі: $G_x = (z_8 - z_5)$ та $G_y = (z_6 - z_5)$. Ще існують такі визначення (вони запропоновані Робертсом) $G_x = (z_9 - z_5)$ та $G_y = (z_8 - z_6)$.

Якщо базовим обрати рівняння (11.2), тоді градієнт буде обчислюватись по наступній формулі (11.4)

$$\nabla f = \left[(z_9 - z_5)^2 + (z_8 - z_6)^2 \right]^{1/2}$$

| | | |
|-------|-------|-------|
| Z_1 | Z_2 | Z_3 |
| Z_4 | Z_5 | Z_6 |
| Z_7 | Z_8 | Z_1 |

Рисунок 11.1. Маска області зображення розміром 3*3. Приклади масок для обчислення градієнту в точці, яка помічена наведемо для ілюстрації.

| | | |
|----|---|---|
| -1 | 0 | 1 |
| -2 | 0 | 2 |
| -1 | 0 | 1 |

а)

| | | |
|----|----|----|
| -1 | -2 | -1 |
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | -2 | 1 |

б)

Рисунок 11.2. Приклади масок для обчислення градієнту в точці, яка помічена.

Якщо використовувати абсолютні значення, тоді можна отримати наступне наближення до значення градієнту:

$$\nabla f = |z_9 - z_5| + |z_8 - z_6|.$$

Це рівняння може бути реалізоване за допомоги двох масок розміром 2*2, які наведені вище. Ці маски зуть перехресним градієнтом оператора Робертса.

Однак, оскільки маски парного розміру використовувати незручно, наближенням по масці 3*3 буде вираз

$$\nabla f = |(z_7 + 2z_8 + z_9) - (z_1 + 2z_2 + z_3)| + |(z_3 + 2z_6 + z_9) - (z_1 + 2z_4 + z_7)|.$$

Різниця між значущими значеннями пікселів у третьому і першому рядку околу 3*3 наближає значення похідної по напрямку X, а різниця між значущими значеннями пікселів у третьому і першому стовпцю околу 3*3 наближає значення похідної по напрямку Y.

Ці **маски** розміром 3*3 називають **оператором Собела**. Використання вагових коефіцієнтів 2 у цих масках засноване на потребі надати центральним пікселям більшої значущості та досягнути більшого згладжування.

Можна також відмітити, що суми коефіцієнтів кожної з масок дорівнюють нулю. Тобто **на ділянках зображення з постійним рівнем яскравості відгук буд якого з наведених операторів буде дорівнювати нулю, що властиве для першої похідної.**

Градієнт часто використовують у технічному контролі для того, щоб допомогти людині визначити дефекти, або (частіше) для попередньої обробки в автоматизованому контролі.

Так, наприклад, можна розглянути обробку контактної лінзи, яка освітлена спеціальною установкою для підкреслювання дефектів. У цьому прикладі на краях лінзи можна побачити дефекти. Після обробки градієнтом (за допомогою масок оператора Собела) видалені зміни яскравості (тим самим полегшена задача автоматичного контролю).

Контрольні запитання:

1. Просторові фільтри підвищення різкості.
2. Оператор Робертса.
3. Оператор Собела.

Література

1. Рибальченко М.О., Єгоров О.П., Зворикін В. Б. Цифрова обробка сигналів. Навчальний посібник. – Дніпро: НМетАУ, 2018. – 79 с.
2. Основи та методи цифрової обробки сигналів: від теорії до практики: навч. посібник / уклад. : Ю.О. Ушенко, М.С. Гавриляк, М.В. Талах, В.В. Дворжак. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т.
3. Gonzales R.C., Woods R.E. Digital image processing. – Pearson Education, Inc, publishing as Prentis Holl. – 2017. – 1192 p.

Лекція 12.

Тема: МОДЕЛЬ ПРОЦЕСУ СПОТВОРЕННЯ/ВІДТВОРЕННЯ ЗОБРАЖЕНЬ

Мета заняття: Засвоїти загальні положення щодо моделі процесу спотворення/відтворення зображень.

Відтворення зображень. Базові положення

Кінцевою метою **відтворення** зображень є **підвищення якості зображення в деякому визначеному змісті.**

Такий процес має носити об'єктивний характер. В рамках процесу використовують апріорну інформацію про явище, яке спричинило погіршення зображення. Тобто методи відтворення збудовані на моделюванні процесів спотворення і використанні зворотних процедур для відтворення зображень.

Задачу відтворення будемо розглядати лише з моменту отримання спотвореного цифрового зображення, тому питання, які торкаються природи спотворень, які вносяться чутливими елементами, цифровими перетворювачами та утворюючими пристроями заслуговують значних окремих уточнень та полягають за межами поточного обговорення.

Модель процесу спотворення/відтворення зображень

Прийнята модель процесу спотворення передбачає дію деякого оператора H на вихідне зображення $f(x,y)$.

Такий підхід після додання адитивного шуму дає спотворене зображення $g(x,y)$.

Задача відтворення складається з побудови деякого наближення до $f(x,y)$ по спотвореному зображенню $g(x,y)$. Для цього потрібна деяка інформація відносно оператора спотворення H , та інформація щодо спотворюючого шуму. При цьому, як правило використовують фільтри, які мають відновлювати зображення.

Будемо вважати, що спотворене зображення в просторовій області можна представити (12.1)

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + \eta(x, y),$$

де $h(x, y)$ - функція, яка визначає оператор спотворення в просторовій області, а символ $*$ - використовується для визначення процедури згортання.

Оскільки відомо, що процедура згортання в просторовій області еквівалентна процедурі помноження в частотній області, тому рівність (12.1) може для частотної області бути (12.2)

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v)$$

де визначені великими літерами функції суть Фур'є образи відповідних функцій в (12.1).

Спочатку будемо вважати, що H – оператор тотожності, і тому при обробці треба подолати лише проблеми, пов'язані з наслідками спотворення тільки наявністю шуму.

Моделі шуму

Основні джерела шуму на цифровому зображенні – це сам процес його отримання (оцифрування), а також процес передачі. Робота сенсорів залежить від різних факторів, таких як зовнішні умови в процесі знімання відео та якість сенсорів. Наприклад, у процесі отримання зображення з допомогою фотокамери з ПЗЗ матрицею (ПЗЗ – прилад з зарядовим зв'язком), основними факторами, які впливають на величину шуму, є рівень освітленості і температура сенсорів.

При передаванні зображення можуть бути спотворені завадами, які виникають у каналах зв'язку. Наприклад, при передаванні зображення з використанням зв'язку без проводів, воно може бути спотворене внаслідок розряду блискавки, чи інших збурень в атмосфері.

Під частотними властивостями шуму будемо розуміти властивості спектру шуму в змісті перетворення Фур'є. Наприклад, шум, спектр якого є постійною величиною, називається **білим шумом**. Походження терміну пов'язане з властивостями білого світла, в котрому є практично всі частоти спектру, який ми бачимо, в рівних пропорціях. Фур'є спектр такої функції також є постійною величиною.

За виключенням періодичного в просторі шуму, будемо спочатку вважати, що шум **не залежить від просторових координат і не корелює з зображенням**.

Функції щільності розподілу імовірностей для деяких важливих типів шуму

В цій главі буде розглядатись поведінка шуму в просторовій області, яке основане на статистичних властивостях значень компоненти яскравості в моделі (рис.5.1). Ці значення яскравості розглядаються як випадкові величини, які характеризуються функцією щільності розподілу імовірностей.

Шум Гауса

Математична простота, яка характерна для роботи з моделями шуму Гауса (або нормального шуму) як в просторовій області, так і в частотній області, обумовлює широке розповсюдження цих моделей на практиці. Ця простота настільки приваблива, що досить часто використовуються навіть в тих ситуаціях, коли їх використання обґрунтовано лише частково.

Функція щільності розподілу ймовірностей гауссової випадкової величини z задається виразом

$$p(z) = \frac{e^{-(z-\mu)^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma}}$$

Тут z – це значення яскравості, μ – середнє значення випадкової величини z , σ – її середньоквадратичне відхилення.

Шум Релея

Функція щільності розподілу ймовірності шуму Релея задається виразом

$$p(z) = \begin{cases} \frac{2(z-a)e^{-(z-a)^2/2\sigma^2}}{b} & \text{при } z > a \\ 0 & \text{при } z \leq a \end{cases}$$

Середнє та дисперсія для цього розподілу будуть

$$\mu = a + \sqrt{\frac{\pi b}{4}},$$
$$\sigma^2 = \frac{b(4-\pi)}{4}.$$

Графік щільності розподілу ймовірностей шуму Релея має асиметричну (перекошену вправо) форму. Розподіл Релея може стати у нагоді для наближення асиметричних гістограм.

Шум Ерланга (гама шум)

Функція щільності розподілу ймовірності шуму Ерланга задається виразом

$$p(z) = \begin{cases} \frac{a^b z^{b-1}}{(b-1)!} e^{-az} & \text{при } z > 0. \\ 0 & \text{при } z \leq 0. \end{cases}$$

Тут $a > 0$, b – додатнє ціле число, символ “!” означає факторіал.

Середнє та дисперсія для цього розподілу будуть

$$\mu = \frac{b}{a},$$
$$\sigma^2 = \frac{b}{a^2}.$$

Графік щільності розподілу ймовірностей шуму Релея має асиметричну (перекошену вправо) форму. Розподіл Релея може стати у нагоді для наближення асиметричних гістограм.

Експоненціальний шум

Функція щільності розподілу ймовірності експоненціального шуму задається виразом

$$p(z) = \begin{cases} ae^{-az} & \text{при } z > 0. \\ 0 & \text{при } z \leq 0. \end{cases}$$

Тут $a > 0$. Середнє і дисперсія цього розподілу мають вигляд

$$\mu = \frac{1}{a},$$
$$\sigma^2 = \frac{1}{a^2}.$$

Маємо відмітити, що цей розподіл є приватним випадком розподілу Ерланга з $b=1$.

Рівномірний шум

Функція щільності розподілу ймовірності рівномірного шуму задається виразом

$$p(z) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{при } a \leq z \leq b. \\ 0 & \end{cases}$$

Середнє значення та дисперсія для цього розподілу дорівнюють

$$\mu = \frac{a+b}{2},$$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Імпульсний шум

Функція щільності розподілу ймовірності біполярного імпульсного шуму задається виразом

$$p(z) = \begin{cases} P_a & \\ P_b & \\ 0 & \end{cases}$$

Тут шум буде приймати значення P_a , якщо $z = a$, P_b , якщо $z = b$, та буде дорівнювати 0 в інших випадках.

Якщо $b > a$, то піксель з яскравістю b виглядає як світла крапка на зображенні. Піксель з яскравістю a виглядає навпаки як темна крапка на зображенні. Якщо одне зі значень ймовірності P_a чи P_b дорівнює нулю, то імпульсний шум зветься уніполярним. В іншому випадку (якщо жодне зі значень ймовірностей не дорівнює 0) імпульсний шум схожий на крупичі солі та перцю, випадковим чином розсіпані по зображенню.

Розглянуті розподіли в сукупності являють собою засоби для моделювання викривлень, пов'язаних з широким діапазоном шумів, які зустрічаються на практиці. Так, наприклад, гаусів шум виникає на зображенні під дією таких факторів, як шум в електронних колах, шум сенсорів – через нестачу освітлення та/або через високу температуру. Розподіл Релея може стати у нагоді при моделюванні шуму, який з'являється на знімках, які отримані з великої відстані. Експоненціальний і гама шуми відповідають шуму на зображеннях, які отримують з допомогою лазерів. З імпульсним шумом можна зустрітися в ситуаціях, коли в процесі отримання зображення мають місце швидкі перехідні процеси, наприклад, невірна комутація. Рівномірний розподіл не дуже часто зустрічається на практиці, однак він може стати у нагоді як основа для створення генераторів випадкових чисел, які використовують при моделюванні.

Просторова фільтрація

Коли спотворення зображення обумовлене виключно наявністю шуму, рівності (12.1) та 12.2) мають вигляд

$$g(x, y) = f(x, y) + \eta(x, y)$$

$$G(u, v) = F(u, v) + N(u, v)$$

та

Складова, яка описує шум, невідома, тому відняти її від $g(x, y)$ чи $G(u, v)$ неможливо.

У тих випадках, коли на зображенні присутній тільки адитивний шум, просторова фільтрація буде кращим з можливих методів відтворення зображення.

Фільтри обчислення середнього

До цієї категорії можна віднести такі фільтри:

- **фільтр**, заснований на обчисленні **середнього арифметичного** (як обговорювалось раніше, такий фільтр згладжує локальні варіації яскравості на зображенні; зменшення шуму є результатом такого згладжування);
- **фільтр**, заснований на обчисленні **середнього геометричного** (при використанні такого фільтру дає згладжування майже таке, як і фільтр з використанням середнього арифметичного, але при цьому втрачається менше деталей зображення);
- **фільтр**, заснований на обчисленні **середнього гармонічного** (дає хороші результати у випадку «білого» імпульсного шуму (коли на зображенні білі точки шуму), але не працює у випадку «чорного» імпульсного шуму; дає добрі результати для видалення шуму Гауса);
- **фільтр**, заснований на обчисленні середнього **контргармонічного** (при відповідних значеннях параметрів дає хороші результати у випадку «чорного» або «білого» імпульсного шуму, але не обох одночасно).

Фільтри, засновані на порядкових статистиках.

Фільтри на порядкових статистиках – це просторові фільтри. Їх використання вимагає попереднього впорядкування значень пікселів, які розташовані під маскою фільтру. Відгук фільтру в будь-якій точці визначається за результатами такого впорядкування.

Медіанні фільтри

Найбільш відомим фільтром на порядкових статистиках є медіанний фільтр. Дія фільтру складається з заміни значення в точці зображення на медіану значень яскравості в околі цієї точки

$$\hat{f}(x, y) = \underset{(s,t) \in S_{xy}}{\text{med}} \{ g(s, t) \}$$

При обчисленні медіани значення в центрі околу (тобто в самій точці) також враховується. Широка популярність медіанних фільтрів обумовлена тим, що вони застосовані для придушення деяких видів випадкових шумів, а саме – уніполярного та біполярного імпульсних шумів. Окрім того, вони приводять до меншого розмивання зображення в порівнянні з лінійними згладжуючими фільтрами такого ж розміру.

Фільтри максимуму і мінімуму

Фільтр максимуму

Фільтр максимуму задається виразом

$$\hat{f}(x, y) = \underset{(s,t) \in S_{xy}}{\max} \{ g(s, t) \}$$

Такий фільтр може стати в нагоді при визначенні найбільш яскравих точок на зображенні та призводить до придушення «чорного» імпульсного шуму.

Фільтр мінімуму

Фільтр мінімуму задається виразом

$$\hat{f}(x, y) = \min_{(s,t) \in S_{xy}} \{ g(s, t) \}$$

Такий фільтр може стати в нагоді при визначенні найбільш темних точок на зображенні та призводить до придушення «білого» імпульсного шуму.

Фільтр серединної точки

Використання фільтру серединної точки складається з того, що обчислюється середнє між максимальною і мінімальною яскравістю у відповідному околі

$$\hat{f}(x, y) = \frac{1}{2} \left[\max_{(s,t) \in S_{xy}} \{ g(s, t) \} + \min_{(s,t) \in S_{xy}} \{ g(s, t) \} \right]$$

Цей фільтр об'єднує в собі методи порядкових статистик і усереднення. Може використовуватись при наявності випадково розподілених шумів (наприклад, рівномірного чи шуму Гауса).

Оцінка функції спотворення.

Існують три основні способи оцінки функції спотворення. Це **візуальний аналіз**, **експеримент**, **математичне моделювання**. Оскільки функція спотворення не завжди відома повністю, процес відтворення зображення з використанням наближення до функції спотворення іноді звать реконструкцією «наосліп».

При **візуальному аналізі** оцінюють функцію спотворення шляхом виділення інформації безпосередньо з зображення.

Наприклад, якщо є розмите зображення, можна розглядати його невеликий фрагмент з досить простою структурою (невелика частина об'єкту та фон)

$$g_s(x, y)$$

Обирають для цього частину зображення з корисним сигналом великої амплітуди. Після цього, використовуючи яскравості об'єкту та фону будують не розмите наближення до фрагменту, що досліджується -

$$\hat{f}_s(x, y)$$

На основі таких припущень оцінюють наближене значення функції спотворення фрагменту, як

$$H_s(u, v) = \frac{G_s(u, v)}{\hat{F}_s(u, v)}$$

У подальшому, на основі властивостей

$$H_s(u, v)$$

роблять висновки щодо властивостей повної функції спотворення всього зображення

$$H(u, v)$$

При оцінці на основі **експерименту** використовують обладнання, аналогічне тому, завдяки якому було отримане це зображення (якщо воно наявне). Спочатку так підбирають параметри системи, щоб спотворення подібного зображення були схожі на ті, що наявні на досліджуваному зображенні. Так, наприклад, можна оцінювати функцію спотворення з допомогою зображення імпульсного сигналу.

У прикладі імпульс симулюється яскравою точкою на зображенні (щоб зменшити вплив шуму). Надалі, враховуючи, що Фур'є перетворення імпульсу – це константа, можна отримати

$$H(u, v) = \frac{G(u, v)}{A}$$

Тут $G(u, v)$ - Фур'є перетворення зображення, A – константа, що описує яскравість імпульсу.

При оцінці на основі **математичного моделювання** наприклад, можна враховувати такі властивості атмосфери, як турбулентність. Ця модель має вигляд

$$H(u, v) = e^{-k(u^2 + v^2)^{5/6}}$$

Константа k тут описує турбулентність атмосфери. У цьому виразі можна побачити схожість з виразом для низькочастотного фільтру Гауса.

Контрольні запитання:

1. Фільтри максимуму.
2. Фільтри мінімуму
3. Фільтри обчислення середнього.

Література

1. Рибальченко М.О., Єгоров О.П., Зворикін В. Б. Цифрова обробка сигналів. Навчальний посібник. – Дніпро: НМетАУ, 2018. – 79 с.
2. Основи та методи цифрової обробки сигналів: від теорії до практики: навч. посібник / уклад. : Ю.О. Ушенко, М.С. Гавриляк, М.В. Талах, В.В. Дворжак. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т.

3. Gonzales R.C., Woods R.E. Digital image processing. – Pearson Education, Inc, publishing as Prentis Holl. – 2017. – 1192 p.

Лекція 13.

Тема: СЕГМЕНТАЦІЯ ЗОБРАЖЕНЬ

Мета заняття: Засвоїти загальні положення щодо сегментації зображень.

Сегментація підрозділяє зображення на області або об'єкти. Ступінь деталізації, до якої доводиться таке розділення, залежить від мети задачі. Тобто сегментацію треба закінчити, коли потрібні об'єкти ізольовані.

Наприклад, у задачі **автоматизованого контролю** збирання вузлів електронної апаратури потрібно виявити дефекти на кшталт: відсутність компонентів; розрив контактних доріжок на платі. Тобто не потрібна сегментація, яка спроможна виділити менші деталі.

В деяких ситуаціях, наприклад, у задачах **технічного контролю**, можливо в деякій мірі керувати умовами зйомки.

Іноді, в задачах **розробки систем розпізнавання** об'єктів на відкритій місцевості, розробник може обирати **сенсори**, які зможуть підсилювати сигнали від цікавих об'єктів, та послаблювати вплив неістотних деталей зображення; також у деяких випадках доцільно змінювати **діапазон зйомки** (наприклад, обирати інфрачервоний).

Визначення перепадів

Алгоритми сегментації використовують **базові властивості** сигналу яскравості: **розривність та однорідність**.

У **першому випадку** підхід складається з розбиття зображення на підставі різких змін сигналу, таких як **перепади яскравості** на зображенні.

Друга категорія методів використовує розбиття зображення на області, виходячи з їх однорідності по яким-небудь, заздалегідь обраним критеріям. **Другому підходу ми приділимо перевагу при розгляді**.

Визначення перепадів часто проводять на базі обчислення **дискретних аналогів похідних першого і другого порядку**.

Модель ідеального перепаду відома (рис.12.1)

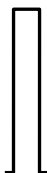


Рисунок 12.1. Модель ідеального перепаду (горизонтальний профіль яскравості з двома перепадами)

У відповідності до цієї моделі **ідеальний контурний перепад** – це множина з'єднаних (у даному випадку) по вертикалі пікселів кожен з яких розташований поряд з прямокутним стрибком яскравості (як показує горизонтальний профіль на рисунку).

На практиці оптичні обмеження, дискретизація, а також недосконалість інших елементів системи реєстрації зображень призводить до розмиття перепадів яскравості.

Ступінь цього розмиття (**розфокусування**) визначається якістю системи реєстрації, кроком дискретизації, умовами освітлення, при яких отримали зображення. Такі перепади яскравості моделюються **за допомогою нахиленого перепаду**. Крутизна нахилу звичайно обернено пропорційна ступеню розфокусування перепаду. «**Ширина**» такого **перепаду** визначається довжиною нахиленої ділянки, на якій відбувається перехід від початкової яскравості до кінцевої. Така залежність досить логічна – **розмиті перепади виглядають широкими, різкі перепади – тонкими**.

Наприклад, визначимо **першу і другу похідні** профілю нахиленого перепаду яскравості між двома областями.

При переміщенні вздовж профілю зліва направо **перша похідна** має розрив спочатку та наприкінці нахиленої ділянки, постійне додатне значення вздовж схилу, та дорівнює нулю в областях постійної яскравості. **Друга похідна** додатна в точці переходу від темної ділянки до нахилу, від'ємна в точці переходу від нахилу до світлої ділянки, та дорівнює нулю на лінійному схилі та в областях постійної яскравості. У випадку протилежного перепаду яскравості (від світлого до темного) знаки похідних змінюються на протилежні.

На цих засадах можна зробити висновок:

- **значення першої похідної може використовуватись для визначення наявності перепаду яскравості в кожній точці зображення** (тобто пояснення, знаходиться точка на ділянці нахилу або ні);
- **знак другої похідної допоможе визначити, на темній або на світлій частині перепаду піксель, що досліджується**.

Поведінка першої і другої похідних на перепаді яскравості з шумом Розглянемо наприклад чотири варіанти перепадів яскравості з шумом. Перший перепад не має шумів. Інші три перепади спотворені адитивним шумом Гауса з нульовим середнім та стандартними відхиленнями відповідно 0,1, 1,0 та 10 градацій яскравості відповідно.

Як уже обговорювалось раніше, перша похідна чутлива до шуму. Як можна побачити з прикладу, до шуму чутлива і друга похідна.

Тому в практичних задачах досить часто рекомендують згладжувати зображення до обчислення похідних.

Точку зображення визначають як точку перепаду, якщо її двомірною похідною перевищує деяке значення (значення «порогу»).

Зв'язану множину таких точок (отриману у відповідності з визначеним заздалегідь критерієм) звать **перепадом яскравості**.

Протяжний перепад яскравості звать **контуром**. Ділянку контуру визначають, коли протяжність перепаду є малою в порівнянні з розміром зображення.

Задача сегментації - в тому, щоб визначити ділянки контуру та зібрати з них більш довгі контури.

Зв'язування контурів та знаходження границь.

Локальна обробка

На практиці отримані при обробці зображень ділянки **контурів** можуть бути **спотворені** через шуми, розриви контурів через неоднорідне освітлення.

Тому алгоритми визначення контурів доповнюються **процедурами зв'язування**. Основні підходи при цьому – **локальна обробка, глобальний аналіз з допомогою перетворення Хафа, аналіз з допомогою теорії графів** та інші.

У даному підході аналізують пікселі у **невеликому околі кожної точки зображення, яка визначена, як контурна**. Окіл зазвичай розміром 3*3 чи 5*5. Усі точки, подібні за попередньо прийнятим критерієм, зв'язують для створення контуру. Перший параметр задається значенням градієнту

$$\nabla f$$

яке може бути визначене згідно з розглянутими раніше формулами.

Таким чином, піксель контуру який має координати (x_0, y_0) та розташований у завданому околі точки (x, y) , будемо вважати східним по градієнту з пікселем (x, y) , якщо

$$|\nabla f(x, y) - \nabla f(x_0, y_0)| \leq E$$

Тут E - невід'ємний поріг.

Напрямок (кут) вектора градієнта задається як

$$\alpha(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{G_y}{G_x}\right)$$

Піксель контуру з координатами (x_0, y_0) , розташований у завданому околі точки (x, y) , будемо вважати східним по напрямку градієнту з пікселем (x, y) , якщо

$$|\alpha(x, y) - \alpha(x_0, y_0)| \leq A$$

Тут A - невід'ємний поріг по куту.

Піксель в околі об'єднують з центральним пікселем (x, y) , коли виконані критерії схожості величини та напрямку. Цей процес повторюється в кожній точці зображення, з одночасним запам'ятовуванням знайдених пов'язаних пікселей.

Відомою задачею такого типу є пошук номерного знаку на зображенні автомобіля. На цьому зображенні прямокутник, який відповідає номерному знаку – один з кількох, які визначені на зображенні. Визначити з них потрібний можливо, якщо знати співвідношення ширини і висоти для номерного знаку.

Обробка з порогом. Обґрунтування

Перетворення з порогом займають значне місце серед задач сегментації зображень завдяки інтуїтивній зрозумілості та нескладній реалізації.

Уявімо, що в наявності є гістограма, яка відповідає деякому зображенню $f(x, y)$. Це зображення має деякі світлі об'єкти на темному фоні. Особливості його в тому, що яскравості пікселів об'єкту і фону зосереджені поблизу двох значень. Зрозумілий спосіб виділення об'єкту від фону складається у виборі значень порогу T . Цей поріг T має розділяти дві моди розподілу інтенсивностей.

Тоді будь яка точка (x, y) , в котрій $f(x, y) > T$, буде називатись точкою об'єкту, в протилежному випадку – точкою фону.

Узагальнений варіант цього підходу – для випадку, коли гістограма зображення характеризується наявністю трьох мод розподілу (наприклад, у випадку, коли на темному фоні зображення наявні два види світлих об'єктів). Для такого випадку (тобто для розділення порогоми трьох мод) – потрібні два пороги.

Зображення $g(x,y)$, яке буде отримане після перетворення з використанням порогу, буде визначатися наступним чином

$$g(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{if } f(x, y) > T \\ 0, & \text{if } f(x, y) \leq T \end{cases}$$

Таким чином, яким надано значення 1 (наприклад), відповідають **об'єктам**, а пікселі, зі значенням 0 (або будь-яким іншим, відмінним від значень об'єкту), відповідають **фону**.

Обробка з глобальним порогом

Узагальнюючи розглянуте, можна вважати, що найпростіший з методів обробки порогом складається з **розділення** гістограми зображення **на дві частини** з допомогою **єдиного глобального порогу** T . Після цього сегментація зображення здійснюється шляхом сканування зображення.

При цьому **кожен піксель** відносять або до **об'єкту**, або до **фону**, залежно від того, перевищує яскравість цього пікселя значення порогу, або ні.

Треба зауважити, що успішність використання такого перетворення з порогом, залежить від того, наскільки можна вважати **умови отримання зображення контрольованими**. Однією з таких областей, де це часто можна вважати можливим, є задачі технічного контролю, де досить часто умови освітлення можна вважати контрольованими.

Поріг може бути обраним евристично (тобто шляхом візуального вивчення гістограми).

Для автоматичного вибору порогу T може бути використаний наступний алгоритм.

1. Обирається деяка початкова оцінка значення порогу T .
2. Проводиться сегментація зображення за допомогою порогу T .

В результаті створюються дві групи пікселів: G_1 (складається з пікселів з яскравістю більше T), та G_2 (складається з пікселів з яскравістю, що дорівнює, або менше T).

Обчислюються значення μ_1 та μ_2 середніх яскравостей пікселів зображення по областям G_1 та G_2 відповідно.

Обчислюється нове значення порогу

$$T = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)$$

Повторюються кроки з другого до четвертого, до тих пір, поки різниця значень T на сусідніх ітераціях не буде менше наперед заданої величини

Якщо є підстави вважати, що об'єкт і фон займають майже рівні площі на зображенні, добрим початковим наближенням для T є середній рівень яскравості на зображенні.

Якщо площа, яку займає об'єкт, порівняно мала з площею фону (чи навпаки), то одна з груп пікселів буде домінувати в гістограмі, і середній рівень яскравості на зображенні не дуже добрим початковим наближенням.

В подібних випадках більш вдалим наближенням буде половина суми мінімального і максимального значень яскравості.

Контрольні запитання:

1. Обробка з порогом.

2. Обробка з глобальним порогом
3. Визначення перепадів під час сегментації.

Література

1. Рибальченко М.О., Єгоров О.П., Зворикін В. Б. Цифрова обробка сигналів. Навчальний посібник. – Дніпро: НМетАУ, 2018. – 79 с.
2. Основи та методи цифрової обробки сигналів: від теорії до практики: навч. посібник / уклад. : Ю.О. Ушенко, М.С. Гавриляк, М.В. Талах, В.В. Дворжак. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т.
3. Gonzales R.C., Woods R.E. Digital image processing. – Pearson Education, Inc, publishing as Prentis Holl. – 2017. – 1192 p.

Лекція 14.

Тема: СТИСКАННЯ ЗОБРАЖЕНЬ

Мета заняття: Засвоїти загальні положення щодо стискання зображень.

Загальні положення щодо стискання зображень

Кожен день велика кількість інформації запам'ятовується, перетворюється і передається в цифровому вигляді. Оскільки значна частина даних, що передаються, є графічною або відеоінформацією, вимоги до пристроїв зберігання та засобам зв'язку постійно зростають також. Таким чином значний практичний інтерес набувають засоби стискання даних для їхньої передачі і зберігання.

Стискання зображень орієнтовано на вирішення проблеми скорочення обсягу даних, потрібних для представлення цифрового зображення. Основою такого процесу скорочення є видалення надлишкових даних. З математичної точки зору це відповідає перетворенню деякого двомірного масиву даних в статистично не корельований масив. (Треба відмітити, що коли набір даних є корельований, тоді існують статистичні взаємні зв'язки між його елементами, відповідно його можна скоротити).

Таке перетворення використовується до вихідного зображення перед тим як його зберегти чи передати. Надалі стиснене зображення розпаковується та відтворюється вихідне зображення (чи деяке наближення до нього).

На сьогодні розвиток обчислювальної техніки призвів до зростання цікавості до цифрових алгоритмів стискання. Прийняті кілька ключових міжнародних стандартів стискання зображень. Це наочно демонструє значне зростання в цій області – від базових розробок К.Шеннона та інших, котрі сформулювали ймовірнісний підхід до інформації, її представлення, передавання та стискання, до практичного використання отриманих результатів.

У теперішній час стискання зображень може розглядатися як «технологія розширення можливостей». На додаток до інших областей використання, стискання зображень є істотним засобом підтримки зростаючих можливостей сучасних пристроїв вводу зображень, а також до зростаючих можливостей та складності телевізійних стандартів широкого сповіщення. Більш того, стискання зображень виграє істотну роль в багатьох різноманітних і важливих областях використання. На теперішній час – це відеоконференції, дистанційне зондування (використання зображень, які отримані зі

спутників, для прогнозу погоди та вивчення земних ресурсів), формування зображень документів, медичинські зображення, управління безпілотними летальними апаратами в військових, космічних та інших областях. Коротше кажучи, наявне зростання кількості областей, які потребують ефективну обробку, запам'ятовування, зберігання і передачу двійкових (бінарних), напівтонових чорно-білих та кольорових зображень.

Термін «стискання даних» означає зменшення об'єму даних, яке використовується для представлення певної кількості інформації. При цьому поняття «дані» і «інформація» не тотожні. Вони не є синонімами. Дані фактично є тим засобом, за допомогою якого інформація передається. Для представлення одного і того ж обсягу інформації може бути використана різна кількість даних.

Приведемо приклад. Дві різних людини – одна багатослівна, а інша точна в висловленнях і лаконічна, розповідають одну й ту саму історію. В цьому випадку інформацією є факти, про які йде мова, а слова – дані, які використанні для викладення інформації. Якщо обидві людини використовують різну кількість слів, то виникає два варіанти однієї історії. При цьому хоча б один з цих варіантів буде з неістотними даними. Це означає, що такий варіант має дані (тобто слова), котрі або несуть неістотну інформацію, або повторюють кілька разів вже відоме. У таких випадках говорять про збитковість даних.

Збитковість даних є центральним поняттям цифрового стискання даних. Це не абстрактне поняття, а величина, яку можна вимірювати математично.

Нехай n_1 і n_2 позначають кількість елементів – носіїв інформації – в двох наборах даних, які представляють одну й ту саму інформацію. Тоді *відносна збитковість даних* R_D першого набору (який характеризується значенням n_1) по відношенню до другого набору, може бути визначена як

$$R_D = 1 - (1 / C_R) \quad (14.1)$$

де величина C_R , яку зазвичай називають коефіцієнтом стискання, є

$$C_R = n_1 / n_2. \quad (14.2)$$

У випадку, коли $n_2 = n_1$, отримуємо $C_R = 1$ і $R_D = 0$. Це говорить про те, що перший спосіб представлення інформації не має збиткових даних у порівнянні з другим. Якщо $n_2 \ll n_1$, то $C_R \rightarrow \infty$ та $R_D \rightarrow 1$. Це означає значне стискання і високий надлишок першого набору по відношенню до другого. І, наприкінці, якщо $n_2 \gg n_1$, то $C_R \rightarrow 0$ та $R_D \rightarrow -\infty$, це означає, що другий набір має багато надлишкових даних у порівнянні з першим. Як правило, таке зростання кількості даних є не бажаним. На практиці, коефіцієнт стискання, такий, наприклад, як 10:1 (чи 10) означає, що перший набір даних (у середньому) має 10 одиниць зберігання інформації (наприклад, біт) на кожен одиницю другого (тобто після стискання) набору даних. Відповідне для цього значення надлишку 0,9 означає, що 90% даних першого набору є надлишковими.

Можна додати також, що в завданні цифрового стискання зображень розрізняються та можуть бути використані три основних типу збитковості даних: кодова збитковість (надлишок), між елементна збитковість (надлишок) та візуальна збитковість. Стискання даних досягається в тому випадку, коли скорочується чи знищується надлишок одного чи кількох з указаних типів.

Кодова збитковість (надлишок)

Як ми встановили раніше, що значна доля інформації про зображення може бути отримана на основі аналізу гістограми його значень яскравості.

Але гістограма значень яскравості зображення може також використовуватись для побудови кодів, які зменшують потрібну кількість даних для представлення зображення.

Будемо вважати, що дискретна випадкова складова r_k , розподілена в інтервалі $[0, 1]$ являє собою значення яскравості зображення, та що кожне значення r_k з'являється з ймовірністю $p_r(r_k)$. Тоді

$$p_r(r_k) = n_k/n, \quad k=0, 1, 2, \dots, L-1 \quad (14.3)$$

де L - загальне число рівнів яскравості, n_k - число пікселів, які мають значення яскравості k , а n – загальне число елементів в зображенні. Якщо число бітів, які використовуються для представлення кожного з значень r_k , дорівнює $l(r_k)$, то середнє число бітів, які потрібні для представлення значення одного елемента, дорівнює

$$L_{cp} = \sum l(r_k) p_r(r_k) \quad (14.4)$$

Тобто, можна вважати, що середня довжина всіх кодових слів, які присвоюються різним значенням яскравості, визначається як сума добутків числа бітів, які використані для представлення кожного з рівнів яскравості, на ймовірність появи цього рівня яскравості. Таким чином, загальне число бітів, яке потрібне для кодування зображення розмірами $M \cdot N$, складе $M \cdot N \cdot L_{cp}$.

Між елементна збитковість (надлишок)

Нехай (для прикладу) у нас є 2 зображення, з майже однаковими гістограмами. Обидві мають 3 максимуми. Це показує, що на зображеннях наявні 3 домінуючих діапазони яскравості. Ці яскравості на зображенні не є рівно ймовірними. Тому для скорочення кодового надлишку можна використовувати нерівномірне кодування. Такий процес кодування не призведе до змін кореляційної залежності між елементами зображення. Інакше кажучи, кодування, яке може бути використане для представлення значень яскравості, не може змінити кореляції між пікселами. Ця кореляція є наслідком структурних або геометричних взаємозв'язків між об'єктами на зображенні.

Цей підхід використовує таку важливу форму надлишку даних, котра пов'язана з зв'язками між елементами на зображенні. Оскільки значення будь-якого елемента на зображенні може бути достатньо точно передбачене по значенням його сусідів, то інформація, яка є в окремому елементі, є достатньо малою. Більша частина вкладу окремого елемента в зображення є надлишковою. Тому вона може бути визначена на базі значень сусідніх елементів. Для відображення такого зв'язку введені різноманітні терміни, а саме: просторовий надлишок, геометричний надлишок, внутрішньо кадровий надлишок.

Візуальна збитковість (надлишок)

При звичайному візуальному сприйнятті частина інформації зазвичай менш важлива. Таку інформацію звать візуальним надлишком. Вона може бути видалена без помітного погіршення візуальної якості зображення.

Загалом це пов'язане з тим, що людина на зображенні відшукує особливості та відмінності, такі як контури чи текстурні області, та підсвідомо об'єднує їх у групи. Надалі

мозок співвідносить ці групи з наявними у глядача апріорними знаннями, завершуючи процес інтерпретації зображення.

Важливою операцією при оцифруванні інформації, яка заснована на цьому явищі, є квантування зображення. В цьому випадку квантування означає відображення широкого (неперервного) діапазону значень на вхіді в обмежений набір значень на виході. Оскільки ця операція не зворотна (відбуваються втрати вихідної інформації), то квантування є стисканням з втратами.

Моделі стискання зображень.

Система стискання має два принципово різних структурних блоки – кодер та декодер. Вихідне зображення $f(x,y)$ подається на кодер, котрий перетворює вхідні дані в набір символів. Після передавання по каналу кодовані дані надходять до декодеру, де відтворюється відновлене зображення $\hat{f}(x,y)$. Взагалі, $\hat{f}(x,y)$ може бути точною копією зображення $f(x,y)$, а може такою і не бути. В першому випадку маємо кодування без втрат, в другому – систему кодування з втратами. При цьому на відновленому зображенні можна буде побачити деякі дефекти (або викривлення).

Кодер і декодер складаються з двох незалежних блоків. Кодер складається з кодера джерела, котрий видаляє збитковість джерела (сигналу на вхіді), та кодера каналу. Кодер каналу збільшує завадостійкість сигналу на виході кодеру каналу.

Декодер складається з декодеру каналу і декодеру джерела. Якщо канал між кодером і декодером є каналом без завад (тобто в ньому не виникає помилок), кодер і декодер будуть складатися тільки з кодеру джерела і декодеру джерела.

Контрольні запитання:

1. Кодова збитковість.
2. Міжелементна збитковість.
3. Візуальна збитковість.

Література

1. Рибальченко М.О., Єгоров О.П., Зворикін В. Б. Цифрова обробка сигналів. Навчальний посібник. – Дніпро: НМетАУ, 2018. – 79 с.
2. Основи та методи цифрової обробки сигналів: від теорії до практики: навч. посібник / уклад. : Ю.О. Ушенко, М.С. Гавриляк, М.В. Талах, В.В. Дворжак. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т.
3. Теорія інформації та обробка сигналів 1: навч. посіб. для студентів спеціальності 171 «Електроніка» освітньої програми «Електронні компоненти і системи»/ КПІ ім. Ігоря Сікорського: уклад.: Ю. С. Ямненко, К. С. Клен. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 120 с.
4. Gonzales R.C., Woods R.E. Digital image processing. – Pearson Education, Inc, publishing as Prentis Holl. – 2017. – 1192 p.

Лекція 15.

Тема: ОСНОВИ КОДУВАННЯ І ДЕКОДУВАННЯ

Мета заняття: Засвоїти загальні положення щодо основ кодування і декодування.

Кодер і декодер джерела

Як ми вже встановили раніше, система стискання має два принципово різних структурних блоки – кодер та декодер. Вихідне зображення $f(x,y)$ подається на кодер, котрий перетворює вхідні дані в набір символів. Після передавання по каналу кодовані дані надходять до декодери, де відтворюється відновлене зображення $\hat{f}(x,y)$. Взагалі, $\hat{f}(x,y)$ може бути точною копією зображення $f(x,y)$, а може такою і не бути. В першому випадку маємо кодування без втрат, в другому – систему кодування з втратами. При цьому на відновленому зображенні можна буде побачити деякі дефекти (або викривлення). Кодер і декодер складаються з двох незалежних блоків. Кодер складається з кодера джерела, котрий видаляє збитковість джерела (сигналу на вході), та кодера каналу. Кодер каналу збільшує завадостійкість сигналу на виході кодера каналу. Декодер складається з декодери каналу і декодери джерела. Якщо канал між кодером і декодером є каналом без завад (тобто в ньому не виникає помилок), кодер і декодер будуть складатися тільки з кодера джерела і декодери джерела.

В цьому підході **кодер джерела** відповідає за скорочення або усунення можливих видів збитковості (надлишку) на зображенні на вході (кової, між елементної або візуальної). Зазвичай, процедура кодування представляється у вигляді послідовності з трьох незалежних операцій (стадій). Схема **кодера** складається з **перетворювача**, **квантувача** та **кодера символів**. На вхід схеми надходить зображення $f(x,y)$, на виході її – **канал**.

На **першій стадії** процесу кодування джерела **перетворювач** перетворює вихідні дані (тобто зображення) в формат (зазвичай, не візуальний). Ця процедура виконується для того, щоб скоротити між елементну збитковість зображення, що надійшло на вхід.

Друга стадія, або блок **квантувача**, зменшує точність виходу **перетворювача** відповідно обраному попередньо критерію. На цій стадії скорочується візуальна збитковість (надлишок) зображення, яке надійшло на вхід. Цю операцію обернути не можна, тому при необхідності стискання без втрат, її не виконують.

На **третій** (і останній) **стадії процедури кодування джерела**, **кодер символів** генерує рівномірний (або не рівномірний) код для представлення виходу **квантувача** і формує відповідний коду вихід. Термін **кодер символів** дозволяє відрізнити цю операцію від процедури кодування джерела в цілому. В більшості випадків для представлення перетворених та квантованих значень даних використовується нерівномірний код. Він надає коротші кодові слова тим значенням, які зустрічаються найчастіше, за рахунок цього скорочується кодова збитковість (надлишок). Таким чином, можна сказати, що по завершенні стадії **кодування символів**, зображення, яке надійшло на вхід, піддається повній процедурі скорочення кожного з трьох типів збитковості, розглянутих раніше.

Хоча процес **кодування джерела** показаний наразі у вигляді трьох послідовних стадій, не в кожній системі стискання потрібні всі ці стадії. Наприклад, як ми вже уточнювали раніше, у випадку стискання без втрат має бути виключений блок квантувача. Крім того, деякі методи стискання будуються таким чином, що в них об'єднуються блоки, які ми описували, як самостійні. Наприклад, в системах стискання з передбаченням [4], перетворювач і квантувач можуть бути у вигляді єдиного блоку, який виконує обидві операції одночасно.

Схема декодера джерела має лише два блоки: **блок декодера символів** і **блок оберненого перетворення**. Ці блоки виконують операції, зворотні тим, які виконувались в **кодері джерела кодером символів** і **перетворювачем** (зрозуміло, в зворотній послідовності).

Кодер і декодер каналу

Якщо канал передачі є каналом з шумом (завадами), тобто в ньому можливе виникнення помилок, важливу роль у загальному процесі кодування-декодування виграють **кодер** та **декодер каналу**. Для зменшення впливу шуму каналу, до закодованих даних з входу додається деяка регульована надлишкова інформація. Оскільки дані на вході **кодера** джерела мають малу збитковість, то у випадку відсутності такої «регульованої збитковості» дані були б занадто чутливі до завад.

Один з найбільш корисних способів кодування каналу був розроблений Р.В. Хеммінгом [1, розділ 8.2.2]. Він базується на додаванні до даних, що передаються, деякого числа бітів. Це гарантує що допустимі кодові слова будуть розрізнятися не менше, ніж задане число позицій (двійкових розрядів, бітів). Хеммінг довів, що, наприклад, коли 4-бітове кодове слово розширити трьома додатковими бітами (символами для перевірки), так, щоб відстань між будь-якими двома допустимими кодовими словами не менше, ніж 3, то будь-які одиничні помилки (в будь якій одній позиції будь якого слова) можуть бути знайдені та виправлені. Додавання більшої кількості бітів для перевірки надає можливість відшукувати та виправляти помилки в декількох позиціях одночасно [2].

Елементи теорії інформації

Було розглянуто кілька підходів для зменшення об'єму даних, які потрібні для представлення зображення. Тому може виникнути питання: яка кількість даних дійсно потрібна для представлення зображення? А саме: чи існує мінімальна кількість даних, котрих достатньо для повного опису зображення без втрати інформації? Саме теорія інформації надає математичну основу для відповіді на подібні питання.

Вимірювання інформації

Одна з важливих засад теорії інформації в тому, що джерело інформації може бути описане як імовірнісний процес, що може бути виміряний істотним чином. Згідно з цим вважають, що випадкова подія E , яка з'являється з імовірністю $P(E)$, має

$$I(E) = \log \frac{1}{P(E)} = -\log (P(E)) \quad (15.1)$$

одиниць інформації.

Тут $I(E)$ – кількість інформації події E . Треба відмітити, що кількість інформації тим більша, чим менша імовірність події E . Якщо $P(E)=1$ (тобто подія виникає завжди), то $I(E) = 0$ та в даній події нема ніякої інформації. Це означає, що коли нема ніякої невизначеності, що пов'язана з подією, то повідомлення, що подія відбулася не несе в собі ніякої інформації. Однак, якщо $P(E) = 0,99$, тоді сповіщення про подію E вже передає деяку невелику кількість інформації. Сповіщення, що подія E не відбулася, передає істотно більшу інформацію, оскільки відбувається з дуже малою імовірністю.

Основа логарифму задає одиницю вимірювання кількості інформації. Якщо використовується основа m , вважають, про одиниці вимірювання по основі m . Коли основа дорівнює 2, то одиниця інформації називається «біт» (а саме, якщо $P(E) = 0,5$), то $I(E) =$

$-\log_2\left(\frac{1}{2}\right)$, тобто одному біту. Таким чином, біт є кількість інформації, що передається сповіщенням про те, що відбулася одна з двох можливих подій з рівними імовірностями. Простий приклад події такого типу – сповіщення про результат підкидання монети.

Коли інформація передається між джерелом і отримувачем, вважаємо, що джерело і отримувач з'єднані між собою каналом (це може бути середовище розповсюдження електромагнітних хвиль, провідник у комп'ютері та інше).

Вважаємо, що джерело інформації генерує випадкову послідовність символів з деякого визначеного набору (тобто вихід джерела – дискретна випадкова величина). Набір $\{a_1, a_2, \dots, a_j\}$ називатимемо алфавітом джерела А, а елементи набору a_j - символами чи буквами. Ймовірність того, що джерело породжує символ a_j буде $P(a_j)$.

$$\sum_{j=1}^J P(a_j) = 1. \quad (15.2)$$

Для опису сукупностей імовірностей символів джерела $\{P(a_1), P(a_2), \dots, P(a_j)\}$ зазвичай використовують J-мірний вектор імовірностей $z=[P(a_1), P(a_2), \dots, P(a_j)]^T$. Тому вважають, що джерело інформації може бути повністю описане ансамблем сповіщень (А, z).

Тоді, у відповідності з (15.1), кількість інформації, що передається джерелом при породженні одного символу a_j буде $I(a_j) = -\log(P(a_j))$. Якщо передаються k символів джерела, то, згідно з законом великих чисел, при достатньо великих k символ a_j буде з'являтися на виході (в середньому) $kP(a_j)$ разів. Тоді середня кількість інформації, що передається з допомогою k символів джерела, складе величину

$$\begin{aligned} & -kP(a_1)\log P(a_1) - kP(a_2)\log P(a_2) \dots - kP(a_j)\log P(a_j) = \\ & = -k \sum_{j=1}^J P(a_j)\log P(a_j). \end{aligned}$$

Середня кількість інформації, що приходить на один символ джерела, буде визначатися як $H(z)$, та дорівнювати (по формулі Шеннона)

$$H(z) = \sum_{j=1}^J -P(a_j)\log P(a_j). \quad (15.3)$$

Цю величину називають **ентропія** (невизначеність джерела). Вона визначає середню кількість інформації (в системі одиниць з основою m), яка може бути отримана при появі одного символу з джерела.

Коли ця величина більша, тоді пов'язана з джерелом невизначеність (та кількість інформації) більша. Коли символи джерела рівно ймовірні, ентропія (невизначеність), яка визначається за рівнянням (15.3), приймає максимальне значення. Тоді джерело передає максимально можливу середню кількість інформації на один символ.

Використання теорії інформації для кодування

Теорія інформації надає засоби, необхідні для кількісної обробки інформації. В прикладі можна розглянути використання цих засобів у задачах стискання зображень. Оскільки фундаментальне твердження теорії інформації в тому, що формування інформації може бути розглянуте у вигляді ймовірнісного процесу, будемо розглядати статистичну модель процесу формування зображення.

Приклад 15.1

Розглянемо процес оцінювання інформаційного складу (тобто ентропії) 8-бітового зображення.

21 21 21 95 169 243 243 243
 21 21 21 95 169 243 243 243
 21 21 21 95 169 243 243 243
 21 21 21 95 169 243 243 243

Один з підходів складається з того, що можливо передбачити деяку модель джерела та вчислити ентропію зображення, базуючись на цій моделі. Наприклад, можна вважати, що зображення було отримано з «8-бітового напівтонового джерела». Це джерело послідовно створює статистично незалежні пікселі згідно з завчасно завданим ймовірнісним законом. При цьому вважаємо, що символи джерела – це рівні яскравості, а алфавіт джерела складається з 256 можливих символів. Якщо імовірності символів відомі, то середній інформаційний склад зображення (ентропія) може бути обчислений за допомогою виразу (15.3). Наприклад, у випадку рівномірної щільності імовірності символи джерела рівно ймовірні. Джерело характеризується ентропією 8 біт/елемент. Тобто кількість інформації на символ джерела (елемент зображення) буде 8 біт. Тоді повна ентропія цього зображення складе 256 бітів.

Альтернативним підходом до оцінювання інформаційного складу може бути створення моделі джерела, яка основана на порівняльній частоті появ рівнів яскравості у зображенні, яке підлягає аналізу. Тобто зображення може бути інтерпретоване як зразок послідовного процесу роботи джерела значень яскравості, за допомогою якого воно створене. Зображення, яке ми аналізуємо, на момент аналізу тільки і є єдиним індикатором поведінки джерела. Тому при аналізі використано саме гістограму яскравості для моделювання джерела, яке породжує такий розподіл.

Оцінка ентропії джерела з наведеними властивостями при такому підході називається оцінкою першого порядку

| Рівень яскравості | Число | Імовірність |
|-------------------|-------|-------------|
| 21 | 12 | 3/8 |
| 95 | 4 | 1/8 |
| 169 | 4 | 1/8 |
| 243 | 12 | 3/8 |

І може бути проведена з допомогою (15.3). Для наданого прикладу оцінка першого порядку складе 1,81 біт/елемент. Таким чином ентропія джерела складе приблизно 1,81 біт/елемент, а всього зображення – 58 бітів.

Більш точні оцінки ентропії джерела значень яскравості, яке відтворило надане зображення, можуть бути розраховані шляхом відносної частоти появ блоків пікселів на зображенні (тут під блоками пікселів розуміємо групи сусідніх пікселів). При збільшенні розміру блоку до безкінечності оцінка має наближатися до істинної ентропії джерела. Таким чином, вважаючи, що у наданого зображення рядки послідовно з'єднані один за одним, а кінець з'єднаний з початком, можна вичислити відносні частоти пар пікселів (тобто двократне розширення джерела):

| Пари яскравості | Число | Імовірність |
|-----------------|-------|-------------|
| (21,21) | 8 | 1/4 |
| (21,95) | 4 | 1/8 |
| (95,169) | 4 | 1/8 |
| (169,243) | 4 | 1/8 |
| (243,243) | 8 | 1/4 |
| (243,21) | 4 | 1/8 |

Отримуємо за допомогою (15.3) оцінку ентропії. Вона складає $2,5/2=1,25$ біт/елемент. (Тут ділення на 2 є наслідком розгляду 2 пікселів одночасно). Ця оцінка називається оцінкою другого порядку ентропії джерела (оскільки її отримано обчисленням відносних частот двохелементних блоків). Оцінки вищих порядків забезпечують краще наближення до ентропії джерела, але збіжність – повільна, а обчислення досить складне. Наприклад, звичайне 8 бітове зображення має $2^{8*2} = 65536$ можливих пар значень, відносні частоти яких мають бути визначені. Якщо розглядати блоки з 5 елементів, то число можливих груп зростає до 2 в 40 ступені (10 в 12 ступені).

Контрольні запитання:

1. Кодова збитковість.
2. Міжелементна збитковість.
3. Візуальна збитковість.

Література

1. Рибальченко М.О., Єгоров О.П., Зворикін В. Б. Цифрова обробка сигналів. Навчальний посібник. – Дніпро: НМетАУ, 2018. – 79 с.
2. Основи та методи цифрової обробки сигналів: від теорії до практики: навч. посібник / уклад. : Ю.О. Ушенко, М.С. Гавриляк, М.В. Талах, В.В. Дворжак. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т.
3. Теорія інформації та обробка сигналів 1: навч. посіб. для студентів спеціальності 171 «Електроніка» освітньої програми «Електронні компоненти і системи»/ КПІ ім. Ігоря Сікорського: уклад.: Ю. С. Ямненко, К. С. Клен. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 120 с.
4. Gonzales R.C., Woods R.E. Digital image processing. – Pearson Education, Inc, publishing as Prentis Holl. – 2017. – 1192 p.