

## АЛГОРИТМ РЕАЛИЗАЦИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МАКРОМОДЕЛЕЙ ЯВНОГО ВИДА

А. А. Верлань<sup>1</sup>, Ю. Стертен<sup>1</sup>, С. А. Положаенко<sup>2</sup><sup>1</sup>Норвежский университет науки и технологий<sup>2</sup>Одесский национальный политехнический университет

**Аннотация.** Показано, что адекватным классом математических моделей динамических объектов являются интегральные макромоделю, построенные по принципу «вход — выход». Исследована возможность снижения ошибки моделирования при применении квадратурных формул реализации интегральных макромоделю в виде уравнений Вольтерры (в частности Вольтерры–Гаммерштейна) и предложены конструктивные алгоритмы численных процедур моделирования, обеспечивающие вычисления в реальном масштабе времени.

**Ключевые слова:** макромоделю, интегральные уравнения, квадратурные формулы, ошибка моделирования, вычислительный алгоритм, быстродействующие вычислители.

**Введение.**

Интегральные макромоделю с достаточной для практических приложений степенью адекватности отображают процессы в динамических объектах разной сложности, предполагая их представление по принципу «вход — выход» [1]. Постановка задачи моделирования при этом ставится следующим образом:

— задана динамическая характеристика  $K(t, \tau)$  линейной части, нелинейная зависимость  $F[\cdot]$  (для нелинейных объектов) и входной сигнал  $x(t)$ ;

— необходимо определить выходной сигнал  $y(t)$ , соответственно используя интегральные макромоделю линейного и нелинейного объектов:

$$y(t) = \int_0^t K(t, \tau) x(\tau) d\tau, \quad (1)$$

$$y(t) = \int_0^t K(t, \tau) F[x(\tau)] d\tau. \quad (2)$$

В литературе интегральные макромоделю вида (1), (2) известны как уравнения Вольтерры [2—11].

Основной методов численной реализации интегральных уравнений Вольтерры является метод *квадратур*, который заключается [12; 13] в применении квадратурных формул для приближенного вычисления определенного интеграла:

© Верлань А. А., Стертен Ю.,  
Положаенко С.А., 2017

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) + R[f], \quad (3)$$

где  $x_i$  — фиксированные абсциссы (узлы) отрезка  $[a, b]$ , причем  $x_1 = a$ ,  $x_n = b$ ;  $A_i$  — числовые коэффициенты или весовые множители;  $R[f]$  — остаточный член (ошибка аппроксимации). Как правило  $A_i > 0$ , а

$$\sum_a^b A_i = b - a.$$

Существует значительное число квадратурных формул вида (3), к которым относятся формулы Ньютона–Котеса (в том числе прямоугольников, трапеций, Симпсона), Гаусса, Чебышева и т.д. [12—14]. Однако квадратурные формулы имеют значительную ошибку на больших интервалах.

**Цель работы.**

Повышение точности моделирования динамических объектов с использованием метода квадратур на основе интегральных макромоделю в форме Вольтерры–Гаммерштейна, а также разработка быстродействующих алгоритмов реализации данных моделю.

**Основная часть.**

Покажем возможность снижения ошибки моделирования при применении квадратурных формул (проявляющихся особенно на больших интервалах) путем применения их составных.

Такою разновидностью формул можно получить, если квадратурную формулу применять не ко всему отрезку, а разбивая последний на части и, к каждой из них отдельно,

применить квадратурную формулу. Очевидно, что при разбижке исходного отрезка на части следует исходить из условия: интеграл от соответствующей вписанной ломаной должен быть как можно более близким к интегралу от  $f(x)$ . При этом значения интеграла от  $f(x)$  на всем отрезке  $[a, b]$  определяются как сумма найденных значений интеграла от функции на отдельных частях полного отрезка  $[a, b]$ .

Минимизация ошибки (увеличение точности) квадратурной формулы на выбранном классе функций достигается за счет выбора коэффициентов квадратурной формы, а также за счет выбора узлов интегрирования. В зависимости от применения узлы  $x_i$  могут выбираться разными способами. Для формул трапеций Симпсона и Буля рекомендуется [12] выбирать равноотдаленные узлы. Для квадратуры Гаусса–Лежандра выбранные узлы должны быть «нулями» определенных полиномов Лежандра. Чем меньшим выбирается шаг разбижения отрезка  $[a, b]$ , тем точнее получается результат, однако при этом увеличивается количество вычислительных операций, что требует дополнительных ресурсов аппаратной части. Важной особенностью вычислений при этом есть *накопление ошибок* с увеличением числа шагов, которое определяется не столько величиной шага и точностью вычислений на нем, сколько «удачным» или «неудачным» выбором способа замены интеграла конечной суммой. Такая ситуация имеет место при моделировании объектов в реальном масштабе времени, когда промежуток интегрирования (отрезок  $[a, b]$ ) может быть большим или, даже, заранее неизвестным.

В дальнейших рассуждениях будем применять часто используемое представление (и его интерпретации) интегральных уравнений вида

$$f(x) = \int_a^b K(x, \tau) F[\tau, f(\tau)] d\tau, \quad (4)$$

получившее название Вольтерры–Гамерштейна [15; 16], а также аппроксимацию под-интегрального выражения, записанного следующим образом

$$f(x_i) = \int_a^{x_i} K(x_i, \tau) y(\tau) d\tau, \quad x \in [a, b]. \quad (5)$$

Следует отметить, что свойство нарастания объема вычислений по мере увеличения шага

относится к случаю ядра произвольного вида. Повышение скорости вычислений можно достичь, используя метод вырожденных ядер [17], особенностью которого является неизменное количество вычислений на шаге.

Используя эту особенность, для интегрального оператора Вольтерры с раздельным ядром запишем:

$$\begin{aligned} \int_a^x K(x, \tau) y(\tau) d\tau &= \int_a^x \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \beta_i(\tau) y(\tau) d\tau = \\ &= \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \int_a^x \beta_i(\tau) y(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (6)$$

После аппроксимации интеграла (6) и применения квадратурных сумм получим:

$$\begin{aligned} \int_a^{x_i} K(x, \tau) y(\tau) d\tau &= \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \int_a^{x_i} \beta_i(\tau) y(\tau) d\tau = \\ &= \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \sum_{j=0}^n \beta_i(x_j) y(x_j) = \\ &= \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \left[ \beta_i(x_n) y(x_n) + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_i(x_j) y(x_j) \right] = \\ &= \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \beta_i(x_n) y(x_n) + \\ &+ \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \sum_{j=0}^n \beta_i(x_j) y(x_j). \end{aligned} \quad (7)$$

Значение суммы  $\sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \sum_{j=0}^n \beta_i(x_j) y(x_j)$

известно, поскольку оно вычислено на предыдущем  $(i-1)$ -м шаге. Поэтому остается вычислить значение суммы  $\sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \beta_i(x_n) y(x_n)$ , которое требует проведения неизменного количества операций на каждом  $i$ -м шаге.

Значительная часть интегральных операторов и равенств, встречающихся на практике, имеют разностные ядра, представленные в аналитическом виде и имеющие свойство раздельности.

Для макромоделей, например, вида (2), метод квадратур приводит к следующим расчетным выражениям (в зависимости от структурного расположения линейной части в общей структуре объекта или отсутствия нелинейности):

$$\tilde{y}(t_i) = \sum_{j=1}^i A_j K(t_i, \tau_j) F[x(\tau_j)], \quad (8)$$

$$\tilde{y}(t_i) = F \left[ \sum_{j=1}^i A_j K(t_i, \tau_j) \right], \quad (9)$$

$$\tilde{y}(t_i) = \sum_{j=1}^i [A_j K(t_i, \tau_j)]. \quad (10)$$

Для случая вырожденного ядра:

$$\tilde{y}(t_i) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(t_i) \sum_{j=1}^i A_j \beta_i(\tau_j). \quad (11)$$

Если ввести в рассмотрение нелинейный динамический объект с входным и выходным сигналами соответственно  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$  при использовании макромодели

то, согласно методу квадратур, можно построить алгоритм реализации макромодели, приведенный на рис. 1. Алгоритм выполняет вычисления по формуле

$$\psi_i = h \sum_{i=1}^m \alpha_{ii} \sum_{j=0}^i \{A_j \beta_{lj} F[\varphi_j]\},$$

где  $\alpha_{ii} = \alpha_i(t_i)$ ;  $\beta_{ii} = \beta_i(t_j)$ ;  $h$  — шаг дискретизации;  $A_j$  — коэффициенты квадратурной формулы;  $\psi_i = \psi(t_i)$ ,  $\varphi_j = \varphi(t_j)$ .

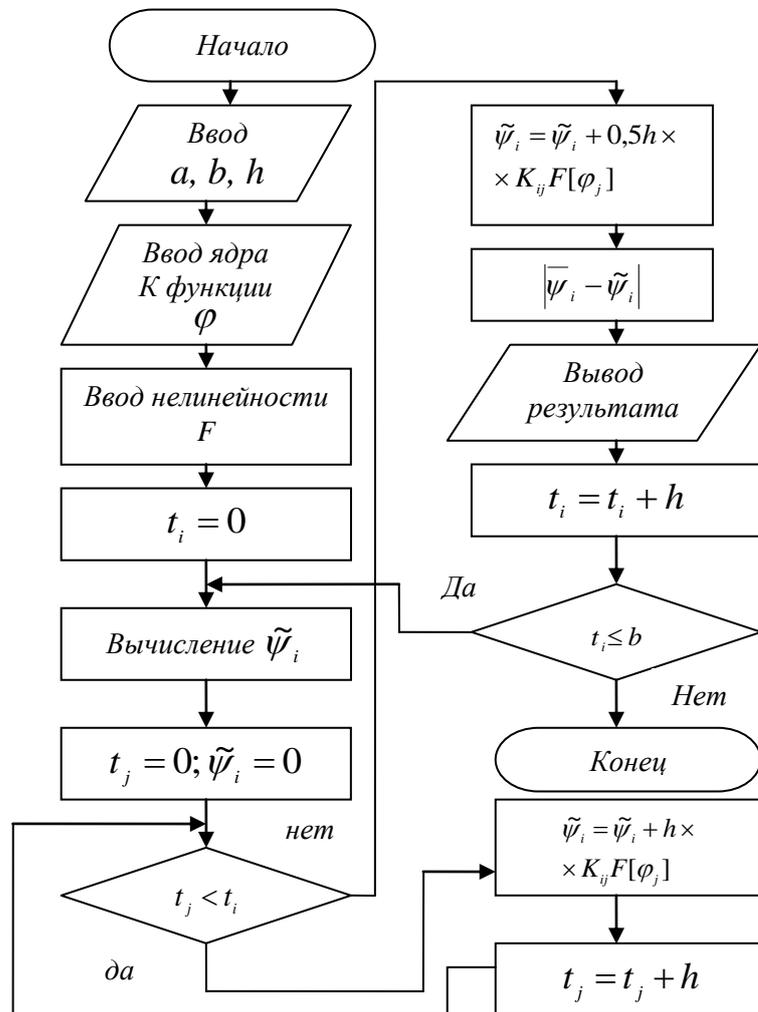


Рис. 1. Алгоритм реализации макромодели, построенный в соответствии с методом квадратур для нераздельного ядра

**Пример.**

Пусть на отрезке  $[0,1]$  с шагом  $h=0,01$  необходимо вычислить приближенное значение нелинейного интегрального оператора

$$\psi(t) = \int_0^t e^{-a(t-\tau)} \sin^2(\omega\tau) d\tau, \quad (12)$$

где  $a = 0,1$ ;  $\omega = 0,01$ .

Точное значение оператора определяется выражением

$$\psi(t) = \frac{1}{a^3 + 4\omega^2} \times [a \sin^2(\omega t) - \omega \sin(2\omega t) \cdot (1 - e^{-at})].$$

Расчетное соотношение, полученное на основе формулы трапеций для численной реализации оператора (12) с не разделяющимся ядром, имеет вид

$$\tilde{\psi}_1(t_i) = h \sum_{j=0}^i A_j l^{-a(t_i - t_j)} \cdot \sin^2(\omega t_j).$$

Используя свойство раздельности, получим

$$\tilde{\psi}_1(t_i) = h \sum_{l=0}^m l^{-at_i} \sum_{j=0}^i A_j l^{-at_j} \cdot \sin^2(\omega t_j). \quad (13)$$

Результаты вычислений приведены в табл. 1.

Таблица 1

Точное и приближенные решения задачи вида (12)

$t_1$	$\tilde{\psi}(t_1)$	$\tilde{\psi}_1(t_1)$	$\tilde{\psi}_2(t_1)$	$\tilde{\psi}(t_1) - \tilde{\psi}_1(t_1)$	$\tilde{\psi}(t_1) - \tilde{\psi}_2(t_1)$	$M_1$	$M_2$
0,00	0	0	0	0	0	1	0
0,10	0,332*10 <sup>-5</sup>	0,324*10 <sup>-5</sup>	0,434*10 <sup>-5</sup>	0,782*10 <sup>-6</sup>	0,167*10 <sup>-6</sup>	56	6
0,20	0,265*10 <sup>-4</sup>	0,263*10 <sup>-4</sup>	0,266*10 <sup>-4</sup>	0,161*10 <sup>-5</sup>	0,336*10 <sup>-6</sup>	112	6
0,30	0,893*10 <sup>-4</sup>	0,890*10 <sup>-4</sup>	0,894*10 <sup>-4</sup>	0,244*10 <sup>-5</sup>	0,507*10 <sup>-6</sup>	168	6
0,40	0,211*10 <sup>-3</sup>	0,210*10 <sup>-3</sup>	0,212*10 <sup>-3</sup>	0,326*10 <sup>-5</sup>	0,679*10 <sup>-6</sup>	224	6
0,50	0,411*10 <sup>-3</sup>	0,409*10 <sup>-3</sup>	0,413*10 <sup>-3</sup>	0,408*10 <sup>-5</sup>	0,857*10 <sup>-6</sup>	280	6
0,60	0,708*10 <sup>-3</sup>	0,707*10 <sup>-3</sup>	0,709*10 <sup>-3</sup>	0,490*10 <sup>-5</sup>	0,102*10 <sup>-5</sup>	336	6
0,70	0,112*10 <sup>-2</sup>	0,110*10 <sup>-2</sup>	0,113*10 <sup>-2</sup>	0,572*10 <sup>-5</sup>	0,120*10 <sup>-5</sup>	393	6
0,80	0,167*10 <sup>-2</sup>	0,160*10 <sup>-2</sup>	0,168*10 <sup>-2</sup>	0,653*10 <sup>-5</sup>	0,138*10 <sup>-5</sup>	448	6
0,90	0,237*10 <sup>-2</sup>	0,234*10 <sup>-2</sup>	0,238*10 <sup>-2</sup>	0,734*10 <sup>-5</sup>	0,155*10 <sup>-5</sup>	504	6
1,00	0,324*10 <sup>-2</sup>	0,321*10 <sup>-2</sup>	0,325*10 <sup>-2</sup>	0,817*10 <sup>-5</sup>	0,173*10 <sup>-5</sup>	560	6

Во втором столбце приведены результаты точного решения, в 3-м и 4-м столбцах — результаты приближенного вычисления  $\tilde{\psi}(t_i)$  по алгоритмам, приведенным на рис. 1 и рис. 2 соответственно. Как видно из табл. 1, вычисления по алгоритму, который реализует выражение (13), дает минимальную ошибку и обеспечивает получение искомой функции  $\psi(t)$  в узлах дискретизации. Это следует из того, что количество арифметических операций  $M_2$  с ростом номера узла дискретизации остается неизменным, в то время как количество

арифметических операций  $M_1$  при численной реализации интегрального оператора по первому алгоритму резко возрастает.

Для количественной оценки точности решений приведем (табл. 2) расчетные соотношения остаточных членов  $R[f]$  квадратурной формулы вида (3), использующей представление Ньютона–Котеса (для случая, когда начальная точка отрезка  $a$  совпадает с узлом интерполяции).

Таблица 2

Остаточные члены квадратурных формул Ньютона–Котеса

$n$	$R[f]$	$n$	$R[f]$
2	$-[(1/12)h^3 f'']$	7	$-[(9/1400)h^9 f^{viii}]$
3	$-[(1/90)h^5 f^{iv}]$	8	$-[(8183/518400)h^9 f^{viii}]$
4	$-[(3/80)h^5 f^{iv}]$	9	$-[(2368/467775)h^{11} f^{x}]$
5	$-[(8/945)h^7 f^{vi}]$	10	$-[(4671/394240)h^{11} f^{x}]$
6	$-[(275/12096)h^7 f^{viii}]$	11	$-[(673175/163459296)h^{13} f^{xi}]$

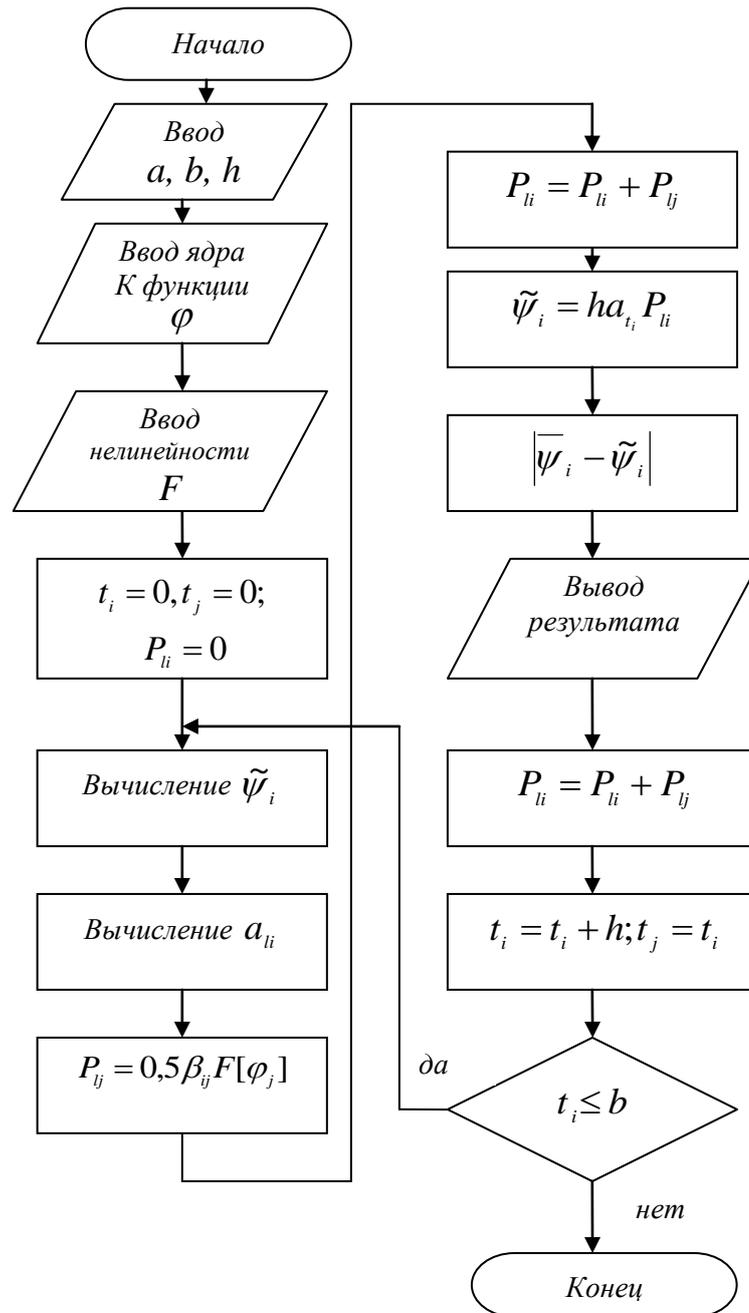


Рис 2. Алгоритм, обеспечивающий реализацию интегральных операторов Вольтерры–Гаммерштейна с раздельным ядром

Следует также заметить, что алгоритмы, представленные на рис. 1 и рис. 2, имеют близкую вычислительную сложность.

#### Вывод.

Предложен быстродействующий алгоритм численной реализации интегральных операторов Вольтерры–Гаммерштейна с раздельным ядром, обеспечивающий вычисления в реальном масштабе времени. Алгоритм может служить основой при построении быстродействующих

специализированных вычислителей решения задач управления (регулирования), контроля, а также моделирования широкого класса динамических объектов и процессов. Решением практической задачи подтверждена конструктивность предложенного алгоритма.

#### Список использованной литературы

1. Эйкхофф, П. Основы идентификации систем управления [Текст] / П. Эйкхофф. — М.: Мир, 1975. — 683 с.

2. Апарцин, А. С. О математическом моделировании нелинейных динамических систем рядами Вольтерры [Текст] / А. С. Апарцин, С. В. Солодуша // Электронное моделирование. – 1999. – № 2. – С. 3–12.

3. Асаубаев, К. Ш. Анализ нелинейных систем, описываемых рядом Вольтерра [Текст] / К. Ш. Асаубаев, А. И. Баркин, Ю. С. Попков // Автоматика и телемеханика. – 1976. – № 11. – С. 5–15.

4. Бреславец, В. С. Экспериментальне визначення ядер Вольтера моделі пристрою захисту інформаційних каналів зв'язку [Текст] / В. С. Бреславец, В. О. Кравець, О. А. Серков // Системи обробки інформації: зб. наук. праць. – Харків : НАНУ, 1999. – № 2/5.

5. Брикман, М. С. Интегральные модели в современной теории управления [Текст] / М. С. Брикман. – Рига : Зинатне, 1979. – 224 с.

6. Верлань, А. Ф. Методы математического и компьютерного моделирования измерительных преобразователей и систем на основе интегральных уравнений [Текст] / А. Ф. Верлань, М. В. Сагатов, А. А. Сытник. – Ташкент : Фан АН Республики Узбекистан, 2011. – 336 с.

7. Верлань, А. Ф. Комп'ютерне моделювання в задачах динаміки електромеханічних систем [Текст] / А. Ф. Верлань, В. А. Федорчук, В. А. Іванюк // ПІМЕ ім. Г. Є. Пухова. – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2010. – 204 с.

8. Павленко, В. Д. Построение моделей нелинейных систем в виде ядер Вольтерра с использованием технологии кластерных вычислений [Текст] / В. Д. Павленко, В. В. Череватый, В. В. Бурдейный // Вторая международная научная конференция «Интеллектуальные системы принятия решений и прикладные аспекты информационных технологий» (ISDMIT'2006), Евпатория (Крым, Украина), 15–18 мая 2006: збірка наукових праць у 4-х томах –Т. 1. – С. 159–162.

9. Aparzyn, A. S. Mathematical modeling of the dynamic systems and objects with the help of the Volterra integral series [Text] / A.S. Aparzyn // EPRI–SEI Joint seminar. – Beijing, China, – 1991. – P. 117–132.

10. Boyd, S. Measuring Volterra kernels [Text] / S. Boyd, Y. S. Tang, L. O. Chua // IEEE Trans. on Circuits and Systems. – 1983. – Vol. CAS–30, No. 8. – P. 571–577.

11. Chua, L. O. Measuring Volterra Kernels (II) [Text] / L. Chua, Y. Liao // Int. J. Circuit Theory and Applications. – 1989. – Vol. 17, № 2. – P. 151–190.

12. Самарский, А. А. Численные методы математической физики [Текст] / А. А. Самарский, А. В. Гулин. — М.: Научный мир, 2003. — 316 с.

13. Никольский, С. М. Квадратурные уравнения [Текст] / С. М. Никольский. — М.: Наука, 1988. — 255 с.

14. Бахвалов, Н. С. Численные методы [Текст] / Н. С. Бахвалов, Н. П. Житков, Г. М. Кобельков. — 4-е изд. — М.: БИНОМ, 2006. — 636 с.

15. Цалюк, З. Б. Асимптотические решения уравнения Вольтера-Гаммерштейна [Текст] / З. Б. Цалюк, С. С. Чистоклетова // Известия ВУЗов. Математика. — 2002. — № 6. — С. 78—81.

16. Хачатрян, Х. А. О нетривиальной разрешимости интегральных уравнений Гаммерштейна-Вольтерра [Текст] / Х. А. Хачатрян, С. А. Григорян // Владикавказ. матем. журнал. — 2012. — Т. 14, № 2. — С. 57—66.

17. Полянин, А. Д. Справочник по интегральным уравнениям [Текст] / А. Д. Полянин, А. В. Манжаров. — М.: Физматлит, 2003. — 608 с.

## References

1. Eikhoff, P.(1975) Basics of identification management systems [Osnovy identifiacii system upravlenia] Moscow, Russian Federation, *Mir Publ.*, 683 p. (In Russian).

2. Aparzin, A. S., Soloducha, S. V. (1999), Mathematical modeling of nonlinear dynamical systems by Volterra series [O matematicheskom modelirovanii nelineinyh dinamicheskikh system rjadami Volterry]. *Electronnoe modelirovanie*, Kyiv, Ukraine, *Izd. dom "Electronnoe modelirovanie "* Publ., № 2, pp. 3 — 12.

3. Asaubaev, K. Sh., Barkin, A. I., Popkov, Yu. S. (1976), Analysis of nonlinear systems described by a number of Volterra [Analis nelineinyh system, opisyvaimyh rjadom Volterra]. *Avtomatika i telemehanika* Moscow, Russian Federation, *Izd. dom "Avtomatika i telemehanika "* Publ., № 11 pp. 5 — 15.

4. Breslavets, V. S., Kravets, V. O., Serkov, O. A. (1999), Experimental determination nuclear device model Voltaire protection of information channels [Eksperimentalne vysnachennia jader Volterra modeli prystroyu zahystu kanalu zv'jazku] *Systemy obrobky informatsii*, Kharkiv, Ukraine "Nationalna academia nauk Ukrainy" Publ., № 2/5 (In Ukrainian).

5. Brikman, M. S. (1979) Integral model of modern management theory [Integralnie modeli dv

sovremennoi teorii upravleniia] Riga, Latvia, *Zinatie Publ.*, , 224 p.

6. Verlan, A. F., Sagatov, M. V., Sytnik, A. A. (2011), Methods of mathematical and computer modeling of transducers and systems based on integral [equations *Metody matematicheskogo i cop'uternogo modelirovaniia izmeritelnykh preobrazovatelei i system na osnove integralnykh uravnenii*] Tashkent, Uzbekistan, "Fan" Publ. 336 p. (In Russian).

7. Verlan, A. F., Fedorchuk, V. A., Ivanuk, V. A. (2010), Computer modeling in problems of dynamics of electromechanical systems [Komputerne modeluvannia v zadachah dinamiki elektromechanichnykh system] Kam'janets-Podilskyi universitet, Ukraine, "Institut problem modelirovaniia v energetike" Publ., 204 p. (In Ukrainian).

8. Pavlenko, V. D., Cherevatiy, V. V., Burdeinyi, V. V. (2006) Construction of nonlinear systems models in the form of Volterra kernels using cluster computing technology [Postroenie modelei nelineinykh system v vide jader Voltera s ispolzovaniem tehnologii klasternykh vychislenii] Zbirka naukovykh prac, Evpaporii, Ukraine, ISDMIT, vol. 1, PP 159 — 162.

9. Apartsyn, A. S. (1991) Mathematical modelling of the dynamic systems and objects with the help of the Volterra integral series EPRI-SEI Joint seminar. – Beijing, China. pp. 117–132.

10. Boyd, S., Tang, Y. S., Chua, L. O. (1983) Measuring Volterra kernels IEEE Trans. on Circuits and Systems. Vol. CAS-30, No. 8. pp. 571–577.

11. Chua, L.O., Liao, Y (2003) Measuring

Volterra Kernels (II) Int. J. Circuit Theory and Applications. Vol. 17, № 2, pp. 151–190.

12. Samarskii, A. A., Gul'in, A. V. (2003) Numerical Methods of Mathematical Physics [Chislennyye metody matematicheskoi fiziki] Moscow, Russian Federation, *Nauchnyi Mir Publ.*, 2 316 p. (In Russian).

13. Nikolskii, S. M. (1988) Quadrature equation [Kvadraturnye uravneniia] Moscow, Russian Federation, *Nauka Publ.*, 255 p. (In Russian).

14. Bahvalov, N. S., Zhitkov, N. P., Kobelkov, V. M. (2006) Numerical Methods [Chislennyye metody] Moscow, Russian Federation, *BINOM Publ.*, 636 p. (In Russian).

15. Zaluk, Z. B., Chistokletova, S. S. (2002) Asymptotic solutions of equations Volterra-Hammerstein [Asimptoticheskie resheniia uravneniia Volterra-Gammersteina] *Izvestia VUZov. Matematika*, Moscow, Russian Federation, *Izd. dom "Izvestia VUZov"* Publ., № 6 pp. 78 — 81.

16. Hachatrian, H. A., Grygorian, S. A. (2012) On the nontrivial solvability of Hammerstein-Volterra integral equations [O netrivialnoi razreshimosti integral'nykh uravnenii Gammersteina-Volterra] *Vladikavkazkii matematicheskii jurnal Vladikavkaz*, Russian Federation, *Izd. dom "Vladikavkazkii matematicheskii jurnal"* Publ., vol. 14, № 2 pp. 57 — 66.

17. Poljanin, A. D., Manzharov, A. V. (2003) Handbook of Integral Equations [Spravochnik po integralnym uravneniam] Moscow, Russian Federation, *Fizmatlit Publ.*, 608 p. (In Russian).

## ALGORITHM IMPLEMENTATION OF INTEGRATED MACROMODEL EXPLICIT FORM

A. Verlan<sup>1</sup>, Jo Sterten<sup>1</sup>, S. Polozhaenko<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Norwegian University of Science and Technology

<sup>2</sup> Одеський національний політехнічний університет

**Abstract.** It is shown that the class of adequate mathematical models of dynamic objects of varying complexity is integrated model, built on the principle "input - output". It is important that this class of models, presented as a macro model of the object based on its input and output, suitable for linear and nonlinear modeling tasks productions. The most convenient form of descriptions of integrated macro models should be considered Volterra equations, numerical solution which is most often performed by a quadrature. It is noted that the main disadvantage of the use of quadrature formulas in the procedures of the approximate (numerical) integration is a significant error on large intervals of integration. Obvious known ways of minimizing errors of quadrature formulas on the selected class of functions should be considered a rational choice of the coefficients for quadrature formulas, as well as components and integration steps. Moreover, the accumulation of errors to increase the number of steps is determined not so much by the size of the step, as by replacing the original integral by a finite sum. The latter circumstance is important for modeling of objects in the real-time integration interval may be large or even unknown. To improve the accuracy of quadrature formulas procedure consisting in the expansion of the numerical integration of the

original integral into two and apply for each of the last of its quadrature rules (for example, a combination of open and closed types of formulas of Newton-Cotes) can be offered. The increase in computing speed in the implementation of the integrated macro models based on Volterra models is achieved by using the method of degenerate cores, a feature of which is the same amount calculation step. Proposed fast algorithms for computing the design implementation of integrated macro models, providing calculations in real-time.

**Keywords:** macro model, integral equations, quadrature formulas, modeling error, computational algorithm, fast calculators

## АЛГОРИТМ РЕАЛІЗАЦІЇ ІНТЕГРАЛЬНИХ МАКРОМОДЕЛЕЙ ЯВНОГО ВИДУ

А. А. Верлань<sup>1</sup>, Ю. Стертен<sup>1</sup>, С. А. Положаєнко<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Норвезький університет науки та технологій

<sup>2</sup> Одеський національний політехнічний університет

**Анотація.** Показано, що адекватним класом математичних моделей динамічних об'єктів є інтегральні макромоделі, побудовані за принципом «вхід — вихід». Досліджено можливість зниження похибки моделювання при застосуванні квадратурних формул реалізації інтегральних макромоделей у вигляді рівнянь Вольтери (зокрема Вольтери–Гамерштейна) та запропоновано конструктивні алгоритми числових процедур моделювання, які забезпечують обчислення у реальному масштабі часу.

**Ключові слова:** макромоделі, інтегральні рівняння, квадратурні формули, похибки моделювання, обчислювальний алгоритм, швидкодійні обчислювачі.

Получено: 27.01.2017



Верлань Андрей Анатольевич.  
Кандидат технических наук, с.н.с.  
Норвежский университет науки и технологий  
Teknologiveien 22, 2815 Йевик, Норвегия  
Тел. [+380-50-594-9441](tel:+380505949441)  
E-mail: [verlandr@gmail.com](mailto:verlandr@gmail.com)

**ORCID ID:** 0000-0002-6469-2638



Стертен Ю.  
Доцент, факультет технологии, экономики и менеджмента  
Норвежский университет науки и технологий  
Teknologiveien 22, 2815 Йевик, Норвегия  
Тел. [+47 61 13 5287](tel:+4761135287), E-mail: [jo.sterten@hig.no](mailto:jo.sterten@hig.no)

**ORCID ID:** 0000-0001-8207-8714



Положаєнко Сергей Анатольевич  
Доктор технических наук, профессор,  
заведующий кафедрой компьютеризированных систем управления  
Одесский национальный политехнический университет, пр-т Шевченко, 1, г. Одесса,  
Украина Тел. [+380-318-47-54](tel:+3803184754)  
E-mail: [sanp277@gmail.com](mailto:sanp277@gmail.com)

**ORCID ID:** 0000-0002-4082-8270