Міністерство освіти і науки України

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

«Математична статистика»

Навчальний посібник

для здобувачів вищої освіти за спеціальностями 122 – Комп’ютерні науки, 125 – Кібербезпека, 121 – Інженерія програмного забезпечення

Одеса – 2023

Міністерство освіти і науки України

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

«Математична статистика»

Навчальний посібник

для здобувачів вищої освіти за спеціальностями 122 – Комп'ютерні науки, 125 – Кібербезпека, 121 – Інженерія програмного забезпечення

Затверджено на засіданні
кафедри вищої математики
та моделювання систем
Протокол №9 від 07.04.2023

Одеса – 2023

Грібова, В. В. Математична статистика : навч. посіб. для здобувачів вищої освіти за спец. 122 – Комп’ютерні науки, 125 –Кібербезпека, 121 – Інженерія програмного забезпечення / В. В. Грібова, В. В. Перстньова, Ю. Є. Сікіраш. - Одеса : Одеська політехніка, 2023. – 83 с.

Укладачі: **Грібова В.В.**, кандидат фіз. - мат. наук, доцент
Перстньова В.В., ст. викладач
Сікіраш Ю.Є., ст. викладач

ВСТУП

Математична статистика є розділом математики, що вивчає масові явища і процеси за даними спостережень. Математична статистика розв’язує наступну задачу: у результаті спостережень над випадковою величиною одержані окремі значення (експериментальні дані) цієї величини (вибірка значень). Властивості випадкової величини встановлюються, вивчаючи властивості окремої вибірки значень, тобто за експериментальними даними потрібно винести рішення про природу явища, яке вивчаємо. Математична статистика досліджує методи, які дозволяють дати відповідь на питання, чи відповідає практика, що представлена результатами випадкових експериментів, гіпотетичному зображенню про природу явища чи ні.

Математична статистика основана на поняттях і методах теорії ймовірностей.

На ранній стадії становлення цієї науки слово «статистика» позначало мистецтво та науку керування. Але з часів Гауса, який застосував статистичні прийоми для обчислення елементів планетних орбіт за недосконалими даними, задачею цієї науки стала обробка результатів кількісних наукових експериментів.

Перші дослідження в галузі математичної статистики належать Я. Бернуллі і П. Лапласу. Значний внесок у розвиток математичної статистики зробили вчені П.Л. Чебишев, А.А. Марков, О.М. Ляпунов, С.Н. Бернштейн, Ю.В. Лінник, А.М. Колмогоров, В.І. Романовський, Є.Є. Слуцький, М.В. Смирнов, Г. Крамер, К. Пірсон, Стьюдент, Ф. Фішер, Ю. Нейман, А. Вальд, та інші.

Математичну статистику застосовують під час розв’язання завдань планування і організації промислового виробництва, аналізу демографічних явищ, технологічних процесів, контролю якості продукції, надійності систем автоматичного управління.

У теперішній час статистичні методи застосовуються у хімії , геології, історії, лінгвістиці.

РОЗДІЛ 1. Елементи математичної статистики

1.1 Основні поняття математичної статистики

Означення. В математичній статистиці множину всіх значень випадкової величини X називають ***генеральною сукупністю***. Законом розподілу генеральної сукупності є закон розподілу випадкової величини X. Первинним матеріалом для вивчення якостей генеральної сукупності є експериментальні (статистичні) дані.

Означення. Сукупність незалежних випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, кожна з який має той же розподіл, що і випадкова величина X, називається ***вибіркою*** із генеральної сукупності, а випадкові величини $X_i, i = \overline{1, n}$ – елементами випадкової вибірки.

$$\overline{X_n} = (X_1, X_2, \ldots, X_n) \qquad (1.1.1)$$

Число n називається об'ємом вибірки. Будь-яке значення $\bar{x}_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вибірки називається реалізацією випадкової вибірки.

В основі математичної статистики лежить вибірковий метод. Суть вибіркового методу полягає в тому, що висновки, зроблені за результатами вивчення випадкової вибірки $\overline{X_n}$, можна розповсюдити на всю генеральну сукупність X.

Числові характеристики генеральної сукупності називаються генеральними параметрами. До них відносять математичне сподівання й дисперсія, які є параметрами розподілу досліджуваної ознаки. Їхні теоретичні значення інколи невідомі, але їх можна оцінити за значеннями вибіркових характеристик.

Означення. ***Оцінкою параметра*** називається числова характеристика, отримана в результаті обробки випадкової вибірки.

Ми будемо розглядати різні функції $Y = g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ випадкової вибірки. Наприклад:

$$Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{або} \quad Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2$$

Означення. Будь-яку функцію випадкової вибірки називають ***статистикою***.

До основних задач математичної статистики відносять задачі:

1) Первинна обробка експериментальних даних.
2) Оцінка невідомих параметрів.
3) Перевірка статистичних гіпотез.

1.2 Первинна обробка результатів експериментальних даних

Перш ніж перейти до детального аналізу отриманих в результаті експериментів статистичних даних, проводять їх первинну обробку.

Однією з найпростіших обробок вибірки є її упорядкування по величині. Нехай $\overline{X_n} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ – вибірка об'єму n із генеральної сукупності X. $\bar{x}_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n) -$ реалізація даної вибірки.

Упорядкуємо елементи вибірки по зростанню:

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n)} \qquad (1.2.1)$$

де $x_{(1)}$ – найменший, $x_{(n)}$ – найбільший елементи вибірки.

Означення. Послідовність чисел $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$, яка задовольняє умові (1.2.1), називається ***варіаційним рядом*** вибірки; $X_{(i)}$, $i = \overline{1, n}$, називають i-м членом варіаційного ряду, $d = x_{(n)} - x_{(1)}$ – розмах вибірки.

Нехай серед елементів вибірки $x_1, x_2, \dots, x_n$ виділені $m < n$, які мають різні значення. Розташуємо їх в порядку зростання: $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(m)}$. Нехай кожне з них повторюється відповідно $n_1, n_2, \dots, n_m$ разів.

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$$

Означення. ***Статистичним рядом*** вибірки називають таблицю, в першому рядку якої значення $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(m)}$, а в другому – числа їх повторень $n_1, n_2, \dots, n_m$, або їх частоти $\frac{n_i}{n}, i = \overline{1, m}$

$x_{(1)}$	$x_{(2)}$	…	$x_{(i)}$	…	$x_{(m)}$
n_1	n_2	…	n_i	…	n_m

(1.2.2)

Якщо об’єм вибірки великий (n≥50) , то дані часто групують наступним чином: відрізок $J = x_{(n)} - x_{(1)}$, розбивають на m проміжків J_i, як правило однакової довжини Δ: $J_i = [x_{(i)}, x_{(i+1)}), i = \overline{1, m-1}$, $J_m = [x_{m-1}, x_m]$.

Для кожного проміжку J_i підраховують число n_i елементів вибірки, що потрапили до нього; результати записують у таблицю, яку називають інтервальним статистичним рядом.

J_1	J_2	…	J_i	…	J_m
n_1	n_2	…	n_i	…	n_m

(1.2.3)

Число проміжків m залежить від об’єму вибірки. Для оцінки числа m можна скористуватись формулою:

$$\boldsymbol{m \approx log_2 n + 1} \qquad (1.2.4)$$

Якщо $n = 100$, $m \geq 6$; $n = 1000$, $m \geq 9$.

Приклад 1. Протягом доби вимірюють напругу X току в електросхемі в вольтах. Отримана вибірка об’єму n=30. Побудувати статистичний ряд.

107	108	110	109	110	111	109	110	111	107
108	109	110	108	107	110	109	111	111	110
109	112	113	110	106	110	109	110	108	112

Розв’язання. Найменше значення у вибірці $x_{(1)}=106$, найбільше $x_{(8)}=113$. Підрахуємо частоту n_m , $m = \overline{1,8}$ кожного з 8 різних значень у вибірці. Побудуємо таблицю, яка є статистичним рядом вибірки.

$x_{(k)}$	106	107	108	109	110	111	112	113
n_k	1	3	4	6	9	4	2	1

Означення. Функція

$$\boldsymbol{F_n(x) = \frac{n(x,\overline{x_n})}{n}} \tag{1.2.5}$$

де n – об'єм вибірки, $n(x, \overline{x_n})$ – число елементів вибірки $\overline{X_n}$, менших ніж x, називається ***емпіричною функцією розподілу***. Вона набуває одного із значень:

$$0; \frac{1}{n}; \frac{2}{n}; \dots; \frac{n-1}{n}; \frac{n}{n} = 1$$

Емпірична функція розподілу $F_n(x)$ задовольняє умовам:

1. Значення $F_n(x)$ належить відрізку [0;1].
2. Функція $F_n(x)$ неспадна.
3. $F_n(x) = 0$, якщо $x < x_{(1)}, F_n(x) = 1,$ якщо $x \geq x_{(n)}$.

Таким чином, емпірична функція розподілу має такі самі властивості, як і теоретична функція розподілу.

Теорема. Для будь якого $x \in R$ послідовність випадкових величин $\overline{X_n} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ з функціями розподілу $F_n(x)$, n=1,2… при $n \to \infty$, збігається за ймовірністю до функції розподілу $F_X(x)$ генеральної сукупності X.

$$\boldsymbol{F_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{P} F_X(x)} \tag{1.2.6}$$

Функція $F_n(x)$ є статистичним аналогом теоретичної функції $F_X(x)$ розподілу генеральної сукупності X.

Графік функції $F_n(x)$ зображено на рис.(1.2.1).

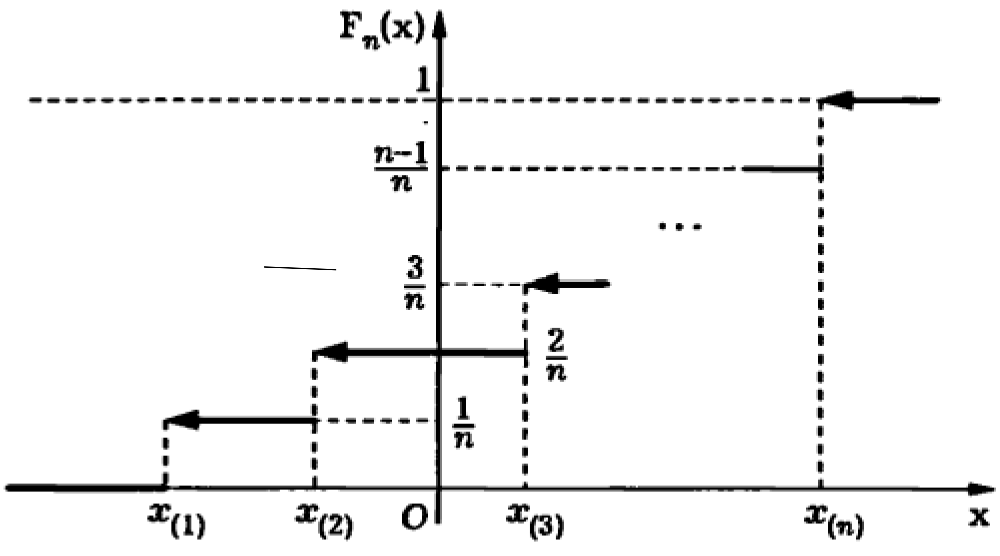


Рис. 1.2.1

Нехай вибірка $\bar{X}_n$ представлена інтервальним статистичним рядом (1.2.3).

Означення. Функція

$$\boldsymbol{p_n(x) = \begin{cases} \frac{n_i}{n\Delta}, & x \in J_i \\ 0, & x \notin J_i \end{cases}} \tag{1.2.7}$$

називається емпіричною щільністю розподілу вибірки $\overline{X_n}$ із генеральної сукупності *X*.

Графік $p_n(x)$, представлений на рис.(1.2.2), називають гістограмою частот.

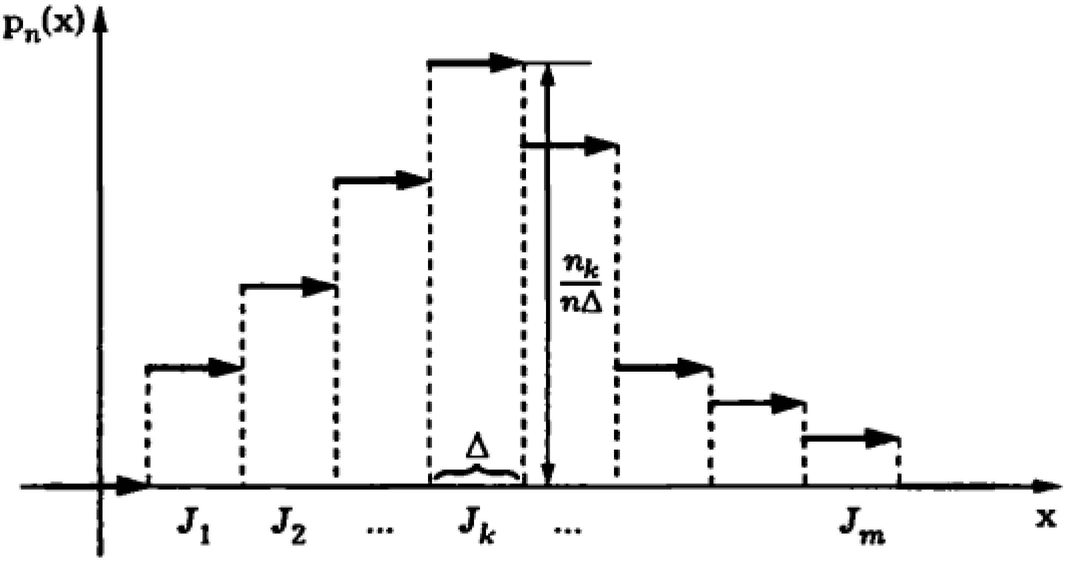


Рис. 1.2.2

Сумарна площа прямокутників дорівнює 1.

Функція $p_n(x)$ є статистичним аналогом теоретичної щільності ймовірності розподілу $p_X(x)$ генеральної сукупності *X*.

Разом з гістограмою часто використовують інше графічне представлення функції $p_n(x)$, яке називають полігоном частот.

Означення. ***Полігон частот*** – це ламана, вершинами якої є середини горизонтальних відрізків, які утворюють прямокутники в гістограмі (рис.1.2.3).

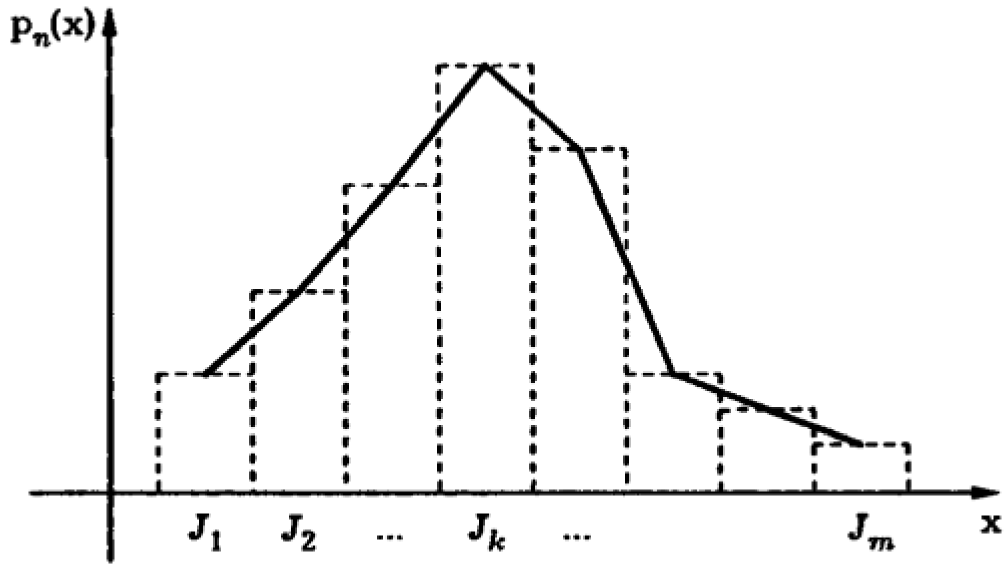


Рис. 1.2.3

1.3 Вибіркові моменти

Нехай $\overline{X_n}$ – вибірка із генеральної сукупності X з функцією розподілу ймовірностей $F_X(x)$, $m_k = MX^k, \mu_k = M(X - MX)^k$ – початкові і центральні моменти k-го порядку випадкової величини X. Ці числові характеристики в математичній статистиці називають теоретичними.

Числа

$$\widehat{\boldsymbol{m_k}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{x_i^k}, \widehat{\boldsymbol{\mu_k}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} (\boldsymbol{x_i} - \overline{\boldsymbol{x}})^{\boldsymbol{k}} \qquad (1.3.1)$$

– вибіркові початкові і центральні моменти k-го порядку.

$\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{x_i}$ – вибіркове середнє; (1.3.2)

$\widehat{\boldsymbol{\sigma^2}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} (\boldsymbol{x_i} - \overline{\boldsymbol{x}})^{\mathbf{2}}$ – вибіркова дисперсія; (1.3.3)

$\widehat{\boldsymbol{\sigma}} = \sqrt{\widehat{\boldsymbol{\sigma^2}}}$ – вибіркове середнє квадратичне відхилення. (1.3.4)

Зауваження. Якщо вибіркові дані $\overline{x_n}$ представлені інтервальним статистичним рядом (1.2.3), то для обчислення $\bar{x}, \widehat{\sigma^2}$ зручно користуватись формулами:

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{m}} \widehat{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{i}} \cdot \widetilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i}} \qquad (1.3.5)$$

$$\widehat{\boldsymbol{\sigma^2}} = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{m}} \widehat{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{i}} \cdot (\widetilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i}} - \overline{\boldsymbol{x}})^{\mathbf{2}}, \qquad (1.3.6)$$

де $\hat{p}_i = {}^{n_i}/_{n}$- відносна частота події ($X \in J_i$), $i = \overline{1,m}$; $\tilde{x}_i$- середина інтервалу J_i, $i = \overline{1,m}$.

Величини $\widehat{m_k}, \widehat{\mu_k}, \bar{x}, \widehat{\sigma^2}, \hat{\sigma}$ є статистичними аналогами відповідних теоретичних величин: m_k, μ_k, *MX, DX, σ*.

Теорема. Вибіркові числові характеристики: $\bar{x}$, $\widehat{\sigma^2}$, $\widehat{m_k}$, $\widehat{\mu_k}$ збігаються за ймовірністю до своїх теоретичних аналогів при великому об'ємі вибірки.

$$\begin{gathered}
\overline{\boldsymbol{X}} \xrightarrow[\boldsymbol{n\to\infty}]{\boldsymbol{P}} \boldsymbol{MX} \\
\widehat{\boldsymbol{\sigma^2}} \xrightarrow[\boldsymbol{n\to\infty}]{\boldsymbol{P}} \boldsymbol{DX} \\
\widehat{\boldsymbol{m_k}} \xrightarrow[\boldsymbol{n\to\infty}]{\boldsymbol{P}} \boldsymbol{m_k} \\
\widehat{\boldsymbol{\mu}} \xrightarrow[\boldsymbol{n\to\infty}]{\boldsymbol{P}} \boldsymbol{\mu_k}
\end{gathered} \qquad (1.3.7)$$

Приклад 2. В результаті експерименту отримана вибірка об'ємом n=79:
2; 4; 2; 4; 3; 3; 3; 2; 0; 6; 1; 2; 3; 2; 2; 4; 3; 3; 5; 1; 0; 2; 4; 3; 2; 2; 3; 3; 1; 3; 3; 3; 1; 1; 2; 3; 1; 4; 3; 1; 7; 4; 3; 4; 2; 3; 2; 3; 3; 1; 4; 3; 1; 4; 5; 3; 4; 2; 4; 5; 3; 6; 4; 1; 3; 2; 4; 1; 3; 1; 0; 0; 4; 6; 4; 7; 4; 1; 3.

Побудувати емпіричну функцію розподілу, знайти середнє вибіркове, вибіркову дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Розв'язання. Найменший елемент вибірки $x_{(1)}$=0, найбільший - $x_{(79)}$=7. Побудуємо статистичний ряд, розташувавши всі елементи вибірки у порядку збільшення.

$x_{(k)}$	0	1	2	3	4	5	6	7	
n_k	4	13	14	24	16	3	3	2	$\sum_{k=1}^{8} n_k = 79$

Для побудови емпіричної функції розподілу обчислимо відносні частоти n_k/n елементів статистичного ряду:

$\frac{n_1}{n} = \frac{4}{79} \approx 0{,}0506$; $\frac{n_2}{n} = \frac{13}{79} \approx 0{,}1646$; $\frac{n_3}{n} = \frac{14}{79} \approx 0{,}1772$; $\frac{n_4}{n} = \frac{24}{79} \approx 0{,}3038$;
$\frac{n_5}{n} = \frac{16}{79} \approx 0{,}2025$; $\frac{n_6}{n} = \frac{3}{79} \approx 0{,}0380$; $\frac{n_7}{n} = \frac{3}{79} \approx 0{,}0380$; $\frac{n_8}{n} = \frac{2}{79} \approx 0{,}0253$.

Щоб побудувати емпіричну функцію розподілу, треба послідовно додавати відносні частоти:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0,0000, & x \le 0 \\ 0{,}0506, & 0 < x \le 1 \\ 0{,}2152, & 1 < x \le 2 \\ 0{,}3924, & 2 < x \le 3 \\ 0{,}6962, & 3 < x \le 4 \\ 0{,}8987, & 4 < x \le 5 \\ 0{,}9367, & 5 < x \le 6 \\ 0{,}9747, & 6 < x \le 7 \\ 1{,}0000, & x > 7 \end{cases}$$

Обчислимо середнє вибіркове за формулою (1.3.5):

$$\bar{x} = \frac{1}{79}(0 \cdot 4 + 1 \cdot 13 + 2 \cdot 14 + 3 \cdot 24 + 4 \cdot 16 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 2) \approx 2{,}835.$$

Згідно з формулою (2.3.6), знаходимо вибіркову дисперсію

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{79}((0 - 2{,}84)^2 \cdot 4(1 - 2{,}84)^2 \cdot 13 + (2 - 2{,}84)^2 \cdot 14 + (3 - 2{,}84)^2 \cdot 24 + $$
$$+(4 - 2{,}84)^2 \cdot 16 + (5 - 2{,}84)^2 \cdot 3 + (6 - 2{,}84)^2 \cdot 3 + (7 - 2{,}84)^2 \cdot 2) \approx 2{,}3668$$

і середнє квадратичне відхилення за формулою (2.3.7)

$$\hat{\sigma} = \sqrt{2{,}3668} \approx 1{,}54.$$

Приклад 3. Виміряний зріст n=500 студентів. Результати представлені у вигляді інтервального статистичного ряду.

[145, 150)	[150, 155)	[155, 160)	[160, 165)	[165, 170)
1	2	28	90	169
[170, 175)	[175, 180)	[180, 185)	[185, 190)	[190,195]
132	55	16	6	1

Побудувати емпіричну щільність розподілу випадкової величини X розподілу зросту студентів.

Розв'язання. Згідно з формулою (1.2.7), (Δ=5), маємо

$$p_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2500}, & x\epsilon[145, 150) \\ \frac{2}{2500}, & x\epsilon[150, 155) \\ \frac{28}{2500}, & x\epsilon[150, 155) \\ \frac{90}{2500}, & x\epsilon[160, 165) \\ \frac{169}{2500}, & x\epsilon[165, 170) \\ \frac{132}{2500}, & x\epsilon[170, 175) \\ \frac{55}{2500}, & x\epsilon[175, 180) \\ \frac{16}{2500}, & x\epsilon[180, 185) \\ \frac{6}{2500}, & x\epsilon[185, 190) \\ \frac{1}{2500}, & x\epsilon[190, 195) \end{cases}$$

Контрольні запитання

1. В чому полягає вибірковий метод?
2. Що називається: генеральною сукупністю, вибіркою, об'ємом вибірки, вибірковим розподілом, статистичним рядом розподілу, інтервальним статистичним рядом, гістограмою, полігоном, емпіричною функцією розподілу, емпіричною щільністю розподілу випадкової величини?
3. У чому полягає зміст початкових і центральних вибіркових моментів k −го порядку? Наведіть формули.
4. Що називається середнім вибірковим, вибірковою дисперсією і вибірковим середнім квадратичним відхиленням? Наведіть формули.

Задачі для самостійного розв'язування

В наступних задачах дано вибірки із генеральної сукупності *X*. Побудувати варіаційний ряд, статистичний ряд, інтервальний статистичний ряд (обрати 5 інтервалів), полігон частот, емпіричну функцію розподілу, емпіричну щільність розподілу; обчислити середнє вибіркове, вибіркову дисперсію, вибіркове середнє квадратичне відхилення.

1. Є дані про кількість студентів в 30 групах фізико-математичного факультету: 21,23,25,24,26,21,20,22,24,25,25,23,23,22,24,25,25,24,25,20,21,18,18,20, 23,25,21,22,22,25.

2. У 2015 році кількість служб, які представляють громадянам житлові субсидії, по сільських районах області розподілено наступним чином:

5, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 1, 10, 1, 1, 1, 4, 4, 5, 1, 1, 4, 6, 5, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 1.

3. Число шкіл Київської області в 2014 - 2015 навчальному році по малим містам і районам склало:
20, 21, 31, 17, 13, 21, 16, 17, 26, 19, 15, 20, 17, 22, 28, 29, 25, 24, 23, 16, 15, 14, 17, 30, 21, 23, 25, 25, 22, 24.

4. У 2015 році кількість великих і середніх промислових підприємств по районах Київської області розподілено наступним чином:
2, 2, 2, 6, 5, 6, 1, 4, 1, 5, 4, 4, 9, 6, 3, 0, 6, 5, 4, 3, 6, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 5, 4, 4.

5. Посівні площі картоплі (тис. гектарів) в сільських господарствах Київської області по районах:
1,5; 1,5; 0,6; 1,3; 0,9; 0,9; 0,6; 1,3; 1,1; 0,6; 1,1; 0,9; 1,6; 1,3; 0,8; 0,4; 1,1; 0,6; 0,7; 0,4; 1,5; 1,5; 1,3; 1,1; 1,6; 1,3; 0,9; 0,9; 0,6; 0,4.

6. Народжуваність населення Київської області в 2016 році по малим містам і районам області склали:
85, 159, 80, 249, 289, 151, 105, 180, 199, 122, 153, 157, 336, 231, 148, 96, 519, 309, 350, 267, 738, 750, 371, 239, 598, 715, 277, 726, 466, 905, 777, 415, 376, 993.

7. Смертність населення Київської області в 2015 році по малим містам і районам області склали:
83, 129, 60, 279, 249, 151, 115, 140, 179, 122, 155, 147, 336, 221, 178, 96, 419, 409, 250, 367, 538, 650, 271, 219, 598, 615, 377, 726, 266, 805, 177, 315, 346, 923.

8. Кількість безробітних Київської області в 2015 році по малим містам і районам області склали:
183, 129, 40, 279, 219, 51, 115, 115, 179, 122, 179, 122, 336, 221, 178, 96, 122, 409, 180, 367, 538, 129, 271, 219, 115, 615, 377, 122, 266, 805, 177, 160, 346, 825.

9. Кількість учнів, які отримали атестат з медаллю, в 2014 році по містах і районах Київської області:
280, 66, 61, 27, 32, 36, 8, 3, 11, 7, 19, 11, 3, 15, 7, 6, 1, 8, 30, 15.

10. Була виміряна максимальна ємність двадцяти конденсаторів:
4,40; 4,31; 4,40; 4,40; 4,65; 4,56; 4,71; 4,54; 4,36; 4,56; 4,31; 4,42; 4,60; 4,45; 4,50; 4,40; 4,43; 4,48; 4,42; 4,45.

11. Дана вибірка:
3,7; 6,2; 5,2; 5,7; 6,2; 6,4; 4,7; 4,2; 6,7; 7,2; 5,2; 6,2; 4,7; 7,2; 5,2; 4,7; 5,7; 5,2; 4,7; 5,2; 5,7.

12. Дана вибірка:
40,25; 40,28; 40,31; 40,31; 40,31; 40,25; 40,34; 40,37; 40,40; 40,43; 40,45; 40,46; 40,25; 40,28; 40,31; 40,31; 40,31; 40,25; 40,34; 40,37; 40,40; 40,43; 40,45; 40,46.

Дано інтервальний статистичний ряд. Побудувати емпіричну функцію розподілу, емпіричну щільність, гістограму і полігон частот. Обчислити середню вибіркову, вибіркову дисперсію і середнє квадратичне відхилення.

13.

Границі інтервалів	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11	11-13
Частоти	1	2	4	2	1	1

14.

Границі інтервалів	0-4	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24
Частоти	1	1	3	2	1	1

15.

Границі інтервалів	5-7	7-9	9-11	11-13	13-15	15-17
Частоти	8	14	40	20	6	4

16.

Границі інтервалів	2-6	6-10	10-14	14-18	18-22	22-26
Частоти	1	2	5	5	2	1

17.

Границі інтервалів	0-4	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24
Частоти	6	7	15	8	4	5

18.

Границі інтервалів	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11	11-13
Частоти	4	5	10	7	5	4

Границі інтервалів	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35

Частоти	10	12	20	16	8	4

19.

20.

Границі інтервалів	2-7	7-12	12-17	17-22	22-27	27-32
Частоти	2	5	10	7	3	3

21.

Границі інтервалів	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11	11-13
Частоти	1	3	7	2	1	1

22.

Границі інтервалів	2-6	6-10	10-14	14-18	18-22	22-26
Частоти	2	4	8	4	1	1

23.

Границі інтервалів	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11	11-13
Частоти	2	4	8	4	1	1

24.

Границі інтервалів	9-12	12-15	15-18	18-21	21-24	24-27
Частоти	1	4	11	4	4	1

25.

Границі інтервалів	0-3	3-6	6-9	9-12	12-15	15-18
Частоти	5	7	11	10	4	3

РОЗДІЛ 2. Точкові оцінки невідомих параметрів. Методи побудови точкових оцінок невідомих параметрів

2.1 Задача оцінки невідомих параметрів вибраної параметричної моделі

Нехай закон розподілу генеральної сукупності належить множині $\{F(x,\bar{\theta}): \bar{\theta} \in \Theta\}$, де функція розподілу відома, а параметр θ або вектор параметрів $\bar{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ невідомий. Треба знайти оцінку невідомого параметра θ або вектора параметрів $\bar{\theta}$ по випадковій виборці $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ із генеральної сукупності X.

Наприклад, маса деталі X має нормальний закон розподілу, але його параметри $m = \theta_1$ і $\sigma^2 = \theta_2$ невідомі. Треба знайти їх приблизне значення (оцінку) за результатами $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ експерименту.

Існують два види оцінок невідомих параметрів: точкові й інтервальні оцінки.

2.2 Точкові оцінки невідомих параметрів. Консистенційність і незсуненість оцінки. Ефективність оцінки

Інтуїтивно зрозуміло, що за оцінку невідомого параметра θ можна прийняти різні статистики. Наприклад, для точкової оцінки $m = MX$ можна прийняти такі статистики:

$$\boldsymbol{\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i\,,\ \theta^* = \frac{x_{(1)}+x_{(n)}}{2}};\ \boldsymbol{\overline{\theta}} = \begin{cases} \boldsymbol{\frac{1}{2}\left(x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}\right), n -} \text{ парне} \\ \boldsymbol{x_{\frac{n+1}{2}}, n -} \text{ непарне} \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Яку з цих оцінок обрати? Потрібно дати відповідь на запитання: якими якостями має володіти статистика $\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, щоб вона була найкращою оцінкою невідомого параметра θ.

Означення. Статистику $\hat{\theta}(\overline{x_n})$ називають ***консистенційною*** оцінкою параметра θ, якщо зі збільшенням об'єму вибірки вона збігається за ймовірністю до параметра θ, тобто

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}(P\left(\left|\theta - \hat{\theta}(X_n)\right| < \varepsilon\right) = 1,\ \forall\ \varepsilon > 0} \tag{2.2.2}$$

або

$$\boldsymbol{\hat{\theta} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \theta} \tag{2.2.3}$$

Консистенційність оцінки важлива, бо неконсистенційна оцінка на практиці марна.

Приклад 1. Відносна частота $\frac{m_n}{n}$ появи події A при випробуваннях Бернуллі є консистенційною оцінкою ймовірності p, так як з теореми Бернуллі (закон великих чисел) випливає, що

$$\lim_{n\to\infty}(P\left(\left|\frac{m_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1, \quad \forall\ \varepsilon>0$$

Приклад 2. Нехай $\bar{X}=\ (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ – вибірка із генеральної сукупності X, яка розподілена за законом Пуассона з невідомим параметром $\lambda>0.$ Тоді X_k мають розподіл Пуассона з невідомим параметром λ. Відомо, що для закону Пуассона $MX=DX=\lambda$. За оцінку λ виберемо статистику

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$$

Знайдемо

$$M\bar{X}=\ \frac{1}{n}\cdot n\,MX=\ \lambda,\ D\bar{X}=\ \frac{1}{n^2}nDX=\ \frac{1}{n}DX=\frac{1}{n}\lambda$$

За нерівністю Чебишова маємо:

$$P(|\bar{X}-\lambda|>\varepsilon)\le\ \frac{D\bar{X}}{\varepsilon^2}=\ \frac{\lambda}{n\varepsilon^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

Отже, оцінка $\bar{X}$ параметра λ є консистенційною .

На практиці доводиться оцінювати невідомі параметри і при малих об’ємах вибірки.

Означення. Статистику $\hat{\theta}(\overline{X_n})$ називають ***незсуненою*** оцінкою параметра θ, якщо її математичне сподівання співпадає з θ, тобто

$$\boldsymbol{M}\left(\boldsymbol{\hat{\theta}}(\boldsymbol{\overline{X_n}})\right)=\ \boldsymbol{\theta} \qquad (2.2.4)$$

Величина $M\hat{\theta}-\hat{\theta}$ називається зсувом (або систематичною похибкою оцінки θ). Вочевидь, $\hat{\theta}$ є незсуненою оцінкою параметра θ тоді й тільки тоді, коли зсув дорівнює нулю.

$$\boldsymbol{\hat{\theta}}=\ \boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{b}+\ \boldsymbol{\xi} \qquad (2.2.5)$$

$\hat{\theta}$– оцінка параметру θ, b – систематична похибка оцінки, ξ – випадкова похибка (шум), $M\xi = 0$. Незсуненість оцінки $\hat{\theta}$ означає відсутність систематичної похибки ($b = 0$).

Зауваження. У прикладі 2 середнє вибіркове $\bar{X}$ є незсуненою оцінкою MX, оскільки $M\bar{X} = \lambda$.

Приклад 3. Однією із оцінок MXє середня вибіркова $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Покажемо, що ця оцінка є незсуненою й консистенційною для будь- якого закону розподілу генеральної сукупності X.

Розв'язання. $M\bar{X} = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i = \frac{1}{n}\cdot nMX = MX,$ тобто оцінка є незсуненою.

Знайдемо $D\bar{X} = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i = \frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$.
За нерівністю Чебишова

$P(|\bar{X} - M\bar{X}| > \varepsilon) \le \frac{D\bar{X}}{\varepsilon^2} \Rightarrow P(|\bar{X} - M\bar{X}| > \varepsilon) \le \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$ таким чином, оцінка є консистенційною.

Припустимо, що маємо дві незсунені оцінки $\hat{\theta}(\overline{X_n}), \tilde{\theta}(\overline{X_n})$ параметру θ. Якщо дисперсії $D\hat{\theta}(\overline{X_n})$ і $D\tilde{\theta}(\overline{X_n})$ задовольняють умові

$$\boldsymbol{D\hat{\theta}(\overline{X_n}) \le D\tilde{\theta}(\overline{X_n}),} \tag{2.2.6}$$

то треба обрати оцінку $\hat{\theta}(\overline{X_n})$, так як розсіювання статистики $\hat{\theta}(\overline{X_n})$ біля параметра θ менше, ніж у статистики $\tilde{\theta}(\overline{X_n})$.

Означення. Якщо в деякому класі незсунених оцінок параметра θ, що мають скінченну дисперсію, існує така оцінка $\bar{\theta}(\overline{X_n})$, що нерівність (2.2.6) виконується для всіх оцінок $\tilde{\theta}(\overline{X_n})$ цього класу, то оцінка $\bar{\theta}(\overline{X_n})$ називається *ефективною* в даному класі оцінок.

2.3 Середнє вибіркове

Теорема. Оцінка $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ (середнє вибіркове) математичного сподівання генеральної сукупності X є ***незсуненою, консистенційною та ефективною*** в класі всіх лінійних оцінок, тобто оцінок виду

$$\hat{\theta}(\overline{X_n}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i\,, \quad \text{де } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$$

Доведення. Незсуненість і консистенційність оцінок доведена раніше. Доведемо ефективність оцінки.

Дисперсія $D\hat{\theta}(\overline{X_n}) = D\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i = \sum_{i=1}^{n} {\alpha_i}^2 DX_i = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} {\alpha_i}^2$ має мінімальне значення при $\alpha_i = \frac{1}{n}$, $i = \overline{1,n}$, тобто коли $\hat{\theta}(\overline{X_n}) = \bar{X}$. Покажемо це.

Для пошуку умовного мінімуму функції $g(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} {\alpha_i}^2$ за умови, що $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, складемо функцію Лагранжа

$L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} {\alpha_i}^2 + \lambda(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - 1)$, де λ – множник Лагранжа.

Необхідна умова існування умовного екстремуму

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \alpha_i} = 2\alpha_i + \lambda = 0, i = \overline{1,n} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - 1 = 0 \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \frac{1}{n}$.

2.4 Вибіркова дисперсія

Означення. Оцінка

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^2(\overline{\boldsymbol{X}_n}) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}} \sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} (\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{i}} - \overline{\boldsymbol{X}})^2 \qquad (2.4.1)$$

називається ***вибірковою дисперсією***.

Теорема. Якщо $\overline{X_n}$ – вибірка із генеральної сукупності X із дисперсією σ^2, то вибіркова дисперсія $\hat{\sigma}^2(\overline{X_n})$ є ***зсуненою консистенційною*** оцінкою дисперсії σ^2. Можна показати, що $M\hat{\sigma}^2(\overline{X_n}) = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2$, тобто оцінка є зсуненою.

Величиною зсуву $\sigma^2 - \frac{n-1}{n}\sigma^2 = \frac{1}{n}\sigma^2$ можна знехтувати при великих об'ємах вибірки.

Консистенційність випливає з теореми Чебишова.

Означення. Статистика

$$\boldsymbol{S}^2(\overline{\boldsymbol{X}_n}) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}} \sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} (\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{i}} - \overline{\boldsymbol{X}})^2 \qquad (2.4.2)$$

є незсуненою і консистенційною оцінкою дисперсії σ^2. Її називають ***виправленою вибірковою дисперсією.***

Приклад 4. Покажемо, що оцінка (2.4.2) є незсуненою і консистенційною оцінкою дисперсії σ^2.

Розв'язання.

$MS^2(\overline{X_n}) = M\left(\frac{n}{n-1}\,\hat{\sigma}^2(\overline{X_n})\right) = \frac{n-1}{n}\,M\hat{\sigma}^2(\overline{X_n}) = \frac{n-1}{n}\,\frac{n}{n-1}\,\sigma^2 = \sigma^2$, тобто оцінка є незсуненою.

$DS^2(\overline{X_n}) = \frac{n^2}{(n-1)^2} D\hat{\sigma}^2(\overline{X_n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, так як оцінка $\hat{\sigma}^2(\overline{X_n})$ є консистенційною.

Означення. Статистика

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\overline{\boldsymbol{X}_n}) = \sqrt{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}} \sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} (\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{i}} - \overline{\boldsymbol{X}})^2} \qquad (2.4.3)$$

називається ***вибірковим середнім квадратичним відхиленням*** і є зсуненою консистенційною оцінкою параметра σ.

Означення. Статистика

$$\boldsymbol{S}(\overline{\boldsymbol{X}_n}) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{X}_i - \bar{\boldsymbol{X}})^2} \tag{2.4.4}$$

є незсуненою і консистенційною оцінкою середнього квадратичного відхилення σ. Її називають ***виправленим вибірковим середнім квадратичним відхиленням.***

Вибіркова і виправлена вибіркова дисперсії пов'язані формулою:

$$\boldsymbol{S}^2(\overline{\boldsymbol{X}_n}) = \frac{n}{n-1}\widehat{\boldsymbol{\sigma}}^2(\overline{\boldsymbol{X}_n}) \tag{2.4.5}$$

Зауваження. Можна показати, що вибіркові початкові і центральні моменти є консистенційними оцінками відповідних моментів генеральної сукупності, якщо вони існують.

2.5 Метод моментів

Метод моментів є найбільш простим методом побудови точкових оцінок невідомих параметрів. Був запропонований англійським статистиком К. Пірсоном у 1894 р.

Нехай маємо вибірку $\bar{X}_n = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ із генеральної сукупності $\bar{X}$ зі щільністю $p_X(x, \overline{\theta})$, де $\overline{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ – невідомий вектор параметрів. Потрібно знайти оцінку $\overline{\theta}$ по виборці $\bar{X}_n$.

Нехай для випадкової величини X існують перші r моментів $m_k = MX^k$, $\mu_k = M(X - \bar{X})^k$ $k=\overline{1,r}$. Величини m_k, μ_k є функціями невідомого вектора параметрів $\overline{\theta}$, тобто

$$m_k = m_k(\overline{\theta}), \mu_k = \mu_k(\overline{\theta}), k = \overline{1,r}\,.$$

Відомо, що вибіркові моменти $\widehat{m}_k(\overline{X}_n)$ і $\widehat{\mu}_k(\overline{X}_n)$ є консистенційними оцінками відповідних теоретичних величин m_k, μ_k, тому при великому об'ємі вибірки, теоретичні моменти заміняють їх статистичними аналогами

$$\widehat{m}_k = m_k(\theta)\,,\ k=\overline{1,r} \tag{2.5.1}$$

або

$$\widehat{\mu}_k = \mu_k(\theta)\,,\ k=\overline{1,r} \tag{2.5.2}$$

Складаємо таку кількість рівнянь, скільки маємо невідомих параметрів. Рівняння (2.5.1) або (2.5.2), як правило, нескладні, їх розв'язування не викликає труднощів.

Приклад 5. Нехай випадкова величина X має гама-розподіл зі щільністю

$$f(x,\lambda,\alpha)=\begin{cases}\frac{\lambda^{\alpha}x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-\lambda x}, \ x>0\\ 0, \ x\le 0\end{cases}$$

λ, α – невідомі параметри.

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}dt$$
$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$$

Знайти їхню оцінку методом моментів.

Розв'язання. Знайдемо $m_1=MX=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_0^{\infty}\frac{\lambda^{\alpha}x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}e^{-\lambda x}dx=$
$=\left|\Gamma(\alpha+1)=\int_0^{\infty}(\lambda x)^{\alpha}e^{-\lambda x}d(\lambda x)\right|=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda\Gamma(\lambda)}=\frac{\alpha}{\lambda}$.

$$m_2=MX^2=\int_0^{\infty}x^2f(x)dx=\int_0^{\infty}\frac{\lambda^{\alpha}x^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-\lambda x}dx=$$

$=\left|\Gamma(\alpha+2)=\int_0^{\infty}(\lambda x)^{\alpha+1}e^{-\lambda x}d(\lambda x)\right|=\frac{1}{\lambda^2}\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\lambda)}=\frac{1}{\lambda^2}\frac{(\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}=\frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}$.

$DX=MX^2-(MX)^2=m_2-m_1^2=\frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}-\frac{\alpha^2}{\lambda^2}=\frac{\alpha}{\lambda^2}$.

Нехай $\overline{X_n}=(X_1,\dots,X_n)$ – вибірка із генеральної сукупності X. По вибірці знаходимо $\widehat{m}_1(\overline{X_n})=\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$, $\widehat{\sigma^2}(\overline{X}_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

Згідно з методом моментів, $\begin{cases}MX=\overline{X}\\ DX=\widehat{\sigma^2}(\overline{X_n})\end{cases}$

$$\begin{cases}\frac{\alpha}{\lambda}=\widehat{m_1}\\ \frac{\alpha}{\lambda^2}=\widehat{\sigma^2}\end{cases}$$

Звідки $\lambda=\frac{\overline{X}}{\widehat{\sigma^2}}$, $\alpha=\left(\frac{\overline{X}}{\sigma}\right)^2$.

Оцінками невідомих параметрів будуть

$$\hat{\lambda}(\overline{X_n})=\frac{\overline{X}}{\widehat{\sigma^2}(\overline{X_n})}\ ; \quad \hat{\alpha}(\overline{X_n})=\left(\frac{\overline{X}}{\hat{\sigma}(\overline{X_n})}\right)^2.$$

Приклад 6. Нехай випадкова величина $\overline{X}$ розподілена за законом Пуассона з невідомим параметром λ.

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \qquad k=0,1,2,\dots$$

Методом моментів, оцінити параметр λ.

Розв'язання. Згідно з законом Пуассона, $\lambda=MX$. Тому $\hat{\lambda}(\overline{X_n})=\overline{X}$.

Ця оцінка є незсуненою, конзистенційною і ефективною в класі лінійних оцінок.

Приклад 7. Дана вибірка $\bar{X}_n = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ із генеральної сукупності X, яка розподілена за рівномірним законом із невідомими параметрами a і b . Оцінити їх методом моментів.

Розв'язання. Відомо, що для рівномірного закону $MX = \frac{a+b}{2}$; $DX = \frac{(b-a)^2}{12}$. Тому

$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{2} = \bar{X} \\ \dfrac{(b-a)^2}{12} = \widehat{\sigma^2}(\overline{X_n}) \end{cases}$$

Звідки $\hat{a}(\overline{X_n}) = \bar{X} - \sqrt{3}\hat{\sigma}(\overline{X_n})$, $\hat{b}(\overline{X_n}) = \bar{X} + \sqrt{3}\hat{\sigma}(\overline{X_n})$.

2.6 Метод максимальної правдоподібності

Метод максимальної правдоподібності є найбільш універсальним методом побудови оцінок невідомих параметрів, запропонований Р. Фішером.

Розглянемо функцію правдоподібності

$$L(X_1, \dots, X_n, \bar{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} p\,(X_i, \bar{\theta}) \qquad (2.6.1)$$

$p(x, \bar{\theta})$ – щільність ймовірності, залежить від невідомого параметра θ або вектора параметрів $\bar{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$.

Означення: ***Оцінкою максимальної правдоподібності*** параметрів $\bar{\theta}$ називають статистику $\hat{\theta}(\overline{X_n})$, значення якої для будь-якої вибірки $\overline{X_n}$ задовольняє умові

$$L(\overline{X_n}, \hat{\theta}) = \max_{\theta} L(\overline{X_n}, \bar{\theta}) \qquad (2.6.2)$$

Якщо функція $L(\overline{X_n}, \Theta)$ диференційована, як функція аргументу θ, то максимум $L(\overline{X_n}, \Theta)$ досягається в точці, яка задовольняє рівнянню

$$\frac{\partial L(\overline{X_n}, \theta)}{\partial \theta} = 0 \text{ або } \frac{\partial lnL(\overline{X_n}, \theta)}{\partial \theta} = 0. \qquad (2.6.3)$$

А максимум $L(\overline{X_n}, \bar{\theta})$ (коли $\bar{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$)

$$\frac{\partial L(\overline{X_n}, \bar{\theta})}{\partial \theta_k} = 0, \quad k = \overline{1, m} \qquad (2.6.4)$$

Рівняння (2.6.3) або (2.6.4) називаються рівняннями правдоподібності.

Для найбільш важливих сімейств розподілів $p(x,\theta)$ рівняння правдоподібності мають єдиний розв'язок.

Приклад 8. Нехай випадкова величина $\bar{X}$ – час роботи прибору до відмови, яка підкоряється експоненціальному розподілу з невідомим параметром λ. Оцінити його методом максимальної правдоподібності.

Розв'язання. Відомо, що

$$p_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, x \ge 0 \\ 0, \quad\quad x < 0 \end{cases}.$$

Функція правдоподібності має вигляд

$$L(X_1, \dots, X_n, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda X_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i}$$

$$lnL(X_1, \dots, X_n, \lambda) = nln\lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Рівняння правдоподібності має вигляд

$$\frac{\partial lnL}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} X_i = 0$$

$$\lambda = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \overline{X}$$

Так як $MX = \frac{1}{\lambda}$, то отримана відповідь виглядає зрозумілою.

Приклад 9. Для нормальної моделі $N(\theta_1, \theta_2^2)$ методом максимальної правдоподібності оцінити параметри θ_1, θ_2.

Розв'язання. Функція правдоподібності має вигляд

$$L(\overline{X_n}, \theta_1, \theta_2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta_2\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\theta_2^2}(X_i - \theta_1)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{(\theta_2\sqrt{2\pi})^n} exp\left(-\frac{1}{2\theta_2^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \theta_1)^2\right)$$

$$lnL(\overline{X_n}, \theta_1, \theta_2) = -nln\sqrt{2\pi} - nln\theta_2 - \frac{1}{2\theta_2^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \theta_1)^2$$

Рівняння правдоподібності мають вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial lnL}{\partial \theta_1} = \dfrac{1}{\theta_2^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \theta_1) = 0 \\ \dfrac{\partial lnL}{\partial \theta_2} = -\dfrac{n}{\theta_2} + \dfrac{1}{\theta_2^3}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \theta_1)^2 = 0 \end{cases}$$

Розв'язуючи систему, отримаємо:

$$\widehat{\theta_1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}\, , \widehat{\theta_2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \widehat{\sigma^2}(\overline{X_n})$$

Зауваження. Якщо генеральна сукупність X дискретна, тобто

$$X = x_i,\ P(X = x_i) = p(x_i, \theta),$$

то функція максимальної правдоподібності має вигляд

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i\,, \theta) \tag{2.6.5}$$

Значення θ знаходимо, як і у випадку неперервної генеральної сукупності, досліджуючи функцію $L(\theta)$ на максимум.

Контрольні запитання

1. Постановка задачі оцінки невідомих параметрів генеральної сукупності.
2. Що називають точковою оцінкою невідомих параметрів?
3. Яку точкову оцінку називають незсуненою?
4. Яку точкову оцінку називають консистенційною?
5. Яку точкову оцінку називають ефективною?
6. Яка точкова оцінка є незсуненою, консистенційною і ефективною в класі лінійних оцінок для математичного сподівання?
7. Яка точкова оцінка для дисперсії генеральної сукупності є: а) зсуненою; б) незсуненою? Чи є ці оцінки консистенційними?
8. Наведіть формулу для обчислення вибіркової дисперсії через початкові моменти першого і другого порядків.
9. Опишіть метод моментів оцінки невідомих параметрів (ММ).
10. Опишіть метод максимальної правдоподібності (МП) оцінки невідомих параметрів. Запишіть функцію максимальної правдоподібності. Запишіть рівняння максимальної правдоподібності.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Отримати МП - оцінку для параметра $\theta = p$ біноміального розподілу генеральної сукупності $X \sim B(n, p)$, тобто для ймовірності успіху p в будь-якому з n незалежних повторних випробувань, якщо в серії з n випробувань зафіксовано k успіхів.

2. Для нормальної генеральної сукупності $X \sim N(m, \sigma^2)$, знайти МП - оцінку параметрів m, σ^2.

3. Нехай генеральна сукупність має рівномірний розподіл: $X \sim R(a, b)$. Знайти МП - оцінки параметрів a і b.

4.Знайти МП-оцінку параметра λ для генеральної сукупності X, розподіленої за показниковим законом $X \sim E(\lambda)$.

5.Знайдіть МП - оцінку параметра λ для генеральної сукупності, розподіленої за законом Пуассона.

6. Методом моментів знайти оцінки параметрів a і b, генеральної сукупності $X \sim R(a, b)$.

7. Методом моментів знайти оцінки параметрів λ і α, генеральної сукупності $X \sim \Gamma(\lambda, \alpha)$.

8. 200 однотипних деталей були піддані шліфуванню. Результати вимірювання наведені як дискретний статистичний розподіл, поданий у табличній формі

x_i *(мм)*	3,7	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4
n_i	1	22	40	79	27	26	4	1

Знайти точкові незсунені статистичні оцінки для MX, DX, σ.

9. Граничне навантаження на сталевий болт X_i , що вимірювалось в лабораторних умовах, задано як інтервальний статистичний розподіл

X_i *км/мм*^{2}	4,5-5,5	5,5-6,5	6,5-7,5	7,5-8,5	8,5-9,5	9,5-10,5	10,5-11,5	11,5-12,5	12,5-13,5
n_i	40	32	28	24	20	18	16	12	8

Визначити точкові незсунені статистичні оцінки для MX і DX, σ.

10. Маємо такі дані про розміри основних фондів (у млн грн) на 30-ти випадково вибраних підприємствах:
4,2; 2,4; 4,9; 6,7; 4,5; 2,7; 3,9; 2,1; 5,8; 4,0; 2,8; 7,8; 4,4; 6,6; 2,0; 6,2; 7,0; 8,1; 0,7; 6,8; 9,4; 7,6; 6,3; 8,8; 6,5; 1,4; 4,6; 2,0; 7,2; 9,1.
Побудувати інтервальний статистичний розподіл із довжиною кроку $h=2$ млн грн. Знайти точкові незсунені статистичні оцінки для MX, DX, σ.

11. Дана вибірка: 3,7; 6,2; 5,2; 5,7; 6,2; 6,4; 4,7; 4,2; 6,7; 7,2; 5,2; 6,2; 4,7; 7,2; 5,2; 4,7; 5,7; 5,2; 4,7; 5,2; 5,7.
Знайти точкові незсунені статистичні оцінки для MX, DX, σ.

12. Дана вибірка: 40,25; 40,28; 40,31; 40,31; 40,31; 40,25; 40,34; 40,37; 40,40; 40,43; 40,45; 40,46; 40,25; 40,28; 40,31; 40,31; 40,31; 40,25; 40,34; 40,37; 40,40; 40,43; 40,45; 40,46.
Знайти точкові незсунені статистичні оцінки для MX, DX, σ.

Вибіркові дані представлені інтервальним статистичним розподілом. Знайти точкові незсунені статистичні оцінки для MX, DX, σ.

13.

Границі інтервалів	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11	11-13
Частоти	1	2	4	2	1	1

14.

Границі інтервалів	0-4	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24
Частоти	1	1	3	2	1	1

15.

Границі інтервалів	5-7	7-9	9-11	11-13	13-15	15-17
Частоти	8	14	40	20	6	4

16.

Границі інтервалів	2-6	6-10	10-14	14-18	18-22	22-26
Частоти	1	2	5	5	2	1

17.

Границі інтервалів	0-4	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24
Частоти	6	7	15	8	4	5

18.

Границі інтервалів	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11	11-13
Частоти	4	5	10	7	5	4

19.

Границі інтервалів	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35
Частоти	10	12	20	16	8	4

20.

Границі інтервалів	2-7	7-12	12-17	17-22	22-27	27-32
Частоти	2	5	10	7	3	3

21.

Границі інтервалів	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11	11-13
Частоти	1	3	7	2	1	1

22.

Границі інтервалів	2-6	6-10	10-14	14-18	18-22	22-26
Частоти	2	4	8	4	1	1

23.

Границі інтервалів	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11	11-13
Частоти	2	4	8	4	1	1

24.

Границі інтервалів	9-12	12-15	15-18	18-21	21-24	24-27
Частоти	1	4	11	4	4	1

25.

Границі інтервалів	0-3	3-6	6-9	9-12	12-15	15-18
Частоти	5	7	11	10	4	3

РОЗДІЛ 3. Інтервальні оцінки невідомих параметрів і довірчі інтервали

3.1 Постановка задачі побудови довірчих інтервалів

Нехай $\bar{X}_n = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ - вибірка об'єму n із генеральної сукупності X з функцією розподілу $F(x,\theta)$ з невідомим параметром θ або вектором параметрів $\bar{\theta}$.

Нехай для параметра θ побудовано інтервал ($\underline{\theta}$ $(\bar{X}_n)$, $\bar{\theta}(\bar{X}_n)$), де $\underline{\theta}(\bar{X}_n)$, $\bar{\theta}(\bar{X}_n)$ є функціями вибірки $\bar{X}_n$, такими, що виконується рівняння

$$P(\underline{\theta}(\bar{X}_n) < \theta < \bar{\theta}(\bar{X}_n)) = \gamma \qquad (3.1.1)$$

Інтервал $\underline{\theta}$ $(\bar{X}_n)$, $\bar{\theta}(\bar{X}_n)$), називають інтервальною оцінкою для параметра θ з коефіцієнтом довіри γ , а $\underline{\theta}(\bar{X}_n)$, $\bar{\theta}(\bar{X}_n)$ – відповідно нижньою і верхньою границями інтервальної оцінки.

Число γ, яке називається довірчою ймовірністю або коефіцієнтом довіри, задаємо самі. Найчастіше γ=0,9;0,95 або 0,99, тобто близьке до 1.

В деяких випадках замість рівності (3.1.1) забезпечується нерівність

$$P(\underline{\theta}(\bar{X}_n) < \theta < \bar{\theta}(\bar{X}_n)) \geq \gamma \qquad (3.1.2)$$

Або оцінюємо параметр знизу або зверху

$$P(\underline{\theta}(\bar{X}_n) < \theta) = \gamma \text{ або } P(\theta < \bar{\theta}(\bar{X}_n)) = \gamma \qquad (3.1.3)$$

Оцінки (3.1.3) називають односторонніми нижньою або верхньою довірчими границями.

3.2 Побудова інтервальної оцінки

Нехай $\bar{X}_n$ – вибірка об'єму n із генеральної сукупності X з функцією розподілу F(x,θ) з невідомим параметром θ.

Означення. ***Центральною статистикою*** $T(\bar{X}_n, \theta)$ називається статистика, функція розподілу якої $F_T(t)$=P(T($\bar{X}_n$, θ) $< t$) не залежить від параметра θ.

Будемо вважати, що

1. Функція $F_T(t)$ є неперервною і зростаючою.
2. Існують такі додатні числа α і β, що коефіцієнт довіри $\gamma = 1 - \alpha - \beta$.

3. Для будь-якої вибірки $\bar{X}_n$ функція $T(\bar{X}_{n,}\,\theta)$ є неперервною і зростаючою (або спадаючою) функцією параметра θ.

Згідно з допущенням 1, для будь-якого $q \in (0,1)$ існує єдиний корінь h_q рівняння $F_T(t) = q$, який називається квантилем рівня q функції $F_T(t)$. Таким чином,

$$P(h_\alpha < T(\bar{X}_n, \theta) < h_{1-\beta}) = F_T(h_{1-\beta}) - F_T(h_\alpha) = 1 - \beta - \alpha = \gamma, \qquad (3.2.1)$$

тобто рівняння

$$h_\alpha < T(\bar{X}_n, \theta) < h_{1-\beta} \text{ і } \underline{\theta}(\bar{X}_n) < \theta < \bar{\theta}(\bar{X}_n) \qquad (3.2.2)$$

є еквівалентними, і замість рівняння (3.1.1) будемо розв'язувати рівняння (3.2.1).

$$\gamma = P(h_\alpha < T(\bar{X}_n, \theta) < h_{1-\beta}) = P(\underline{\theta}(\bar{X}_n) < \theta < \bar{\theta}(\bar{X}_n)) \qquad (3.2.3)$$

Фактично, побудова довірчого інтервалу $(\underline{\theta}(\bar{X}_n),\ \bar{\theta}(\bar{X}_n))$ зводиться до виконання таких дій:

1) Побудова статистики $T(\bar{X}_n, \theta)$ з відомою функцією розподілу $F_T(t)$.
2) Представлення коефіцієнта довіри у вигляді $\gamma = 1 - \beta - \alpha$.
3) Находження квантилів h_α і $h_{1-\beta}$ рівнів α і $1-\beta$ як коренів рівнянь

$$T(\bar{X}_n, \underline{\theta}) = h_\alpha \quad i \quad T(\bar{X}_n, \bar{\theta}) = h_{1-\beta}, \qquad (3.2.4)$$

якщо функція T зростаюча за параметром θ, або

$$T(\bar{X}_n, \underline{\theta}) = h_{1-\beta} \quad i \quad T(\bar{X}_n, \bar{\theta}) = h_\alpha, \qquad (3.2.5)$$

якщо функція T спадна за параметром $\boldsymbol{\theta}$.

3.3 Побудова довірчого інтервалу для експоненціального розподілу

Нехай $\bar{X}_n = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ – вибірка об'єму n із генеральної сукупності X з експоненціальним законом розподілу зі щільністю

$$p(x, \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}, \text{ де } \lambda > 0 \text{ – невідомий параметр.}$$

Потрібно побудувати інтервальну оцінку параметра $\boldsymbol{\lambda}$ за даними випадкової вибірки.

Розглянемо статистику

$$T(\bar{X}_n, \lambda) = 2\lambda n\bar{X}, \text{ де } \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Xi \qquad (3.3.1)$$

Відомо, що статистика $T(\bar{X}_n, \lambda)$ має χ^2-розподіл з $2n$ ступенями вільності, тобто є центральною статистикою. Функція $T(\bar{X}_n, \lambda)$ є зростаючою за параметром λ, і тому рівняння (3.1.7) мають вигляд:

$$2\underline{\lambda}(\bar{X}_n)n\bar{X} = \chi_\alpha^{2}(2n); \quad 2\bar{\lambda}(\bar{X}_n)\, n\bar{X} = \chi^2_{1-\beta}(2n) \qquad (3.3.2)$$

Таким чином, знаходимо нижню і верхню границі довірчого інтервалу:

$$\underline{\lambda}(\bar{X}_n) = \chi_\alpha^{2}(2n)/2n\bar{X}; \quad \bar{\lambda}(\bar{X}_n) = \chi^2_{1-\beta}(2n)/2n\bar{X} \qquad (3.3.3)$$

$\chi_\alpha^{2}(2n)$, $\chi^2_{1-\beta}(2n)$ – квантилі розподілу χ^2 рівнів α і $1-\beta$ з $2n$ ступенями вільності, значення яких знаходимо за таблицею квантилів розподілу хі-квадрат.

Приклад 1. Знайти довірчий інтервал для оцінки з надійністю 0,9 невідомого параметра λ генеральної сукупності X, розподіленої за експоненціальним законом, якщо дано вибіркова середня $\bar{X}$=14 та об'єм вибірки n= 25**.**

Розв'язання. Довірчий інтервал для невідомого параметра λ знаходимо за формулами (3.3.3). Нехай $\alpha = \beta$. Тоді $\gamma = 1-\beta-\alpha = 1-2\alpha = 0{,}9$. Звідки $\alpha = 0{,}05$; $1-\beta = 0{,}95$. За таблицею значень розподілу хі-квадрат знаходимо квантилі

$$\chi_\alpha^{2}(2n) = \chi^2_{0,05}(50) = 28{,}0; \quad \chi^2_{1-\beta}(2n) = \chi^2_{0,95}(50) = 67{,}5.$$

$$\underline{\lambda}(\bar{X}_n) = 28{,}0/(2\cdot 25\cdot 14) = 0{,}04; \quad \bar{\lambda}(\bar{X}_n) = 67{,}5/(2\cdot 25\cdot 14) = 0{,}096.$$

Відомо, що для експоненціального розподілу $\lambda = 1/MX$, тому $\lambda \approx \frac{1}{\bar{X}} = \frac{1}{14} = 0{,}07$. Тому результат $P(0{,}04 < \lambda < 0{,}096) = 0{,}9$ виглядає достовірно.

3.4 Побудова довірчого інтервалу для оцінки математичного сподівання нормального розподілу (дисперсія σ² відома)

Нехай $\bar{X}_n = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ - вибірка об'єму n із генеральної сукупності X, розподіленої за нормальним законом з параметрами μ, σ^2, де μ-невідомо, σ^2-відомо. Статистика

$$T(\bar{X}_n, \mu) = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \qquad (3.4.1)$$

має стандартний нормальний розподіл та є центральною.

Функція (3.4.1) є спадаючою за параметром μ, тому рівняння (3.1.8) мають вигляд

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\underline{\mu}(\bar{X}n))}{\sigma} = u_{1-\beta}; \quad \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\bar{\mu}(\bar{X}n))}{\sigma} = u_\alpha \qquad (3.4.2)$$

де $u_{1-\beta}$, u_α - квантилі рівня 1-β і α нормального стандартного розподілу ($u_{1-\alpha}$= - u_α).

$$\underline{\mu}(\bar{X}_n) = \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\beta}; \quad \bar{\mu}(\bar{X}_n) = \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha}; \quad P(\underline{\mu}(\bar{X}_n) < \mu < \bar{\mu}(\bar{X}_n)) = \gamma \qquad (3.4.3)$$

Приклад 2. Знайти довірчий інтервал для оцінки з надійністю 0,95 невідомого генерального середнього μ нормально розподіленої ознаки X генеральної сукупності, якщо генеральне середнє квадратичне відхилення σ=5, вибіркова середня $\bar{X}$=14 та об'єм вибірки n= 25.

Розв'язання. Довірчий інтервал для невідомого генерального середнього знаходимо за формулою (3.4.3). Нехай $\alpha = \beta$. Тоді $\gamma = 1 - \beta - \alpha = 1 - 2\alpha = 0{,}95$. Звідки $\alpha = 0{,}025$; $1 - \beta = 0{,}975$. За таблицею квантилів нормального стандартного розподілу $N(0,1)$ знаходимо квантилі

$$u_{1-\beta} = u_{1-\alpha} = u_{0,975} = 1{,}960.$$

Шуканий довірчий інтервал:

$$\underline{\mu}(\bar{X}_n) = \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\beta} = 14 - \frac{5}{\sqrt{25}} \cdot 1{,}96 = 12{,}04;$$

$$\bar{\mu}(\bar{X}_n) = \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha} = 14 + \frac{5}{\sqrt{25}} \cdot 1{,}96 = 15{,}96;$$

$$P(\underline{\mu}(\bar{X}_n) < \mu < \bar{\mu}(\bar{X}_n)) = P(12{,}04 < \mu < 15{,}96) = 0{,}95.$$

Приклад 3. Знайти мінімальний об'єм вибірки n, при якому з надійністю 0,975 точність оцінки середнього μ генеральної сукупності по вибірковій середній буде дорівнювати ε=0,3, якщо відомо середнє квадратичне відхилення σ=1,2 нормально розподіленої генеральної сукупності.

Розв'язання. За умовою задачі: $P(|\mu(\bar{X}_n) - \mu| < \varepsilon) = 0{,}975$. Перейдемо до нормованих статистик:

$$P\left(\frac{|\mu(\bar{X}_n) - \mu|}{\sqrt{D(\bar{X}_n)}} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{D(\bar{X}_n)}}\right) = 0{,}975; \quad \sqrt{D(\bar{X}_n)} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow$$

$$P\left(\frac{|\mu(\bar{X}_n) - \mu|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{\varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = \Phi_0\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(-\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi_0\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma}\right) = 0{,}975 \Rightarrow$$

$\Phi_0\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma}\right) = 0{,}4875$. За таблицею значень функції Лапласа $\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma} = 2{,}24$. Звідки $\frac{\sqrt{n} \cdot 0{,}3}{1{,}2} = 2{,}24 \Rightarrow n = 2{,}24^2 \cdot 16 = 81$.

Відповідь: мінімальний об'єм вибірки n, при якому з надійністю 0,975 точність оцінки середнього μ генеральної сукупності по вибірковій середній буде дорівнювати ε=0,3, якщо відомо середнє квадратичне відхилення σ=1,2 нормально розподіленої генеральної сукупності, дорівнює 81.

3.5 Побудова довірчого інтервалу для оцінки математичного сподівання нормального розподілу (дисперсія σ^2 невідома)

Нехай $\bar{X}_n = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ – вибірка об'єму n із генеральної сукупності X, розподіленої за нормальним законом з параметрами μ, σ^2, де μ-невідомо, σ^2-невідомо. Потрібно побудувати довірчий інтервал для математичного сподівання μ при невідомій дисперсії σ^2.

При невідомій дисперсії статистика

$$T(X_n\,,\mu)=\frac{\bar{X}-\mu}{S(\bar{X}n)}\sqrt{n} \qquad (3.5.1)$$

розподілена за законом Стьюдента з $(n-1)$ ступенями вільності, не залежить від μ, σ^2 і є центральною.

Функція (3.5.1) є спадаючою по параметру μ,тому нижня і верхня границі довірчого інтервалу знаходимо за формулою (3.1.8), яка має вигляд

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\underline{\mu}(\bar{X}n))}{S(\bar{X}n)}=t_{1-\beta}(n-1); \qquad \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\bar{\mu}(\bar{X}n))}{S(\bar{X}n)}=t_{\alpha}(n-1) \qquad (3.5.2)$$

$t_{1-\beta}(n-1)$, $t_{\alpha}(n-1)$ - квантилі розподілу Стьюдента рівнів 1- β і α з $(n-1)$ ступенями вільності, $S^2(\bar{X}_n)$ – виправлена вибіркова дисперсія.

$$S^2(\bar{X}_n)=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

$S(\bar{X}_n)=\sqrt{S^2(\bar{X}_n)}$ – виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення.

Відомо, що $t_{\alpha}(n-1)=-\,t_{1-\alpha}(n-1)$

$$\underline{\mu}(\bar{X}_n)=\bar{X}-\frac{S(\bar{X}n)}{\sqrt{n}}\,t_{1-\beta}(n-1);\ \bar{\mu}(\bar{X}_n)=\bar{X}+\frac{S(\bar{X}n)}{\sqrt{n}}\,t_{1-\alpha}(n-1);$$

$$P(\underline{\mu}(\bar{X}_n)<\mu<\bar{\mu}(\bar{X}_n))=\gamma \qquad (3.5.3)$$

Значення квантилів $t_{1-\beta}$ і $t_{1-\alpha}$ знаходимо за таблицею квантилів розподілу Стьюдента.

Приклад 4. З генеральної сукупності отримана вибірка об'єму n=10:

варіанта	x_i	-2	1	2	3	4	5
частота	n_i	2	1	2	2	2	1

Оцінити з надійністю 0,95 математичне сподівання μ нормально розподіленої генеральної сукупності (σ^2 невідома).

Розв'язання. Довірчий інтервал для невідомого генерального середнього знаходимо за формулою (3.5.3). Нехай $\alpha=\beta$. Тоді $\gamma=1-\beta-\alpha=1-2\alpha=0{,}95$. Звідки $\alpha=0{,}025$; $1-\beta=0{,}975$. За таблицею квантилів розподілу Стьюдента знаходимо квантилі

$$t_{1-\beta}(n-1)=t_{1-\alpha}(n-1)=t_{0,975}(9)=2{,}262.$$

Вибіркову середню й виправлене середнє квадратичне відхилення знайдемо відповідно за формулами:

$$\bar{X}=\frac{\sum n_i x_i}{n},\quad \bar{S}=\sqrt{\frac{\sum n_i(x_i-\bar{X})^2}{n-1}}.$$

Підставивши в ці формули дані задачі, одержимо $\bar{X}$= 2, $\bar{S}$ = 2,4.

Шуканий довірчий інтервал:

$$\underline{\mu}(\bar{X}_n)=\bar{X}-\frac{S(\bar{X}n)}{\sqrt{n}}\,t_{1-\beta}(n-1)=2-\frac{2,4}{\sqrt{10}}\cdot 2,262\approx 0,3;$$

$$\bar{\mu}(\bar{X}_n)=\bar{X}+\frac{S(\bar{X}n)}{\sqrt{n}}\,t_{1-\alpha}(n-1)=2+\frac{2,4}{\sqrt{10}}\cdot 2,262\approx 3,7.$$

Шуканий довірчий інтервал $0,3<\mu<3,7$, який накриває невідоме генеральне середнє μ з надійністю 0,95.

3.6 Побудова довірчого інтервалу для оцінки середньоквадратичного відхилення нормального розподілу (μ-невідомо, дисперсія σ^2 невідома)

Нехай $\bar{X}_n=(X_1,X_2,\dots,X_n)$ – вибірка об'єму n із генеральної сукупності X, розподіленої за нормальним законом з параметрами μ, σ^2, де μ-невідомо, σ^2-невідома. Потрібно побудувати довірчий інтервал для середнього квадратичного відхилення σ.

Статистика

$$T(\bar{X}_n\,,\sigma)=\frac{(n-1)S^2(\bar{X}_n)}{\sigma^2} \qquad (3.6.1)$$

є центральною, має χ^2-розподіл з (n-1) ступенями вільності, $T(\bar{X}_n\,,\sigma)$ є функція спадна по параметру **σ**.Тому нижню і верхню границі довірчого інтервалу знаходимо за формулами (3.1.8), які мають вигляд

$$\underline{\sigma}(\bar{X}_n)=\frac{S(\bar{X}_n)\sqrt{n-1}}{\sqrt{\chi^2_{1-\beta}(n-1)}};\ \bar{\sigma}(\bar{X}_n)=\frac{S(\bar{X}_n)\sqrt{n-1}}{\sqrt{\chi^2_{\alpha}(n-1)}};\ P(\underline{\sigma}(\bar{X}_n)<\sigma<\bar{\sigma}(\bar{X}_n))=\gamma \qquad (3.6.2)$$

$\chi^2_\alpha(n-1), \chi^2_{1-\beta}(n-1)$ – квантилі розподілу χ^2 з $(n-1)$ ступенями вільності, які знаходяться за таблицею квантилів розподілу χ^2 .

Приклад 5. Із партії однотипних високоомних опорів відібрано 10 штук. У кожного з них виміряні відхилення опору від номінального значення:

Номер приладу	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Відхилення	1	3	-2	2	4	2	5	3	-2	4

Припускаючи, що контрольована ознака має нормальний розподіл, знайти значення вибіркового середнього $\bar{X}$ і виправленої вибіркової дисперсії $S^2(\bar{X}_n)$, а також довірчий інтервал для дисперсії з коефіцієнтом довіри $\gamma=0,96$.

Розв'язання. $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\frac{1}{10}(1+3-2+2+4+2+5+3-2+4)=2$

$$S^2(\bar{X}_n)=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\frac{1}{9}(1+1+16+4+9+1+16+4)\approx 5,88$$

Нехай $\alpha=\beta$. Тоді $\gamma=1-\beta-\alpha=1-2\alpha=0,96$. Звідки $\alpha=0,02$; $1-\beta=0,98$. Щоб побудувати довірчий інтервал для дисперсії скористуємося статистикою (3.6.1). За таблицею квантилів розподілу χ^2 знаходимо квантилі $\chi^2_\alpha(n-1), \chi^2_{1-\beta}(n-1)$:

$$\chi^2_\alpha(n-1) = \chi^2_{0,02}(9) = 2{,}09; \quad \chi^2_{1-\beta}(n-1) = \chi^2_{0,98}(9) = 21{,}07.$$

Границі довірчого інтервалу знаходимо за формулами:

$$\underline{\sigma}^2(\bar{X}_n) = \frac{S^2(\bar{X}_n)(n-1)}{\chi^2_{1-\beta}(n-1)} = \frac{9\cdot 5{,}88}{21{,}07} = 2{,}44\,; \quad \bar{\sigma}^2(\bar{X}_n) = \frac{S^2(\bar{X}_n)(n-1)}{\chi^2_\alpha(n-1)} = \frac{9\cdot 5{,}88}{2{,}09} = 24{,}89$$

Відповідь: довірчий інтервал для дисперсії з коефіцієнтом довіри 0,96: (2,4;24,9)

Контрольні запитання

1. Постановка задачі побудови інтервальної оцінки невідомого параметра θ генеральної сукупності X.
2. Що називається інтервальною оцінкою невідомого параметра θ? Що називається рівнем довіри, нижньою і верхньою границями довірчого інтервалу?
3. Яку статистику називають центральною?
4. Опишіть алгоритм побудови довірчого інтервалу.
5. Яку статистику використовують для побудови інтервальної оцінки для параметра λ експоненціального розподілу? Наведіть формули нижньої і верхньої границь довірчого інтервалу.
6. Яку статистику використовують для побудови інтервальної оцінки параметра μ нормального розподілу при відомій дисперсії σ^2? Наведіть формули нижньої і верхньої границь довірчого інтервалу.
7. Яку статистику використовують для побудови довірчого інтервалу параметра μ нормального розподілу при невідомій дисперсії? Наведіть формули нижньої і верхньої границь довірчого інтервалу.
8. Яку статистику використовують для інтервальної оцінки параметра σ нормального розподілу? Наведіть формули нижньої і верхньої границь довірчого інтервалу для σ.

Задачі для самостійного розв’язування

1. Проведено 20 дослідів над величиною X. Результати наведені в таблиці:

i	x_i	I	x_i
1	10,9	11	10,8
2	10,7	12	10,3
3	11,0	13	10,5
4	10,5	14	10,8
5	10,6	15	10,9
6	10,4	16	10,6
7	11,3	17	11,3
8	10,8	18	10,8

9 10	11,2 10,9	19 20	10,9 10,7

Потрібно знайти оцінку для математичного сподівання величини X і побудувати довірчий інтервал, який відповідає довірчій ймовірності γ=0,86.

2. За даними 7 вимірювань деякої величини знайдені середня результатів вимірювань, що дорівнює 30, і вибіркова дисперсія, яка дорівнює 36. Знайдіть границі, в яких з надійністю 0,99 укладено справжнє значення вимірюваної величини.

3. Будівельна компанія хоче оцінити середню вартість ремонтних робіт, що виконуються для клієнтів. Яким повинен бути обсяг вибірки серед 1200 клієнтів будівельної фірми, якщо середнє відхилення за результатами пробного обстеження склало 850 у.о., а гранична помилка вибірки не повинна перевищувати 200 у.о. з ймовірністю 0,95?

4. З партії об'ємом 500 однорідних товарів для перевірки за схемою випадкової безповторної вибірки відібрано 70 товарів, серед яких виявилося 56 небракованих. Знайдіть ймовірність того, що частка бракованих товарів у всій партії відрізняється від отриманої частки у вибірці не більше ніж на 0,02 (по абсолютній величині), а також границі, в яких з надійністю 0,96 знаходиться частка бракованих товарів у всій партії.

5. Визначити довірчий інтервал для оцінки з надійністю γ = 0,95 невідомого математичного сподівання μ нормально розподіленої ознаки X генеральної сукупності, якщо відомо вибіркове середнє $\overline{X}$= 14, обсяг вибірки n = 25 і генеральне середнє відхилення σ = 5.

6. Дана вибірка:

x_k	-17,5	-12,5	-7,5	-2,5	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5
n_k	7	11	15	24	49	41	26	17	7	3

Вважаючи, що досліджувана якісна ознака X є неперервною нормально розподіленою величиною з невідомими параметрами m і σ:
а) скласти функцію щільності ймовірності теоретичного розподілу генеральної сукупності на основі знайдених параметрів вибірки;
б) знайти довірчий інтервал для оцінки математичного сподівання m з надійністю γ = 0,95.

7. Комітетом з фізичної культури і спорту були проведені дослідження спортсменів, які займаються стрільбою. Було відібрано 200 стрільців з 4000 для визначення середньої кількості патронів, необхідних одному спортсмену для одного тренування. Результати обстеження наведені в таблиці:

Число патронів (шт.)	< 200	200-300	300-400	400-500	500-600	600-700	>700
Число спортсменів	8	35	50	50	30	20	7

а) Перейти до варіаційного ряду і побудувати полігон частот.
б) Знайти вибіркову середню, вибіркову дисперсію, виправлену вибіркову дисперсію, виправлене вибіркове середньоквадратичне відхилення випадкової величини.
в) Побудувати довірчий інтервал для генеральної середньої та генерального середньоквадратичного відхилення з заданим рівнем довірчої ймовірності γ = 0,95.

8. Сталу величину виміряно 25 разів за допомогою приладу, систематична похибка якого дорівнює 0 , а випадкові похибки замірів розподілені за нормальним законом з середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 10$ м. Знайти границі довірчого інтервалу для величини, що вимірюється, якщо коефіцієнт довіри $\gamma = 0{,}99,$ а $\overline{\mathrm{X}} = 100$м.

9. Оцінка вимірюваної величини задана формулою $\bar{X}$=$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Результати окремих вимірювань не мають систематичної похибки і розподілені за нормальним законом з $\sigma = 2{,}1$. Знайти границі довірчого інтервалу для вимірюваної величини, якщо коефіцієнт довіри $\gamma = 0{,}9,$ а $n = 10$.

10. Середня квадратична похибка висотоміру $\sigma = 15$ м. Скільки потрібно мати таких приладів на літаку, щоб з достовірністю 0,99 похибка вимірювань середньої висоти $\bar{X}$ була менша 30 м? При цьому випадкові похибки розподілені за нормальним законом, а системні похибки відсутні.

11. На основі 100 дослідів було визначено, що в середньому для виробництва деталей потрібно $\bar{t} = 5{,}5$ с, а $\sigma_t = 1{,}7$ с. Знайти границі довірчого інтервалу для математичного сподівання виробництва деталі, якщо коефіцієнт довіри $\gamma = 0{,}8$ і час для виробництва деталей – випадкова величина розподілена за нормальним законом.

12. За результатами вимірів 100 резисторів, випадково відібраних з великої партії резисторів, отримана оцінка опору $\bar{X} = 10$ кОм. Знайти:
а) ймовірність того, що для резисторів всієї партії значення опору знаходяться в границях (10$\pm$0,1) кОм, якщо середнє квадратичне відхилення σ відомо і $\sigma = 1$ кОм;
б) кількість вимірювань n, при якому з ймовірністю 0,95 можна стверджувати, що для всієї партії резисторів значення опору лежать в границях (10$\pm$0,1) кОм.

13. Провели 5 незалежних замірів для визначення заряду електрона, отримали наступні результати: $4{,}781\cdot10^{-10}$; $4{,}782\cdot10^{-10}$; $4{,}785\cdot10^{-10}$; $4{,}779\cdot10^{-10}$; $4{,}769\cdot10^{-10}$. Знайти значення оцінки величини заряду електрона і довірчий інтервал з коефіцієнтом довіри 0,99, якщо похибки замірів розподілені за нормальним законом.

14. На контрольних іспитах 16-ти ламп були знайдені значення оцінок математичного сподівання і середньоквадратичного відхилення їх строку роботи, $\overline{\mathrm{X}} = 3000$ год і $\hat{\sigma} = 20$ год. Припускаючи, що контрольована ознака (строк роботи лампи) має нормальний розподіл, знайти:
а) довірчий інтервал для математичного сподівання з довірчою ймовірністю 0,9;
б) ймовірність, з якою можна стверджувати, що абсолютна похибка виміру μ не більша десяти годин.

15. Знайти 90% довірчий інтервал для математичного сподівання ємності конденсатора, якщо $\overline{\mathrm{X}} = 20$ мкФ, n= 16, σ – відома і $\sigma = 4$ мкФ.

16. Знайти 99% довірчий інтервал для математичного сподівання часу безвідмовної роботи електролампи, якщо $\overline{\mathrm{X}} = 500$ год, n= 100, σ – відома і $\sigma = 10$ год.

17. Знайти 90% довірчий інтервал для математичного сподівання діаметра валу, якщо $\overline{\mathrm{X}} = 30$ мм, n= 9 і $S^2 = 9$ мм^2.

18.Знайти 98% довірчий інтервал для математичного сподівання вмісту вуглецю в одиниці продукту, якщо $\overline{\mathrm{X}} = 18$ г, n= 25 і $S^2 = 16$ г.

19. $\overline{\mathrm{X}} = 29$ мм, n= 16 і $S^2 = 4{,}5$ мм^2. Знайти 99% довірчий інтервал для дисперсії.

20. $\overline{\mathrm{X}} = 480$ год, n= 64 і $S^2 = 100$ год. Знайти 90% довірчий інтервал для дисперсії і середнього квадратичного відхилення.

21. $\overline{\mathrm{X}} = 18{,}8$ г, n= 9 і $S^2 = 20$ г^2. Знайти 99% довірчий інтервал для дисперсії і середнього квадратичного відхилення.

22. Із великої партії транзисторів одного типу випадковим чином були відібрані і перевірені 100 штук. У 36 транзисторів коефіцієнт посилення менший 10. Знайти 95% довірчий інтервал для долі таких транзисторів у всій партії.

23. При догляді 60-ти ящиків було знайдено 10 пошкоджених. Знайти 90% довірчий інтервал для долі таких ящиків у всій партії.

24. На кожній з 36 АТС міста в період з 2 до 3 годин було зафіксовано в середньому два дзвінка. Вважаючи, що число дзвінків для кожної з АТС має розподіл Пуассона з параметром λ, знайти довірчий інтервал для λ з довірчою ймовірністю 0,9.

25. Середнє число відмов за добу для 100 ЕОМ одного типу дорівнює 2,3. Вважаючи, що число відмов має розподіл Пуассона з параметром λ, знайти довірчий інтервал для λ з довірчою ймовірністю 0,95.

РОЗДІЛ 4. Перевірка статистичних гіпотез

4.1 Основні поняття

В багатьох випадках результати спостережень використовують для перевірки гіпотез відносно тих чи інших якостей розподілу генеральної сукупності *X*. Такого роду задачі виникають при порівнянні різних технологічних процесів або методів обробки по деяким замірам, ознакам, наприклад, по точності, продуктивності.

Нехай *X* – дискретна або неперервна випадкова величина. ***Статистичною гіпотезою*** *H* називається припущення відносно параметрів або виду розподілу випадкової величини.

Статистична гіпотеза називається *простою*, якщо вона однозначно задає розподіл випадкової величини, в іншому разі – *складною*. Наприклад, простою гіпотезою є припущення про те, що випадкова величина *X* розподілена за нормальним законом з $N(0,\ 1)$; якщо допускається, що випадкова величина *X* має нормальний розподіл з $N(m,\ 1)$, де $a < m < b$, то гіпотеза є складною.

Часто розподіл випадкової величини *X* відомий, а по виборці спостережень необхідно перевірити припущення про знання параметрів цього розподілу. Такі гіпотези називаються параметричними. В цьому параграфі будемо розглядати параметричні гіпотези.

Отже задача ставиться так:

Нехай маємо вибірку $\overline{X_n} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ із генеральної сукупності *X*, закон розподілу якої $F_X(\overline{X_n}, \theta)$ відомий з точністю до невідомого параметра θ або вектора параметра $\bar{\theta}$. За допомогою вибірки треба дати оцінки невідомих параметрів. Для цього формулюється основна (нульова) гіпотеза H_0 і альтернативна (конкуруюча) гіпотеза H_1 відносно значення невідомого параметра θ.

Наприклад:

$$H_0: \theta = \theta_0; \quad H_1: \theta = \theta_1 \ (\theta_0 < \theta_1) \qquad (4.1.1)$$

(4.1.1) – приклад простої гіпотези.

Або:

$$H_0: \theta = \theta_0;\ H_1^{(1)}: \theta > \theta_0;\ H_1^{(2)}: \theta < \theta_0;\ H_1^{(3)}: \theta \neq \theta_0 \qquad (4.1.2)$$

(4.1.2) – приклад складної гіпотези.

Вибір альтернативної гіпотези залежить від поставленої задачі.

Правило, за яким приймається рішення прийняти або відхилити гіпотезу H_0 називається критерієм *K*. Так як рішення приймається на основі вибірки спостережень випадкової величини *X,* необхідно вибрати статистику, яку називають статистикою *Z* критерія *K*. При перевірці простої статистичної гіпотези $H_0: \theta = \theta_0$ за статистику критерію беруть ту саму статистику, що і для оцінки параметра θ, тобто $\hat{\theta}$.

Перевірка статистичної гіпотези будується на принципі, згідно з яким ***малоймовірні події вважаються неможливими***, а події, які мають ***велику ймовірність – достовірними***. Цей принцип можна реалізувати наступним чином:

перед аналізом вибірки фіксується деяка мала ймовірність α, яка називається ***рівнем значущості критерію.*** На практиці α = 0,1; α = 0,05; α =0,005.

Нехай V – множина значень статистики Z, а $V_K \subseteq V$ – така підмножина, що за умови істинності гіпотези H_0 ймовірність попадання статистики критерія у V_K дорівнює α, тобто

$$P(Z \in V_K|H_0) = \alpha \quad (4.1.3)$$

Позначимо $Z_в$ вибіркове значення статистики Z, яка обчислюється за вибіркою $\overline{X_n}$.

Критерій формулюється наступним чином:

якщо $Z_K \in V_K$, відхилити гіпотезу H_0,

якщо $Z_K \in V \backslash V_K$, прийняти гіпотезу H_0. (4.1.4)

Такий критерій називають критерієм значущості. Множину V_K всіх значень статистики критерія Z, при яких приймається рішення відхилити гіпотезу H_0, називають критичною областю, область $V \backslash V_K$ називають областю прийняття гіпотези H_0.

Рівень значущості α задає «розмір» критичної області V_K. Положення критичної області на множині значень статистики Z залежить від формулювання альтернативної гіпотези H_1.

Якщо перевіряється гіпотеза $H_0\colon \theta = \theta_0$, а альтернативна гіпотеза $H_1\colon \theta > \theta_0$ $(\theta < \theta_0)$, то критична область розміщується на правому (лівому) кінці розподілу статистики Z, тобто має вигляд нерівності:

$$Z < Z_{\frac{\alpha}{2}} \ (Z > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}), \quad (4.1.5)$$

де $Z_{1-\alpha}$ і Z_α – квантилі розподілу статистики Z, за умови, що гіпотеза H_0 вірна. В цьому випадку, критерій називається одностороннім, відповідно правостороннім або лівостороннім.

Якщо альтернативна гіпотеза H_1 формулюється так: $H_1\colon \theta \neq \theta_0$, то критична область розміщується по обидва боки розподілу Z, тобто задається сукупністю нерівностей

$$Z < Z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ і } Z > Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \quad (4.1.6)$$

В цьому випадку, критерій називається двостороннім.

На рис. (4.1.1) показано розташування критичної області V_K для різних альтернативних гіпотез.

$f_z(Z|H_0)$ – щільність розподілу статистики Z, за умови, що вірна гіпотеза H_0, $V \backslash V_K$ – область прийняття гіпотези, $P(Z \in V \backslash V_K) = 1 - \alpha$.

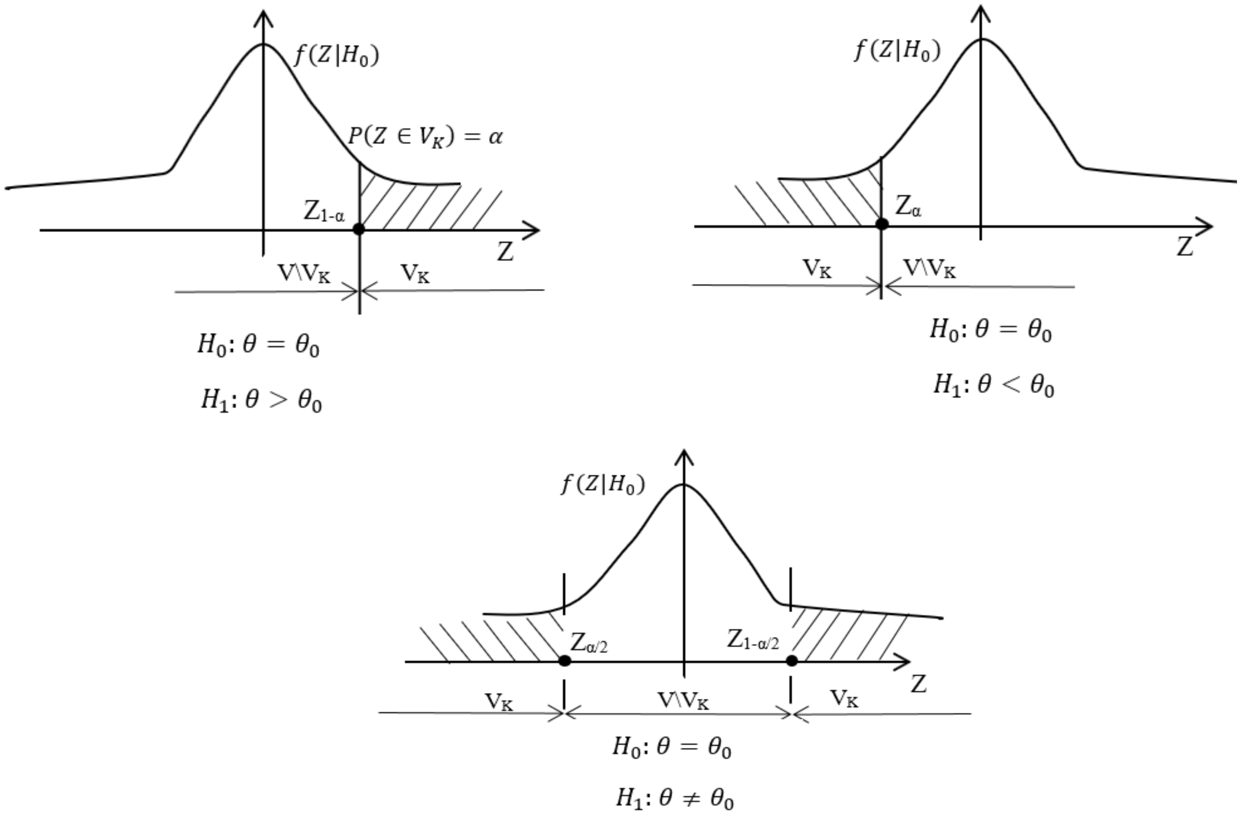


рис. 4.1.1

Таким чином, перевірка параметричної гіпотези розділена на етапи:

1) сформулювати основну H_0 і альтернативну H_1 гіпотези;
2) призначити рівень значущості α;
3) вибрати статистику Z критерію для перевірки гіпотези H_0;
4) визначити закон розподілу статистики Z за умови, що гіпотеза H_0 вірна: $F(Z|H_0)$;
5) в залежності від формулювання альтернативної гіпотези H_1, визначити критичну область V_K однією із нерівностей $Z > Z_{1-\alpha}, Z < Z_\alpha$ або сукупністю нерівностей $Z > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ і $Z < Z_{\frac{\alpha}{2}}$;
6) отримати вибірку спостережень і обчислити вибіркове значення статистики $Z_в$ критерію;
7) прийняти статистичне рішення:
   якщо $Z_в \in V_K$, то відхилити гіпотезу H_0, як неузгоджену з результатами спостережень;
   якщо $Z_в \in V \backslash V_K$, то прийняти гіпотезу H_0, як ту, що не протирічить результатам спостережень.

Зауваження. На етапах 4) – 7) використовують статистику, квантилі якої затабульовані; статистику з нормальним розподілом $N(0,1)$, статистику Стьюдента, статистику χ^2 або статистику Фішера.

Статистичне рішення може бути помилковим, при цьому розподіляють помилки першого і другого роду. Помилка першого роду виникає, якщо гіпотеза

H_0 відхиляється, коли вона є вірною. Ймовірність помилки першого роду дорівнює рівності значущості критерію α.

$$P(Z \in V_K | H_0) = \alpha \qquad (4.1.7)$$

Помилка другого роду виникає, якщо гіпотеза H_0 приймається, але в дійсності вірна альтернативна гіпотеза H_1. Помилка другого роду обчислюється за формулою (4.1.8) при заданому *α*.

$$P(Z \in V \backslash V_K | H_1) = \beta \qquad (4.1.8)$$

Величину $1 - \beta$, яка дорівнює ймовірності відхилити основну гіпотезу H_0, коли вона невірна, називають ***потужністю критерію.***

$$1 - \beta = P(Z \in V_K | H_1) \qquad (4.1.9)$$

При побудові критерію виходять із необхідності ***максимізації потужності*** критерію $1 - \beta$ при ***заданому рівні значущості α.***

4.2 Порівняння вибіркової середньої й генеральної середньої нормальної сукупності у випадку, коли генеральна дисперсія σ^2 відома

Нехай $\overline{X_n}$ вибірка із генеральної сукупності X, яка розподілена за нормальним законом $N(m, \sigma^2)$, де m – математичне сподівання невідоме, а σ^2 – дисперсія відома.

Правило. Для того, щоб на заданому рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу $H_0\colon m = m_0$ про рівність генеральної середньої *m* нормальної сукупності з відомою дисперсією σ^2 гіпотетичному значенню m_0 при альтернативній гіпотезі $H_1\colon m \neq m_0$, потрібно обчислити спостережувальне значення критерію

$$U_{\text{виб}} = \frac{\bar{X} - m_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \qquad (4.2.1)$$

і по таблиці значень функції Лапласа знайти критичну точку $U_{\text{кр}}$ двосторонньої критичної області із рівності

$$\Phi(U_{\text{кр}}) = (1 - \alpha)/2 \qquad (4.2.2)$$

При альтернативній гіпотезі $H_1 : m > m_0$ критичну точку правосторонньої критичної області знаходять із рівності

$$\Phi(U_{\text{кр}}) = (1 - 2\alpha)/2 \qquad (4.2.3)$$

При альтернативній гіпотезі $H_1 : m < m_0$ допоміжну критичну точку $U_{\text{кр}}'$ знаходять за формулою (4.2.3), а границю лівосторонньої критичної області знаходять із рівності

$$U_{\text{кр}} = -U_{\text{кр}}' \qquad (4.2.4)$$

У випадку $H_1\colon m \neq m_0$:

- якщо $|U_{виб}| < U_{кр}$, то немає підстав відхилити нульову гіпотезу H_0;
- якщо $|U_{виб}| > U_{кр}$, то нульову гіпотезу H_0 відхиляють на користь альтернативної.

У випадку $H_1: m > m_0$ або $H_1: m < m_0$:

- якщо $U_{виб} < U_{кр}$, то немає підстав відхилити нульову гіпотезу H_0;
- якщо $U_{виб} > U_{кр}$, то нульову гіпотезу H_0 відхиляють на користь альтернативної.

Потужність критерію перевірки нульової гіпотези $H_0: m = m_0$ про рівність генеральної середньої m нормальної сукупності з відомою дисперсією σ^2 гіпотетичному значенню m_0 знаходять в залежності від вигляду альтернативної гіпотези.

Потужність критерію при альтернативній гіпотезі $H_1: m > m_0$ для гіпотетичного значення генеральної середньої $m = m_1 > m_0$ знаходимо за формулою

$$1 - \beta = 0{,}5 - \Phi(U_{кр} - \lambda) \qquad (4.2.5)$$

де $U_{кр}$ обчислюємо за формулою (4.2.3), а $\lambda = (m_1 - m_0)\sqrt{n}/\sigma$.

При альтернативній гіпотезі H_1: $m \neq m_0$ для гіпотетичного значення генеральної середньої $m = m_1 > m_0$ потужність двостороннього критерію знаходимо за формулою

$$1 - \beta = 1 - (\Phi(U_{кр} - \lambda) + \Phi(U_{кр} + \lambda)) \qquad (4.2.6)$$

де $U_{кр}$ обчислюємо за формулою (4.2.2), а $\lambda = (m_1 - m_0)\sqrt{n}/\sigma$.

Перевірку гіпотези проведемо на прикладі задачі.

Приклад 1. За паспортними даними автомобільного двигуна витрати палива на 100 км пробігу складають 10 л. В результаті змін конструкції двигуна очікується, що витрати палива зменшаться. Для перевірки проводяться іспити 25 випадково відібраних автомобілів з модернізованим двигуном, вибіркове середнє, за результатами іспитів, дорівнює $\bar{X} = 9{,}3$ л. Припустимо, що вибірка витрат палива отримана із нормально розподіленої генеральної сукупності X з невідомим середнім m і дисперсією $\sigma^2 = 4$ л^2.

Використовуючи критерій значущості, перевіримо гіпотезу, яка стверджує, що зміни конструкції автомобіля не вплинуть на витрати палива.

Перевірку гіпотези проведемо за етапами:

1) сформулюємо основну і альтернативну гіпотези:

$$H_0: m = 10 \text{ л}, \ H_1: m < 10 \text{ л};$$

2) виберемо α рівень значущості α=0,05;
3) за статистику критерію виберемо оцінку математичного сподівання – вибіркове середнє $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$;

4) так як вибірка отримана із нормально розподіленої генеральної сукупності $N(m, \sigma^2 = 4 \text{ л}^2)$, то вибіркове середнє $\bar{X}$ має нормальний розподіл з дисперсією $\frac{\sigma^2}{n} = \frac{4}{n}$; $\bar{X} \in N\left(m, \frac{\sigma^2}{4}\right)$. За умови, що гіпотеза H_0 вірна, математичне сподівання $m = 10$ л.

Нормована статистика критерію $U = \frac{\bar{X}-m}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} = \frac{\bar{X}-10}{\sqrt{\frac{4}{25}}}$ має нормальний стандартний розподіл $N(0,1)$;

5) альтернативна гіпотеза $H_1 : m < 10$ допускає зменшення витрат палива, тому треба використовувати односторонній критерій. Критичну область задаємо нерівністю $U < U_{\text{кр}}$, де $U_{\text{кр}} = U_\alpha$ – квантиль нормального стандартного розподілу рівня α.

За таблицею квантилів знаходимо $U_\alpha = U_{0,05} = U_{1-0,95} = -1{,}645$;

6) вибіркове значення нормованої статистики критерія

$$U_{\text{в}} = \frac{\bar{X} - m}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} = \frac{9{,}3 - 10}{\sqrt{\frac{4}{25}}} = -1{,}75;$$

7) статистичне рішення:

так як $U_{\text{в}} < U_\alpha$ $(-1{,}75 < -1{,}645)$, то $U_{\text{в}} \in V_K$ (вибіркове значення статистики належить критичній області), і тому гіпотеза H_0 відхиляється на рівні значущості α. Слід вважати, що зміни конструкції двигуна призвели до зменшення витрат палива.

Границя $\overline{X_K}$ критичної області для вихідної статистики $\bar{X}$ критерія може бути отримана із співвідношення:

$$\frac{\overline{X_K}-10}{\sqrt{\frac{4}{25}}} = -1{,}645,$$

звідки $\overline{X_K} = 9{,}342$, тобто критична область задається нерівністю

$$\bar{X} < 9{,}342.$$

Приклад 2. В умовах прикладу 1, разом з основною гіпотезою $H_0 : m = 10$ л розглянемо альтернативну $H_1 : m = 9$ л. Знайдемо ймовірність помилки першого і другого роду і потужність критерію.

Розв’язання. Ймовірність помилки першого роду задана:

$$0{,}05 = \alpha = P(V \in V_K | H_0) = P(\bar{X} < 9{,}342 \mid m = 10) =$$

$$= P\left(\frac{\bar{X} - 10}{\sqrt{\frac{4}{25}}} < \frac{9{,}342 - 10}{\sqrt{\frac{4}{25}}}\right) = P(U < -1{,}645) = \Phi(-1{,}645) =$$

$$= 1 - \Phi(1{,}645) \approx 1 - 0{,}95 = 0{,}05.$$

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt$ – функція нормального стандартного розподілу.

$\Phi(1{,}645) \approx 0{,}95$ (знаходимо за таблицею значень $\Phi(x)$).

Ймовірність помилки другого роду:

$$\beta = P(V \in V \setminus V_K | H_1) = P(\bar{X} > 9{,}342 \mid m = 9) =$$

$$= P\left(\frac{\bar{X} - 9}{\sqrt{\frac{4}{25}}} > \frac{9{,}342 - 9}{\sqrt{\frac{4}{25}}}\right) = P(U > 0{,}855) =$$

$$= 1 - P(U < 0{,}855) = 1 - \Phi(0{,}855) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2.$$

Згідно з прийнятим критерієм приблизно 5% автомобілів, які мають витрати палива 10 л на 100 км пробігу, класифікують, як автомобілі, які мають менше витрат палива, а приблизно 20% автомобілів, які мають витрати палива 9 л на 100 км пробігу, класифікують, як автомобілі, які мають витрати палива 10 л.

Потужність критерію $1 - \beta = 0{,}8$.

При заданій ймовірності α ймовірність помилок другого роду можна зменшити, а потужність критерію $1 - \beta$ збільшити, якщо збільшити об'єм вибірки.

Приклад 3. Який мінімальний об'єм вибірки n треба взяти в умовах прикладу 1, щоб при перевірці гіпотези $H_0\colon m = 10$ л проти альтернативної $H_1\colon m = 9$ л помилка першого роду дорівнювала α = 0,01, а помилка другого роду β не перевищувала 0,1? Яка критична область в цьому випадку?

Розв'язання. За умовами задачі

$$\begin{cases} P(\bar{X} < \overline{X_K} | H_0\colon m = 10) = \Phi\left(\dfrac{\overline{X_K} - 10}{\sqrt{\frac{4}{25}}}\right) = 0{,}01 \\ P(\bar{X} > \overline{X_K} | H_1\colon m = 9) = 1 - \Phi\left(\dfrac{\overline{X_K} - 9}{\sqrt{\frac{4}{25}}}\right) < 0{,}1 \end{cases}$$

Систему можна записати так:

$$\begin{cases} \dfrac{\overline{X_K} - 10}{2}\sqrt{n} = U_{0{,}01} = -2{,}326 \\ \dfrac{\overline{X_K} - 9}{2}\sqrt{n} \ge U_{0{,}9} = 1{,}282 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{X_K} = 10 - 4{,}652 \big/ \sqrt{n} \\ \overline{X_K} \ge 9 + 2{,}564 \big/ \sqrt{n} \end{cases}$$

Виключаючи $\overline{X_k}$, отримаємо $n \ge 53$. Підставляючи найменше значення $n = 53$ в перше рівняння, знайдемо границю критичної області $\overline{X_k} = 10 - \frac{4{,}652}{\sqrt{53}} =$ $= 9{,}361$. Критична область задається: $\bar{X} < 9{,}361$.

4.3 Порівняння вибіркової середньої й генеральної середньої нормальної сукупності у випадку, коли генеральна дисперсія σ^2 невідома

Нехай $\overline{X_n}$ – вибірка із генеральної сукупності X, яка розподілена за нормальним законом $N(m, \sigma^2)$, де m – математичне сподівання і σ^2 – дисперсія невідомі (наприклад при малих вибірках).

Якщо дисперсія генеральної сукупності невідома, то в якості критерію перевірки нульової гіпотези приймають випадкову величину $T = \frac{\bar{X}-m_0}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}}$, що розподілена за законом Стьюдента з k=n-1 ступенями вільності і

$S^2 = \frac{\sum n_i x_i^2 - (\sum n_i x_i)^2/n}{n-1}$ – виправлена вибіркова дисперсія.

Правило . Для того, щоб на заданому рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу $H_0\colon m = m_0$ про рівність генеральної середньої m нормальної сукупності з невідомою дисперсією σ^2 гіпотетичному значенню m_0 при альтернативній гіпотезі: $H_1\colon m \neq m_0$, потрібно обчислити спостережуване значення критерію

$$T_{\text{виб}} = \frac{\bar{X}-m_0}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} \qquad (4.3.1)$$

і за таблицею критичних точок розподілу Стьюдента, за заданим рівнем значущості α і числом ступенів вільності k=n-1 знайти критичну точку $t_{\text{кр}} = t_{\text{двостр.кр}} = t(\alpha; k)$ двосторонньої критичної області.

При альтернативній гіпотезі H_1 : $m > m_0$ знаходимо критичну точку правосторонньої критичної області $t_{\text{кр}} = t_{\text{правостр.кр}} = t(\alpha; k)$.

При альтернативній гіпотезі H_1: $m < m_0$ знаходимо лівосторонню критичну точку $t_{\text{кр}} = t_{\text{лівостор.кр}} = -t_{\text{правостр.кр}} = -t(\alpha; k)$.

У випадку $H_1\colon m \neq m_0$:

- якщо $|t_{\text{виб}}| < t_{\text{кр}}$, то немає підстав відхилити нульову гіпотезу H_0;
- якщо $|t_{\text{виб}}| > t_{\text{кр}}$, то нульову гіпотезу H_0 відхиляють на користь альтернативної.

У випадку $H_1\colon m > m_0$ або $H_1\colon m < m_0$:

- якщо $t_{\text{виб}} < t_{\text{кр}}$, то немає підстав відхилити нульову гіпотезу H_0;
- якщо $t_{\text{виб}} > t_{\text{кр}}$, то нульову гіпотезу H_0 відхиляють на користь альтернативної.

Приклад 4. За вибіркою об'єму n=16, отриманої із нормальної генеральної сукупності X, знайдені вибіркова середня $\bar{X} = 118{,}2$ і виправлена вибіркова дисперсія $S^2 = 12{,}96$. Потрібно на рівні значущості α=0,05 перевірити нульову гіпотезу $H_0 : m = m_0 = 120$ при альтернативній гіпотезі H_1: $m \neq m_0$.

Розв'язання. Знайдемо спостережуване значення критерію за формулою (4.3.1). $T_{виб}\, \frac{(118{,}2-120)\sqrt{16}}{\sqrt{12{,}96}} \approx -2$. За умовою задачі критична область двостороння. За таблицею критичних точок розподілу Стьюдента , за рівнем значущості α=0,05 і числу ступенів вільності k=n-1=15 знаходимо критичну точку $t_{кр} = t_{двостр.кр} =$
$= t(0{,}05; 15) = 2{,}13$.

Так як $|T_{виб}| < t_{кр}$, то немає підстав відхилити нульову гіпотезу. Іншими словами, вибіркова середня $\bar{X} = 118{,}2$ несуттєво відрізняється від гіпотетичної генеральної середньої m_0 = 120.

Контрольні запитання

1. В чому полягає задача перевірки статистичних гіпотез?
2. Дайте означення статистичної гіпотези.
3. Дайте означення основної і альтернативної гіпотез.
4. Яка гіпотеза називається простою, складною? Наведіть приклади.
5. Що називають статистичним критерієм, критичною областю, границями критичної області? Наведіть приклади односторонніх і двосторонніх критичних областей.
6. Помилки першого і другого роду, потужність критерію.
7. Перечисліть етапи перевірки параметричної статичної гіпотези.
8. Сформулюйте задачу про порівняння вибіркової середньої й генеральної середньої у випадку, коли дисперсія відома.
9. Яку статистику приймають за статистику критерію у попередній задачі? За якою формулою обчислюється критична точка $\overline{X_k}$ області прийняття рішень? Як приймається рішення по перевірці основної гіпотези.
10. Як знайти мінімальний об'єм вибірки, достатній, щоб забезпечити задані значення помилок першого і другого роду в задачі про порівняння вибіркової середньої й генеральної середньої (дисперсія відома)?
11. Сформулюйте задачу про порівняння вибіркової середньої й генеральної середньої у випадку, коли дисперсія невідома.
12. Яку статистику приймають за статистику критерію у попередній задачі? Як приймається рішення по перевірці основної гіпотези.

Задачі для самостійного розв'язування

Нехай $\overline{X_n}$ – вибірка із генеральної сукупності X, яка розподілена за нормальним законом $N(m, \sigma^2)$, де m – математичне сподівання невідоме, а σ^2 – дисперсія відома.

Перевірити основну H_0 і альтернативну H_1 гіпотези про значення параметру m на рівні значущості α. Знайти ймовірність похибки другого роду β і потужність критерію.

1. H_0: $m = 9$, H_1: $m < 9$, якщо n = 30, $\sigma^2 = 3$, $\alpha = 0{,}01$.

2. $H_0: m = 10$, $H_1: m < 10$, якщо n = 25, $\sigma^2 = 4$, $\alpha = 0{,}05$.
3. $H_0: m = 15$, $H_1: m < 15$, якщо n = 50, $\sigma^2 = 4$, $\alpha = 0{,}1$.
4. $H_0: m = 9$, $H_1: m > 9$, якщо n = 30, $\sigma^2 = 3$, $\alpha = 0{,}01$.
5. $H_0: m = 10$, $H_1: m > 10$, якщо n = 25, $\sigma^2 = 4$, $\alpha = 0{,}05$.
6. $H_0: m = 15$, $H_1: m > 15$, якщо n = 50, $\sigma^2 = 4$, $\alpha = 0{,}1$.
7. $H_0: m = 9$, $H_1: m \neq 9$, якщо n = 30, $\sigma^2 = 3$, $\alpha = 0{,}01$.
8. $H_0: m = 10$, $H_1: m \neq 10$, якщо n = 25, $\sigma^2 = 4$, $\alpha = 0{,}05$.
9. $H_0: m = 15$, $H_1: m \neq 15$, якщо n = 50, $\sigma^2 = 4$, $\alpha = 0{,}1$.

Нехай $\overline{X_n}$ – вибірка з генеральної сукупності X, яка розподілена за нормальним законом $N(m, \sigma^2)$, де m – математичне сподівання і σ^2 – дисперсія невідомі. Перевірити основну H_0 і альтернативну H_1 гіпотези про значення параметра m на рівні значущості α.

10. $H_0: m = 8$, $H_1: m < 8$, якщо n = 50, $S^2 = 4$, $\alpha = 0{,}1$.
11. $H_0: m = 8$, $H_1: m > 8$, якщо n = 50, $S^2 = 4$, $\alpha = 0{,}1$.
12. $H_0: m = 8$, $H_1: m \neq 8$, якщо n = 50, $S^2 = 4$, $\alpha = 0{,}1$.

Нехай $\overline{X_n}$ – вибірка із генеральної сукупності X, яка розподілена за нормальним законом $N(m, \sigma^2)$, де m – математичне сподівання невідоме, а σ^2 – дисперсія відома. Який мінімальний об'єм вибірки n слід взяти, щоб при перевірці основної гіпотези H_0 проти альтернативної H_1 помилка першого роду $\alpha = 0{,}01$, а помилка другого роду не перевищувала 0,1? Чому дорівнює критична область в цьому випадку? Чому дорівнює потужність критерію?

13. $H_0: m = 8$, $H_1: m < 8$, якщо $\sigma^2 = 4$.
14. $H_0: m = 9$, $H_1: m < 9$, якщо $\sigma^2 = 3$.
15. $H_0: m = 10$, $H_1: m < 10$, якщо $\sigma^2 = 4$.
16. $H_0: m = 15$, $H_1: m < 15$, якщо $\sigma^2 = 4$.
17. $H_0: m = 8$, $H_1: m > 8$, якщо $\sigma^2 = 4$.
18. $H_0: m = 9$, $H_1: m > 9$, якщо $\sigma^2 = 3$.
19. $H_0: m = 10$, $H_1: m > 10$, якщо $\sigma^2 = 4$.
20. $H_0: m = 15$, $H_1: m > 15$, якщо $\sigma^2 = 4$.
21. $H_0: m = 8$, $H_1: m \neq 8$, якщо $\sigma^2 = 4$.
22. $H_0: m = 9$, $H_1: m \neq 9$, якщо $\sigma^2 = 3$.
23. $H_0: m = 10$, $H_1: m \neq 10$, якщо σ^2=4.
24. $H_0: m = 15$, $H_1: m \neq 15$, якщо $\sigma^2 = 4$.
25. $H_0: m = 25$, $H_1: m \neq 25$, якщо $\sigma^2 = 9$.

РОЗДІЛ 5. Статистична перевірка статистичних гіпотез. Порівняння двох дисперсій генеральних сукупностей

5.1 Порівняння двох дисперсій нормальних генеральних сукупностей

Маємо дві незалежні вибірки об'ємом n і m із двох нормальних генеральних сукупностей X,Y, дисперсії яких невідомі. Потрібно порівняти дисперсії.

Обчислимо середні вибіркові

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \bar{Y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Y_i \qquad (5.1.1)$$

Обчислюємо виправлені вибіркові дисперсії

$$S_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \qquad S_Y^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(Y_i - \bar{Y})^2 \qquad (5.1.2)$$

Правило 1. Для того, щоб при заданому рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу H_0: $D(X)=D(Y)$ про рівність генеральних дисперсій нормальних сукупностей при альтернативній гіпотезі H_1: $D(X)>D(Y)$, треба обчислити вибіркове значення критерію (відношення більшої виправленої дисперсії до меншої)

$$F_{виб} = \frac{S_Б^2}{S_М^2} \qquad (5.1.3)$$

і за таблицею критичних точок розподілу Фішера, за заданим рівнем значущості α і числом ступенів вільності $k_1 = n$-1, $k_2 = m$-1, k_1 – число ступенів вільності більшої дисперсії, знайти критичну точку.

$$F_{кр} = F(\alpha, k_1, k_2) \qquad (5.1.4)$$

Якщо $F_{виб} < F_{кр}$, то немає підстав відхилити нульову гіпотезу.

Якщо $F_{виб} > F_{кр}$, нульову гіпотезу відхиляють на користь альтернативної.

Правило 2. При альтернативній гіпотезі H_1: $D(X) \neq D(Y)$ критичну точку $F_{кр} = F(\frac{\alpha}{2}, k_1, k_2)$ розшукують по рівню значущості $\frac{\alpha}{2}$ і числам ступенів вільності k_1 і k_2 (k_1 – число ступенів вільності більшої дисперсії).

Якщо $F_{виб} < F_{кр}$, то немає підстав відхилити основну гіпотезу.

Якщо $F_{виб} > F_{кр}$, то основну гіпотезу відхиляють на користь альтернативної.

Приклад 1. За двома незалежними вибірками, об'єми яких n = 11 і m = 14, отриманих із нормальних генеральних сукупностей, знайдені виправлені дисперсії $S_X^2 = 0{,}76$, $S_Y^2 = 0{,}38$. На рівні значущості α = 0,05 перевірити нульову гіпотезу H_0: $D(X) = D(Y)$, якщо конкуруюча гіпотеза H_1: $D(X) > D(Y)$.

Розв'язання: Знайдемо відношення більшої виправленої дисперсії до меншої $F_{виб} = \frac{0{,}76}{0{,}38} = 2$.

Конкуруюча гіпотеза має вигляд H_1: $D(X) > D(Y)$, тому критична область правостороння. За таблицею критичних точок розподілу Фішера, за рівнем значущості α = 0,05 і числам k_1 = 11-1=10, і k_2 = 14-1=13 знаходимо
$F_{кр} = F(0{,}05;\ 10;\ 13) = 2{,}67$. Так як $F_{виб} < F_{кр}$, то основну гіпотезу про рівність дисперсій двох генеральних сукупностей приймаємо на рівні значущості α. Іншими словами, вибіркові виправлені дисперсії відрізняються несуттєво.

Приклад 2. За двома незалежними вибірками, об'єми яких $n = 9$ і $m = 6$, отриманих із нормальних генеральних сукупностей X і Y, знайдені вибіркові дисперсії $D_в(X) = 14{,}4$ і $D_в(Y) = 20{,}5$. При рівні значущості $\alpha = 0{,}1$ перевірити нульову гіпотезу H_0: $D(X) = D(Y)$ про рівність генеральних дисперсій при альтернативній H_1: $D(X) \neq D(Y)$.

Розв'язання. Спочатку обчислимо виправлені вибіркові дисперсії

$$S_X^2 = \frac{n}{n-1} D_{\text{в}}(X) \tag{5.1.5}$$

$$S_Y^2 = \frac{m}{m-1} D_{\text{в}}(Y)$$

$$S_X^2 = \frac{9}{8} \cdot 14{,}4 = 16{,}2$$

$$S_Y^2 = \frac{6}{5} \cdot 20{,}5 = 24{,}6$$

$$F_{виб} = \frac{24{,}6}{16{,}2} = 1{,}52$$

Критична область двостороння, тому відповідно з правилом 2 знаходимо

$F_{кр} = F(\frac{\alpha}{2}, k_1, k_2) = F(\ 0{,}05,\ 5,\ 8\ ) = 6{,}63.$

Так як $F_{виб} < F_{кр}$, то нульова гіпотеза приймається на рівні значущості $\alpha = 0{,}1$, тобто вибіркові дисперсії відрізняються несуттєво.

5.2 Порівняння виправленої вибіркової дисперсії з гіпотетичною генеральною дисперсією нормальної сукупності

Нехай n – об'єм вибірки $\bar{X}_n$, розподіленої за нормальним законом з невідомими параметрами, S^2- виправлена вибіркова дисперсія.

Правило 1. Для того, щоб при заданому рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$(про рівність невідомої дисперсії σ^2 передбаченому значенню σ_0^2) при альтернативній гіпотезі H_1: $\sigma^2 > \sigma_0^2$, треба обчислити вибіркове значення критерію.

$$\chi^2_{\text{виб}} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \tag{5.2.1}$$

і за таблицею критичних точок розподілу χ^2, за заданим рівнем значущості α і числом ступенів вільності $k = n$-1, знайти критичну точку на $\chi^2_{\text{кр}}$, де

$$\chi^2_{\text{кр}} = \chi^2(\alpha, k).$$

Якщо $\chi^2_{\text{виб}} < \chi^2_{\text{кр}}$, то немає підстав відхилити нульову гіпотезу, тобто $\sigma^2 = \sigma_0^2$.

Якщо $\chi^2_{\text{виб}} > \chi^2_{\text{кр}}$, то нульова гіпотеза відхиляється, тобто $\sigma^2 > \sigma_0^2$.

Правило 2. При альтернативній гіпотезі H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ знаходять ліву і праву границі критичної області

$$\chi^2_{\text{лів. кр}} = \chi^2(1 - \frac{\alpha}{2}, k) \quad (5.2.2)$$

$$\chi^2_{\text{пр. кр}} = \chi^2(\frac{\alpha}{2}, k) \quad (5.2.3)$$

Якщо $\chi^2_{\text{лів. кр}} < \chi^2_{\text{виб}} < \chi^2_{\text{пр. кр}}$, то немає підстав відхилити основну гіпотезу, тобто $\sigma^2 = \sigma_0^2$.

Якщо $\chi^2_{\text{виб}} < \chi^2_{\text{лів. кр}}$, або $\chi^2_{\text{виб}} > \chi^2_{\text{пр. кр}}$, то основну гіпотезу відхиляють на користь конкуруючої, тобто $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$.

Правило 3. При альтернативній гіпотезі H_1: $\sigma^2 < \sigma_0^2$

$$\chi^2_{\text{кр}} = \chi^2(1 - \alpha, k) \quad (5.2.4)$$

Якщо $\chi^2_{\text{виб}} > \chi^2_{\text{кр}}$, то немає підстав відхилити основну гіпотезу, тобто $\sigma^2 = \sigma_0^2$.

Якщо $\chi^2_{\text{виб}} < \chi^2_{\text{кр}}$, то основну гіпотезу відхиляють на користь альтернативної, тобто $\sigma^2 < \sigma_0^2$.

Зауваження. Якщо число ступенів вільності $k > 30$, то критичну точку $\chi^2_{\text{кр}}$ можна знайти із рівності Уілсона – Гілферті:

$$\chi^2_{\text{кр}}(\alpha, k) = k(1 - \frac{2}{9}k + z_\alpha\sqrt{\frac{2}{9k}})^3 \quad (5.2.5)$$

де z_α – корінь рівняння Φ_0 (z_α) = (1-2α)/2, Φ_0 (z) – інтеграл Лапласа. (5.2.6)

Приклад 3. Із нормальної генеральної сукупності отримана вибірка об'єму $n = 21$, і за нею знайдена виправлена вибіркова дисперсія $S^2 = 16{,}2$. Треба при рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу H_0, якщо конкуруюча H_1.

H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2 = 15$; H_1: $\sigma_0^2 > 15$.

Розв'язання. $\chi^2_{\text{виб}} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(21-1)16{,}2}{15} = 21{,}6$. За умовою задачі конкуруюча гіпотеза; $\sigma^2 > 15$, тому критична область – правостороння (правило 1). За таблицею значень критичних точок розподілу χ^2 по $\alpha = 0{,}01$ і числу ступенів вільності $k = n$-1 = 21-1 = 20, знаходимо критичну точку $\chi^2_{\text{кр}} = \chi^2(0{,}01,\ 20) = 37{,}6$. Так як $\chi^2_{\text{виб}} < \chi^2_{\text{кр}}$, то немає підстав відхилити основну гіпотезу, тобто $\sigma^2 = 15$.

5.3 Перевірка двох середніх нормальних генеральних сукупностей, дисперсії яких невідомі і однакові (малі незалежні вибірки)

Нехай, $\bar{X}_n$, $\bar{Y}_m$ – малі незалежні вибірки (n, m < 30), за якими знайдені відповідні вибіркові середні $\bar{X}, \bar{Y}$і виправлені вибіркові дисперсії S_X^2, S_Y^2 .

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad (5.3.1)$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Y_i \qquad (5.3.2)$$

$$S_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{n=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \qquad (5.3.3)$$

$$S_Y^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{m=1}^{m}(Y_i - \bar{Y})^2 \qquad (5.3.4)$$

Потрібно на заданому рівні значущості α перевірити основну гіпотезу H_0: $M(X)=M(Y)$ про рівність математичних сподівань двох нормальних генеральних сукупностей з невідомими, але рівними дисперсіями, при різних альтернативних гіпотезах.

$$H_0: M(X) = M(Y) \qquad (5.3.5)$$

$$H_1: M(X) \neq M(Y)$$

Правило 1. Для того, щоб на заданому рівні значущості α, перевірити гіпотезу H_0, при альтернативній H_1 (5.3.5) про рівність математичних сподівань (генеральних середніх) двох нормальних сукупностей з невідомими, але однаковими дисперсіями (у випадку малих вибірок), треба обчислити спостережуване значення критерію

$$\mathrm{T}_{\text{виб.}} = \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{(n-1)S_X^2+(m-1)S_Y^2}\sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}} \qquad (5.3.6)$$

і за таблицею критичних точок розподілу Стьюдента, за заданим рівнем значущості α і числом ступенів вільності $k=m+n-2$ знайти критичну точку

$$t_{\text{двост.кр}} = t(\alpha, k) \qquad (5.3.7)$$

t(α, k) – квантиль розподілу Стьюдента. Критична область задається нерівністю

$$|T|>t(\alpha,\ k) \qquad (5.3.8)$$

Якщо $|T_{виб}| < t_{\text{двост.кр}} = t\ t(\alpha, k)$, то нульова гіпотеза H_0 приймається.

Якщо $|T_{виб}| > t_{\text{двуст.кр}} = t\ t(\alpha, k)$, то нульову гіпотезу H_0 відкидають.

Правило 2. При альтернативній гіпотезі

$$H_1: M(X) > M(Y) \qquad (5.3.9)$$

потрібно знайти критичну точку $t_{правост.\ кр} = t(\alpha, k)$ – квантиль розподілу Стьюдента з α і $k = m + n - 2$ ступенями вільності.

Якщо $T_{виб} < t_{правост.\ кр}$, то гіпотеза H_0 приймається на рівні значущості α.

Якщо $T_{виб} > t_{правост.\ кр}$, то гіпотезу H_0 відхиляють.

Правило 3. При альтернативній гіпотезі

$$H_1: M(X) < M(Y) \qquad (5.3.10)$$

потрібно знайти $t_{лівост.\ кр} = t(\alpha,\ k),\ де\ t(\alpha,\ k)$ – квантиль розподілу Стьюдента з α і $k = n + m - 2$ ступенями вільності (знаходимо за таблицею квантилів Стьюдента),

$t_{лівостр.\ кр} = -\ t_{правост.\ кр} = -\ t(\alpha,\ k)$.

Якщо $T_{виб.} > t_{лівост.\ кр}$, то гіпотезу H_0 приймають.

Якщо $T_{виб.} < t_{лівост.\ кр}$, то гіпотезу H_0 відхиляють на користь альтернативної.

Приклад 4. За двома незалежними малими вибірками, об'єми яких $n = 12$ і $m = 18$ з нормальних генеральних сукупностей X і Y, знайдені вибіркові дисперсії

$S_X^2 = 0{,}84$, $S_Y^2 = 0{,}4$. Треба на рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ перевірити нульову гіпотезу H_0: $M(X) = M(Y)$ при альтернативній H_1: $M(X) \neq M(Y)$.

Розв'язання. Виправлені дисперсії різні, тому перевіримо гіпотезу про рівність генеральних дисперсій на основі критерію Фішера H_0: $D(X) = D(Y)$ знайдемо $F_{виб.} = \frac{S_X^2}{S_Y^2} = \frac{0{,}84}{0{,}4} = 2{,}1$ (відношення більшої дисперсії до меншої). Дисперсія S_X^2 значно більша від S_Y^2. Тому за конкуруючу гіпотезу H_1 приймемо H_1: $D(X) > D(Y)$.

Критична область – правостороння. За таблицею критичних точок розподілу F Фішера при $\alpha = 0{,}05$, $k_1 = n - 1 = 11$, $k_2 = m - 1 = 18 - 1 = 17$, знаходимо критичну точку $F_{кр}(\ 0{,}05,\ 11,\ 17\ ) = 2.41$. Так як $F_{виб} < F_{кр}$, то основна гіпотеза H_0 про рівність генеральних дисперсій приймається.

Висновок про рівність генеральних дисперсій прийнятий, тому порівнюємо середні. Обчислимо спостережувальне значення критерію Стьюдента за формулою (5.3.6)

$$T_{виб.} = \frac{31{,}2-29{,}2}{\sqrt{11\cdot 0{,}84+17\cdot 29{,}2}} \cdot \sqrt{\frac{11\cdot 17(11+17-2)}{12+18}} = 7{,}1.$$

Конкуруюча гіпотеза має вигляд: $M(X) \neq M(Y)$, тому критична область двостороння. За рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$ і числу ступенів вільності $k = m + n - 2 = 12 + 18 - 2 =$ $= 28$, за таблицею квантилів розподілу Стьюдента знаходимо

$$t_{двост.кр} = t(0{,}05,\ 28) = 2{,}5.$$

Так як $T_{виб} > t_{двост.кр}$, то нульову гіпотезу про рівність середніх відкидаємо на користь альтернативної (вибіркові середні – різні).

5.4 Порівняння двох середніх генеральних сукупностей, дисперсії яких відомі (великі незалежні вибірки)

Позначимо через n і m об'єми великих (n>30, m>30) незалежних вибірок, за якими знайдені відповідні вибіркові середні $\overline{X}$, $\overline{Y}$ (генеральні дисперсії $D(X)$ і $D(Y)$ відомі).

Правило 1. Для того, щоб при заданому рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу H_0: $M(X)=M(Y)$ (про рівність математичних сповідань двох нормальних генеральних сукупностей з відомими дисперсіями (при великих об'ємах вибірок)), при альтернативній гіпотезі H_1: $M(X) \neq M(Y)$, треба обчислити вибіркове значення критерію

$$Z_{\text{виб}} = \frac{\overline{X}-\bar{Y}}{\sqrt{D(X)/n+D(Y)/m}} \qquad (5.4.1)$$

і за таблицею функції Лапласа знайти критичну точку $Z_{кр.}$, яка є коренем рівняння

$$\Phi_0\ (Z_{кр.}) = (1\text{-}\alpha)/2 \qquad (5.4.2)$$

Якщо $|Z_{виб}|<Z_{кр.}$, то немає підстав відхилити основну гіпотезу, тобто $M(X)=M(Y)$.

Якщо $|Z_{виб}|>Z_{кр.}$, то основну гіпотезу відхиляють на користь альтернативної, тобто $M(X) \neq M(Y)$.

Правило 2. Якщо альтернативна гіпотеза H_1: $M(X) > M(Y)$, то критичну точку $Z_{кр}$ знаходять pf таблицt. значень функцій Лапласа, що є коренем рівняння

$$\Phi_0\ (Z_{кр.}) = (1\text{-}2\alpha)/2 \qquad (5.4.3)$$

Якщо $Z_{виб} < Z_{кр}$, то немає підстав відхилити основну гіпотезу.

Якщо $Z_{виб} > Z_{кр}$, то нульову гіпотезу відхиляють.

Правило 3. При альтернативній гіпотезі H_1: $M(X) > M(Y)$ критичну точку $Z_{кр.}$ знаходять за правилом 2.
Якщо $Z_{виб} >- Z_{кр}$, то немає підстав відхилити основну гіпотезу.

Якщо $Z_{виб} <- Z_{кр}$, то основну гіпотезу відхиляють.

Приклад 5. За двома незалежними вибірками, об'єми яких $n = 40$ і $m = 50$, отриманих із нормальних генеральних сукупностей, знайдені вибіркові середні $\bar{X} = 130$, а $\bar{Y} = 140$, генеральні дисперсії відомі: $D(X) = 80$, $D(Y) = 100$. Потрібно на рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ перевірити основну гіпотезу H_0: $M(X) = M(Y)$, якщо альтернативна H_1: $M(X) \neq M(Y)$.

Розв'язання. Знайдемо вибіркове значення критерію $Z_{виб} = \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{D(X)}{n}+\frac{D(Y)}{m}}} = \frac{130-140}{\sqrt{80/40+100/50}} = -5$. За умовою задачі конкуруюча гіпотеза $M(X) \neq M(Y)$, тому критична область – двостороння. Знайдемо критичну точку з рівності $\Phi_0\ (Z_{кр.}) = (1 - \alpha) / 2$:

$$\Phi_0\ (Z_{кр.}) = (1 - 0{,}01) / 2 = 0{,}495.$$

За таблицею значень функції Лапласа $Z_{кр} = 2{,}58$. Так як $|Z_{виб}| > Z_{кр}$, то, відповідно до правила 1, основну гіпотезу відхиляємо. Іншими словами, вибіркові середні значення відрізняються.

Контрольні запитання

1. Задача про порівняння двох дисперсій нормальних генеральних сукупностей. Постановка задачі. Яка статистика використовується? Сформулюйте правило, за яким треба підтримати або відхилити основну гіпотезу.

2. Задача про порівняння виправленої вибіркової дисперсії з гіпотетичною генеральною дисперсією нормальної сукупності. Постановка задачі. Яка статистика використовується? Сформулюйте правило, за яким треба підтримати або відхилити основну гіпотезу.
3. Задача про перевірку двох середніх нормальних генеральних сукупностей, які невідомі і однакові (малі незалежні вибірки). Постановка задачі. Яку статистику використовують? Сформулюйте правило, за яким треба підтримати або відхилити основну гіпотезу.
4. Задача про порівняння двох середніх генеральних сукупностей, дисперсії яких відомі (великі незалежні вибірки). Постановка задачі. Яка статистика використовується? Сформулюйте правило, за яким треба підтримати або відхилити основну гіпотезу.

Задачі для самостійного розв'язування

1. За двом незалежними вибірками, об'єми яких $n = 9$ і $m = 16$, отриманих із нормальних генеральних сукупностей X і Y, знайдені виправлені дисперсії $S_X^2 = 0{,}76$, $S_Y^2 = 0{,}38$. На рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ перевірити нульову гіпотезу H_0: $D(X) = D(Y)$, якщо конкуруюча гіпотеза H_1: $D(X) > D(Y)$.

2. За двом незалежними вибірками, об'єми яких $n = 14$ і $m = 10$, отриманих із нормальних генеральних сукупностей, знайдені виправлені дисперсії

$S_X^2 = 0{,}84$ $S_Y^2 = 2{,}52$. На рівні значущості $\alpha = 0{,}1$ перевірити нульову гіпотезу H_0: $D(X) = D(Y)$, якщо конкуруюча гіпотеза H_1: $D(X) \neq D(Y)$.

3. Двома методами проведені заміри фізичної величини. Отримані наступні результати:
в першому випадку $x_1 = 9{,}6$; $x_2 = 10{,}0$; $x_3 = 9{,}8$; $x_4 = 10{,}2$; $x_5 = 10{,}6$;
в другому випадку $y_1 = 10{,}4$; $y_2 = 9{,}7$; $y_3 = 10{,}0$; $y_4 = 10{,}3$.
Чи можна вважати, що обидва методи забезпечують однакову точність вимірювань, якщо прийняти рівень значущості α=0,1? Вважається, що результати вимірювань розподілені нормально і вибірки незалежні. (Вказівка: про точність методів будемо судити за величинами дисперсій).

4. Для порівняння точності двох станків-автоматів було взято дві проби (вибірки), об'єми яких $n = 10$ *і* $m = 8$. Отримані наступні результати:

x_i : 1,08; 1,10; 1,12; 1,14; 1,15; 1,25; 1,36; 1,38; 1,40; 1,42

y_i : 1,11; 1,12; 1,18; 1,22; 1,33; 1,35; 1,36; 1,38

Чи можна вважати , що станки мають однакову точність (Вказівка: H_0: $D(X) = D(Y)$, якщо прийняти рівень значущості α=0,1, в якості конкуруючої гіпотези H_1: $D(X) \neq D(Y)$)?

5. Із нормальної генеральної сукупності отримана вибірка об'єму $n = 17$ і за нею знайдена виправлена вибіркова дисперсія $S^2 = 0{,}24$. Потрібно на рівні значущості

α=0,05 перевірити нульову гіпотезу H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2 = 0{,}18$ при альтернативній гіпотезі H_1: $\sigma^2 > 0{,}18$.

6. З нормальної генеральної сукупності отримана вибірка об'єму $n = 31$:

x_i : 10,1; 10,3; 10,6; 11,12; 11,5; 11,8; 12,0

n_i : 1, 3; 7; 10; 6; 3; 1

Потрібно на рівні значущості α=0,05 перевірити нульову гіпотезу
H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2 = 0{,}18$ при альтернативній гіпотезі H_1: $\sigma^2 > 0{,}18$.

7. Точність роботи станка-автомату перевіряється за дисперсією контрольованого розміру виробу, яка не повинна перевищувати $\sigma_0^2 = 0{,}1$. Були взяти заміри з 25 випадково відібраних виробів; отримані наступні результати замірів:

x_i : 3,0; 3,5; 3,8; 4,4; 4,5
n_i : 2, 6; 9; 7; 1

На рівні значущості α=0,05 перевірити, чи забезпечує станок потрібну точність (H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2 = 0{,}1$ при альтернативній гіпотезі H_1: $\sigma^2 > 0{,}1$).

8. В результаті тривалого хронометражу часу збірки вузла різними робітниками було встановлено, що дисперсія цього часу $\sigma_0^2 = 2\ \text{хв}^2$. Результати замірів за роботою нового робітника наступні:
x_i, : 56; 58; 60; 62; 64
n_i : 1, 4; 10; 3; 2
Чи можна вважати на рівні значущості 0,05, що новий робітник працює ритмічно (в тому сенсі, що дисперсія затраченого ним часу суттєво не відрізняється від дисперсії часу інших робітників)? (Вказівка: H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2 = 2$, при альтернативній гіпотезі H_1: $\sigma^2 \neq 2$)

9. За вибіркою об'єму n=30 знайдена середня вага $\bar{x} = 130$ г виробів, виготовлених на першому станку. За вибіркою об'єму m=40 знайдена середня вага $\bar{y} = 125$ г виробів, виготовлених на другому станку. Генеральні дисперсії відомі: DX=60 г^2, DY=80 г^2. Потрібно на рівні значущості 0,05 перевірити нульову гіпотезу H_0 : $M(X)=M(Y)$ при альтернативній гіпотезі H_1 : $M(X) \neq M(Y)$. Вважається, що випадкові величини X і Y розподілені нормально і вибірки незалежні.

10. За вибіркою об'єму n=50 знайдено середній розмір $\bar{x} = 20{,}1$ мм виробів, виготовлених першим автоматом. За вибіркою об'єму m=50 знайдено середній розмір $\bar{y} = 19{,}8$ мм виробів, виготовлених другим автоматом. Генеральні дисперсії відомі: DX=1,75 мм^2, DY=1,375 мм^2. Потрібно, на рівні значущості 0,05 перевірити нульову гіпотезу H_0 : $M(X)=M(Y)$ при альтернативній гіпотезі H_1 : $M(X) \neq M(Y)$. Вважається, що випадкові величини X і Y розподілені нормально і вибірки незалежні.

11. За двома незалежними малими вибірками, об'єми яких n=10 і m=8 знайдені вибіркові середні $\bar{x} = 142{,}3$, $\bar{y} = 145{,}3$ і виправлені вибіркові дисперсії $S_X^2 = 2{,}7$ і $S_Y^2 = 3{,}2$. На рівні значущості 0,01 перевірити нульову гіпотезу H_0 : $M(X)=M(Y)$

при альтернативній гіпотезі $H_1 : M(X) \neq M(Y)$. Вважається, що випадкові величини X і Y розподілені нормально. (Вказівка: використовуйте статистику (5.3.6). Попередньо перевірити рівність дисперсій)

12. З двох партій виробів, виготовлених на двох однакових станках отримані малі вибірки, об'єми яких n=10 і m=12. Результати представлені статистичними рядами:

x_i : 3,4; 3,5; 3,7; 3,9 y_i : 3,2; 3,4; 3,6

n_i: 2; 3; 4; 1 m_i: 2; 2; 8

На рівні значущості 0,01 перевірити нульову гіпотезу $H_0 : M(X)=M(Y)$ при альтернативній гіпотезі $H_1 : M(X) \neq M(Y)$. Вважається, що випадкові величини X і Y розподілені нормально. (Вказівка: використовуйте статистику (5.3.6). Попередньо перевірити рівність дисперсій)

13. На рівні значущості 0,05 перевірити нульову гіпотезу $H_0 : M(X)=M(Y)$ про рівність генеральних середніх нормальних сукупностей X, Y при альтернативній гіпотезі $H_1 : M(X) > M(Y)$ за малими незалежними вибірками, об'єми яких n=10 і m=16. Отримані наступні результати:

x_i : 12,3; 12,5; 12,8; 13,0; 13,5 y_i : 12,2; 12,3; 13,0

n_i: 1; 2; 4; 2; 1 m_i: 6; 8; 2

(Вказівка: попередньо перевірити нульову гіпотезу H_0: $D(X)=D(Y)$, якщо конкуруюча гіпотеза H_1: $D(X) > D(Y)$)

14. З нормальної генеральної сукупності з відомим середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 5{,}2$ отримана вибірка об'єму n=100 і за нею знайдена вибіркова середня $\bar{X} = 27{,}56$. Потрібно на рівні значущості 0,05 перевірити нульову гіпотезу H_0: $m = m_0 = 26$, при альтернативній гіпотезі H_1: $m \neq 26$.

15. З нормальної генеральної сукупності з відомим середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 40$ отримана вибірка об'єму n=64 і за нею знайдена вибіркова середня $\bar{X} = 136{,}5$. Потрібно на рівні значущості 0,01 перевірити нульову гіпотезу H_0: $m = m_0 = 130$, при альтернативній гіпотезі H_1: $m \neq 130$.

16. З нормальної генеральної сукупності з відомим середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 5{,}2$ отримана вибірка об'єму n=100 і за нею знайдена вибіркова середня $\bar{X} = 27{,}56$. Потрібно на рівні значущості 0,05 перевірити нульову гіпотезу H_0: $m = m_0 = 26$, при альтернативній гіпотезі H_1: $m > 26$.

17. За вибіркою об'єму n=9, отриманої із нормальної генеральної сукупності з відомим середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 4$, на рівні значущості 0,05 перевіряється нульова гіпотеза H_0: $m = m_0 = 15$, при альтернативній гіпотезі H_1: $m > 15$. Знайти потужність правостороннього критерію для гіпотетичного значення генеральної середньої $m=m_1=17$.

18. За вибіркою об'єму n=9, отриманої із нормальної генеральної сукупності з відомим середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 4$, на рівні значущості 0,05

перевіряється нульова гіпотеза $H_0: m = m_0 = 15$, при альтернативній гіпотезі $H_1: m > 15$. Знайти об'єм вибірки n_1, при якому потужність критерію дорівнює 0,8.

19. За вибіркою об'єму n=16, отриманої із нормальної генеральної сукупності з відомим середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 5$, на рівні значущості 0,05 перевіряється нульова гіпотеза $H_0: m = m_0 = 20$, при альтернативній гіпотезі $H_1: m \neq 20$. Знайти потужність двостороннього критерію перевірки гіпотези для гіпотетичного значення генеральної середньої $m=m_1=24$.

20. За вибіркою об'єму n=36, отриманої із нормальної генеральної сукупності з відомим середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 6$, на рівні значущості 0,01 перевіряється нульова гіпотеза $H_0: m = m_0 = 15$, при альтернативній гіпотезі $H_1: m \neq 15$. Знайти потужність двостороннього критерію для гіпотетичного значення генеральної середньої $m=m_1=12$.

21. За вибіркою об'єму n=16, отриманої із нормальної генеральної сукупності, знайдені вибіркова середня $\bar{X} = 118{,}2$ і виправлене середнє квадратичне відхилення $S = 3{,}6$. Потрібно на рівні значущості 0,05 перевірити нульову гіпотезу $H_0: m = m_0 = 120$, при альтернативній гіпотезі $H_1: m \neq 120$. (Вказівка: використовуйте статистику Стьюдента $T=\frac{(\bar{x}-m_o)\sqrt{n}}{S}$ (див. розділ 4))

22. Із нормальної генеральної сукупності з відомим середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 40$ отримана вибірка об'єму n=64 і за нею знайдена вибіркова середня $\bar{X} = 136{,}5$. Потрібно на рівні значущості 0,01 перевірити нульову гіпотезу $H_0: m = m_0 = 130$, при альтернативній гіпотезі $H_1: m \neq 130$.

23. Із нормальної генеральної сукупності з відомим середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 40$ отримана вибірка об'єму n=64 і за нею знайдена вибіркова середня $\bar{X} = 136{,}5$. Потрібно на рівні значущості 0,01 перевірити нульову гіпотезу $H_0: m = m_0 = 130$, при альтернативній гіпотезі $H_1: m > 130$.

24. Встановлено, що середня вага таблетки дорівнює m_0=0,50 мг. Вибіркова перевірка 121-ї таблетки партії ліків показала, що середня вага таблетки цієї партії $\bar{X} = 0{,}53$ мг. Потрібно на рівні значущості 0,01 перевірити нульову гіпотезу $H_0: m = m_0 = 0{,}50$, при альтернативній гіпотезі $H_1: m > 0{,}50$. Встановлено, що вага таблеток розподілена нормально з середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 0{,}11$ мг.

25. За вибіркою об'єму n, отриманої із нормальної генеральної сукупності з відомим середнім квадратичним відхиленням σ, знайдена вибіркова середня $\bar{X}$. Потрібно на рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу $H_0: m = m_0$, при альтернативній гіпотезі $H_1: m \neq m_0$. Знайти потужність критерію.

РОЗДІЛ 6. Критерії згоди. Критерій Пірсона χ^2

Якщо за вибіркою спостережень визначається закон розподілу генеральної сукупності, то виникає необхідність оцінити розбіжність між емпіричним і теоретичним розподілами. Для цього використовують ***критерії згоди,*** які дозволяють судити, якою є розбіжність між емпіричним і теоретичним розподілами – випадковою чи значущою.

Існує декілька критеріїв згоди, серед яких ***критерій Пірсона*** χ^2, критерій Колмогорова та інші.

6.1 Постановка задачі

Нехай $\overline{X_n}$ – випадкова вибірка об'єму n із генеральної сукупності X. Розглянемо задачу перевірки простої статистичної гіпотези H_0 про те, що функція розподілу $F(x)$ випадкової величини X співпадає з деякою відомою функцією $F_0(x)$.

$$H_0: F(x) = F_0(x), x \in \mathbb{R} \tag{6.1.1}$$

Альтернативна гіпотеза:

$$H_1: F(x) \neq F_0(x), x \in \mathbb{R} \tag{6.1.2}$$

Зауважимо, що вид закону розподілу $F_0(x)$ обирається з фізичного змісту випадкової величини X. Вид гістограми, а також співвідношення між числовими характеристиками випадкових величин, дозволяють зробити припущення відносно теоретичного розподілу. Наприклад, якщо середнє вибіркове співпадає з вибірковою дисперсією, можна припустити, що випадкова величина розподілена за законом Пуассона. Якщо середнє вибіркове близьке до середньоквадратичного відхилення, то має місце показниковий розподіл. Якщо асиметрія і ексцес близькі до нуля, можна припустити, що має місце нормальний закон розподілу.

6.2 Критерії згоди

Як би добре не був обраний теоретичний розподіл $F_0(x)$, між ним і емпіричними даними завжди існує розбіжність. Пояснюється ця розбіжність випадковими обставинами, наприклад, недостатнім об'ємом спостережень, чи вони є істотними і пов'язані з тим, що невдало підібрано теоретичний розподіл? Необхідно перевірити, чи узгоджується емпіричний розподіл $F_n(x)$ з гіпотезою про розподіл за теоретичним законом $F_0(x)$.

У будь-якому критерію згоди розглядається деяка випадкова величина U, що є мірою розбіжності між емпіричними та теоретичними частотами. Якщо U перевищує деяке критичне значення $U_{\text{кр}}$, то основну гіпотезу відкидають, у протилежному випадку – приймають.

6.3 Критерій Пірсона χ^2

Емпіричний розподіл задано у вигляді послідовності рівновіддалених варіантів і відповідних їм частот:

$$x_1\ x_2 \ldots x_N$$
$$n_1\ n_2 \ldots n_N \tag{6.3.1}$$

Використовуючи критерій Пірсона χ^2, перевірити гіпотезу про нормальний розподіл випадкової величини.

Правило. Для того, щоб при заданому рівні значущості α перевірити гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності, потрібно:

1. Обчислити середнє вибіркове $\bar{X}$ і середнє вибіркове квадратичне відхилення $\sigma_{\text{в}}$.

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} x_i n_i\,, \quad n = \sum_{i=1}^{N} n_i \tag{6.3.2}$$

$$\sigma_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} (x_i n_i - \bar{X})^2 \tag{6.3.3}$$

2. Обчислити теоретичні частоти

$$n_i^{\text{теор}} = \frac{nh}{\sigma_{\text{в}}}\varphi(u_i) \tag{6.3.4}$$

де n – об'єм вибірки (сума всіх частот), h– крок (різниця між сусідніми варіантами).

$$u_i = \frac{x_i - \bar{X}}{\sigma_{\text{в}}} \tag{6.3.5}$$

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} e^{-\frac{u^2}{2}} \tag{6.3.6}$$

3. Порівняти емпіричні і теоретичні частоти за допомогою критерія Пірсона. Для цього:

а) обчислити вибіркове значення критерію

$$\chi^2{}_{\text{виб}} = \sum_i \frac{(n_i - n_i^{\text{теор}})^2}{n_i^{\text{теор}}} \tag{6.3.7}$$

Величина $\chi^2{}_{\text{виб}}$ є мірою розбіжності між статистичними і теоретичними частотами, розподілена за законом χ^2.

б) За таблицею критичних точок розподілу χ^2, за заданим рівнем значущості α і числом ступенів свободи $k = s - 3$ (s – число груп вибірки), знаходять критичну точку $\chi^2{}_{\text{кр}} = \chi^2(\alpha, s)$ правосторонньої області.

Якщо $\chi^2{}_{\text{виб}} < \chi^2{}_{\text{кр}}$, то немає підстав відхиляти основну гіпотезу про нормальний розподіл випадкової величини.

Якщо $\chi^2{}_{\text{виб}} > \chi^2{}_{\text{кр}}$, основну гіпотезу про нормальний відхиляють. Іншими словами, емпіричні й теоретичні частоти відрізняються значущо.

Зауваження 1. Частоти, де $n_i < 5$, треба об'єднати з сусідніми.

Зауваження 2. Якщо перевіряємо гіпотезу про теоретичний закон розподілу, відмінний від нормального, то $n_i^{\text{теор}} = nhp(u_i)$, де $p(x) -$ щільність теоретичного закону розподілу у випадку неперервної випадкової величини, висунутого за основною гіпотезою; $p(x) = P(X = x) -$ у випадку дискретної випадкової величини.

Приклад 1. Використовуючи критерій Пірсона χ^2, на рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ перевірити, чи узгоджується гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності з емпіричним розподілу вибірки об'єму $n = 200$.

x_i	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n_i	15	26	25	30	26	21	24	20	13

Розв'язання.

1. За формулою (6.3.2) $\bar{X} = 12{,}63$

   За формулою (6.3.3) $\sigma_{\text{в}} = 4{,}695$

2. Обчислимо теоретичні частоти $n_i^{\text{теор}}$ за формулою (6.3.4), де

$n = 200$; $h = 2$; $\sigma_{\text{в}} = 4{,}695$;$n_i^{\text{теор}} = \frac{200\cdot 2}{4{,}695}\varphi(u_i) = 85{,}2\varphi(u_i)$

Складемо таблицю

i	x_i	$u_i = \dfrac{x_i - \bar{X}}{\sigma_{\text{в}}}$	$\varphi(x_i)$	$n_i^{\text{теор}} = 85{,}2\varphi(u_i)$	n_i
1	5	-1,62	0,1074	9,1	15
2	7	-1,90	0,1942	16,5	26
3	9	-0,77	0,2966	25,3	25
4	11	-0,35	0,3752	32,0	30
5	13	0,08	0,3977	33,9	26
6	15	0,51	0,3503	29,8	21
7	17	0,93	0,2589	22,0	24
8	19	1,36	0,1582	13,5	20
9	21	1,78	0,0818	7,0	13

Значення функції $\varphi(x)$ знаходимо за таблицею значень функції щільності нормального стандартного розподілу.

3. Порівняємо емпіричні і теоретичні частоти. Складемо розрахункову таблицю і знайдемо

$$\chi^2_{\text{виб}} = \sum_i \frac{(n_i - n_i^{\text{теор}})^2}{n_i^{\text{теор}}}$$

i	n_i	$n_i^{\text{теор}}$	$n_i - n_i^{\text{теор}}$	$(n_i - n_i^{\text{теор}})^2$	$\dfrac{(n_i - n_i^{\text{теор}})^2}{n_i^{\text{теор}}}$
1	15	9,1	5,9	34,81	3,8
2	26	16,5	9,5	90,25	5,5
3	25	25,3	-0,3	0,09	0,0
4	30	32,0	-2,0	4,00	0,1
5	26	33,9	-7,9	62,41	1,8

6	21	29,8	-8,8	77,44	2,6
7	24	22,0	2,0	4,00	0,2
8	20	13,5	6,5	42,25	3,1
9	13	7,0	6,0	36,00	5,1

Додамо елементи другого і шостого стовбців: сума другого – об'єм вибірки $n = 200$, сума шостого – ${\chi^2}_{\text{виб}} = 22{,}2$.

За таблицею критичних точок розподілу χ^2 за рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$ і числом ступенів свободи $k = s - 3 = 9 - 3 = 6$ знайдемо ${\chi^2}_{\text{кр}}$ – критичну точку правосторонньої області:

$$ {\chi^2}_{\text{кр}} = \chi^2(0{,}05; 6) = 12{,}6 $$

Так як ${\chi^2}_{\text{виб}} > {\chi^2}_{\text{кр}}$, то гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності відхиляємо на рівні значущості $\alpha = 0{,}05$. Іншими словами, емпіричні й теоретичні частоти відрізняються значущо.

Приклад 2. Результати іспитів на міцність наведено в таблиці.

N	1	2	3	4	5	6	7	8
міцність деталі в кг	120-140	140-160	160-180	180-200	200-220	220-240	240-260	260-280
кількість деталей	1	4	10	14	12	6	2	1

1. Знайти вид закону теоретичного розподілу.
2. Знайти параметри розподілу.
3. Перевірити, чи узгоджується обраний теоретичний розподіл з емпіричними даними.

Розв'язання. Побудуємо гістограму частот (рис. 6.3.1). Для цього в прямокутній системі координат значення ознаки (міцності деталі в кг) відкладемо на осі абсцис, а частоти (m_i) – на осі ординат (масштаб обирається довільно). Потім на відрізках осі абсцис, відповідних побудованим інтервалам, як на основах будуємо прямокутники, висота яких (в обраному масштабі) дорівнює частоті m_i даного інтервалу.

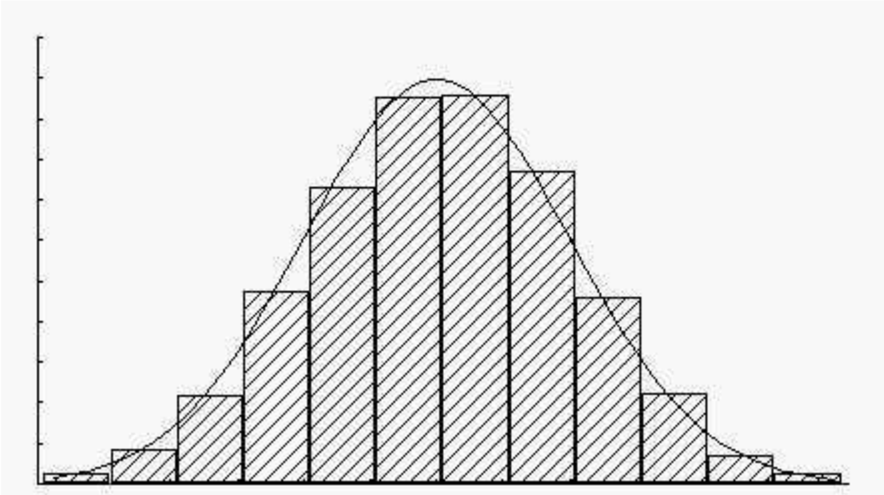


Рис. 6.3.1

У тому випадку, коли інтервали різні, на осі ординат відкладаємо значення абсолютної щільності розподілу

$$p_i = \frac{m_i}{h} \quad (6.3.8)$$

де h – ширина інтервалу, m_i – частота інтервалу.

За виглядом гістограми можна зробити припущення, що випадкова величина X (міцність деталі), що розглядається, розподілена за нормальним законом.

Розрахуємо методом моментів середнє вибіркове $\bar{X}$, дисперсію вибірки $\bar{\sigma}_в^2$, середньоквадратичне відхилення $\bar{\sigma}$, вибіркові коефіцієнти асиметрії A й ексцесу E.

Середнє вибіркове $\bar{X}$ обчислюємо за формулою

$$\bar{X} = M_1{}' + x_0 \quad (6.3.9)$$

де

$$M_1{}' = \frac{\sum_i x_i{}' m_i}{\sum_i m_i} \cdot h \quad (6.3.10)$$

$$x_i{}' = \frac{x_i - x_0}{h} \quad (6.3.11)$$

x_0 – довільне число, але для спрощення обчислень за x_0 приймається число, близьке до $\bar{X}$, частіше середина інтервалу з найбільшою частотою; для даної задачі $x_0 = 190$; h – довжина інтервалу, в даному випадку $h = 20$.

Дисперсія $\bar{\sigma}_в^2$ обчислюється за формулою:

$$\bar{\sigma}_в^2 = M_2{}' - (M_1{}')^2, \quad (6.3.12)$$

де

$$M_2{}' = \frac{\sum_i (x_i{}')^2 m_i}{\sum_i m_i} \cdot h^2. \quad (6.3.13)$$

Середньоквадратичне відхилення

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\bar{\sigma}_{\text{в}}^2}. \qquad (6.3.14)$$

Коефіцієнт асиметрії обчислюється за формулою

$$\bar{A} = \frac{\mu_3}{\sigma^3}, \qquad (6.3.15)$$

де

$$\mu_3 = M_3{}' - 3M_2{}'M_1{}' + 2(M_1{}')^3, \qquad (6.3.16)$$

$$M_3{}' = \frac{\sum_i (x_i{}')^3 m_i}{\sum_i m_i} \cdot h^3. \qquad (6.3.17)$$

Ексцес обчислюємо за формулою

$$\bar{E} = r_4 - 3, \qquad (6.3.18)$$

де

$$r_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}, \qquad (6.3.19)$$

$$\mu_4 = M_4{}' - 4M_3{}'M_2{}' + 6M_2{}'(M_1{}')^2 - 3(M_1{}')^4, \qquad (6.3.20)$$

$$M_4{}' = \frac{\sum_i (x_i{}')^4 m_i}{\sum_i m_i} \cdot h^4 \qquad (6.3.21)$$

Всі обчислення зручно звести в таблицю:

№	Інтервали міцності (кг)	Середини інтервалів	Частоти m_i	$x_i{}' = \frac{x_i - x_0}{h}$, $x_0 = 190$, $h = 20$	$x_i{}'m_i$	$(x_i{}')^2 m_i$	$(x_i{}')^3 m_i$	$(x_i{}')^4 m_i$
1	120-140	130	1	-3	-3	9	-27	81
2	140-160	150	4	-2	-8	16	-32	64
3	160-180	170	10	-1	-10	10	-10	10
4	180-200	190	14	0	0	0	0	0
5	200-220	210	12	1	12	12	12	12
6	220-240	230	6	2	12	24	48	96
7	240-260	250	2	3	6	18	54	162

8	260-280	270	1	4	4	16	64	256
	$\sum$		50		13	105	109	681

Підставляючи значення сум зі стовпчиків 6, 7, 8, 9 відповідно у формули (6.3.9) – (6.3.21), отримаємо:

$M_1{}' = \frac{13}{50} \cdot 20 = 5{,}2$
$M_2{}' = \frac{105}{50} \cdot 400 = 840$
$M_3{}' = \frac{109}{50} \cdot 8000 = 17440$
$M_4{}' = \frac{681}{50} \cdot 16000 = 2179100$
$\bar{X} = 5{,}2 + 190 = 195{,}2$
$\bar{\sigma}_{\text{в}}^2 = 840 - (5{,}2)^2 = 812{,}96$
$\bar{\sigma} = \sqrt{812{,}96} \approx 28{,}5$
$\mu_3 = 17440 - 3 \cdot 840 \cdot 5{,}2 + 2 \cdot (5{,}2)^3 \approx 4617{,}217$
$\mu_4 = 2179200 - 4 \cdot 17400 \cdot 5{,}2 + 6 \cdot 840 \cdot (5{,}2)^2 - 3 \cdot (5{,}2)^4 \approx 1950536{,}1152$
$r_4 = \frac{1950536{,}1152}{(812{,}96)^2} \approx 2{,}95$
$\bar{A} = \frac{4617{,}216}{(28{,}5)^3} \approx 0{,}2$
$\bar{E} = 2{,}95 - 3 = -0{,}05$

Невелике й додатне значення асиметрії $\bar{A}$ говорить про невелику правосторонню асиметрію, а мале від'ємне значення ексцесу $\bar{E}$ говорить про низковершинність розподілу, близького до нормального. Вид гістограми, а також значення асиметрії і ексцесу, дають можливість припустити, що випадкова величина, що аналізується, розподілена за нормальним законом зі щільністю

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < +\infty \qquad (6.3.22)$$

За оцінки параметрів m, σ візьмемо відповідне вибіркове середнє $\bar{x}$ і середньоквадратичне відхилення $\bar{\sigma}$, тобто

$$m = \bar{X} = 195{,}2$$
$$\sigma = \bar{\sigma} = 28{,}5$$

Таким чином,

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 28{,}5} e^{-\frac{(x-195{,}2)^2}{2\cdot(28{,}5)^2}}, -\infty < x < +\infty$$

Теоретична частина попадання в інтервал (x_i, x_{i+1}) дорівнює ймовірності попадання цієї величини в інтервал (x_i, x_{i+1}), домноженої на n (об'єм вибірки).

$$m_i^{\text{теор}} = p(x_i < X < x_{i+1}) \cdot n$$

$$p(x_i < X < x_{i+1}) = \Phi_0\left(\frac{x_{i+1} - \bar{X}}{\bar{\sigma}}\right) - \Phi_0\left(\frac{x_i - \bar{X}}{\bar{\sigma}}\right),$$

де $\Phi_0(x)$ – функція Лапласа.

Необхідні значення зведемо в таблицю

Інтервали (x_i, x_{i+1})	m_i	$t_1 = \frac{x_i - \bar{X}}{\bar{\sigma}}$	$t_2 = \frac{x_{i+1} - \bar{X}}{\bar{\sigma}}$	$\Phi(t_1)$	$\Phi(t_2)$	$p(x_i < X < x_{i+1})$	$m_i^{\text{теор}} \approx np$
120-140	1	-2,64	-1,94	-0,4958	-0,4738	0,0220	1,1 ≈ 1
140-160	4	-1,94	-1,24	-0,4738	-0,3925	0,0813	4,06≈ 4
160-180	10	-1,24	-0,53	-0,3925	-0,2019	0,1906	9,59≈ 10
180-200	14	-0,53	0,17	-0,2019	0,0674	0,2694	13,42≈ 13
200-220	12	0,17	0,87	0,0674	0,3078	0,2404	12,02≈ 12
220-240	6	0,87	1,57	0,3078	0,4417	0,1340	6,70≈ 7
240-260	2	1,57	2,27	0,4417	0,4884	0,0466	2,33≈ 2
260-280	1	2,27	2,98	0,4884	0,4985	0,0102	0,51≈ 1
$\sum$	50	-	-	-	-	0,9945	49,72≈ 50

Користуючись критерієм Пірсона χ^2, перевіримо, чи узгоджуються дані, наведені в таблиці з гіпотезою про нормальний розподіл з параметрами $m = 195{,}2$ і $\bar{\sigma} = 28{,}5$. Для цього обчислимо величину χ^2 за формулою

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(m_i - m_i^{\text{теор}})^2}{m_i^{\text{теор}}}$$

Обчислення зведемо в таблицю:

Інтервали (x_i, x_{i+1})	m_i	$m_i^{\text{теор}}$	$m_i - m_i^{\text{теор}}$	$(m_i - m_i^{\text{теор}})^2$	$\frac{(m_i - m_i^{\text{теор}})^2}{m_i^{\text{теор}}}$
120-140 140-160	5	5	0	0	0
160-180	10	10	0	0	0
180-200	14	13	1	1	0,077
200-220	12	12	0	0	0
220-240	6	7	-1	1	0,143
240-260 260-280	3	3	0	0	0
$\sum$	-	-	-	-	0,22

Характер величини χ^2 потребує, щоб необхідні частоти були не малими. Якщо вони є малими, то вони об'єднуються з сусідніми.

В даному прикладі об'єднують перші дві і дві останні в одну.

$$\chi^2{}_{\text{виб}} = 0{,}22$$

Знайдемо $\chi^2{}_{\text{кр}} = \chi^2(\alpha, k)$, де $k = l - s$;

l - число груп емпіричного розподілу, $l = 6$;

s - число параметрів, які входять до теоретичного закону розподілу з числом додаткових співвідношень.

$s = 3$, так як емпіричні частоти задовольняють трьом співвідношенням:

1) Сума частот дорівнює об'єму вибірки
$$\sum m_i = 50.$$
2) Частоти мають бути такими, що
$$m \approx \bar{X} = 195{,}2.$$
3) Частоти мають бути такими, що
$$\sigma^2 \approx \overline{\sigma^2} = 813.$$

Таким чином, $\chi^2{}_{\text{кр}}$ квантиль розподілу χ^2 рівня α, який залежить від 3 ступенів свободи, знаходимо за таблицею критичних точок розподілу χ^2.

$$\chi^2{}_{\text{кр}} = \chi^2(\alpha, l) = \chi^2(0{,}05; 3) = 0{,}352$$

$$\chi^2{}_{\text{виб}} < \chi^2{}_{\text{кр}}\ (0{,}22 < 0{,}352)$$

Можна зробити висновок, що різниця між теоретичними і емпіричними даними випадкова, а гіпотеза про нормальний розподіл випадкової величини (міцності деталі) приймається на рівні значущості $\alpha = 0{,}05$.

Зауваження. Якщо перевіряємо гіпотезу про теоретичний закон розподілу інший від нормального, то $p_i^{\text{теор}} = P(x_i < X < x_{i+1}) = F_0(x_{i+1}) - F_0(x_i)$.

Контрольні запитання

1. Які критерії називають критеріями згоди?
2. В чому полягає завдання порівняння емпіричного й теоретичного законів розподілу випадкової величини?
3. Яка статистика використовується в критерії Пірсона χ^2? Якому закону вона підпорядковується?
4. На основі яких даних будується гіпотеза про теоретичний закон розподілу випадкової величини? Як діє критерій Пірсона χ^2?

Задачі для самостійного розв'язання

Провести попередній аналіз результатів експериментальних даних. Сформулювати гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності *X*. Використовуючи критерій Пірсона χ^2, на рівні значущості α=0,05 перевірити, чи узгоджується гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності *X* з заданим емпіричним розподілом?

1. Вимірювалась жирність молока корів (%) із навмання обраної ферми.

Границі інтервалів	1,0-1,2	1,2-1,4	1,4-1,6	1,6-1,8	1,8-2,0	2,0-2,2	2,2-2,4	2,4-2,6	2,6-2,8	2,8-3,0	3,0-3,2
частоти	5	12	18	22	36	24	19	15	11	9	2

2. Вимірювався рівень води навесні під час повені (см).

Границі інтервалів	0-24	24-48	48-72	72-96	96-120	120-144	144-168	168-192	192-216
частоти	1	2	4	6	12	16	6	3	1

3. Вимірювалось відхилення діаметру валика від його номінального розміру (мм).

Границі інтервалів	-20 - -10	-10 - 0	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
частоти	20	47	80	89	40	16	8

4.Вимірювався діаметр кульок верстатом-автоматом (мм).

Границі інтервалів	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11	11-13	13-15	15-17	17-19	19-21	21-23
частоти	2	4	6	10	18	20	16	11	7	5	1

5. Вимірювали час неперервного горіння електролампочок (год), виготовлених фірмою, до виходу їх з ладу.

Границі інтервалів	6-16	16-26	26-36	36-46	46-56	56-66	66-76	76-86
частоти	8	7	16	35	15	8	6	5

6. Вимірювалась врожайність цукрових буряків у певному районі південного регіону України (ц/га).

Границі інтервалів	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50
частоти	7	8	15	18	23	19	14	10	6

7. Розподіл швидкості автомобілів (км/год):

Границі інтервалів	61-65	65-69	69-73	73-77	77-81	81-85	85-89	89-93	93-97	97-101
частоти	1	4	5	8	14	9	6	1	1	1

8. Сумарне число балів у спортивних змаганнях:

Границі інтервалів	49-52	52-55	55-58	58-61	61-64	64-67	67-70
частоти	3	6	11	30	21	19	10

9. Розподіл границь міцності зразків зварного шва (Н/мм^2):

Границі інтервалів	28-30	30-32	32-34	34-36	36-38	38-40	40-42	42-44
частоти	8	15	20	30	20	15	10	5

10. Розподіл відхилення напруги від номіналу (мВ):

Границі інтервалів	0,00-0,02	0,02-0,04	0,04-0,06	0,06-0,08	0,08-0,10	0,10-0,12	0,12-0,14	0,14-0,16
частоти	9	15	29	35	32	19	8	3

11. Час виконання вправи (с):

Границі інтервалів	8,95-9,05	9,05-9,15	9,15-9,25	9,25-9,35	9,35-9,45	9,45-9,55	9,55-10,05
частоти	4	8	11	7	5	3	2

12. Горизонтальне відхилення від цілі (м) для 200 іспитів ракет:

Границі інтервалів	-40 - -30	-30 - -20	-20 - -10	-10 -0	0 - 10	10 -20	20 -30	30 -40	40 -50	50 -60
частоти	7	11	15	24	49	41	26	17	7	3

13. Результати лабораторного аналізу зразків сланцевих порід на вміст окису кремнію (у.о.):

Границі інтервалів	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100	100-110	110-120
частоти	5	9	13	24	20	15	8	5

14. Результати лабораторного аналізу зразків сланцевих порід на вміст окису алюмінію (у.о.):

Границі інтервалів	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18
частоти	6	10	14	25	21	16	9	6

15. Величина опору партії резисторів (кОм):

Границі інтервалів	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14
частоти	5	9	15	30	18	14	8	5

16. Результати вимірів ємності конденсаторів дали відхилення від номіналу (пкФ):

Границі інтервалів	-13,5 – -8,5	-8,5 – -3,5	-3,5 – 1,5	1,5 – 6,5	6,5 – 11,5	11,5 – 16,5	16,5 – 21,5	21,5 – 26,5
частоти	5	9	13	24	20	15	8	5

17. Заміри амплітуди коливань (мм) приладу дали такі результати:

Границі інтервалів	60-65	65-70	70-75	75-80	80-85	85-90	90-95	95-100
частоти	7	10	15	30	25	15	8	7

18.Результати вимірів часу відновлення діодів (нс):

Границі інтервалів	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75	75-80
частоти	5	9	14	30	16	9	7	5

19.Діаметри кульок, виготовлених станком-автоматом (мм):

Границі інтервалів	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20	20-22
частоти	5	9	13	24	20	15	8	5

20. Точність наладки станка автомата характеризується дисперсією довжини деталі (мкм^2):

Границі інтервалів	200-250	250-300	300-350	350-400	400-450	450-500	500-550	550-600
частоти	10	15	18	27	17	13	10	5

21. Результати відхилення розмірів деталей від номіналу (мм):

Границі інтервалів	-3,00 – -2,5	-2,5 – -2,0	-2,0 – -1,5	-1,5 – -1,0	-1,0 – -0,5	-0,5 – 0,0	0,0 – 0,5	0,5 – 1,0
частоти	5	9	13	24	20	15	8	5

22. Вимірювання відхилення величини опору від номіналу для партії однотипних резисторів дало такі результати (Ом):

Границі інтервалів	-2,00 – -1,5	-1,5 – -1,0	-1,0 – -0,5	-0,5 – 0,0	0,0 – 0,5	0,5 – 1,0	1,0 – 1,5	1,5 – 2,0
частоти	5	9	13	24	20	15	8	5

23. Виміри деякої величини дали такі похибки (мм):

Границі інтервалів	-3,0 – -2,0	-2,0 – -1,0	-1,0 – 0,0	0,0 – 1,0	1,0 – 2,0	2,0 – 3,0	3,0 – 4,0	4,0 – 5,0
частоти	4	10	15	25	20	15	6	5

24. Виміри амплітуди коливань приладу дали такі результати (мм):

Границі інтервалів	60-65	65-70	70-75	75-80	80-85	85-90	90-95	95-100
частоти	5	10	15	25	20	15	10	5

25. Результати вимірів часу відновлення діодів (с):

Границі інтервалів	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75	75-80	80-85	85-90
частоти	5	10	15	30	20	15	10	5

Таблиці

Таблиця 1. Значення функції $P(m;\lambda)=\frac{\lambda}{m!}e^{-\lambda}$

m	λ									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,90484	81873	74082	67032	60653	54881	49659	44933	40657	36788
1	09048	16375	22225	26813	30327	32929	34761	35946	36591	36788
2	00452	01637	03334	05363	07582	09879	12166	14379	16466	18394
3	00015	00109	00333	00715	01264	01976	02839	03834	04940	06131
4		00005	00025	00072	00158	00296	00497	00767	01111	01533
5			00002	00006	00016	00036	00070	00123	00200	00307
6					00001	00004	00008	00016	00030	00051
7							00001	00002	00004	00007
8										00001

m	λ									
	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0
0	0,22313	13534	08208	04979	03020	01832	01111	00674	00409	00248
1	33470	27067	20521	14936	10569	07326	04999	03369	02248	01487
2	25102	27067	25652	22404	18496	14653	11248	08422	06181	04462
3	12551	18045	21376	22404	21579	19537	16872	14037	11332	08924
4	04707	09022	13360	16803	18881	19537	18981	17547	15582	13385
5	01412	03609	06680	10082	13217	15629	17083	17547	17140	16062
6	00353	01203	02783	05041	07710	10420	12812	14622	15712	16062
7	00076	00344	00994	02160	03855	05954	08236	10444	12345	13768
8	00014	00086	00311	00810	01687	02977	04633	06528	08487	10326
9	00002	00019	00086	00270	00656	01323	02316	03627	05187	06884
10		00004	00022	00081	00230	00529	01042	01813	02853	04130
11		00001	00005	00022	00073	00192	00426	00824	01426	02253
12			00001	00006	00021	00064	00160	00343	00654	01126
13				00001	00006	00020	00055	00132	00277	00520
14					00001	00006	00018	00047	00109	00223
15						00002	00005	00016	00040	00089
16							00002	00005	00014	00033
17								00001	00004	00012
18									00001	00004
19										00001

Таблиця 2. Значення функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	Соті долі x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,39894	39892	39886	39876	39862	39844	39822	39797	39767	39733
0,1	39695	39654	39608	39559	39505	39448	39387	39322	39253	39181
0,2	39104	39024	38940	38853	38762	38667	38568	38466	38361	38251
0,3	38139	38023	37903	37780	37654	37524	37391	37255	37115	36973
0,4	36827	36678	36526	36371	36213	36053	35889	35723	35553	35381
0,5	35207	35029	34849	34667	34482	34294	34105	33912	33718	33521
0,6	33322	33121	32918	32713	32506	32297	32086	31874	31659	31443
0,7	31225	31006	30785	30563	30339	30114	29887	29659	29431	29200
0,8	28969	28737	28504	28269	28034	27798	27562	27324	27086	26848
0,9	26609	26369	26129	25888	25647	25406	25164	24923	24681	24439
1,0	24197	23955	23713	23471	23230	22988	22747	22506	22265	22025
1,1	21785	21546	21307	21069	20831	20594	20357	20121	19886	19652
1,2	19419	19186	18954	18724	18494	18265	18037	17810	17585	17360
1,3	17137	16915	16694	16474	16256	16038	15822	15608	15395	15183
1,4	14973	14764	14556	14350	14146	13943	13742	13542	13344	13147
1,5	12952	12758	12566	12376	12188	12001	11816	11632	11450	11270
1,6	11092	10915	10741	10567	10396	10226	10059	09893	09728	09566
1,7	09405	09246	09089	08933	08780	08628	08478	08329	08183	08038
1,8	07895	07754	07614	07477	07341	07206	07074	06943	06814	06687
1,9	06562	06438	06316	06195	06077	05959	05844	05730	05618	05508
2,0	05399	05292	05186	05082	04980	04879	04780	04682	04586	04491
2,1	04398	04307	04217	04128	04041	03955	03871	03788	03706	03626
2,2	03547	03470	03394	03319	03246	03174	03103	03034	02965	02898
2,3	02833	02768	02705	02643	02582	02522	02463	02406	02349	02294
2,4	02239	02186	02134	02083	02033	01984	01936	01888	01842	01797
2,5	01753	01709	01667	01625	01585	01545	01506	01468	01431	01394
2,6	01358	01323	01289	01256	01223	01191	01160	01130	01100	01071
2,7	01042	01014	00987	00961	00935	00909	00885	00861	00837	00814
2,8	00792	00770	00748	00727	00707	00687	00668	00649	00631	00613
2,9	00595	00578	00562	00545	00530	00514	00499	00485	00470	00457

x	Десяті долі x				
	0	2	4	6	8
3,0	0,00443	00238	00123	00061	00029
4,0	00013	00006	00002	00001	

Таблиця 3. Значення інтегралу Лапласа $\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

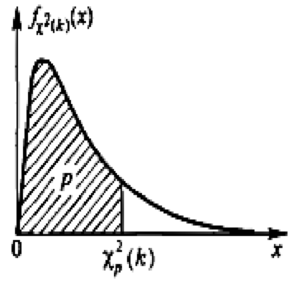
x	Соті долі x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41308	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861

x	Десяті долі x				
	0	2	4	6	8
3,0	0,49865	49931	49966	49984	49993
4,0	49997	49999			

Таблиця 4. Квантилі u_p нормального стандартного розподілу $N(0;1)$

p	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999	0,9995
u_p	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

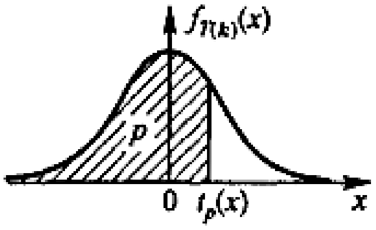
Таблиця 5. Квантилі χ-квадрат розподілу $\chi_p^2(k)$



k	p														
	0.005	0.10	0.025	0.05	0.10	0.20	0.30	0.70	0.80	0.90	0.95	0.975	0.990	0.995	0.999
1	0.0^4393	0.0^3157	0.0^3982	0.0^2393	0.0158	0.0642	0.148	0.07	1.64	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	10.8
2	0.0108	0.201	0.0506	0.103	0.211	0.446	0.713	2.41	3.22	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6	13.8
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.584	1.00	1.42	3.67	4.64	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8	16.3
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	1.65	2.19	4.88	5.99	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9	18.5
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	2.34	3.00	6.06	7.29	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7	20.5
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	3.07	3.83	7.23	8.56	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5	22.5
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	3.82	4.67	8.38	9.80	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3	24.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	4.59	5.53	9.52	11.0	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0	26.1
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.38	6.39	10.7	12.2	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6	27.9
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.18	7.27	11.8	13.4	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2	29.6
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	6.99	8.15	12.9	14.6	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8	31.3
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	7.81	9.03	14.0	15.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3	32.9
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	8.63	9.93	15.1	17.0	19.08	22.4	24.7	27.7	29.8	34.5
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	9.47	10.8	16.2	18.2	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3	36.1
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	10.3	11.7	17.3	19.3	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8	37.7

k	p														
	0.005	0.10	0.025	0.05	0.10	0.20	0.30	0.70	0.80	0.90	0.95	0.975	0.990	0.995	0.999
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.2	12.6	18.4	20.5	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3	39.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.0	13.5	19.5	21.6	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7	40.8
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	12.9	14.4	20.6	22.8	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2	42.3
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	13.7	15.4	21.7	23.9	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6	43.8
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	14.6	16.3	22.8	25.0	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0	45.3
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	15.4	17.2	23.9	26.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4	46.8
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	16.3	18.1	24.9	27.3	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8	48.3
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	17.2	19.0	26.0	28.4	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2	49.7
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	18.1	19.9	27.1	29.6	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6	51.2
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	18.9	20.9	28.2	30.7	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9	52.6
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	19.8	21.8	29.2	31.8	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3	54.1
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	20.7	22.7	30.3	32.9	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6	55.5
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	21.6	23.6	31.4	34.0	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0	56.9
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	22.5	24.6	32.5	35.1	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3	58.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	23.4	25.5	33.5	36.3	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7	59.7
35	17.2	18.5	20.6	22.5	24.8	27.8	30.2	38.9	41.8	46.1	49.8	53.2	57.3	60.3	66.6
40	20.7	22.2	24.4	26.5	29.1	32.3	34.9	44.2	47.3	51.8	55.8	59.3	63.7	66.8	73.4
45	24.3	25.9	28.4	30.6	33.4	36.9	39.6	49.5	52.7	57.5	61.7	65.4	70.0	73.2	80.1
50	28.0	29.7	32.4	34.8	37.7	41.4	44.3	54.7	58.2	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5	86.7
75	47.2	49.5	52.9	56.1	59.8	64.5	68.1	80.9	85.1	91.1	96.2	100.8	106.4	110.3	118.6
100	67.3	70.1	74.2	77.9	82.4	87.9	92.1	106.9	111.7	118.5	124.3	129.6	135.6	140.2	149.4

Таблиця 6. Квантилі розподілу Стьюдента



k	p						
	0,750	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995	0,999
1	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	318
2	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,3
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,2
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297
10	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144
11	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025
12	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930
13	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852
14	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787
15	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733
16	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686
17	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646
18	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610
19	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579
20	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552
21	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527
22	0,686	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505
23	0,685	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485
24	0,685	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467
25	0,684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450
26	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435
27	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421
28	0,683	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408
29	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396
30	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385
40	0,681	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307
60	0,679	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232
120	0,677	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,160
∞	0,674	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090

Таблиця 7. Квантилі розподілу Фішера

k_2	k_1 = 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120
	$p = 0,9$																	
1	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86	60.19	60.71	61.22	61.74	62.00	62.26	62.53	62.79	63.06
2	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48
3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.20	5.18	5.18	5.17	5.16	5.15	5.14
4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.79	3.78
5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.14	3.12
6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.90	2.87	2.84	2.82	2.80	2.78	2.76	2.74
7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70	2.67	2.63	2.59	2.58	2.56	2.54	2.51	2.49
8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.34	2.32
9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.38	2.34	2.30	2.28	2.25	2.23	2.21	2.18
10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.28	2.24	2.20	2.18	2.16	2.13	2.11	2.08
11	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.03	2.00
12	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19	2.15	2.10	2.06	2.04	2.01	1.99	1.96	1.93
13	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16	2.14	2.10	2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.90	1.88
14	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.10	2.05	2.01	1.96	1.94	1.91	1.89	1.86	1.83
15	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06	2.02	1.97	1.92	1.90	1.87	1.85	1.82	1.79
16	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03	1.99	1.94	1.89	1.87	1.84	1.81	1.78	1.75
17	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03	2.00	1.96	1.91	1.86	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72
18	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	1.98	1.93	1.89	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69
19	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96	1.91	1.86	1.81	1.79	1.76	1.73	1.70	1.67
20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94	1.89	1.84	1.79	1.77	1.74	1.71	1.68	1.64
21	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95	1.92	1.87	1.83	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66	1.62
22	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90	1.86	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.64	1.60
23	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92	1.89	1.84	1.81	1.74	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59
24	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.61	1.57
25	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89	1.87	1.82	1.77	1.72	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56
26	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86	1.81	1.76	1.71	1.68	1.65	1.61	1.58	1.54
27	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.87	1.85	1.80	1.75	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57	1.53
28	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52
29	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86	1.83	1.78	1.73	1.68	1.65	1.62	1.58	1.55	1.51
30	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82	1.77	1.72	1.67	1.64	1.61	1.57	1.54	1.50
40	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76	1.71	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.47	1.42
60	2.70	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.66	1.60	1.54	1.51	1.48	1.44	1.40	1.35
120	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68	1.65	1.60	1.55	1.48	1.45	1.41	1.37	1.32	1.36
∞	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63	1.60	1.55	1.49	1.42	1.38	1.34	1.30	1.24	1.17

Продовження таблиці 7

k_2	k_1 = 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120
									$p = 0,95$									
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	243.9	245.9	248.0	249.1	250.1	251.1	252.2	253.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	3.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.08	1.94	1.89	1.84
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	3.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22

Продовження таблиці 7

k_2	k_1 = 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120
	$p = 0,975$																	
1	647.8	799.5	864.6	899.6	921.8	917.1	948.2	956.7	963.3	968.6	976.7	984.9	993.1	997.2	1001	1006	1010	1014
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.41	39.43	39.45	39.46	39.46	39.47	39.48	39.49
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.34	14.25	14.17	14.12	14.08	14.04	13.99	13.95
4	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.75	8.66	8.56	8.51	8.46	8.41	8.36	8.31
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	4.37	5.27	5.17	5.12	5.07	5.01	4.96	4.90
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.67	4.57	4.47	4.42	4.36	4.31	4.25	4.20
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.20	4.10	4.00	3.95	3.89	3.84	3.78	3.73
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.87	3.77	3.67	3.61	3.56	3.51	3.45	3.39
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.26	3.20	3.14
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.43	3.33	3.23	3.17	3.12	3.06	3.00	2.94
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.28	3.18	3.07	3.02	2.96	2.91	2.85	2.79
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25	3.15	3.05	2.95	2.89	2.84	2.78	2.72	2.66
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15	3.05	2.95	2.84	2.79	2.73	2.67	2.61	2.55
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	2.96	2.86	2.76	2.70	2.64	2.59	2.52	2.46
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.89	2.79	2.68	2.63	2.57	2.51	2.45	2.38
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.82	2.72	2.62	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87	2.77	2.67	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.26
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.72	2.62	2.51	2.45	2.39	2.33	2.27	2.20
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.68	2.57	2.46	2.41	2.35	2.29	2.22	2.16
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73	2.64	2.53	2.42	2.37	2.31	2.25	2.18	2.11
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70	2.60	2.50	2.39	2.33	2.27	2.21	2.14	2.08
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67	2.57	2.47	2.36	2.30	2.24	2.18	2.11	2.04
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.54	2.44	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2.01
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.51	2.41	2.30	2.24	2.18	2.12	2.05	1.98
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59	2.49	2.39	2.28	2.22	2.16	2.09	2.03	1.95
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57	2.47	2.36	2.25	2.19	2.13	2.07	2.00	1.93
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55	2.45	2.34	2.23	2.17	2.11	2.05	1.98	1.91
29	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53	2.43	2.32	2.21	2.15	2.09	2.03	1.96	1.89
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.41	2.31	2.20	2.14	2.07	2.01	1.94	1.87
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.29	2.18	2.07	2.01	1.94	1.88	1.80	1.72
60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.17	2.06	1.94	1.88	1.82	1.74	1.67	1.38
120	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16	2.05	1.94	1.82	1.76	1.69	1.61	1.53	1.43
∞	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05	1.94	1.83	1.71	1.64	1.57	1.48	1.39	1.27

Продовження таблиці 7

k_2	k_1																	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120
	$p = 0,99$																	
1	4052	4999,5	5403	5625	5764	5859	5928	5982	6022	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99,33	99.36	99.37	99.39	89.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48	99.49
3	34.12	30.82	29,46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35	27,23	27.05	26.87	26.69	26.60	26.50	26.41	26.32	26.22
4	21,20	18.00	16.69	15.98	15,52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14,37	14.20	14.02	13.93	13.84	13.75	13.65	13.56
5	16,26	13.27	12,06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11
6	13.75	10.92	9,78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97
7	12.25	9.55	8,45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74
8	11.26	8,65	7.59	7,01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5,36	5.28	5.20	5.12	5,03	4.95
9	10.56	8,02	6,99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4,73	4.65	4.57	4.48	4.40
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	2.69
12	9.33	6.93	5,95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45
13	9,07	6.70	5,74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3,59	3.51	3.43	3.34	3.25
14	8,86	6.51	5,56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4,20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84
17	8.40	6,11	5,18	4.67	4.34	4,10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3,16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75
18	8,29	6,01	5,09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3,08	3,00	2.92	2.84	2.75	2.66
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58
20	8,10	5.85	4.94	4,43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2,55	2.46
22	7.95	5,72	4,82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3,26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3,71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2,70	2.62	2.54	2.45	2.15
24	7.82	5,61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31
25	7.77	5.57	4.68	4,18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3,13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27
26	7,72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23
27	7,68	5.49	4,60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2,78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17
29	7,60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2,87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.33	2.23	2.14
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2,55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11
40	7,31	5,18	4.31	3,83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73
120	6,85	4,79	3.95	3.48	3.17	2.96	2,79	2.66	2,56	2.47	2.34	2,19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2,18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32

Продовження таблиці 7

k_2	k_1 = 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120
									$p = 0,995$									
1	16211	20000	21615	22500	23056	23437	23715	23925	24091	24224	24426	24630	24836	24940	25044	25148	25253	25359
2	198.5	199.0	199.2	199.2	199.3	199.3	199.4	199.4	199.4	199.40	199.4	199.4	199.4	199.5	199.5	199.5	199.5	199.5
3	55.55	49.80	47.47	46.19	45.39	44.84	44.43	44.13	43.88	43.69	43.39	43.08	42.78	42.62	42.47	42.31	42.15	41.99
4	31.33	26.28	24.26	23.15	22.46	21.97	21.62	21.35	21.14	20.97	20.70	20.44	20.17	20.03	19.89	19.75	19.61	19.47
5	22.78	18.31	16.53	15.56	14.94	14.51	14.20	13.96	13.77	13.62	13.38	13.15	12.90	12.78	12.66	12.53	12.40	12.27
6	18.64	14.54	12.92	12.03	11.46	11.07	10.79	10.57	10.39	10.25	10.03	9.81	9.59	9.47	9.36	9.24	9.12	9.00
7	16.24	12.40	10.88	10.05	9.52	9.16	8.89	8.68	8.51	8.38	8.18	7.97	7.75	7.65	7.53	7.42	7.31	7.19
8	14.09	11.04	9.60	8.81	8.30	7.95	7.69	7.50	7.34	7.21	7.01	6.81	6.61	6.50	6.40	6.29	6.18	6.06
9	12.61	10.11	8.72	7.96	7.47	7.13	6.88	6.69	6.54	6.42	6.23	6.03	5.83	5.73	5.62	5.52	5.41	5.30
10	12.83	9.43	8.08	7.34	6.87	6.54	6.30	6.12	5.97	5.85	5.66	5.47	5.27	5.17	5.07	4.97	4.86	4.75
11	12.23	8.91	7.60	6.88	6.42	6.10	5.86	5.68	5.54	5.42	5.24	5.05	4.86	4.76	4.65	4.55	4.44	4.34
12	11.75	8.51	7.23	6.52	6.07	5.76	5.52	5.35	5.20	5.09	4.91	4.72	4.53	4.43	4.33	4.23	4.12	4.01
13	11.37	8.19	6.93	6.23	5.79	5.48	5.25	5.08	4.94	4.82	4.64	4.46	4.27	4.17	4.07	3.97	3.87	3.26
14	11.06	7.92	6.68	6.00	5.56	5.26	5.03	4.86	4.72	4.60	4.43	4.25	4.06	3.96	3.86	3.76	3.66	3.55
15	10.80	7.70	6.48	5.80	5.37	5.07	4.85	4.67	4.54	4.42	4.25	4.07	3.88	3.79	3.69	3.58	3.48	3.37
16	10.58	7.51	6.30	5.64	5.21	4.91	4.69	4.52	4.38	4.27	4.10	3.92	3.73	3.64	3.54	3.44	3.33	3.22
17	10.38	7.35	6.16	5.50	5.07	4.78	4.56	4.39	4.25	4.14	3.97	3.79	3.61	3.51	3.41	3.31	3.21	3.10
18	10.22	7.21	6.03	5.37	4.96	4.66	4.44	4.28	4.14	4.03	3.86	3.68	3.50	3.40	3.30	3.20	3.10	2.99
19	10.07	7.09	5.92	5.27	4.85	4.56	4.34	4.18	4.04	3.93	3.76	3.59	3.40	3.31	3.21	3.11	3.00	2.89
20	9.94	6.99	5.82	5.17	4.76	4.47	4.26	4.09	3.96	3.85	3.68	3.50	3.32	3.22	3.12	3.02	2.92	2.81
21	9.83	6.89	5.73	5.09	4.68	4.39	4.18	4.01	3.88	3.77	3.60	3.43	3.24	3.15	3.05	2.95	2.84	2.73
22	9.73	6.81	5.65	5.02	4.61	4.32	4.11	3.94	3.81	3.70	3.54	3.36	3.18	3.08	2.98	2.88	2.77	2.66
23	9.63	6.73	5.58	4.95	4.54	4.26	4.05	3.88	3.75	3.64	3.47	3.30	3.12	3.02	2.92	2.82	2.71	2.60
24	9.55	6.66	5.52	4.89	4.49	4.20	3.90	3.83	3.69	3.59	3.42	3.25	3.06	2.97	2.87	2.77	2.66	2.55
25	9.48	6.60	5.46	4.84	4.43	4.15	3.94	3.78	3.64	3.54	3.37	3.20	3.01	2.92	2.82	2.72	2.61	2.50
26	9.41	6.54	5.41	4.79	4.38	4.10	3.89	3.73	3.60	3.49	3.33	3.15	2.97	2.87	2.77	2.67	2.56	2.45
27	9.34	6.49	5.36	4.74	4.34	4.06	3.85	3.69	3.56	3.45	3.28	3.11	2.93	2.83	2.73	2.63	2.52	2.41
28	9.28	6.44	5.32	4.70	4.30	4.02	3.81	3.65	3.52	3.41	3.25	3.07	2.89	2.79	2.69	2.59	2.48	2.37
29	9.23	6.40	5.28	4.66	4.26	3.98	3.77	3.61	3.48	3.38	3.21	3.04	2.86	2.76	2.66	2.56	2.45	2.33
30	9.18	6.35	5.24	4.02	4.23	3.95	3.74	3.58	3.45	3.34	3.18	3.01	2.82	2.73	2.63	2.52	2.42	2.30
40	8.83	6.07	4.98	4.37	3.99	3.71	3.51	3.35	3.22	3.12	2.95	2.78	2.60	2.50	2.40	2.30	2.18	2.06
60	8.49	5.79	4.73	4.14	3.76	3.49	3.29	3.13	3.01	2.90	2.74	2.57	2.39	2.29	2.19	2.08	1.96	1.83
120	8.18	5.54	4.50	3.92	3.55	3.28	3.09	2.93	2.81	2.71	2.54	2.37	2.19	2.09	1.98	1.87	1.75	1.61
∞	7.88	5.30	4.28	3.72	3.35	3.09	2.90	2.74	2.62	2.52	2.36	2.19	2.00	1.90	1.79	1.67	1.53	1.36

Продовження таблиці 7

k_2	k_1 = 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120
	$p = 0,999$																	
1	4053+	5000+	5404+	5625+	5764+	5859+	5929+	25981+	6023+	6056+	6107+	6158+	6209+	6235+	6261+	6287+	6313+	6340+
2	998.5	999.0	999.2	999.2	999.3	999.3	999.4	999.4	999.4	999.40	999.4	999.4	999.4	999.5	999.5	999.5	999.5	999.5
3	167.0	148.5	141.1	137.1	134.6	132.8	131.6	130.6	129.9	129.2	128.3	127.4	126.4	125.9	125.4	125.0	124.5	124.0
4	74.14	61.25	56.18	53.44	51.71	50.53	49.66	49.00	48.47	48.05	47.41	46.76	46.10	45.77	45.43	45.09	44.75	44.40
5	47.18	37.12	33.20	31.09	29.75	28.84	28.16	27.64	27.24	26.92	26.42	25.91	25.39	25.14	24.87	24.60	24.33	24.06
6	35.51	27.00	23.20	21.92	20.81	20.03	19.46	19.03	18.69	18.41	17.99	17.56	17.12	16.89	16.67	16.44	16.21	15.99
7	29.25	21.69	18.77	17.19	16.21	15.52	15.02	14.63	14.33	14.08	13.71	13.32	12.93	12.73	12.53	12.33	12.12	11.91
8	25.42	18.49	15.83	14.39	13.49	12.86	12.40	12.04	11.77	11.54	11.19	10.84	10.48	10.30	10.11	9.92	9.73	9.53
9	22.86	16.29	13.90	12.56	11.71	11.13	10.70	10.37	10.11	9.89	9.57	9.24	8.90	8.72	8.55	8.37	8.19	8.00
10	21.04	14.91	12.55	11.28	10.48	9.92	9.52	9.20	8.96	8.75	8.45	8.13	7.80	7.64	7.47	7.30	7.12	6.94
11	19.69	13.81	11.56	10.35	9.58	9.05	8.66	8.35	8.12	7.92	7.61	7.32	7.01	6.85	6.68	6.52	6.35	6.17
12	18.64	12.97	10.80	9.63	8.89	8.38	8.00	7.71	7.48	7.29	7.00	6.71	6.40	6.25	6.09	5.93	5.76	5.59
13	17.81	12.31	10.21	9.07	8.35	7.86	7.49	7.21	6.98	6.80	6.52	6.23	5.93	5.78	5.63	5.47	5.30	5.14
14	17.14	11.78	9.73	8.62	7.92	7.43	7.08	6.80	6.58	6.40	6.13	5.85	5.56	5.41	5.25	5.10	4.94	4.77
15	16.50	11.34	9.34	8.25	7.57	7.09	6.74	6.47	6.26	6.08	5.81	5.54	5.25	5.10	4.95	4.80	4.64	4.47
16	16.12	10.97	9.00	7.94	7.27	6.81	6.46	6.19	5.98	5.81	5.55	5.27	4.99	4.85	4.70	4.54	4.39	4.21
17	15.72	10.66	8.73	7.68	7.02	6.56	6.22	5.96	5.75	5.58	5.32	5.05	4.78	4.63	4.48	4.33	4.18	4.02
18	15.38	10.39	8.49	7.46	6.81	6.35	6.02	5.76	5.56	5.39	5.13	4.87	4.59	4.45	4.30	4.15	4.00	3.84
19	15.08	10.16	8.28	7.26	6.62	6.18	5.85	5.59	5.39	5.22	4.97	4.70	4.43	4.29	4.14	3.99	3.84	3.68
20	14.82	9.95	8.10	7.10	6.46	6.02	5.69	5.44	5.24	5.08	4.82	4.56	4.29	4.15	4.00	3.86	3.70	3.54
21	14.59	9.77	7.94	6.95	6.32	5.88	5.56	5.31	5.11	4.95	4.70	4.44	4.17	4.03	3.88	3.74	3.58	3.42
22	14.38	9.61	7.80	6.81	6.19	5.76	5.44	5.19	4.99	4.83	4.58	4.33	4.06	3.92	3.78	3.63	3.48	3.32
23	14.19	9.47	7.67	6.69	6.08	5.65	5.33	5.09	4.99	4.71	4.48	4.23	3.96	3.82	3.68	3.53	3.38	3.22
24	14.03	9.34	7.55	6.59	5.98	5.55	5.23	4.99	4.80	4.64	4.39	4.14	3.87	3.74	3.59	3.45	3.29	3.14
25	13.88	9.22	7.45	6.49	5.88	5.46	5.15	4.91	4.71	4.56	4.31	4.06	3.79	3.66	3.52	3.37	3.22	3.06
26	13.74	9.12	7.36	6.41	5.80	5.38	5.07	4.83	4.64	4.48	4.24	3.99	3.72	3.59	3.44	3.30	3.15	2.99
27	13.61	9.02	7.27	6.33	5.73	5.31	5.00	4.76	4.57	4.41	4.17	3.92	3.66	3.52	3.38	3.23	3.08	2.92
28	13.50	8.93	7.19	6.25	5.66	5.24	4.93	4.69	4.50	4.35	4.11	3.86	3.60	3.46	3.32	3.18	3.02	2.86
29	13.39	8.85	7.12	6.19	5.59	5.18	4.87	4.64	4.45	4.29	4.05	3.80	3.54	3.41	3.27	3.12	2.97	2.81
30	13.29	8.77	7.05	6.12	5.53	5.12	4.82	4.58	.39	4.24	4.00	3.75	3.49	3.36	3.22	3.07	2.92	2.76
40	12.61	8.25	6.60	5.70	5.13	4.73	4.44	4.21	4.02	3.87	3.64	3.40	3.15	3.01	2.87	2.73	2.57	2.41
60	11.97	7.76	6.17	5.31	4.76	4.37	4.09	3.87	3.69	2.54	3.31	3.08	2.83	2.69	2.55	2.41	2.25	2.08
120	11.38	7.32	5.79	4.95	4.42	4.04	3.77	3.55	3.38	3.24	3.02	2.78	2.53	2.40	2.26	2.11	1.95	1.76
∞	10.83	6.91	5.42	4.62	4.10	3.74	3.47	3.27	3.10	2.96	2.74	2.51	2.27	2.13	1.99	1.84	1.66	1.45

Таблиця 8. Рівномірно розподілені випадкові числа

10	09	73	25	33	76	52	01	35	86	34	67	35	48	76
37	54	20	48	05	64	89	47	42	96	24	80	52	40	37
08	42	26	89	53	19	64	50	93	03	23	20	90	25	60
99	01	90	25	29	09	37	67	07	15	38	31	13	11	65
12	80	79	99	70	80	15	73	61	47	64	03	23	66	53
80	95	90	91	17	39	29	27	49	45	66	06	57	47	17
20	63	61	04	02	00	82	29	16	65	31	06	01	08	05
15	95	33	47	64	35	08	03	36	06	85	26	97	76	02
88	67	67	43	97	04	43	62	76	59	63	57	33	21	35
98	95	11	68	77	12	17	17	68	33	73	79	64	57	53
34	07	27	68	50	36	69	73	61	70	65	81	33	98	85
45	57	18	24	06	35	30	34	26	14	86	79	90	74	39
02	05	16	56	92	68	66	57	48	18	73	05	38	52	47
05	32	54	70	48	90	55	35	75	48	28	46	82	87	09
03	52	96	47	78	35	80	83	42	82	60	93	52	03	44
11	19	92	91	70	98	52	01	77	67	14	90	56	86	07
23	40	30	97	32	11	80	50	54	31	39	80	82	77	32
18	62	38	85	79	83	45	29	96	34	06	28	89	80	83
83	49	12	56	24	88	68	54	02	00	86	50	75	84	01
35	27	38	84	35	99	59	46	73	48	87	51	76	49	69
22	10	94	05	58	60	97	09	34	33	50	50	07	39	98
0	72	56	82	48	29	40	52	42	01	52	77	56	78	51
13	74	67	00	78	18	47	54	06	10	68	71	17	78	17
36	76	66	79	51	90	36	47	64	93	29	60	91	10	62
91	82	60	89	28	93	78	56	13	68	23	47	83	41	13
65	48	11	76	74	17	46	85	09	50	58	04	77	69	74
80	12	43	56	35	17	72	70	80	15	45	31	82	23	74
74	35	09	98	17	77	40	27	72	14	43	23	60	02	10
69	91	62	68	03	66	25	22	91	48	36	93	68	72	03
09	89	32	05	05	14	22	56	85	14	46	42	75	67	88
73	03	95	71	86	40	21	81	65	44	91	49	91	45	23
21	11	57	82	53	14	38	55	37	63	80	33	69	45	98
45	52	16	42	37	96	28	60	26	55	44	10	48	19	49
76	62	11	39	90	94	40	05	64	18	12	55	07	37	42
96	29	77	88	22	54	38	21	45	98	63	60	64	93	29
68	47	92	76	86	46	16	28	35	54	94	75	08	99	23
26	94	03	68	58	70	29	73	41	35	53	14	03	33	40
85	15	74	79	54	32	97	92	65	75	57	60	04	08	81
11	10	00	20	40	12	86	07	46	97	96	64	48	94	39
16	50	53	44	84	40	21	95	25	63	43	65	17	70	82

Рекомендована література

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей : учеб. М.: Наука, 1969.

2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высш. шк., 2003.

3. Зарубин В.С. Математическая статистика: учеб. для вузов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2002.

4. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций/ под ред. А.А.Свешникова. М.: Наука, 1979.

5. Медведєв М.Г., Пащенко І.О. Теорія ймовірностей та математична статистика: підручник. К. : Вид-во «Ліра-К», 2008.

6. Теорія ймовірностей та елементи математичної статистики / під ред. Л.І.Плотнікової. Навч. посіб. Одеса: Астропринт, 2004.

7. Грібова В.В., Перстньова В.В., Сікіраш Ю.Є. Теорія ймовірностей : навч. посіб. Одеса, 2022. http://dspace.opu.ua/jspui/handle/123456789/12562

Зміст