УДК 519.972.5:004.942.001.57

МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНОГО СТАНУ УДАРНИХ ХВИЛЬ У ПАРОРІДИННИХ ДВОФАЗНИХ СИСТЕМАХ

Лись Дар'я Анатоліївна,Прокофьєв Андрій Юрійович
д.т.н.,професор,зав.каф.КСПТ Положаєнко Сергій Анатолійович.
Національний університет «Одеська політехніка»,УКРАЇНА

АНОТАЦІЯ. Хвильові процеси в механіці двофазних систем займають особливе місце, оскільки найбільш яскраво ефекти неоднофазності проявляються при розповсюдженні хвиль,а з іншого боку,акустичні хвилі в таких системах—найбільш доступний та ефективний спосіб вивчення структури самої двофазної системи.

Вступ.Задача дослідження динамічного стану щодо виникнення та розвитку ударних хвиль у паро рідинних двофазних системах має важливе прикладне значення у практичних застосунках.

Мета роботи. Мета роботи є провести моделювання динамічного стану виникнення та розвитку ударних хвиль у пароріднних двофазних системах.

Основна частина роботи. В літературі [1, 2] відомо рівняння, що описує форму вільної поверхні рідини та утворення хвиль, які розповсюджуються в обидві сторони (рівняння Буссінеска)

$$\frac{\partial P(t,\bar{x})}{\partial t} = c_0^2\frac{\partial^2 P(t,\bar{x})}{\partial x_1^2} + \frac{\gamma+1}{2\gamma}c_0^2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left[\frac{\delta P(t,\bar{x})}{P_0}\right] + 2\nu_{\text{еф}}\frac{\partial^2 P(t,\bar{x})}{\partial t\partial x_1^2} - 2\beta_1\frac{\partial^4 P(t,\bar{x})}{\partial t^2\partial x_1^2}. \qquad (1)$$

Введемо безрозмірні параметри (тут і надалі, для спрощення запису, незалежні часові та просторові параметри у шуканих функцій опущено)

$$\widetilde{P} = \delta P(t,\bar{x})/\delta P_0\ ;\ \tau = t/t_0\ ;\ \xi = x_1/l_0\ ,$$

де l_0, δP_0 — ширина та амплітуда початкового збудження, відповідно; $t_0 = l_0/U_0$, $U_0 = \frac{\gamma+1}{2\gamma}\cdot\frac{\delta P_0}{P_0}c_0$ — масштабна швидкість.

Тоді (1) можна записати у вигляді

$$\frac{\partial^2\widetilde{P}}{\partial\tau^2} = M^{-2} + M^{-1}\frac{\partial\widetilde{P}}{\partial\xi} + \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\widetilde{P}^2\right) + \frac{2}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^3\widetilde{P}}{\partial\xi^2\partial\tau} + \frac{2}{\sigma^2}\cdot\frac{\partial^4\widetilde{P}}{\partial\xi^2\partial\tau^2}. \qquad (2)$$

Тут $M = U_0/c_0$, а $\mathrm{Re} = U_0 l_0/\nu_{\text{еф}}$ та $\sigma^2 = U_0 l_0^2/\beta_1 c_0$ являють собою параметри подібності (по відношенню до рівняння динаміки (2)).

Розглянемо можливість отримання розв'язку (2), вважаючи, що він описує структуру ударної хвилі. Для врахування швидкості хвилі υ в межах безрозмірної просторової координати, останню (у прийнятих позначеннях) будемо представляти як $\varsigma = \xi - \upsilon\tau$. Інтегруючи (2) по ς від $-\infty$ до $+\infty$ з початковою умовою $\widetilde{P}(\tau,\varsigma)\big|_{\tau=0,\upsilon=0} = \widetilde{P}_0(\varsigma)$ та граничними умовами:

— перед фронтом хвилі

$$\widetilde{P}(\tau,\varsigma)\Big|_{\varsigma=0,\,\upsilon=0} = 0\ ;\ \partial\widetilde{P}(\tau,\varsigma)/\partial\varsigma = 0\ ,\ \partial^2\widetilde{P}(\tau,\varsigma)/\partial\varsigma^2 = 0$$

— за фронтом хвилі

$$\widetilde{P}(\tau,\varsigma)\Big|_{\varsigma=1,\,\upsilon=0} = 1\ ;\ \partial\widetilde{P}(\tau,\varsigma)/\partial\varsigma = 0\ ,\ \partial^2\widetilde{P}(\tau,\varsigma)/\partial\varsigma^2 = 0$$

віднайдемо швидкість ударної хвилі

$$\upsilon = M^{-2} + M^{-1} = \frac{\gamma+1}{2\gamma}\left(\frac{\widetilde{P}^*}{\widetilde{P}_0} + \frac{\gamma+1}{\gamma+1}\right)\frac{c_0^2}{U_0^2}\ , \qquad (3)$$

де $\widetilde{P}^*$ — повний тиск за фронтом.

Розв'язування задачі (2) з наведеними вище початковими та граничними умовами не має особливостей обчислювального характеру і досить легко реалізується стандартними засобами платформи Matlab [3]. Результати розв'язку представлено на рис. 1.

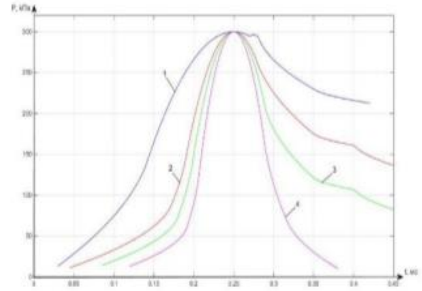


Рисунок 1 — Результати розв'язування задачі (2): 1.— $\Delta P/P_0 < 1$; 2.— $\Delta P/P_0 < 3$; 3.— $\Delta P/P_0 > 3$; 4.— $\Delta P/P_0 \approx 50$.

Рівняння (2) задає структуру ударної хвилі у адіабатичному процесі, який (до певної міри) є ідеалізованим. При порушенні умов адіабатичності з'являється теплообмін з оточуючим середовищем, що призводить до значних похибок при застосуванні ММ ударних хвиль на основі рівняння динаміки (2). Покажемо можливість розв'язування задачі моделювання динамічного стану виникнення та розвитку ударних хвиль у парорідинній двофазній системі при порушенні в ній умов адіабатичності.

Поява потоку теплообміну з оточуючим середовищем призводить до модифікації рівняння динаміки (2) з перетворенням його у наступну систему варіаційних нерівностей:

$$\begin{cases} \tilde{P} \in K_{\tilde{P}} : \left(\dfrac{\partial \tilde{P}}{\partial \tau}, v_{\tilde{P}} - \tilde{P} \right) \le a_{\tilde{P}}\left(\tilde{P}, v_{\tilde{P}} - \tilde{P}\right) + \mathbf{j}\left(v_{\tilde{P}}\right) - \mathbf{j}\left(\tilde{P}\right); \forall v_{\tilde{P}}, \tilde{P} \in K_{\tilde{P}}, \\ \tilde{q}_1 \in K_{\tilde{q}_1} : \left(\dfrac{\partial \tilde{q}_1}{\partial \tau}, v_{\tilde{q}_1} - \tilde{q}_1 \right) \le a_{\tilde{q}_1}\left(\tilde{q}_1, v_{\tilde{q}_1} - \tilde{q}_1\right) + \mathbf{j}\left(v_{\tilde{q}_1}\right) - \mathbf{j}\left(\tilde{q}_1\right); \forall v_{\tilde{q}_1}, \tilde{q}_1 \in K_{\tilde{q}_1}, \end{cases} \quad (4)$$

систему варіаційних нерівностей (4) доповнимо початковими та граничними умовами

$$\tilde{P}(0,\xi) = \tilde{P}_0(\xi),\ \tilde{q}_1(0,\xi) = \tilde{q}_{1_0}(\xi), \quad (5)$$

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \eta} = \varphi_{\tilde{P}}(\tau,\xi),\ \frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial \eta} = \varphi_{\tilde{q}_1}(\tau,\xi) \quad (6)$$

На інтервалі моделювання $0 \le \tau \le \tau_к$ утворимо рівномірну сітку:

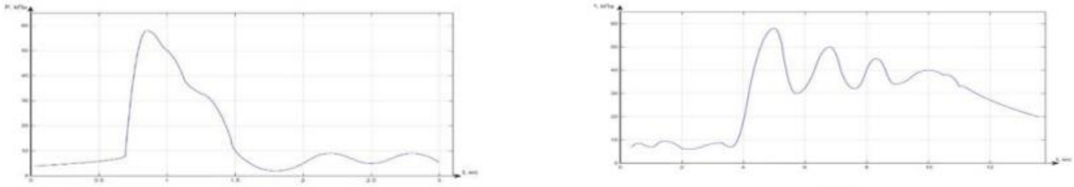
$$\omega_{\Delta t} = \left\{ t_m = m\Delta\tau;\ m = \overline{0,M};\ \Delta\tau = t_к / M \right\}.$$

Далі, інтервал дискретизації $\Delta\tau$ розіб'ємо на $i = 2$ шари, з огляду на «плаский» характер задачі, яка розв'язується, та також уводячи проміжну точку на часовому інтервалі

$$\tau_{m+1/2} = \tau_m + \frac{\Delta\tau}{2}.$$

Числові експерименти щодо дослідження зародження та розповсюдження ударних хвиль виконано для реальної двофазної системи, яку утворено водно-гліцериновим розчином з густиною $\rho = 1180\ кг/м^3$, ефективною в'язкістю $\nu_{еф} = 1{,}8 \cdot 10^{-5}\ м^2/с$ та насиченням бульбашками вуглекислого газу (CO_2).

Застосування вуглекислого газу дозволило також отримати малі значення параметру σ/Re у всіх дослідах, наведених на рис. 2.



а) б)

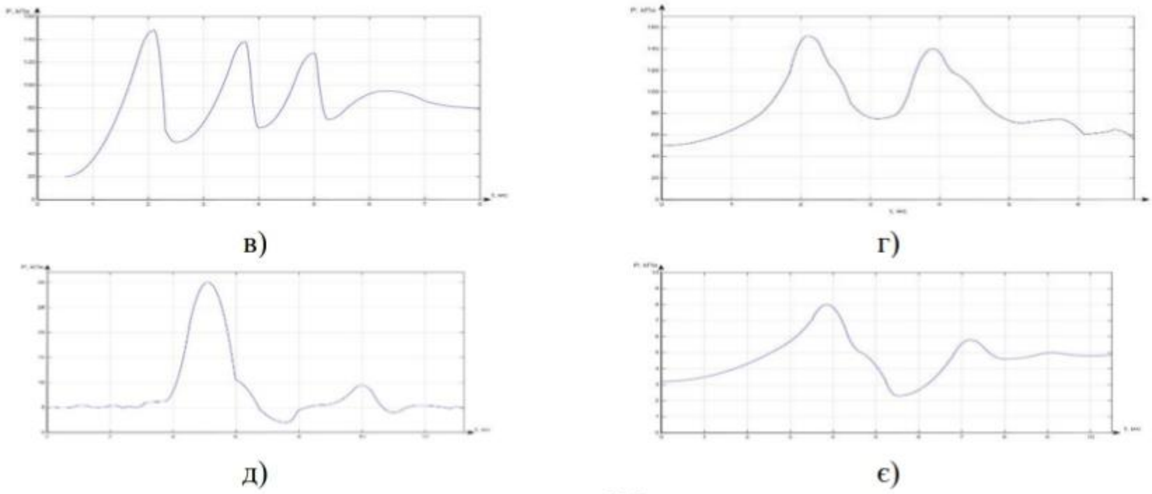


Рисунок 2 — Збудження в рідині з бульбашками CO_2: **а)** — $\sigma/\mathrm{Re} = 0{,}034$; **б)** — $\sigma/\mathrm{Re} = 0{,}5$; **в)** — $\sigma/\mathrm{Re} = 0{,}015$; **г)** — $\sigma/\mathrm{Re} = 0{,}02$; **д)** — $\sigma/\mathrm{Re} = 0{,}044$; **є)** — $\sigma/\mathrm{Re} = 0{,}071$.

Висновки.Таким чином,обчислювальним експериментом доведено,що у випадку $\sigma/\mathrm{Re} \ll 1$ солітон та хвильовий пакет являють собою елементарні утворення у газорідинному середовищі. Будь-яке початкове збудження в залежності від параметру σ розпадається на послідовність солітонів хвильовий пакет. З наведених результатів моделювання(рис. 2) видно також,що при $\sigma \approx \sigma_{кр}$ амплітуда збудження та його тривалість мало змінюються в процесі формування (солітону або хвильового пакету).Відбувається лише перебудова форми збудження: з трикутної вона перетворюється на усамітнену хвилю (рис. 2, а, б). У випадку ж хвильового пакету ($\sigma \approx \sigma_{кр}$) спостерігається значне зменшення амплітуди збудження при збільшенні його тривалості. Тобто,зміна амплітуди збуджень в зоні формування у випадку $\sigma/\mathrm{Re} \ll 1$ визначається співвідношенням міжσта$\sigma_{кр}$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Clarkson, P. Rational solutions of the Boussinesq equation and applications to rogue waves [Текст] / P. Clarkson, E. Dowie. // Chem. Eng. Sci. — 2017. — Vol. 84, № 7. — P. 483 — 497.
2. Bogdanov,L.V. TheBoussinesq equationrevisited [Текст] /L.V.Bogdanov,V. E.Zakharov.//Physica D. —2002, Vol. 165. — P. 137 — 162.
3. Верлань,А.Ф.Алгоритмізація методів точності параметричної редукції математичних моделей/А.Ф.Верлань, С. А. Положаєнко //Інформатика та математичні методи у моделюванні. — 2017.— Т. 7. — №1-2.— С. 7-17.

SIMULATION OF THE DYNAMIC STATE OF SHOCK WAVES IN VAPOR-LIQUID TWO-PHASE SYSTEMS

Daria Lys, Andrii Prokofiev
doctor of technical sciences,professor Serhii Polozhaienko
Odessa Polytechnic National University, UKRAINE

ANNOTATION Wave processes in the mechanics of two-phase systems occupy a specialplace, since the effects of non-uniformity are most clearly manifested in the propagation of waves,and on the other hand,acoustic waves in such systems are the most accessible and effective way of studying the structure of the two-phase system itself