Міністерство освіти і науки України

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

РОЗРАХУНКОВА РОБОТА ДО РОЗДІЛУ «ІНТЕГРАЛЬНІ ТА ДИСКРЕТНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ» ДИСЦИПЛІНИ «ВИЩА МАТЕМАТИКА» ТА МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ЇЇ ВИКОНАННЯ

для здобувачів вищої освіти за спеціальностями
122 – Комп’ютерні науки, 125 – Кібербезпека

Одеса: Одеська політехніка, 2023

Міністерство освіти і науки України

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

РОЗРАХУНКОВА РОБОТА ДО РОЗДІЛУ «ІНТЕГРАЛЬНІ ТА ДИСКРЕТНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ» ДИСЦИПЛІНИ «ВИЩА МАТЕМАТИКА» ТА МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ЇЇ ВИКОНАННЯ

для здобувачів вищої освіти за спеціальностями
122 – Комп'ютерні науки, 125 – Кібербезпека

Затверджено на засіданні
кафедри вищої математики
та моделювання систем
Протокол № 10 від 24.05.2023

Одеса: Одеська політехніка, 2023

Грібова, В. В. Розрахункова робота до розділу «Інтегральні та дискретні перетворення» дисципліни «Вища математика» та методичні вказівки до її виконання для здобувачів вищої освіти за спеціальностями 122 – Комп'ютерні науки, 125 – Кібербезпека / уклад. : В. В. Грібова, В. В. Перстньова, Ю. Є. Сікіраш ; Нац. ун-т "Одеська політехніка". - Одеса, 2023. – 36 с.

Укладачі: **Грібова В.В.**, канд. фіз. - мат. наук, доцент
Перстньова В.В., ст. викладач
Сікіраш Ю.Є., ст. викладач

ВСТУП

Операційне числення відіграє важливу роль при розв'язуванні прикладних задач. Операційне числення – один із методів математичного аналізу, який дозволяє в ряді випадків зводити дослідження диференціальних та деяких типів інтегральних операторів і розв'язання рівнянь, які містять ці оператори, до більш простих алгебраїчних задач.

Методи операційного числення передбачають реалізацію наступної умовної схеми розв'язання задач:

1. Від невідомих функцій переходять до їх зображень.
2. Виконують операції над зображеннями, що відповідають діям над самими функціями.
3. Отримавши результат, відновлюють оригінали.

В роботі використані перетворення Лапласа, Фур'є, дискретне z-перетворення.

На час виконання розрахункової роботи студенти повинні вже знати основні поняття теорії диференціальних рівнянь, інтегральне числення, теорію функцій комплексної змінної.

Надано зразок виконання завдань та необхідний довідковий матеріал.

ЗАВДАННЯ ДО РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ

Варіант 1

1. Використовуючи перетворення Лапласа, знайти спектральну характеристику сигналу

$$f(t) = t - 1\ ,\ t \in (0; 2).$$

2. Відновити оригінал за зображенням

$$F(p) = \frac{2}{p^2 + 1} e^{-p}$$

3. Операційним методом розв'язати задачу Коші при $t > 0$:

$$y'' + 5y' + 6y = e^{-2t}, y(0) = -1; y'(0) = 0.$$

4. Операційним методом розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = x + 2y, \end{cases} \qquad x(0) = 2, y(0) = 1.$$

5. Розв'язати інтегральне рівняння Вольтерра типу згортки двома способами:

а) операційним методом;
б) зведенням до задачі Коші для звичайного диференціального рівняння.

$$\varphi(x) = sinx + \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt$$

6. Використовуючи z-перетворення, розв’язати задачу Коші:

$$x_{n+1} - x_n = 2, x_0 = -1.$$

7. Розв’язати диференціальне рівняння

$$y'' - y = tht,$$

що задовольняє умовам:

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

Варіант 2

1. Використовуючи перетворення Лапласа, знайти спектральну характеристику сигналу

$$f(t) = 2 - |t| \,, t \in (-2; 2).$$

2. Відновити оригінал за зображенням

$$F(p) = \frac{2}{p} e^{-3p}$$

3. Операційним методом розв’язати задачу Коші при $t > 0$:

$$y'' - 2y' + y = 2e^t, y(0) = 1; y'(0) = 1.$$

4. Операційним методом розв’язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = x + 4y, \end{cases} \qquad x(0) = 1, y(0) = 0.$$

5.Розв’язати інтегральне рівняння Вольтерра типу згортки двома способами:
а) операційним методом;
б) зведенням до задачі Коші для звичайного диференціального рівняння.

$$\varphi(x) = x^2 + \int_0^x (x-t)^3\varphi(t)dt$$

6. Використовуючи z-перетворення, розв’язати задачу Коші:

$$x_{n+1} - 3x_n = 3^n, x_0 = 1.$$

7. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y'' - y = \frac{1}{1+e^t},$$

що задовольняє умовам:

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

Варіант 3

1. Використовуючи перетворення Лапласа, знайти спектральну характеристику сигналу

$$f(t) = sint\,,\ t \in (-\pi; \pi).$$

2. Відновити оригінал за зображенням

$$F(p) = \frac{4}{p}e^{-2p}$$

3. Операційним методом розв'язати задачу Коші при $t > 0$:

$$y'' - y' - 2y = 3te^t, y(0) = 0; y'(0) = 0.$$

4. Операційним методом розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = -2x - y, \end{cases} \qquad x(0) = 1, y(0) = -1.$$

5. Розв'язати інтегральне рівняння Вольтерра типу згортки двома способами:
а) операційним методом;
б) зведенням до задачі Коші для звичайного диференціального рівняння.

$$\varphi(x) = x^2 + \int_0^x \sin(x-t)\varphi(t)dt$$

6. Використовуючи z-перетворення, розв'язати задачу Коші:

$$x_{n+1} - x_n = 2^n, x_0 = 0.$$

7. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{1+t^2},$$

що задовольняє умовам:

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

Варіант 4

1. Використовуючи перетворення Лапласа, знайти спектральну характеристику сигналу

$$f(t) = 2sint\ ,\ t \in (-2\pi; 2\pi).$$

2. Відновити оригінал за зображенням

$$F(p) = \frac{74}{p^3} e^{-3p}$$

3. Операційним методом розв'язати задачу Коші при $t > 0$:

$$y'' - 4y' + 3y = 2(e^t + 3e^{3t}),\ y(0) = -1;\ y'(0) = 1.$$

4. Операційним методом розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x' = -5x + 4y, \\ y' = -x - y, \end{cases} \qquad x(0) = -2, y(0) = -1.$$

5. Розв'язати інтегральне рівняння Вольтерра типу згортки двома способами:
а) операційним методом;
б) зведенням до задачі Коші для звичайного диференціального рівняння.

$$\varphi(x) = 1 + 2x + \int_0^x cos(x-t)\varphi(t)dt$$

6. Використовуючи z-перетворення, розв'язати задачу Коші:

$$x_{n+1} - 25x_n = 3 \cdot 2^n, x_0 = 0.$$

7. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y'' - 2y' + 2y = 2e^t cost,$$

що задовольняє умовам:

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

Варіант 5

1. Використовуючи перетворення Лапласа, знайти спектральну характеристику сигналу

$$f(t) = cost\ ,\ t \in (-\pi; \pi).$$

2. Відновити оригінал за зображенням

$$F(p) = \frac{11}{p^4} e^{-7p}$$

3. Операційним методом розв'язати задачу Коші при $t > 0$:

$$y'' + y = 2(cost - sint), y(0) = 1; y'(0) = 2.$$

4. Операційним методом розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = x + 2y, \end{cases} \qquad x(0) = 2, y(0) = 1.$$

5. Розв'язати інтегральне рівняння Вольтерра типу згортки двома способами:
а) операційним методом;
б) зведенням до задачі Коші для звичайного диференціального рівняння.

$$\varphi(x) = x + \int_0^x e^{-2(t-x)} \varphi(t) dt$$

6. Використовуючи z-перетворення, розв'язати задачу Коші:

$$x_{n+1} + 2x_n = 3n, x_0 = 0.$$

7. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y'' - y = th^2 t,$$

що задовольняє умовам:

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

Варіант 6

1. Використовуючи перетворення Лапласа, знайти спектральну характеристику сигналу

$$f(t) = 3 - |t|\ ,\ t \in (-3; 3).$$

2. Відновити оригінал за зображенням

$$F(p) = \frac{12}{p^2} e^{-2p}$$

3. Операційним методом розв'язати задачу Коші при $t > 0$:

$$y'' - 2y' - 3y = 4e^{3t} - 4e^{-t}, y(0) = 2; y'(0) = 0.$$

4. Операційним методом розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x' = -2x - 3y, \\ y' = 6x + 7y, \end{cases} \qquad x(0) = -1, y(0) = 0.$$

5. Розв'язати інтегральне рівняння Вольтерра типу згортки двома способами:
а) операційним методом;
б) зведенням до задачі Коші для звичайного диференціального рівняння.

$$\varphi(x) = cosx + \int_0^x e^{x-t} \varphi(t) dt$$

6. Використовуючи z-перетворення, розв'язати задачу Коші:

$$x_{n+1} + x_n = 7 \cdot 3^n, x_0 = 1.$$

7. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y'' - y = \frac{1}{cht},$$

що задовольняє умовам:

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

Варіант 7

1. Використовуючи перетворення Лапласа, знайти спектральну характеристику сигналу

$$f(t) = cost\ , t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

2. Відновити оригінал за зображенням

$$F(p) = \frac{3}{p^3} e^{-2p}$$

3. Операційним методом розв'язати задачу Коші при $t > 0$:

$$y'' + y = 4cost, y(0) = 1; y'(0) = 1.$$

4. Операційним методом розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x' = -3x + y, \\ y' = x - 3y, \end{cases} \quad x(0) = -1, y(0) = 1.$$

5. Розв'язати інтегральне рівняння Вольтерра типу згортки двома способами:
а) операційним методом;
б) зведенням до задачі Коші для звичайного диференціального рівняння.

$$\varphi(x) = sinx + 2\int_0^x cos(x - t)\varphi(t)dt$$

6. Використовуючи z-перетворення, розв'язати задачу Коші:

$$x_{n+1} - 2x_n = n, x_0 = 0.$$

7. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y'' - y = \frac{e^t}{1 + e^t},$$

що задовольняє умовам:

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

Варіант 8

1. Використовуючи перетворення Лапласа, знайти спектральну характеристику сигналу

$$f(t) = 2t - 4, \ t \in (0; 2).$$

2. Відновити оригінал за зображенням

$$F(p) = \frac{2p}{p^2 + 1} e^{-p}$$

3. Операційним методом розв'язати задачу Коші при $t > 0$:

$$y'' + 9y = 6cos3t + 9sin3t, y(0) = 1; y'(0) = 0.$$

4. Операційним методом розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = x + 2y, \end{cases} \qquad x(0) = 2, y(0) = 1.$$

5. Розв’язати інтегральне рівняння Вольтерра типу згортки двома способами:
а) операційним методом;
б) зведенням до задачі Коші для звичайного диференціального рівняння.

$$\varphi(x) = 2 + \int_0^x sin(x - t)\varphi(t)dt$$

6. Використовуючи z-перетворення, розв’язати задачу Коші:

$$x_{n+1} - 3x_n = -2, x_0 = -1.$$

7. Розв’язати диференціальне рівняння

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t + 1},$$

що задовольняє умовам:

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

Варіант 9

1. Використовуючи перетворення Лапласа, знайти спектральну характеристику сигналу

$$f(t) = t\ , t \in (-1; 1).$$

2. Відновити оригінал за зображенням

$$F(p) = \frac{4p}{p^2 + 2} e^{-4p}$$

3. Операційним методом розв’язати задачу Коші при $t > 0$:

$$y'' + y = 5te^{2t}, y(0) = 0; y'(0) = 1.$$

4. Операційним методом розв’язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x' = -2x + y, \\ y' = -4x + 2y, \end{cases} \qquad x(0) = -1, y(0) = -1.$$

5. Розв’язати інтегральне рівняння Вольтерра типу згортки двома способами:
а) операційним методом;

б) зведенням до задачі Коші для звичайного диференціального рівняння.

$$\varphi(x) = e^{4x} + \int_0^x cos2(x-t)\varphi(t)dt$$

6. Використовуючи z-перетворення, розв'язати задачу Коші:

$$x_{n+1} + 2x_n = 4^n, x_0 = 1.$$

7. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y'' + y = \frac{e^{2t}}{3 + e^t},$$

що задовольняє умовам:

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

Варіант 10

1. Використовуючи перетворення Лапласа, знайти спектральну характеристику сигналу

$$f(t) = 1 - t\ , t \in (0; 1).$$

2. Відновити оригінал за зображенням

$$F(p) = \frac{2p}{p^2 + 9} e^{-3p}$$

3. Операційним методом розв'язати задачу Коші при $t > 0$:

$$y'' - y' - 2y = 3te^t, y(0) = 0; y'(0) = 0.$$

4. Операційним методом розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = -2x - y, \end{cases} \qquad x(0) = 1, y(0) = -1.$$

5. Розв'язати інтегральне рівняння Вольтерра типу згортки двома способами:
а) операційним методом;
б) зведенням до задачі Коші для звичайного диференціального рівняння.

$$\varphi(x) = 4 + \int_0^x (x-t)^2\varphi(t)dt$$

6. Використовуючи z-перетворення, розв'язати задачу Коші:

$$x_{n+1} + 2x_n = 2^n, x_0 = 0.$$

7. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y'' - 2y' = \frac{e^t}{cht},$$

що задовольняє умовам:

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

Варіант 11

1. Використовуючи перетворення Лапласа, знайти спектральну характеристику сигналу

$$f(t) = 2 - t \ , t \in (0; 2).$$

2. Відновити оригінал за зображенням

$$F(p) = \frac{5}{p^2 + 4} e^{-5p}$$

3. Операційним методом розв'язати задачу Коші при $t > 0$:

$$y'' + 16y = 5cos4t + sin4t, y(0) = 1; y'(0) = 0.$$

4. Операційним методом розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x' = -5x - 4y, \\ y' = 10x + 7y, \end{cases} \quad x(0) = -1, y(0) = 1.$$

5. Розв'язати інтегральне рівняння Вольтерра типу згортки двома способами:
а) операційним методом;
б) зведенням до задачі Коші для звичайного диференціального рівняння.

$$\varphi(x) = cosx + \int_0^x e^{x-t} \varphi(t) dt$$

6. Використовуючи z-перетворення, розв'язати задачу Коші:

$$x_{n+1} - 3x_n = n, x_0 = 1.$$

7. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y'' - y = \frac{1}{1 + cht},$$

що задовольняє умовам:

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

Варіант 12

1. Використовуючи перетворення Лапласа, знайти спектральну характеристику сигналу

$$f(t) = |t|\ ,\ t \in (-2; 2).$$

2. Відновити оригінал за зображенням

$$F(p) = \frac{3}{p^2 + 4} e^{-2p}$$

3. Операційним методом розв'язати задачу Коші при $t > 0$:

$$y'' + 5y + 6y = 5e^t, y(0) = 1; y'(0) = 0.$$

4. Операційним методом розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = x + 2y, \end{cases} \qquad x(0) = 2, y(0) = 1.$$

5. Розв'язати інтегральне рівняння Вольтерра типу згортки двома способами:
а) операційним методом;
б) зведенням до задачі Коші для звичайного диференціального рівняння.

$$\varphi(x) = 1 + x + \int_0^x cos(x - t)\varphi(t)dt$$

6. Використовуючи z-перетворення, розв'язати задачу Коші:

$$x_{n+1} + x_n = n^2, x_0 = 1.$$

7. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y'' + y' = \frac{1}{1 + e^t},$$

що задовольняє умовам:

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

Варіант 13

1. Використовуючи перетворення Лапласа, знайти спектральну характеристику сигналу

$$f(t) = cos2t\ ,\ t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

2. Відновити оригінал за зображенням

$$F(p) = \frac{4}{p^3} e^{-p}$$

3. Операційним методом розв'язати задачу Коші при $t > 0$:

$$y'' + 5y' + 6y = e^{-t}, y(0) = -1; y'(0) = 0.$$

4. Операційним методом розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 6x + 7y, \\ y' = -2x - 3y, \end{cases} \qquad x(0) = 0, y(0) = -1.$$

5. Розв'язати інтегральне рівняння Вольтерра типу згортки двома способами:
а) операційним методом;
б) зведенням до задачі Коші для звичайного диференціального рівняння.

$$\varphi(x) = sinx + 2\int_0^x cos(x-t)\varphi(t)dt$$

6. Використовуючи z-перетворення, розв'язати задачу Коші:

$$x_{n+1} + x_n = n, x_0 = 1.$$

7. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y'' - 4y' + 4y = \frac{2e^{2t}}{ch^2 2t},$$

що задовольняє умовам:

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

Варіант 14

1. Використовуючи перетворення Лапласа, знайти спектральну характеристику сигналу

$$f(t) = 2|t|\,,\; t \in (-2; 2).$$

2. Відновити оригінал за зображенням

$$F(p) = \frac{3}{p^4} e^{-4p}$$

3. Операційним методом розв'язати задачу Коші при $t > 0$:

$$y'' + 25y = 5t,\; y(0) = 0; y'(0) = 1.$$

4. Операційним методом розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x' = -4x + 2y, \\ y' = -2x + y, \end{cases} \qquad x(0) = -1, y(0) = -1.$$

5. Розв'язати інтегральне рівняння Вольтерра типу згортки двома способами:
а) операційним методом;
б) зведенням до задачі Коші для звичайного диференціального рівняння.

$$\varphi(x) = sin2x + 2\int_0^x cos(x-t)\varphi(t)dt$$

6. Використовуючи z-перетворення, розв'язати задачу Коші:

$$x_{n+1} + 4x_n = 2^n, x_0 = 1.$$

7. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y'' - 4y = \frac{1}{ch^3 2t},$$

що задовольняє умовам:

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

Варіант 15

1. Використовуючи перетворення Лапласа, знайти спектральну характеристику сигналу

$$f(t) = 4 - |t|\ ,\ t \in (-4; 4).$$

2. Відновити оригінал за зображенням

$$F(p) = \frac{3}{p^2 + 9} e^{-3p}$$

3. Операційним методом розв’язати задачу Коші при $t > 0$:

$$y'' - 4y = 2t, y(0) = 1; y'(0) = 0.$$

4. Операційним методом розв’язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 6x + 7y, \\ y' = -2x - 3y, \end{cases} \qquad x(0) = 0, y(0) = -1.$$

5. Розв’язати інтегральне рівняння Вольтерра типу згортки двома способами:
а) операційним методом;
б) зведенням до задачі Коші для звичайного диференціального рівняння.

$$\varphi(x) = 2 + \int_0^x sin(x - t)\varphi(t)dt$$

6. Використовуючи z-перетворення, розв’язати задачу Коші:

$$x_{n+1} + x_n = 2 \cdot 3^n, x_0 = 1.$$

7. Розв’язати диференціальне рівняння

$$y'' - y = \frac{1}{ch^2 t},$$

що задовольняє умовам:

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

Варіант 16

1. Використовуючи перетворення Лапласа, знайти спектральну характеристику сигналу

$$f(t) = \cos t\ ,\ t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

2. Відновити оригінал за зображенням

$$F(p) = \frac{5}{p^2 - 9} e^{-p}$$

3. Операційним методом розв'язати задачу Коші при $t > 0$:

$$y'' - 2y' - 3y = 2t, y(0) = 1; y'(0) = 1.$$

4. Операційним методом розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 2y + 1, \\ y' = 2x + y, \end{cases} \qquad x(0) = -1, y(0) = 0.$$

5. Розв'язати інтегральне рівняння Вольтерра типу згортки двома способами:
а) операційним методом;
б) зведенням до задачі Коші для звичайного диференціального рівняння.

$$\varphi(x) = e^x - 2\int_0^x cos(x - t)\varphi(t)dt$$

6. Використовуючи z-перетворення, розв'язати задачу Коші:

$$x_{n+1} + 3x_n = 2 \cdot 1(n), x_0 = 0.$$

7. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y'' + y' = \frac{e^t}{1 + e^t},$$

що задовольняє умовам:

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

Варіант 17

1. Використовуючи перетворення Лапласа, знайти спектральну характеристику сигналу

$$f(t) = \frac{1}{2}|t|, t \in (-4; 4).$$

2. Відновити оригінал за зображенням

$$F(p) = \frac{6}{p^5} e^{-p}$$

3. Операційним методом розв'язати задачу Коші при $t > 0$:

$$2y'' + y' = cost, y(0) = -1; y'(0) = 0.$$

4. Операційним методом розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 2 + 8y + 1, \\ y' = 3x + 4y, \end{cases} \qquad x(0) = 2, y(0) = 1.$$

5. Розв'язати інтегральне рівняння Вольтерра типу згортки двома способами:
а) операційним методом;
б) зведенням до задачі Коші для звичайного диференціального рівняння.

$$\varphi(x) = 2x - \int_0^x (x-t)^2 \varphi(t) dt$$

6. Використовуючи z-перетворення, розв'язати задачу Коші:

$$x_{n+1} + 4x_n = 2n, x_0 = 0.$$

7. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y'' + 2y' + y = \frac{te^{-t}}{t+1},$$

що задовольняє умовам:

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

Варіант 18

1. Використовуючи перетворення Лапласа, знайти спектральну характеристику сигналу

$$f(t) = \begin{cases} t, & t \in (0,1) \\ 1, & t \in (1,2) \end{cases}.$$

2. Відновити оригінал за зображенням

$$F(p) = \frac{3}{(p+2)^4}$$

3. Операційним методом розв'язати задачу Коші при $t > 0$:

$$y'' + y' + y = t^2 + t, y(0) = 1; y'(0) = -3.$$

4. Операційним методом розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = 4x + y + 1, \end{cases} \qquad x(0) = 1, y(0) = 0.$$

5.Розв’язати інтегральне рівняння Вольтерра типу згортки двома способами:
а) операційним методом;
б) зведенням до задачі Коші для звичайного диференціального рівняння.

$$\varphi(x) = sinx + \int_0^x cos(x - t)\varphi(t)dt$$

6. Використовуючи z-перетворення, розв’язати задачу Коші:

$$x_{n+1} + 5x_n = (-1)^n, x_0 = 0.$$

7. Розв’язати диференціальне рівняння

$$y'' - y = \frac{1}{ch^3 t},$$

що задовольняє умовам:

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

Варіант 19

1.Використовуючи перетворення Лапласа, знайти спектральну характеристику сигналу

$$f(t) = \begin{cases} 2, & t \in (0,1) \\ 4 - 2t, & t \in (1,2) \end{cases}$$

2. Відновити оригінал за зображенням

$$F(p) = \frac{2}{(p + 4)^5}$$

3. Операційним методом розв’язати задачу Коші при $t > 0$:

$$y'' + 4y = 8sin2t, y(0) = 3, y'(0) = -1.$$

4. Операційним методом розв’язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 2x + 2y + 2, \\ y' = 4y + 1, \end{cases} \qquad x(0) = 0, y(0) = 1.$$

5. Розв’язати інтегральне рівняння Вольтерра типу згортки двома способами:

а) операційним методом;
б) зведенням до задачі Коші для звичайного диференціального рівняння.

$$\varphi(x) = 2x + 2\int_0^x cos(x-t)\varphi(t)dt$$

6. Використовуючи z-перетворення, розв'язати задачу Коші:

$$x_{n+1} + 16x_n = 1(n), x_0 = 0.$$

7. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y'' - y = \frac{sht}{ch^2 t},$$

що задовольняє умовам:

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

Варіант 20

1. Використовуючи перетворення Лапласа, знайти спектральну характеристику сигналу

$$f(t) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}|t|\ , t \in (-1; 1).$$

2. Відновити оригінал за зображенням

$$F(p) = \frac{7}{(p+7)^5}$$

3. Операційним методом розв'язати задачу Коші при $t > 0$:

$$y'' - y' - 6y = 2, y(0) = 1; y'(0) = 0.$$

4. Операційним методом розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x' = x - 2y + 1, \\ \quad y' = -3x, \end{cases} \qquad x(0) = 0, y(0) = 1.$$

5.Розв'язати інтегральне рівняння Вольтерра типу згортки двома способами:
а) операційним методом;
б) зведенням до задачі Коші для звичайного диференціального рівняння.

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x sin(x-t)\varphi(t)dt$$

6. Використовуючи z-перетворення, розв'язати задачу Коші:

$$x_{n+1} - 25x_n = 1(n), x_0 = 1.$$

7. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{ch^2 t},$$

що задовольняє умовам:

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

Варіант 21

1. Використовуючи перетворення Лапласа, знайти спектральну характеристику сигналу

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in (0,1) \\ -2, & t \in (1,3) \end{cases}$$

2. Відновити оригінал за зображенням

$$F(p) = \frac{2p}{p^3 + 8}$$

3. Операційним методом розв'язати задачу Коші при $t > 0$:

$$y'' + 5y' + 6y = e^{-3t}, y(0) = 1; y'(0) = 0.$$

4. Операційним методом розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 3y + 2, \\ y' = x + 2y, \end{cases} \quad x(0) = -1, y(0) = 1.$$

5. Розв'язати інтегральне рівняння Вольтерра типу згортки двома способами:
а) операційним методом;
б) зведенням до задачі Коші для звичайного диференціального рівняння.

$$\varphi(x) = 1 + \frac{1}{6}\int_0^x (x-t)^2\varphi(t)dt$$

6. Використовуючи z-перетворення, розв'язати задачу Коші:

$$x_{n+1} + 4x_n = 4, x_0 = -1.$$

7. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y'' + 2y' + y = \frac{e^{-t}}{1+t^2},$$

що задовольняє умовам:

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

Варіант 22

1. Використовуючи перетворення Лапласа, знайти спектральну характеристику сигналу

$$f(t) = \begin{cases} 2, & t \in (-2; -1) \\ -2, & t \in (1; 2) \end{cases}$$

2. Відновити оригінал за зображенням

$$F(p) = \frac{2p}{p^3 - 1}$$

3. Операційним методом розв'язати задачу Коші при $t > 0$:

$$y'' + 4y' + 4y = t^3, y(0) = 1; y'(0) = 2.$$

4. Операційним методом розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x' = x + 4y + 1, \\ y' = 2x + 3y, \end{cases} \quad x(0) = 0, y(0) = 1.$$

5. Розв'язати інтегральне рівняння Вольтерра типу згортки двома способами:
а) операційним методом;
б) зведенням до задачі Коші для звичайного диференціального рівняння.

$$\varphi(x) = 2 - \int_0^x sin(x-t)\varphi(t)dt$$

6. Використовуючи z-перетворення, розв'язати задачу Коші:

$$x_{n+1} - x_n = 3n, x_0 = 0.$$

7. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y'' - y' = \frac{e^{2t}}{2 + e^t},$$

що задовольняє умовам:

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

Варіант 23

1. Використовуючи перетворення Лапласа, знайти спектральну характеристику сигналу

$$f(t) = \begin{cases} -3, & t \in (-6; -3) \\ 3, & t \in (3; 6) \end{cases}$$

2. Відновити оригінал за зображенням

$$F(p) = \frac{3p}{p^2 + 4p + 5}$$

3. Операційним методом розв'язати задачу Коші при $t > 0$:

$$y'' - 3y' + 2y = 12e^{3t}, y(0) = 2; y'(0) = 6.$$

4. Операційним методом розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 2y, \\ y' = 2x + 3y + 1, \end{cases} \qquad x(0) = 2, y(0) = 1.$$

5.Розв'язати інтегральне рівняння Вольтерра типу згортки двома способами:
а) операційним методом;
б) зведенням до задачі Коші для звичайного диференціального рівняння.

$$\varphi(x) = 2 + \int_0^x sin2(x - t)\varphi(t)dt$$

6. Використовуючи z-перетворення, розв'язати задачу Коші:

$$x_{n+1} + 4x_n = 1(n), x_0 = -1.$$

7. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y'' + 4y = \frac{1}{ch^2 t},$$

що задовольняє умовам:

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

Варіант 24

1. Використовуючи перетворення Лапласа, знайти спектральну характеристику сигналу

$$f(t) = \begin{cases} -2, & t \in (-4, -2) \\ 2, & t \in (2,4) \end{cases}$$

2. Відновити оригінал за зображенням

$$F(p) = \frac{3}{(p-3)^6}$$

3. Операційним методом розв'язати задачу Коші при $t > 0$:

$$y'' + 4y = 3sint + 10cos3t, \qquad y(0) = -2; y'(0) = 3.$$

4. Операційним методом розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x' = -2x + y + 2, \\ y' = 3x, \end{cases} \qquad x(0) = 1, y(0) = 0.$$

5. Розв'язати інтегральне рівняння Вольтерра типу згортки двома способами:
а) операційним методом;
б) зведенням до задачі Коші для звичайного диференціального рівняння.

$$\varphi(x) = cht + \int_0^x sh(x-t)\varphi(t)dt$$

6. Використовуючи z-перетворення, розв'язати задачу Коші:

$$x_{n+1} - x_n = 2^n, x_0 = 0.$$

7. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y'' + y' = \frac{e^t}{(1+e^t)^2},$$

що задовольняє умовам:

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

Варіант 25

1. Використовуючи перетворення Лапласа, знайти спектральну характеристику сигналу

$$f(t) = \begin{cases} -t-1, & t \in (-1;0) \\ 1-t, & t \in (0;1) \end{cases}$$

2. Відновити оригінал за зображенням

$$F(p) = \frac{5}{(p-10)^4}$$

3. Операційним методом розв’язати задачу Коші при $t > 0$:

$$y'' + 2y' + 10y = 2e^{-t}, \qquad y(0) = 5; y'(0) = 1.$$

4. Операційним методом розв’язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 4x + 3, \\ y' = x + 2y, \end{cases} \qquad x(0) = -1, y(0) = 0.$$

5. Розв’язати інтегральне рівняння Вольтерра типу згортки двома способами:
а) операційним методом;
б) зведенням до задачі Коші для звичайного диференціального рівняння.

$$\varphi(x) = x + \int_0^x ch(x-t)\varphi(t)dt$$

6. Використовуючи z-перетворення, розв’язати задачу Коші:

$$x_{n+1} + x_n = 3^n, x_0 = 0.$$

7. Розв’язати диференціальне рівняння

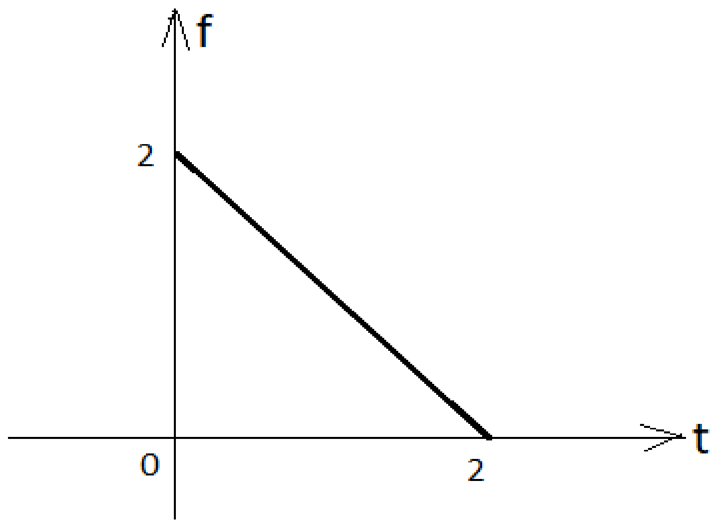
$$y'' + 2y' = \frac{1}{sh^2 t},$$

що задовольняє умовам:

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

ЗРАЗОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

Завдання. Функція задана графіком



Записати її зображення.

Розв'язання.

Запишемо аналітичний вираз функції:

$$f(t) = (2-t)1(t) - (2-t)1(t-2) = (2-t)1(t) + (t-2)1(t-2).$$

Використовуючи таблицю і властивості перетворення Лапласа, маємо:

$$F(p) = \frac{2}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2}e^{-2p}$$

Завдання 1. Використовуючи перетворення Лапласа знайти спектральну характеристику сигналу:

$$f(t) = 3 - t, \qquad t\epsilon(0;3).$$

Запишемо перетворення Лапласа для даного сигналу:

$$F(p) = \frac{3}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2}e^{-3p}\ ,$$

$$p = j\omega,$$

$$S(j\omega) = \frac{3}{j\omega} - \frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2}e^{-3j\omega}.$$

Спектральну характеристику сигналу можна знайти за означенням:

$$S(j\omega) = \int_0^3 (3-t)e^{-j\omega t}dt = \begin{bmatrix} u = 3-t & du = -dt \\ dv = e^{-j\omega t}dt & v = \frac{-1}{j\omega}e^{-j\omega t} \end{bmatrix} = \frac{(t-3)e^{-j\omega t}}{j\omega}\Big|_0^3 -$$
$$-\frac{1}{j\omega}\int_0^3 e^{-j\omega t}\,dt = \frac{3}{j\omega} + \frac{1}{\omega^2}(e^{-3j\omega} - 1).$$

Завдання 2. Відновити оригінал за зображенням:

$$F(p)\frac{2}{p^2+3}e^{-2p}$$
$$\frac{1}{p^2+3} \leftarrow \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}\,t;$$
$$\frac{2}{p^2+3} \leftarrow \frac{2}{\sqrt{3}}sin\sqrt{3}t;$$
$$\frac{2}{p^2+3}e^{-2p} \leftarrow \frac{2}{\sqrt{3}}sin\sqrt{3}(t-2)1(t-2).$$

Завдання 3. Операційним методом розв’язати задачу Коші при $t > 0$:

$$y'' - y' = 2e^t, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

Розв’язання.

$$y(t) \to Y(p);$$
$$y'(x) \to pY(p) - y(0) = pY(p) - 1,$$
$$y''(x) \to p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - p, e^t \to \frac{1}{p-1}.$$

Замість диференціального рівняння отримаємо лінійне рівняння відносно невідомого $Y(p)$:

$$p^2Y(p) - p - pY(p) + 1 = \frac{2}{p-1}.$$
$$Y(p) = \frac{p^2-2p+3}{p(p-1)^2}.$$
$$Y(p) = \frac{3}{p} - \frac{2}{p-1} + \frac{2}{(p-1)^2}.$$

Відновлюємо оригінал:

$$y(t) = 3 - 2e^t + 2te^t.$$

Завдання 4. Операційним методом розв’язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x' = -3x - y, \\ y' = x - y, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 2.$$

Розв'язання. Від оригіналів $x(t), y(t)$ перейдемо до їх зображень та запишемо відповідну систему:

$$\begin{cases} pX(p) - 2 = -3X(p) - Y(p), \\ pY(p) - 2 = X(p) - Y(p). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (p+3)X(p) + Y(p) = 2, \\ -X(p) + (p+1)Y(p) = 2. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему за правилом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p+3 & 1 \\ -1 & p+1 \end{vmatrix} = p^2 + 4p + 4 = (p+2)^2$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & p+1 \end{vmatrix} = 2p$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} p+3 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2p + 8$$

$$X(p) = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{2p}{(p+2)^2}$$

$$Y(p) = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{2p+8}{(p+2)^2}$$

За знайденими зображеннями відновлюємо оригінали:

$$x(t) = 2e^{-2t} - 4te^{-2t},$$

$$y(t) = 2e^{-2t} + 4te^{-2t}.$$

Завдання 5. Розв'язати інтегральне рівняння Вольтерра типу згортки:

$$\varphi(x) = cosx + \int_0^x e^{x-t}\varphi(t)dt.$$

Розв'язання.

а) Операційний метод.

Складемо відповідне операторне рівняння:

$$\Phi(p) = \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p-1}\Phi(p)$$

$$\Phi(p) = \frac{p(p-1)}{(p^2+1)(p-2)} = \frac{2}{5}\frac{1}{p-1} + \frac{3}{5}\frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{5}\frac{1}{p^2+1}$$

Повертаючись до простору оригіналів, отримаємо розв'язок рівняння:

$$\varphi(x) = \tfrac{2}{5}e^{2x} + \tfrac{3}{5}\cos x + \tfrac{1}{5}\sin x.$$

б) Зведемо інтегральне рівняння до задачі Коші. Продиференціюємо два рази по x, при цьому використаємо формулу:

$$\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,t)dt\right)'_x = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f'_x(x,t)dt + \beta'(x)f\big(x,\beta(x)\big) - \alpha'(x)f\big(x,\alpha(x)\big).$$

В результаті отримаємо

$$\varphi''(x) = \varphi'(x) + \varphi(x) - cosx + \int_0^x e^{x-t}\varphi(t)dt$$

В цьому рівнянні інтеграл можна замінити на $\varphi(x) - \cos x$ (див. умову задачі).

Отже, отримали наступну задачу для звичайного лінійного диференціального рівняння:

$$\varphi'' - \varphi' - 2\varphi = -2\cos x, \quad \varphi(0) = 1, \varphi'(0) = 1.$$

$\varphi'' - \varphi' - 2\varphi = 0.$

$k^2 - k - 2 = 0.$

$k_1 = -1,\ k_2 = 2.$

$\varphi_{\text{заг.одн.}} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}.$

За виглядом правої частини рівняння знаходимо $z(x) = Asinx + Bcosx.$

$z'(x) = Acosx - Bsinx.$

$z''(x) = -Asinx - Bcosx.$

$-Asinx - Bcosx - Acosx + Bsinx - 2Asinx - 2Bcosx = -2cosx.$

$cosx$: $-A - 3B = -2$

$sinx$: $-3A + B = 0.$

$B = \frac{3}{5}, A = \frac{1}{5}.$

Отже, загальний розв'язок рівняння:

$$\varphi(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + \frac{3}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x.$$

Константи C_1 і C_2 знайдемо з умов : $\varphi(0) = 1, \varphi'(0) = 1$:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{2}{5} \\ 2C_1 - C_2 = \frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{2}{5} \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

Розв'язок інтегрального рівняння має вигляд:

$$\varphi(x) = \frac{2}{5}e^{2x} + \frac{3}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x.$$

Завдання 6. Використовуючи z- перетворення, розв'язати задачу Коші

$$x_{n+1} + 3x_n = 1(n),\ x(0) = 0.$$

Розв'язання.

$$x_n \to X^*(z),$$

$$x_{n+1} \to z\big(X^*(z) - x(0)\big) = zX^*(z),$$

$$1(n) \to \frac{z}{z-1}.$$

Маємо лінійне рівняння відносно невідомої функції $X^*(z)$:

$$zX^*(z) + 3X^*(z) = \frac{z}{z-1},$$

$$X^*(z) = \frac{z}{(z-1)(z+3)},$$

$$X^* z^{n-1} = \frac{z^n}{(z-1)(z+3)}.$$

Знайдемо суму лишків в простих полюсах $z = 1, z = -3$.

$$x_n = \frac{1}{4} - \frac{(-3)^n}{4}, n = 0; 1; 2 \dots$$

Завдання 7. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y'' - y = \frac{1}{cht},$$

що задовольняє умовам $y(0) = y'(0) = 0$.

Розв'язання.

Розглянемо допоміжне рівняння: $y'' - y = 1$.
Відповідне операторне рівняння має вигляд:

$$p^2 Y(p) - Y(p) = \frac{1}{p},$$

$$Y(p) = \frac{1}{p(p-1)(p+1)},$$

$$Y(p) = -\frac{1}{p} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p+1}.$$

Відновлюємо оригінал:

$$y_1 = -1 + \frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{-t} = -1 + cht\,,$$

$$y_1' = sht\,.$$

За формулою Дюамеля

$$y(t) = \int_0^t \frac{sh(t-\tau)}{ch\tau}d\tau = \int_0^t \frac{shtch\tau - chtsh\tau}{ch\tau}d\tau = cht - 1 - cht \cdot lncht\,.$$

Перевірка: $y(0) = ch0 - 1 - ch0 \cdot lnch0 = 1 - 1 - 1 \cdot 0 = 0;$

$$y'(t) = sht - sht \cdot lncht - cht \cdot tht;$$

$$y'(0) = sh0 - sh0 \cdot lnch0 - ch0 \cdot th0 = 0.$$

Довідковий матеріал

$F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt$ – функція комплексної змінної, зображення оригінала $f(t)$.

$S(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt-$ спектральна характеристика сигналу, перетворення Фур'є функції $f(t)$.

Якщо $f(t)$ – парна функція, то $\operatorname{Im} S(j\omega)=0$, якщо $f(t)$ – непарна функція, то $\operatorname{Re} S(j\omega)=0$.

Справедлива формула, що пов'язує перетворення Лапласа та Фур'є:

$$S(j\omega)=F_1(j\omega)+F_2(-j\omega), \qquad F_1(p)\leftarrow f(t), t>0;\ F_2(p)\leftarrow f(-t), t<0.$$

Для парної функції $f(t)$: $S(j\omega)=F(j\omega)+F(-j\omega),\ F(p)\leftarrow f(t), t>0.$

Для непарної функції $f(t)$: $S(j\omega)=F(j\omega)-F(-j\omega),\ F(p)\leftarrow f(t), t>0.$

$F^*(p)=\sum_{n=0}^{\infty} f(n)e^{-pn}$ – дискретне перетворення Лапласа.

$F^*(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(n)}{z^n}$ – z- перетворення.

Основні правила операційного числення становлять властивості перетворення Лапласа:

1. $c_1f_1(t)+c_2f_2(t)\to c_1F_1(p)+c_2F_2(p)$,
2. $f(\alpha t)\to\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right), \alpha>0$,
3. $e^{\alpha t}\cdot f(t)\to F(p-\alpha)$,
4. $f(t-\tau)\to e^{-p\tau}\cdot F(p), \tau>0$,
5. $f^{(n)}(t)\to p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$,
6. $F^{(n)}(p)\leftarrow(-1)^n\cdot t^n\cdot f(t)$,
7. $\int_0^t f(\tau)d\tau\to\frac{F(p)}{p}$,
8. $\int_p^{\infty}F(p)dp\leftarrow\frac{f(t)}{t}$,
9. $F_1(p)\cdot F_2(p)\leftarrow\int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau=f_1*f_2$,
10. $f_1(t)\cdot f_2(t)\to\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}F_1(z)\cdot F_2(p-z)dz$.

Таблиця оригіналів та зображень за Лапласом

Оригінал $f(t)$	Зображення $F(p)$	Оригінал $f(t)$	Зображення $F(p)$
$1 \quad \rightarrow$	$\frac{1}{p}$	$e^{\alpha t} cos\beta t \longrightarrow$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
$t^n \quad \rightarrow$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$e^{\alpha t} sh\beta t \longrightarrow$	$\frac{\beta}{(p-\alpha)^2-\beta^2}$
$e^{\alpha t} \quad \rightarrow$	$\frac{1}{p-\alpha}$	$e^{\alpha t} ch\beta t \longrightarrow$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2-\beta^2}$
$sin\beta t \quad \rightarrow$	$\frac{\beta}{p^2+\beta^2}$	$t^n e^{\alpha t} \longrightarrow$	$\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$
$cos\beta t \quad \rightarrow$	$\frac{p}{p^2+\beta^2}$	$t\sin\beta t \longrightarrow$	$\frac{2\beta p}{(p^2+\beta^2)^2}$
$sh\beta t \quad \rightarrow$	$\frac{\beta}{p^2-\beta^2}$	$tcos\beta t \longrightarrow$	$\frac{p^2-\beta^2}{(p^2+\beta^2)^2}$
$ch\beta t \quad \rightarrow$	$\frac{p}{p^2-\beta^2}$	$tsh\beta t \longrightarrow$	$\frac{2\beta p}{(p^2-\beta^2)^2}$
$e^{\alpha t} sin\beta t \longrightarrow$	$\frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$	$tch\beta t \longrightarrow$	$\frac{p^2+\beta^2}{(p^2-\beta^2)^2}$

Таблиця z – зображень основних функцій

$x(n)$	$X^*(z)$
$1(n)$	$\frac{z}{z-1}$
$e^{\alpha n}$	$\frac{z}{z-e^{\alpha}}$
a^n	$\frac{z}{z-a}$
$sin\beta n$	$\frac{zsin\beta}{z^2-2zcos\beta+1}$
$cos\beta n$	$\frac{z(z-cos\beta)}{z^2-2zcos\beta+1}$
$sh\beta n$	$\frac{zsh\beta}{z^2-2zch\beta+1}$
$ch\beta n$	$\frac{z(z-ch\beta)}{z^2-2zch\beta+1}$
n	$\frac{z}{(z-1)^2}$
n^2	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$

Рекомендована література

1. Дубовик В.П. Вища математика: навч. посіб. / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. - К. : А.С.К., 2005. – 648 с.
2. Мартыненко В.С. Операционное исчисление / В.С. Мартыненко. - Киев: Изд-во КГУ, 1968. – 198 с.
3. Єжов С.М. Теорія функції комплексної змінної: навч. посіб. / С.М. Єжов, М.А. Разумова. - К. : Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2012. – 191 с.

Зміст