УДК 004.519.217

Д.А. Маевский, канд. техн. наук

ОСНОВЫ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОГРАММНЫХ СИСТЕМ

Аннотация. *На базе теории динамики программных систем разработаны теоретические основы их устойчивости. Введено понятие внутреннего и внешнего равновесия, рядом теорем доказано условие их устойчивости. Показано существование неизвестных ранее взаимозависимостей между потоками дефектов в программных системах.*

Ключевые слова: *программные системы, надежность, динамика программных систем, теория устойчивости*

D.A Maevsky, Ph.D

FUNDAMENTALS OF THE THEORY OF SOFTWARE SYSTEMS STABILITY

Abstract. *Theoretical basis of software systems stability were developed on the basis of the theory of their dynamics. Concepts of internal and external balance were introduced, and their stability conditions were proved by a number of theorems. Existence of previously unknown relations and dependencies between defect flows in software systems was shown.*

Keywords: *software systems, reliability, software systems dynamics, theory of stability*

Д.А. Маевський, канд. техн. наук

ОСНОВИ ТЕОРІЇ СТІЙКОСТІ ПРОГРАМНИХ СИСТЕМ

Анотація *На базі теорії динаміки програмних систем розроблено теоретичні основи їх стійкості. Введено поняття внутрішньої і зовнішньої рівноваги, рядом теорем доведено умови їх стійкості. Показано існування невідомих раніше взаємних залежностей між потоками дефектів у програмних системах.*

Ключові слова: *програмні системи, надійність, динаміка програмних систем, теорія стійкості*

Введение. Для оценки надежности программных систем (ПС) широко используются методы математического моделирования. Целью моделирования показателей надежности ПС является оценка количества оставшихся в системе дефектов, а также прогнозирование времени и динамики их выявления. Эта задача не является новой, но методы ее решения не могут считаться хорошо изученными. Например, в [5] авторы отмечают: «Необходимо подчеркнуть, что к настоящему времени теорию надежности программных средств нельзя рассматривать как сложившуюся науку. … можно констатировать наличие существенного разрыва между теорией (математическими моделями и методами) и практикой».

Теория динамики программных систем (ДПС), как показано в [1] и [3] и подтверждено на практике [2], позволяет уничтожить этот разрыв и сделать первый шаг к приближению науки о надежности ПС к определению «сложившаяся».

В теории ДПС процесс выявления дефектов в ПС и внесения в нее новых вторичных дефектов рассматривается как процесс взаимодействия двух потоков. Первый, выходной поток выносит дефекты из системы, второй, входной – вносит в нее вторичные дефекты.

В связи с существованием в ПС двух противоположно направленных потоков дефектов актуальным является подробное изучение этого влияния и сопутствующих потокам явлениям. Этому изучению и посвящена настоящая статья.

Фазовые траектории программной системы. Состояния равновесия. Как показано в [3], поведение ПС с точки зрения возникновения и развития потоков дефектов описывается динамической системой (1)

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{df}_1}{\mathrm{dt}} = -\mathrm{A}_1 f_1 - A_2 f_2 \\ \dfrac{\mathrm{df}_2}{\mathrm{dt}} = -A_2 f_1 - A_1 f_2 \end{cases}. \qquad (1)$$

Для исследования поведения и качественного анализа динамической системы, заданной уравнениями (1), построим ее фазовые траектории (фазовый портрет).

Определение 1. Вектором состояния ПС будем называть вектор $\vec{u} = \langle f_1, f_2 \rangle$ где f_1 и

f_2 – переменные состояния на момент времени t.

Определение 2. Пространством состояний (фазовым пространством) системы будем называть подмножество $X = U \subseteq R_+^2$ с координатами $\vec{u} = \langle f_1, f_2 \rangle$, где $R_+ = \{ N \in R : N \geq 0 \}$.

Каждая фазовая траектория соответствует определенному частному решению системы (1) при определенных начальных условиях. В случае программной системы и исследования потоков дефектов в качестве координат фазового пространства следует выбрать величины f_1 и f_2, определяющие количество дефектов выходного и входного потоков.

Для построения фазовых траекторий ПС необходимо получить зависимость $f_2(f_1)$. Дифференциальное уравнение, связывающее f_2 с f_1, можно получить из системы (1), разделив второе уравнение на первое. Получим

$$\frac{\mathrm{df}_2}{\mathrm{df}_1} = \frac{A_2 f_1 + A_1 f_2}{A_1 f_1 + A_2 f_2}. \qquad (2)$$

Здесь учтено, что в соответствии с [1]

$$\begin{aligned} f_1 &= F_0 \mathrm{e}^{-A_1 t} ch(A_2 t) \\ f_2 &= -F_0 \mathrm{e}^{-A_1 t} sh(A_2 t) \end{aligned}. \qquad (3)$$

С учетом этих соотношений уравнение (2) можно переписать:

$$\frac{\mathrm{df}_2}{\mathrm{df}_1} = \frac{A_2 chA_2 t + A_1 shA_2 t}{A_1 chA_2 t + A_2 shA_2 t}.$$

Если разделить числитель и знаменатель этой дроби на $A_1 \neq 0$ и ввести коэффициент $k = \frac{A_2}{A_1}$, получим:

$$\frac{df_2}{df_1} = \frac{kchA_2 t + shA_2 t}{chA_2 t + kshA_2 t}. \qquad (4)$$

Уравнение (4) представляет собой линейное неоднородное дифференциальное уравнение, в правую часть которого входит время t. Выполнив его численное решение, получаем фазовый портрет ПС, показанный на рис. 1.

Фазовый портрет построен для ПС с такими характеристиками: количество дефектов при t = 0 – F_0 = 100, коэффициент A_1 = 0,01 $сут^{-1}$ коэффициент k изменяется от 0 до 1,1.

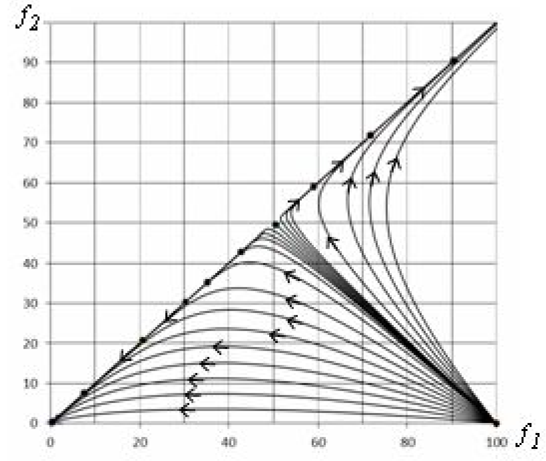

Рис. 1. Фазовый портрет ПС

Поясним образование фазовых траекторий. Каждой точке на траектории (образующей точке) соответствует пара значений (f_1, f_2). Движение образующей точки происходит от начального состояния системы (при t = 0) к конечному (при $t \to \infty$). В нашем случае, начальному состоянию $f_1 = F_0$, $f_2 = 0$ соответствует начальная точка, лежащая на оси абсцисс. Движение образующей точки по траектории осуществляется справа налево (показано стрелками на рис. 1).

Из рис. 1 видно, что при $k < 1$ все траектории стремятся к равновесному состоянию, если скорости изменения потоков становятся равными нулю. Этому состоянию соответствует равновесие ПС, когда дефектов в ней нет, следствие, как нет потоков. На рис. 1. этому состоянию отвечает точка (0,0).

При $k = 1$, т.е. в случае равенства интенсивностей выходного и входного потоков, образующая точка движется справа налево по отрезку прямой (f_2 в каждой ее точке равно f_1). Состояния равновесия, равенства нулю скоростей изменения потоков, система достигает в конечной точке этой прямой. Эта точка имеет координаты $\left(\frac{F_0}{2}, \frac{F_0}{2} \right)$, т.е. при достижении количеством выносимых и вносимых дефектов этого значения потоки перестают изменяться.

В случае $k > 1$ образующая точка движется по фазовой траектории, стремящейся в бесконечность. Однако и при этом, как видно из рис. 1, точка сначала выходит на прямую $f_2 = f_1$. Количество дефектов в системе при этом будет бесконечно возрастать, а скорость изменения потока никогда не достигнет нулевого значения.

Из анализа рис. 1 можно сделать и более важные концептуальные выводы.

Вывод 1. Все фазовые траектории стремятся к прямой $f_2 = f_1$, т.е. со временем количество дефектов, которые вносятся в систему, уравнивается с количеством выносимых дефектов. Можно сказать, что ПС со временем приобретает *внутреннее равновесие* между действующими в ней потоками. После обретения равновесия оба потока становятся одинаковыми как по количеству дефектов, образующих поток, так и по скорости изменения потоков во времени.

Явление внутреннего равновесия является неизвестным ранее и нуждается в тщательном изучении.

Вывод 2. На фазовом портрете ПС есть точки, в которых сама программная система как единое целое приобретает равновесие со своей внешней средой: потоки перестают изменяться. Такие точки будем называть положениями внешнего *равновесия*. Согласно теории динамических систем [4], эти точки называются стационарными. Стационарной точкой при $k < 1$ является начало координат. При этом установившемся состоянием (вспомним переходные процессы) ПС будет достижение ее равновесия с окружающей средой (предметной областью), т.е. полное отсутствие дефектов в ПС.

При $k = 1$ также образуется стационарная точка, соответствующая равенству интенсивностей прямого и обратного потоков. Кстати, как уже говорилось, этот вывод полностью согласуется с ожидаемым.

В отличие от двух рассмотренных случаев, при $k > 1$, т.е. при превышении интенсивности входного потока над выходным, стационарных точек не наблюдается. При этом фазовые кривые устремляются в бесконечность, что опять таки соответствует ожидаемым результатам. Однако в этом случае ПС сначала достигает состояния внутреннего равновесия, а уже потом оба потока синхронно устремляются в бесконечность. Это дает основание предполагать, что *достижение состояния внутреннего равновесия есть необходимое условие для всех ПС при любых соотношениях между выходным и входным потоками.*

Докажем это предположение.

Внутреннее равновесие программных систем. При исследовании явления внутреннего равновесия ПС надо дать ответ на следующие вопросы:

1. Всегда ли любая ПС будет достигать состояния внутреннего равновесия?

2. Является ли явление внутреннего равновесия устойчивым?

3. В какой момент времени при известных параметрах в ПС наступит внутреннее равновесие?

Перед рассмотрением этих вопросов дадим формальное определение состоянию внутреннего равновесия.

Определение 3. Явлением внутреннего равновесия ПС будем называть установление равновесия между выходным и входным потоками в ней, при котором совпадают их интенсивности и количество дефектов.

Отвечая на первый вопрос надо определить, не является ли явление внутреннего равновесия случайным и присуще ли оно всем программным системам. Существование явления внутреннего равновесия для любых ПС доказано теоремами 1 и 2.

Теорема 1 (первая теорема равновесия). Существует такое значение времени t', что для всех $t > t'$ выполняется условие $|f_1(t) - f_2(t)| \le \varepsilon$ для любых сколько угодно малых ε.

Доказательство теоремы 1. Принимая во внимание то, что разность $f_1(t) - f_2(t)$ берется по модулю, надо обратить внимание на возможные соотношения между величинами $f_1(t)$ и $f_2(t)$. Сначала отметим, что в выражениях (3) произведение $A_2 t$ всегда является положительным. Поэтому можно утверждать, что $chA_2t \ge shA_2t$, из чего следует, что $f_1(t) \ge f_2(t)$. При таком соотношении модуль $|f_1(t) - f_2(t)|$, согласно свойствам модуля, можно заменить разностью $f_1(t) - f_2(t)$.

На основании этого составим уравнение

$$f_1(t)-f_2(t)-\varepsilon=0. \qquad (5)$$

Теорема будет доказана, если будет найдено значение $t=t'$, удовлетворяющее этому уравнению.

Воспользовавшись выражениями (3), уравнение (5) можно переписать так:

$$F_0 e^{-A_1 t}\left[ch(A_2 t)-sh(A_2 t)\right]-\varepsilon=0.$$

Раскрывая гиперболические функции, после преобразований получим

$$F_0 e^{-(A_1+A_2)\cdot t}=\varepsilon. \qquad (6)$$

Уравнение (6) разрешимо относительно t при любых положительных ε. Действительно, прологарифмировав, получаем

$$-(A_1+A_2)t=\ln\frac{\varepsilon}{F_{10}}.$$

откуда значение $t=t'$:

$$t'=-\frac{ln\dfrac{\varepsilon}{F_0}}{A_1+A_2}. \qquad (7)$$

Знак «минус» в правой части (7) обусловлен тем, что сколько угодно малая величина $\varepsilon<F_0$, поэтому $ln\dfrac{\varepsilon}{F_0}<0$.

Таким образом, значение $t=t'$ существует, а при $t>t'$ левая часть (7) станет меньше, чем ε.

Теорема 1 доказана.

Для рассмотрения интенсивности потоков рассмотрим теорему 2.

Теорема 2 (вторая теорема равновесия). Существует такое значение времени t'', что для всех $t>t''$ выполняется $\left|\dfrac{df_1}{dt}-\dfrac{df_2}{dt}\right|\le\varepsilon$ для любых сколько угодно малых ε.

Доказательство теоремы 2. При доказательстве теоремы 2, принимая во внимание свойства модуля разности, как и в доказательстве предыдущей теоремы, следует учитывать все возможные случаи.

Во-первых, отметим, что состояние равновесия между потоками возможно только тогда, когда их интенсивности (скорости изменения во времени) имеют одинаковые знаки. Невозможно равновесие, когда один поток увеличивается, а другой уменьшается.

Во-вторых, надо рассмотреть отдельно возможные соотношения между скоростями изменения потоков, т.е., случай, когда $\left|\dfrac{df_1}{dt}\right|>\left|\dfrac{df_2}{dt}\right|$ и случай $\left|\dfrac{df_1}{dt}\right|<\left|\dfrac{df_2}{dt}\right|$. Поэтому рассмотрим четыре случая.

Случай 1. $\dfrac{df_1}{dt}>0$, $\dfrac{df_2}{dt}>0$, $\left|\dfrac{df_1}{dt}\right|>\left|\dfrac{df_2}{dt}\right|$.

При этом, как следует из свойств модуля, модуль разности можно заменить обыкновенной разностью: $\left|\dfrac{df_1}{dt}-\dfrac{df_2}{dt}\right|=\dfrac{df_1}{dt}-\dfrac{df_2}{dt}$.

С учетом (3) запишем

$$\frac{df_1}{dt}-\frac{df_2}{dt}=\frac{F_{10}}{2}e^{-A_1 t}\left(2A_2 e^{-A_2 t}-2A_1 e^{-A_2 t}\right).$$

Отсюда получаем уравнение

$$F_{10}(A_2-A_1)e^{-(A_1+A_2)t}=\varepsilon. \qquad (8)$$

При $A_2>A_1$ значение t, удовлетворяющее этому уравнению, существует, а при увеличении t левая часть станет меньше ε.

Случай 2.

$$\frac{df_1}{dt}>0,\ \frac{df_2}{dt}>0,\ \left|\frac{df_1}{dt}\right|<\left|\frac{df_2}{dt}\right|.$$

При этом из свойств модуля следует, что

$$\left|\frac{df_1}{dt}-\frac{df_2}{dt}\right|=\frac{df_2}{dt}-\frac{df_1}{dt}.$$

С учетом (3) получаем

$$\frac{df_2}{dt}-\frac{df_1}{dt}=F_{10}e^{-A_1 t}\begin{pmatrix}A_1 chA_2 t+A_2 shA_2 t-\\ A_1 shA_2 t-A_2 chA_2 t\end{pmatrix}$$

или после преобразований, подобных проведенным в случае 1,

$$F_{10}(A_1-A_2)e^{-(A_1+A_2)t}=\varepsilon. \qquad (9)$$

При $A_1>A_2$ значение t, удовлетворяющее этому уравнению, существует, причем с увеличением t левая часть станет меньше ε.

Случай 3.

$$\frac{df_1}{dt}<0,\ \frac{df_2}{dt}<0,\ \left|\frac{df_1}{dt}\right|>\left|\frac{df_2}{dt}\right|.$$

При таком соотношении модуль разности можно записать так: $\left|\dfrac{df_1}{dt}-\dfrac{df_2}{dt}\right|=\left|\dfrac{df_1}{dt}\right|-\left|\dfrac{df_2}{dt}\right|$.

С учетом (3) получаем

$$\left|\frac{df_1}{dt}\right|-\left|\frac{df_2}{dt}\right|=F_{10}e^{-A_1 t}\begin{pmatrix}A_1 chA_2 t+A_2 shA_2 t-\\ A_1 shA_2 t-A_2 chA_2 t\end{pmatrix},$$

или после преобразований

$$F_{10}(A_1-A_2)e^{-(A_1+A_2)t}=\varepsilon. \qquad (10)$$

Выражение (10) тождественно полученному в случае 2 (9), но только при $A_1 > A_2$. Это означает, что при любых соотношениях между A_1 и A_2 значение t, удовлетворяющее этому уравнению, существует, причем при увеличении t левая часть станет меньше ε.

Случай 4.

$$\frac{df_1}{dt} < 0,\ \frac{df_2}{dt} < 0,\ \left|\frac{df_1}{dt}\right| < \left|\frac{df_2}{dt}\right|.$$

Исходя из свойств модуля можно переписать $\left|\frac{df_1}{dt} - \frac{df_2}{dt}\right| = \left|\frac{df_2}{dt}\right| - \left|\frac{df_1}{dt}\right|$.

С учетом (3) получаем

$$\left|\frac{\mathrm{df}_2}{\mathrm{dt}}\right| - \left|\frac{df_1}{dt}\right| = F_{10}e^{-A_1t}\begin{pmatrix} A_2chA_2t + A_1shA_2t - \\ A_2shA_2t - A_1chA_2t \end{pmatrix},$$

или после преобразований

$$F_{10}\left(A_2 - A_1\right)e^{-(A_1+A_2)t} = \varepsilon. \qquad (11)$$

Выражение (11) тождественно полученному в случае 1 (8), но при $A_2 > A_1$. Это означает, что при любых соотношениях между A_1 и A_2 значение t, удовлетворяющее этому уравнению, существует, причем при увеличении t левая часть станет меньше ε.

Итак, во всех возможных случаях существует такое значение *t*, которое удовлетворяет уравнению $\left|\frac{df_1}{dt} - \frac{df_2}{dt}\right| = \varepsilon$, причем при увеличении времени t левая часть станет меньше ε.

Теорема 2 доказана.

Рассмотрим вопрос устойчивости состояния внутреннего равновесия. Нужно выяснить, может ли ПС со временем самопроизвольно выйти из равновесия. Если ответ будет положительным, то это значит, что внутреннее равновесие явление временное. В какое-то время оно достигается, а впоследствии система сама выходит из этого состояния и потоки перестают быть согласованными. Если же состояние равновесия устойчиво, то система сама не может выйти из него и потоки постоянно остаются согласованными. Они синхронно уменьшаются к нулю или синхронно бесконечно увеличиваются.

Устойчивость явления внутреннего равновесия доказывается теоремой 3.

Теорема 3 (третья теорема равновесия). Явление внутреннего равновесия является устойчивым при всех значениях коэффициентов влияния.

Доказательство теоремы 3. Допустим, что внутреннее равновесие не является устойчивым. Это значит, что после достижения одинакового количества дефектов выходного и входного потоков в момент времени t' при $t > t'$ равновесие будет нарушено, т.е. при $t > t'$ $f_1(t) \neq f_2(t)$. Неравенство количества дефектов обоих потоков после достижения равновесия возможно, только если скорости изменения выходного и входного потоков будут отличаться. Но это входит в противоречие с теоремой 2, которая доказывает равенство скоростей изменения потоков после достижения внутреннего равновесия. Предположение не является верным, следовательно, *теорема 3 доказана.*

Таким образом, доказана устойчивость состояния внутреннего равновесия программных систем. Определим время, при котором система будет достигать этого состояния. Для этого используем результаты, полученные во время доказательства теорем 1и 2.

Значение времени, при котором программная система достигает состояния равновесия количества дефектов, определяется выражением (7).

На практике, принимая во внимание то, что количество дефектов всегда может быть только целым числом, можно принять, что $\varepsilon = 1$, т.е. соответствует минимально различимому количество дефектов. Тогда из (7) получим

$$t' = \frac{\ln F_0}{A_1 + A_2}. \qquad (12)$$

Для нахождения времени, при котором равновесия достигают скорости потоков, воспользуемся формулами (8) и (9). Формулу (8) можно использовать при соотношении коэффициентов влияния $A_2 > A_1$. При этом время, необходимое для достижения равенства скоростей

$$t'' = -\frac{\ln\frac{\varepsilon}{\left(A_2 - A_1\right)F_0}}{A_1 + A_2}. \qquad (13)$$

При анализе уравнения (7) было предложено принять $\varepsilon = 1$, так как количество дефектов может быть только целым числом.

Для анализа и интерпретации (13) тоже надо оценить возможное значение ε в этом уравнении. Для этого обратимся к системе (1) и определим интенсивность обоих потоков при $t=0$ для начальных условий $f_1(0)=F_0$ и $f_2(0)=0$: $\left|\frac{df_1}{dt}\right| = AF_0$; $\left|\frac{df_2}{dt}\right| = A_2F_0$.

Отсюда, с абсолютной погрешностью не больше чем $\frac{1}{F_0}$, можно принять $\varepsilon = A_2 - A_1$. При таком значении ε (13) можно переписать

$$t'' = \frac{lnF_0}{A_1 + A_2}. \qquad (14)$$

Сравнивая (12) и (14), можно утверждать, что $t''=t'$, т.е. оба условия внутреннего равновесия достигаются одновременно. Те же выводы можно сделать, анализируя случай $A_1 > A_2$.

Теоремами 1 и 2 показана неизбежность наступления в ПС состояние внутреннего равновесия. Это дает основание сформулировать закон равновесия потоков в программных системах.

Закон равновесия потоков. В любой программной системе выходной и входной потоки всегда достигают внутреннего равновесия. Время достижения внутреннего равновесия прямо пропорционально начальному количеству дефектов в ней и обратно пропорционально сумме коэффициентов влияния.

Таким образом, подытоживая полученные результаты, можно утверждать, что состояние внутреннего равновесия присуще всем программным системам, и это равновесие является устойчивым. Такие выводы теории динамики программных систем являются новыми и нуждаются в детальном изучении и экспериментальной проверке.

Внешнее равновесие и устойчивость программных систем. Фазовые траектории ПС (1) содержат важную информацию о ее асимптотических состояниях, на основании которой можно ввести понятие внешнего равновесия.

Определение 4. Положениями внешнего равновесия ПС (стационарными точками) будем называть такие точки фазового пространства $\overrightarrow{u^*} = \left\langle f_1^*, f_2^* \right\rangle$, что

$$\begin{cases} A_1 f_1^* + A_2 f_2^* = 0 \\ A_2 f_1^* + A_1 f_1^* = 0 \end{cases}.$$

Очевидно, что $\overrightarrow{u^*}$ является решением системы (1) при $\frac{d\overrightarrow{u^*}}{dt} = 0$.

Определение 5. Положение внешнего равновесия ПС будем называть устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого $\vec{u}_0$, $\left\|\overrightarrow{u_0} - \vec{u}^*\right\| < \varepsilon$ выполняется неравенство $\left\|\vec{u}(t,\vec{u}_0) - \vec{u}^*\right\| < \delta$ для всех $t > 0$.

Определение 6. Положение внешнего равновесия ПС будем называть асимптотически устойчивым, если, при выполнении условий определения 5, дополнительно выполняется условие $\left\|\vec{u}(t,\vec{u}_0) - \vec{u}^*\right\| \to 0$ при $t \to \infty$.

Исследуем положение внешнего равновесия ПС, динамика, которой описывается уравнениями (1). Программная система входит в состояние внешнего равновесия со своей окружающей средой (ПрО), когда потоки дефектов перестают изменяться во времени. Обратим внимание, что здесь говорится о равенстве нулю только *скоростей изменения* потоков. Сами значения f_1 и f_2 в общем случае могут быть отличными от нуля. Только в частном случае, когда $k<1$, в пределе получаем $f_1=0$ и $f_2=0$.

В теории динамических систем внешнему равновесию отвечают стационарные (особенные) точки. Поэтому дальше термины «точка внешнего равновесия» и «стационарная точка» будут употребляться как синонимы.

Условия наступления в системе внешнего равновесия сформулированы в теореме 4.

Теорема 4 (четвертая теорема равновесия). При условии $A_1 > A_2$ программная система приобретает асимптотически устойчивое состояние внешнего равновесия.

Доказательство теоремы 4. Из уравнений (1) для положения внешнего равновесия запишем

$$\begin{cases} -A_1 f_1 - A_2 f_2 = 0 \\ -A_2 f_1 - A_1 f_2 = 0 \end{cases}. \qquad (15)$$

При $A_1 > A_2$ определитель этой системы $\det A = A_1^2 - A_2^2 > 0$. Поэтому система (15) может иметь только одно решение $f_1 = f_2 = 0$, которое и соответствует положению равновесия.

Докажем асимптотическую устойчивость этого решения. Для этого рассмотрим матрицу системы (15)

$$\|A\| = \begin{Vmatrix} -A_1 & -A_2 \\ -A_2 & -A_1 \end{Vmatrix}$$

и найдем ее собственные числа из уравнения

$$\lambda^2 + 2A_1\lambda + A_1^2 - A_2^2 = 0.$$

Решая это уравнение, получаем собственные числа:

$$\lambda_1 = -A_1 + A_2,\ \lambda_2 = -A_1 - A_2.$$

Согласно теореме Ляпунова [4], стационарная точка устойчива асимптотически, если все собственные числа имеют отрицательный знак вещественной части. Корень λ_2 будет отрицательным при любых значениях A_1 и A_2. Отрицательное значение λ_1 возможно только при условии $A_1 > A_2$.

Теорема 4 доказана.

Теорема 5 (пятая теорема равновесия). При условии $A_1 = A_2$ программная система приобретает устойчивое внешнее равновесие.

Доказательство теоремы 5. При условии $A_1 = A_2$ определитель системы (15) $\det A = A_1^2 - A_2^2 = 0$, потому эта система математически имеет бесконечное количество решений. Но, учитывая физический смысл, при равенстве A_1 и A_2 получим решение каждого из уравнений только при $f_1 = -f_2$.

Теорема 5 доказана.

Знак « минус» перед f_2, как видели, означает противоположную направленность потоков. В то же время, суммарное количество дефектов, содержащихся в ПС, как было показано в [1], всегда равняется $f_1 + f_2$. Этот факт позволяет определить положение точки внешнего равновесия при $A_1 = A_2$. Рассмотрим ПС при $t = 0$. В этот момент времени $f_1 + f_2 = F_0$, откуда $f_1 = |f_2| = \frac{F_0}{2}$.

Таким образом, внешнее равновесие при $A_1 = A_2$ устанавливается на уровне половины от первоначального количества дефектов в программной системе. Положение равновесия при этом является устойчивым.

Интересно исследовать устойчивость ПС при $A_1 < A_2$. При таком соотношении коэффициентов влияния определитель матрицы системы (15) $\det A = A_1^2 - A_2^2 < 0$, что говорит о существовании одного положения равновесия. Собственные числа матрицы $\|A\|$ в этом случае $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$, что согласно [4], отвечает неустойчивой точке типа «седло».

1. Возможные типы положений равновесия ПС

Соотношение A_1 и A_2	Тип положения
$A_1 > A_2$; $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$.	
Выносятся больше дефектов, чем вносится	Устойчивый узел
$A_1 < A_2$; $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$	
Вносятся больше дефектов, чем выносится	Седло
$A_1 = A_2$; $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$	
Выносится и вносится одинаковое количество дефектов	Устойчивый узел

Выводы. В статье исследован фазовый портрет ПС и рассмотрены вопросы их устойчивости.

На основании поведения фазовых траекторий сделан вывод о существовании в ПС состояния внутреннего равновесия, при котором количества вынесенных и внесенных дефектов, а также скорости их изменения во времени одинаковы. Сформулирован закон равновесия потоков. Возможность существования состояния внутреннего равновесия и необходимость его достижения системой доказаны рядом теорем.

Одна из таких закономерностей сформулирована в законе равновесия потоков. Вторая очень важная закономерность видна из фазового портрета ПС (1). Эта закономерность проявляется в явлении возрастания количества вторичных дефектов в системе. Действительно, из рис. 1 следует, что при $A_1 > A_2$, даже при неуклонном уменьшении количества дефектов выходного потока, число вторичных дефектов в системе возрастает, достигает максимума, и лишь потом начинает уменьшаться. На этот факт должны обратить внимание тестировщики ПС. Приведенные зависимости позволяют предсказать интервал времени, в котором существует повышенная опасность внесения вторичных дефектов и принять соответствующие меры для их снижения.

Список использованной литературы

1. Маевский Д.А. Динамика программных систем и модели их надежности / Д.А. Маевский // Радиоэлектронные и компьютерные системы. – 2011. – № 2. – С. 45–54.

2. Маевский Д.А. Моделирование надежности в теории динамики программных систем. / Д.А. Маевский // Электротехнические и компьютерные системы. – 2011.– № (04)80. – С. 147–153.

3. Маєвський Д.А. Структурна динаміка програмних систем та прогнозування їх надійності при наявності вторинних дефектів / Д.А. Маєвський // Радіоелектронні і комп’ютерні системи. – 2010. – № 3. – С. 103–109.

4. Самойленко А.М. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. Учеб. пособие / А.М. Самойленко, Н.А. Кривошея, С.А. Перестюк. – 2-е изд., перераб. – М.: Высшая школа, – 1989. – 383 с.

5. Харченко В.С. Методы моделирования и оценки качества и надежности программного обеспечения / В.С. Харченко, В.В. Скляр, О.М. Тарасюк. Учеб. пособие. – Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т ХАИ, 2004. – 159 с.

Получено 23.01.2012

References

1. Maevsky D. Dynamics of programming systems and their reliability models / Proc. Radio-electronic and computer systems. – 2011. – № 2. – P. 45–54 [in Russian].

2. Maevsky D. Reliability modeling in dynamics of programming systems theory / Proc. Radio-electronic and computer systems. – 2011. – № 4. – P. 147– 53 [in Russian].

3. Maevsky D.A. Structural dynamics of programming systems and prognostication of their reliability at presence of secondary defects / Proc. Radio-electronic and computer systems. - 2010. – № 3. – P. 103–109 [in Ukrainian].

4. Samoilenko A.M., Krivosheja N.A., Samoilenko A.M., C.A. Perestuk Differential equalizations: examples and tasks. Studies Manual. – Moscow: Higher school. – 1989, – 383 p. [in Russian].

5. Kharchenko V.S., Sklar V.V., Tarasyuk O.M. Methods for modeling and evaluating the quality and reliability of the programming security / Textbook.allowance – Kharkov: Nat. Aerospace. Univ"HAI", 2004. – 159 [in Russian].

Маевский
Дмитрий Андреевич,
канд.техн.наук, доцент,
зав. каф. теоретических основ и общей электротехники
Одесск. нац. политехн. ун-та,
тел. (8-048) 734-84-54