Досліджено замкнуті системи з дробовим порядком астатизму від 0,3 до 2. Знайдено параметри дробових пропорційно-інтегральних та інтегрально-диференційних регуляторів для забезпечення оптимальних динамічних та статичних характеристик

Ключові слова: астатична система, дробовий інтеграл, дробова похідна

Исследованы замкнутые системы с дробным порядком астатизма от 0,3 до 2. Найдены соотношения параметров дробных пропорционально-интегрирующих и интегрально-дифференцирующих регуляторов, обеспечивающих оптимальные динамические и статические характеристики систем

Ключевые слова: астатическая система, дробное интегрирование, дробное дифференцирование

The research of close-loop systems with fractional integral-differential regulators with order from 0,3 to 2 is carried out. The parameters of regulators for optimal dynamic and static control are defined

Keywords: astatic system, fractional integral, fractional differential

УДК 644.1+004,9:517.9

СИНТЕЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ С ДРОБНЫМИ ИНТЕГРАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩИМИ СВОЙСТВАМИ

В. В. Бушер
Кандидат технических наук, доцент
Кафедра электромеханических систем с компьютерным управлением
Одесский национальный политехнический университет
пр. Шевченко, 1, г. Одесса, Украина, 65044
Контактный тел.: 050-390-88-09
E-mail: victor.v.bousher@mail.ru

1. Введение, анализ литературных данных и постановка проблемы

Объекты управления во многих технологических процессах описываются системой уравнений для расчета сжимаемых течений вязкого теплопроводного газа [1], основанных на законах сохранения массы, импульса и полной энергии. В полном виде или с отброшенными в зависимости от задачи некоторыми членами такая система позволяет получать пространственные и временные характеристики искомых координат и описывать процессы диффузии, конвекции, переноса тепла и масс турбулентными и ламинарными потоками. Решение уравнений в пространственных задачах выполняется методами конечных элементов, объемов, пространственно-сеточными методами.

Однако при синтезе систем управления сигналы обратных связей по заданным координатам поступают от локальных датчиков, размещенных в определенной точке. Тогда по отношению к этому датчику задача приводится к одномерному случаю. При этом в уравнениях может быть выделена общая составляющая, представляющая собой второй закон Фика, являющийся универсальным законом для описания концентрации, температуры, распределения частиц, перемешивающихся газов, жидкостей:

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}=\chi\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}. \qquad (1)$$

Одним из способов решения уравнения (1) является метод расщепления (факторизации) [2], в соответствии с которым получаем следующее уравнение:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\chi\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)f(x,t)=$$
$$=\left(\sqrt{\frac{\partial}{\partial t}}-\sqrt{\chi}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\sqrt{\frac{\partial}{\partial t}}+\sqrt{\chi}\frac{\partial}{\partial x}\right)f(x,t)=0. \qquad (2)$$

Для определения, например, такого закона подвода тепла $Q(t)$ из локальной точки теплопроводящей среды, чтобы обеспечить требуемое изменение температуры $\theta(t)$ из (2), приходим к соотношению

$$Q(t)=T^{\mu}\sqrt{\frac{\partial}{\partial t}}\theta(t)=T^{\mu}D^{\mu}\theta(t), \qquad (3)$$

в котором правая часть является производной D^{μ} порядка $\mu=0{,}5$, T – формальная постоянная времени, зависящая от свойств среды и расстояния от источника тепла.

Полученное дифференциальное уравнение является линейным, что позволяет применить к нему преобразование Лапласа. Решая задачу поиска закона изменения температуры при работе источника тепла, в операторной форме получаем уравнение дробно-интегрирующего звена

$$\theta(p)=\frac{1}{T^{\mu}p^{\mu}}I^{\mu}Q(p). \qquad (4)$$

Определяя изменение температуры в исследуемой области по отношению к температуре окружающей среды, с учетом теплообмена по закону Ньютона получаем уравнение

$$\theta(p)\left(\frac{a}{\lambda}T^{\mu}p^{\mu}+1\right)=\frac{\lambda}{a}Q(p)+\theta_{ex}(p), \qquad (5)$$

где θ_{ex} – температура окружающей среды, a – коэффициент теплоотдачи, которое окончательно может быть охарактеризовано, как описание дробно-апериодического звена:

$$\theta(p)=\frac{\lambda/a}{\left(T^{\mu}p^{\mu}+1\right)}Q(p)+\frac{1}{\left(T^{\mu}p^{\mu}+1\right)}\theta_{ex}(p), \qquad (6)$$

С учетом теплоемкости источника, характеризуемой постоянной времени T_q, уравнение (6) может быть преобразовано в уравнение дробно-апериодического звена порядка $1+\mu$ следующего вида:

$$\theta(p)=\frac{\lambda/a}{\left(T_qT^{\mu}p^{1+\mu}+T^{\mu}p^{\mu}+1\right)}Q(p)+\frac{1}{\left(T^{\mu}p^{\mu}+1\right)}\theta_{ex}(p). \qquad (7)$$

Если в качестве источника тепла (или холода) выступает конденсирующийся или кипящий фреон во всем объеме внутренней полости конденсатора или испарителя, то капли жидкости и пузырьки газа превращают среду теплообмена в структуру, которую можно охарактеризовать как фрактальную. В такой среде наблюдаются эффекты аномальной суб- и супердиффузии [3], при описании которой порядок дифференциальных уравнений в общем случае отличается от $0{,}5$.

В иных процессах, например, в электрохимических системах, в которых из-за пористой структуры электродов имеет место нестационарная диффузия, сила тока зависит от дробной производной напряжения [4]. В суперконденсаторах, которые в настоящее время получают распространение из-за возможности быстрого заряда и разряда в системах рекуперации кинетической энергии электромобилей (KERS), накопление и отдача энергии описывается сочетанием интегрирующих и дробно-интегрирующих свойств [5], что отражает эквивалентная передаточная функция вида:

$$H(p)=\frac{U_C(p)}{I_C(p)}=R_C+\frac{1}{Cp}+\frac{1}{Bp^{\mu}}, \qquad (8)$$

где U_C, I_C – напряжение и ток суперконденсатора, $R_C,[Ohm]$; $C,[F]$ – внутреннее активное сопротивление и емкость суперконденсатора, $B,\left[s^{\mu}/Ohm\right]$ – коэффициент, обусловленный диффузией.

Таким образом, в ряде технологических процессов может быть выделен класс объектов с дробно-интегрирующими, дробно-дифференцирующими или дробно-апериодическими свойствами. Использование для таких объектов управления классических методов исследования может приводить к существенным ошибкам при идентификации параметров и, как следствие, к несоответствию динамических и статических показателей систем расчетным. Однако использование аппарата дробного интегро-дифференцирования до недавнего времени было ограничено из-за низкого быстродействия и недостаточных объемов оперативной памяти микропроцессоров, так как даже в некоторых частных случаях решения дробных интегрально-дифференциальных уравнений описывается функциями Миттаг-Леффлера, Работнова-Хартли, являющимися бесконечными рядами [6]. Поэтому использовались упрощенные приближенные модели в виде рекуррентных ИНС или аналоговых четырехполюсников [4].

2. Цель и задачи исследования

Развитие микропроцессорной техники позволяет сейчас в полной мере использовать возможности дробного интегрирования и дифференцирования для синтеза систем с заданными показателями качества.

Целью исследования является синтез регуляторов в системах управления технологическими процессами с дробными интегрально-дифференцирующими свойствами для обеспечения оптимальных динамических и статических показателей.

3. Материалы исследования

Проведем исследование замкнутых систем с заданным дробным порядком астатизма μ, разомкнутый контур которых описывается передаточной функцией

$$H^{\mu}_{ОПТ}(p)=\frac{1}{aT_v^{\mu}p^{\mu}}\cdot\frac{1}{T_vp+1},\ 0<\mu\le 1, \qquad (9)$$

где a – параметр настройки, T_v – некомпенсируемая малая постоянная времени объекта управления.

Передаточной функции (9) соответствуют логарифмические частотные характеристики, вычисляемые по формулам:

$$L=-20\lg\left(aT_v^{\mu}\Omega^{\mu}\right)-20\lg\sqrt{T_v^2\Omega^2+1}, \qquad (10)$$

$$\varphi=-\mu\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}\left(T_v\Omega\right). \qquad (11)$$

Сравнение ЛАЧХ и ЛФЧХ разомкнутого контура с дробным порядком астатизма и систем с настройкой на модульный (МО) или симметричный оптимум (СО) при одинаковых частотах среза показывает, что запас устойчивости по фазе при уменьшении μ возрастает на величину $(1-\mu)\frac{\pi}{2}$. Это дает возможность улучшить динамические показатели системы.

При различных значениях μ и $\Delta\varphi$ можно определить соотношение частоты среза и некомпенсируемой постоянной времени $T_v\Omega_c$:

$$T_v\Omega_c=\mathrm{tg}\left(\pi-\Delta\varphi-\mu\frac{\pi}{2}\right) \qquad (12)$$

и из (10) получить соответствующее значение a:

$$a = \frac{1}{(T_v\Omega_c)^{\mu}}\sqrt{\frac{1}{(T_v\Omega_c)^2+1}} = \\ = \frac{1}{\left(tg\left(\pi-\Delta\varphi-\mu\frac{\pi}{2}\right)\right)^{\mu}}\sqrt{\frac{1}{\left(tg\left(\pi-\Delta\varphi-\mu\frac{\pi}{2}\right)\right)^2+1}}. \quad (13)$$

На рис. 1 показаны графики зависимостей $a = f(\Delta\varphi,\mu)$ и отмечена точка, соответствующая настройке на МО.

Учет малой некомпенсируемой постоянной времени T_v крайне осложняет аналитические исследования в общем виде, поэтому переходные функции получены численными методами. В частности, на рис. 2 приведено семейство графиков переходных функций при $\Delta\varphi = 65{,}5°$.

Видно, что системы с $\mu \geq 0{,}4$ и рассчитанным по формуле (13) a характеризуются перерегулированием, не превышающим перерегулирование в системе с $\mu = 1$, но их быстродействие повышается за счет увеличения частоты среза.

Анализ переходных процессов позволил построить номограммы для выбора значения a по заданным значениям порядка астатизма $0{,}3 \leq \mu \leq 1$, перерегулирования δ или времени достижения первого максимума t_{max} (характеризующего быстродействие системы) (рис. 3). Также выявлены полезные эмпирические зависимости, по которым можно приближенно рассчитать значение a в зависимости от μ, δ и t_{max}:

$$\lg a \approx 1{,}958\mu - 1{,}584 + \\ +(-20{,}191\mu^2 + 34{,}744\mu - 17{,}118)\delta, \quad (14)$$

$$a \approx (-0{,}2\mu + 0{,}3)\left(\frac{t_{max}}{T_v}\right)^{\mu}. \quad (15)$$

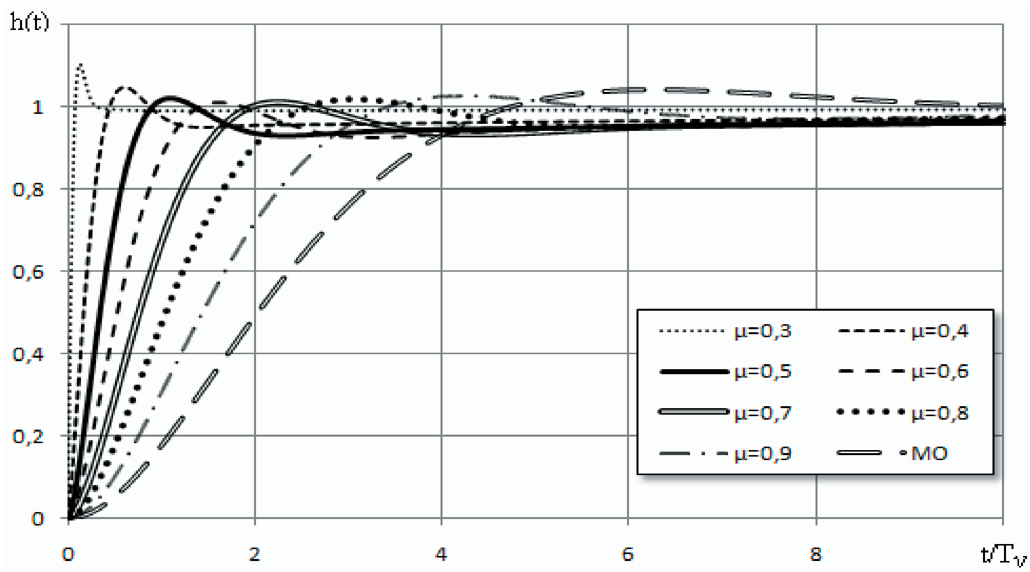

Рис. 2. Графики переходных функций при $\mu \leq 1$, $\Delta\varphi = 65{,}5°$

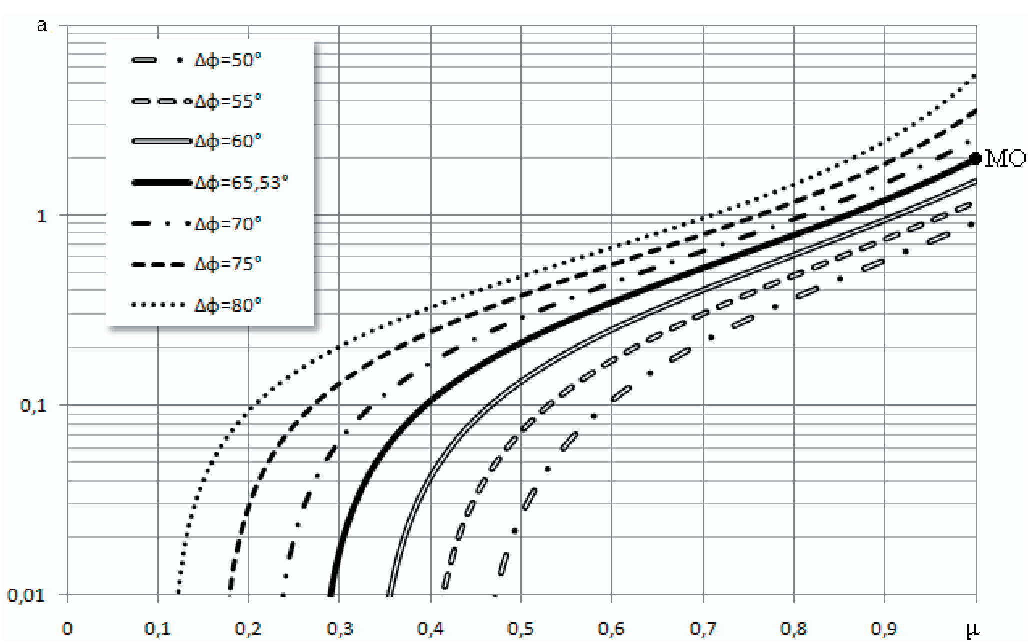

Рис. 1. Зависимости $a = f(\Delta\varphi,\mu)$

Так как система с $\mu < 1$ характеризуется отсутствием позиционной ошибки, постоянной ошибкой при подаче на вход «выпуклого» сигнала вида $t^{\mu}(\mu < 1)$, но возрастающей скоростной ошибкой, то для повышения порядка астатизма включим в состав системы пропорционально-интегрирующее (ПИ) звено и представим передаточную функцию разомкнутого контура в виде:

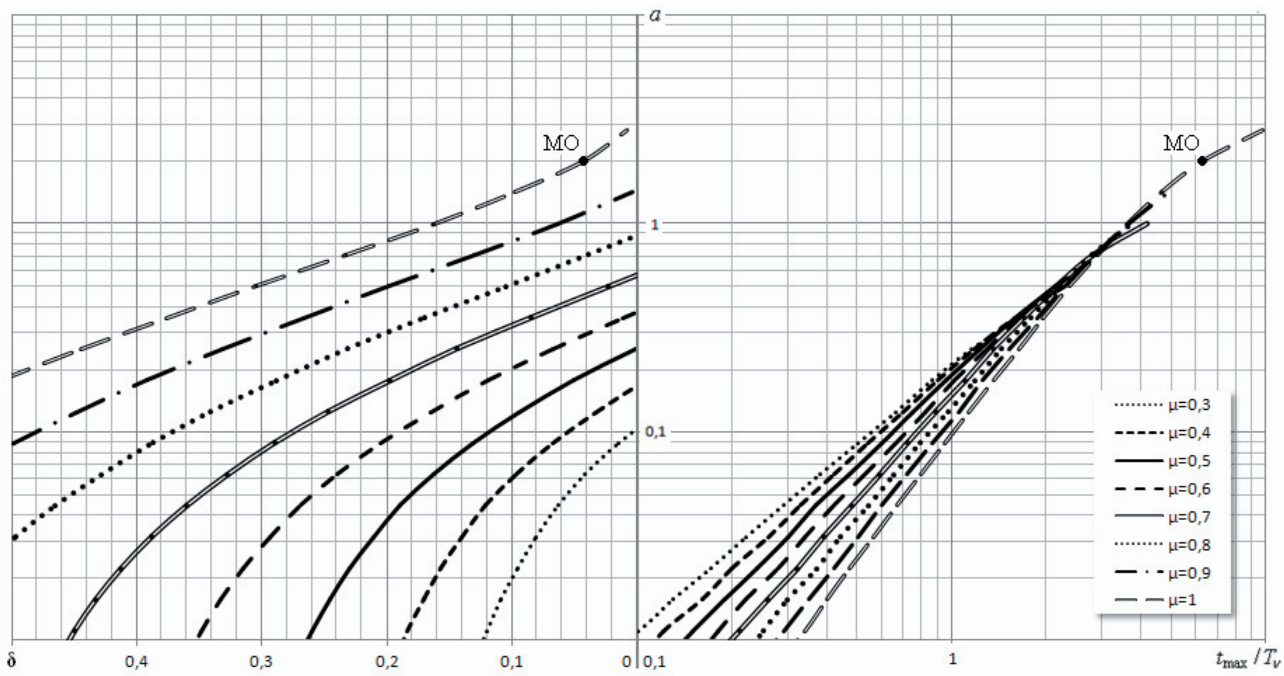

Рис. 3. Зависимости $a=f(\mu,\delta)$ и $a=f(\mu,t_{max})$

$$H_{\text{ОПТ}}^{1+\mu}(p)=\left(1+\frac{1}{bT_v p}\right)\frac{1}{aT_v^{\mu-1}p^{\mu-1}}\cdot\frac{1}{T_v p+1}=$$
$$=\frac{bT_v p+1}{baT_v^{\mu}p^{\mu}}\cdot\frac{1}{T_v p+1},\ 1<\mu<2,\ b>1, \qquad (16)$$

где b – параметр ПИ-звена.

У такой системы позиционная и скоростная статическая ошибки отсутствуют. Постоянная по величине ошибка возникает лишь при подаче на вход «вогнутого» сигнала вида t^{μ} при $\mu>1$.

Амплитудно-частотные характеристики системы с передаточной функцией (16) рассчитываются по выражениям:

$$L=-20\lg\left(baT_v^{\mu}\Omega^{\mu}\right)+20\lg\sqrt{b^2T_v^2\Omega^2+1}-20\lg\sqrt{T_v^2\Omega^2+1}, \qquad (17)$$

$$\varphi=-\mu\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\left(T_v\Omega\right)+$$
$$+\operatorname{arctg}\left(bT_v\Omega\right)=-\mu\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\frac{\left(bT_v\Omega-T_v\Omega\right)}{1+bT_v^2\Omega^2}. \qquad (18)$$

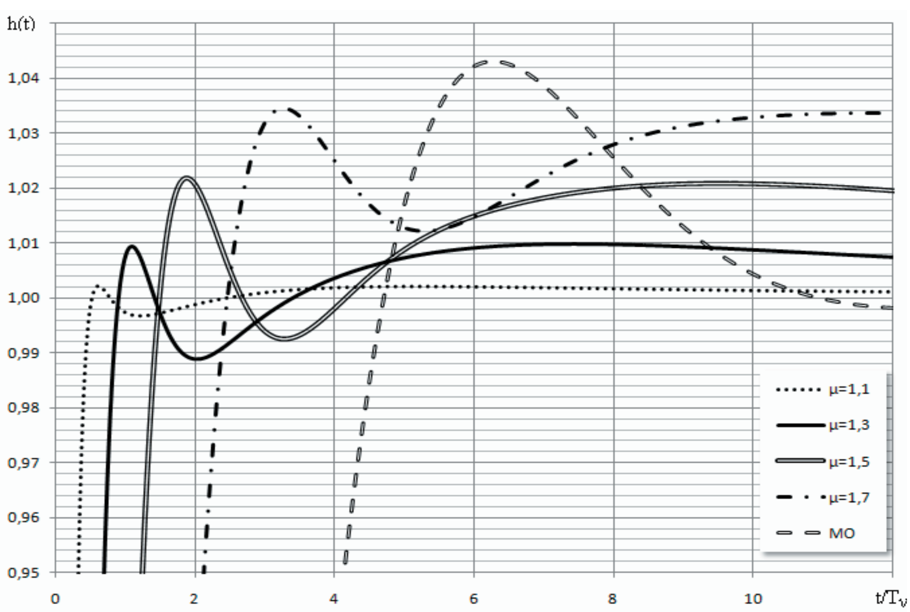

Рис. 4. Переходные характеристики при оптимальном соотношении μ, a, b

Функция (18) при $T_v\Omega=\frac{1}{\sqrt{b}}$ характеризуется экстремумом

$$\varphi_{max}=-\mu\frac{\pi}{2}-$$
$$-\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)+\operatorname{arctg}\left(\sqrt{b}\right). \qquad (19)$$

Для получения частоты среза $T_v\Omega_{L=0}=\frac{1}{\sqrt{b}}$ необходимо выбрать

$$a=\sqrt{b^{\mu-1}}. \qquad (20)$$

Но эта точка лишь для $\mu=2$ является оптимальной.

Анализ показывает, что переходная функция системы (16), представляющая собой свертку функции Работнова-Хартли и затухающих гармонических колебаний [6], характеризуется несколькими максимумами. И для каждого μ существует некоторое соотношение a и b, при котором первый максимум равен второму, быстродействие максимальное, а перерегулирование достигает минимума.

На рис. 4 показано семейство некоторых переходных функций, соответствующих такому условию в увеличенном по оси ординат масштабе, сопоставленных с настройкой на МО.

В табл. 1 приведено несколько сочетаний значений μ, a, b, удовлетворяющих этому условию, и соответствующие значения $\delta, t_{max1}, t_{max2}$, что позволяет выбрать необходимые параметры системы.

Приближенно для произвольного $1{,}1 \le \mu \le 1{,}9$ значения a и b могут быть вычислены по эмпирическим формулам:

$$a \approx -0{,}0384 - \frac{0{,}33026}{\ln(\mu)} - \frac{0{,}01351}{\ln(\mu)^2}, \quad b = 12{,}5a. \tag{21}$$

Показатели переходной характеристики также определяются по приближенным зависимостям:

$$t_{max1} \approx 0{,}368\mu^{4,3}, \tag{22}$$

$$t_{max2} \approx 11{,}2\mu - 7{,}2, \tag{23}$$

$$\delta \approx 0{,}0262\mu^2 - 0{,}0191\mu - 0{,}092. \tag{24}$$

Из (22) – (24) легко могут быть получены обратные зависимости и по требуемым показателям переходного процесса найдено необходимое значение μ и далее по (21) определены a и b.

Для обеспечения выбранных настроек регулятор, включенный последовательно с объектом управления, должен иметь передаточную функцию, определяемую из соотношения

$$H_{РЕГ}(p) = \frac{H_{ОПТ}(p)}{H_{ОУ}(p)}, \tag{25}$$

и в его состав могут входить как дробные интегрирующие звенья, так и дробные дифференцирующие звенья.

Передаточные функции регуляторов для некоторых типовых объектов управления при настройках контура с различным порядком астатизма приведены в табл. 2.

Видно, что в состав регуляторов могут входить как дробные интегрирующие звенья, так и дробные дифференцирующие звенья. Очевидно также, что предложенные методы синтеза замкнутого контура могут быть применены для объектов управления как с дробным, так и целочисленным порядком дифференциальных уравнений.

Для реализации вычислений дробных интегральных составляющих сигнала регулятора в микропроцессорной системе с периодом квантования

Таблица 1

Оптимальные соотношения параметров настройки

μ	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
a	0,113	0,160	0,223	0,302	0,410	0,565	0,790	1,160	1,880
b	1,413	2,000	2,788	3,775	5,125	7,063	9,875	14,500	23,500
δ	0,002	0,005	0,011	0,016	0,022	0,027	0,034	0,041	0,049
t_{max1}/T_ν	0,64	0,83	1,11	1,45	1,89	2,48	3,28	4,58	7,61
t_{max2}/T_ν	5,15	6,26	7,44	8,45	9,53	10,72	11,72	12,84	14,30

Таблица 2

Передаточные функции регуляторов

$H_{оу}(p)$	$H_{РЕГ}(p), 0 < \mu \le 1$	$H_{РЕГ}(p), 1 < \mu \le 2$
$\frac{k_{оу}}{T_{оу}p^{\mu_{оу}}}$	$\frac{1}{aT_\nu^\mu}\frac{1}{k_{оу}}\frac{T_{оу}}{p^{\mu-\mu_{оу}}}$	$\frac{1}{aT_\nu^{\mu-1}}\left(1+\frac{1}{bT_\nu p}\right)\frac{1}{k_{оу}}\frac{T_{оу}}{p^{\mu-1-\mu_{оу}}}$
$k_{оу}\left(1+\frac{1}{T_{оу}p^{\mu_{оу}}}\right)$	$\frac{1}{aT_\nu^\mu}\frac{1}{k_{оу}p^{\mu-\mu_{оу}}}\left(\frac{T_{оу}p^{\mu_{оу}}}{T_{оу}p^{\mu_{оу}}p^{\mu_{оу}}+1}\right)$	$\frac{1}{aT_\nu^{\mu-1}}\left(1+\frac{1}{bT_\nu p}\right)\frac{1}{k_{оу}p^{\mu-1-\mu_{оу}}}\left(\frac{T_{оу}p^{\mu_{оу}}}{T_{оу}p^{\mu_{оу}}+1}\right)$
$\frac{k_{оу}}{T_{оу}p^{\mu_{оу}}+1}$	$\frac{1}{aT_\nu^\mu}\frac{1}{k_{оу}}\left(\frac{T_{оу}}{p^{\mu-\mu_{оу}}}+\frac{1}{p^\mu}\right)$	$\frac{1}{aT_\nu^{\mu-1}}\left(1+\frac{1}{bT_\nu p}\right)\frac{1}{k_{оу}}\left(\frac{T_{оу}}{p^{\mu-1-\mu_{оу}}}+\frac{1}{p^{\mu-1}}\right)$

Δt целесообразно использовать модифицированную дискретную форму Римана-Лиувилля [7],

$$I^{\mu} f_i = \sum_{j=1}^{i} f_{i-j+1} k_j^{\mu}, \tag{26}$$

где k_j^{μ} – постоянные коэффициенты, вычисляемые по формуле

$$k_j^{\mu} = \frac{\Delta t^{\mu} \left(j^{\mu+1} - (j-1)^{\mu+1} \right)}{\Gamma(2+\mu)} - \sum_{n=1}^{j-1} k_n^{\mu}. \tag{27}$$

Так как количество слагаемых в реальных системах ограничено объемом запоминающего устройства микропроцессора, то в системе с $\mu < 1$ возникает дополнительная статическая ошибка. При $\mu > 1$ ПИ-звено $1 + \frac{1}{bT_v p}$ компенсирует эту ошибку. Поэтому выбор систем с $\mu > 1$ является предпочтительным.

Сигнал дробных дифференцирующих звеньев может вычисляться также с применением формулы (26) на основании зависимости

$$D^{\mu} f_i = \frac{d}{dt} I^{1-\mu} f_i = \frac{I^{1-\mu} f_i - I^{1-\mu} f_{i-1}}{\Delta t}. \tag{28}$$

4. Выводы

Таким образом, на основании анализа частотных характеристик и переходных процессов систем с дробным порядком астатизма предложены методы синтеза регуляторов как для систем с $\mu < 1$, так и для систем с $1 < \mu < 2$. Регуляторы, передаточные функции которых определяются по таблице или в общем случае по , а параметры выбраны в соответствии с предложенными номограммами и расчетными зависимостями, обеспечивают ограничение перерегулирования на заданном уровне и быстродействие выше, чем у систем с целочисленным порядком астатизма.

Литература

1. Бураго, Н.Г. Вычислительная механика / Н.Г. Бураго. – М, 2005. – 247 с.
2. Учайкин, В.В. Дробно-дифференциальная модель динамической памяти / В.В. Учайкин // Математика и механика. – 2001. – 14 с.
3. Uchaikin, V.V. Anomalous Diffusion and Fractional Stable Distributions / V.V. Uchaikin // Journal of Experimental and Theoretical Physics. – 2003, No. 4. – p.810-825.
4. Гильмутдинов, А.Х. Дробные операторы: критерии синтеза и реализация / А.Ч. Гильмутдинов, П.А. Ушаков, М.М. Гильметдинов // Нелинейный мир. – 2008, №8. – С.452–463.
5. Бушер, В.В. Энергетические показатели и параметры суперконденсаторов в динамических режимах / Бушер В.В., Мартынюк В.В., Найденко Е.В. // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – Хмельницький, 2012 – №1. – С.44-50.
6. Shantanu, D. Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls. / Shantanu Das // Springer-Verlag Berlin Heidelberg. – 2008. – 240 p.
7. Busher, V. Modeling of supercapacitors with fractionally integrated section in SIMULINK. / V.V. Busher // Ел.-техн. та комп. системи. – К.: Техніка. №04(80). – 2011. – С.89–92.