

*Запропоновано метод визначення параметрів узагальнених гребенчатих масштабних функцій для підкреслення границь області структурної текстури на зображенні з однорідним фоном. Цей метод дозволив підвищити ступінь автоматизації вирішення задачі визначення границь області структурної текстури на зображенні, необхідних для досягнення мети геометричних розмірів*

*Ключові слова: гребінчастий фільтр, структурна текстура, узагальнена функція, масштабна функція*

*Предложен метод определения параметров обобщенных гребенчатых масштабных функций для подчеркивания границ области структурной текстуры на изображении с однородным фоном. Этот метод позволил повысить степень автоматизации решения задачи определения границ области структурной текстуры на изображении, необходимых для достижения цели геометрических размеров*

*Ключевые слова: гребенчатый фильтр, структурная текстура, обобщенная функция, масштабная функция*

УДК 681.3.01:519.67

# МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ОБОБЩЕННЫХ ГРЕБЕНЧАТЫХ МАСШТАБНЫХ ФУНКЦИЙ

**М. В. Полякова**

Кандидат технических наук, доцент\*

E-mail: marina\_polyakova@rambler.ru

**А. В. Ищенко**

Ассистент\*

\*Кафедра прикладной математики и информационных технологий

Одесский национальный политехнический университет  
пр. Шевченко, 1, г. Одесса, Украина, 65044

E-mail: alesia.ishchenko@gmail.com

## 1. Введение

На современном этапе в таких задачах как обработка медицинских и радиолокационных изображений, контекстный поиск в базах данных, мониторинг развития транспортных потоков и роста сельскохозяйственных угодий по аэрофотоснимкам и спутниковым изображениям применяются методы сегментации структурных текстур. Структурная текстура представляет совокупность регулярно или почти регулярно расположенных в пространстве непронизводимых элементов, под которыми понимаются связанные множества пикселей, характеризующие некоторой совокупностью признаков [1]. В результате сегментации структурных текстур проводится разбиение изображений на однородные области, различающиеся типом или пространственной организацией непронизводимых элементов текстуры. Кроме того, для ряда прикладных задач требуется определить на изображении границы объектов, заполненных структурной текстурой.

## 2. Литературный обзор

Периодическая или квазипериодическая пространственная организация непронизводимых элементов для структурной текстуры приводит к возникновению линий на спектре соответствующего изображения. Для выделения этих линий и анализа спектрального состава изображений структурной текстуры применяются методы последовательного параллельного анализа. К

методам последовательного анализа спектрального состава изображений структурной текстуры относятся оконное преобразование Фурье [2] и вейвлет-преобразование (ВП), в частности, преобразование Габора [3, 4]. Эти методы отличаются большими вычислительными затратами, т. к. требуют многократного выполнения свертки изображения с импульсными характеристиками фильтров преобразования.

Для того, чтобы снизить объем вычислительных затрат при сегментации изображений структурных текстур применяются методы параллельного анализа спектрального состава изображений структурной текстуры, например, гребенчатые фильтры [5].

**Определение 1.** Гребенчатый фильтр — это селективная система, передаточная функция (ПФ) которой является в идеальном случае периодической функцией частоты при узких полосах пропускания или задерживания («зубьях») [6]. Под ПФ в данной работе понимается результат преобразования Фурье импульсной характеристики системы.

Идеальные гребенчатые фильтры приближенно или точно сохраняют периодичность ПФ в ограниченном диапазоне частот. Согласно определению 1 полоса пропускания гребенчатого фильтра фактически представляет объединение полос пропускания набора полосовых фильтров. В результате такой фильтрации выполняется обработка изображения на единственном масштабе. Поэтому вычислительные затраты у этого преобразования низкие. Однако гребенчатый фильтр настраивается на конкретный размер области структурной текстуры, что является недостатком при сегментации изображений.

### 3. Постановка проблемы

Для совмещения достоинств последовательного и параллельного подходов для подчеркивания границ области структурной текстуры в работе [7] предлагается использовать параллельный анализ спектрального состава изображений структурной текстуры чтобы сократить вычислительные затраты и при этом применять вейвлет-анализ для выделения объектов заданного размера. В результате было разработано преобразование с обобщенными гребенчатыми масштабными функциями, в качестве анализирующих функций которого используются импульсные характеристики гребенчатых фильтров с разной пространственно-частотной локализацией. Поэтому разработанное преобразование отличается высоким качеством выделения границ области структурной текстуры на изображении с однородным фоном и относительно низкими вычислительными затратами. Однако для преобразования с обобщенными гребенчатыми масштабными функциями не решена задача определения параметров анализирующих функций для настройки их на конкретный вид структурной текстуры.

### 4. Метод определения параметров масштабных функций

Целью работы является разработка метода определения параметров обобщенных гребенчатых масштабных функций для подчеркивания границ области структурной текстуры на изображении с однородным фоном.

При создании преобразований изображения области структурной текстуры предполагалось, что оно содержит детали на двух масштабах: на одном масштабе - непосредственно текстурную область, на другом - производные элементы, составляющие эту область. Если в качестве производного элемента текстуры для строки или столбца изображения выступает прямоугольный импульс, то области структурной текстуры в строке или столбце изображения соответствует периодическая последовательность прямоугольных импульсов. Поэтому построение анализирующих функций преобразования для выделения области структурной текстуры на изображении с однородным фоном осуществлялось на основе решений двумасштабного разностного уравнения на решетке [8]

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^N c_n \varphi(kx - n), \quad (1)$$

где  $n, k \in \mathbb{Z}, k \geq 2, x \in \mathbb{R}, c_n \in \mathbb{C}, n, k, c_n$  - параметры этого уравнения,  $N$  - количество слагаемых в уравнении (1),  $\varphi(x)$  - неизвестная функция.

С использованием обозначения  $\Delta = \frac{1}{k} \sum_{n=0}^N c_n$  автором введено следующее определение.

**Определение 2.** Обобщенной гребенчатой масштабной функцией назовем решение уравнения (1), для которого  $\Delta = 1$ .

В определение введено слово «обобщенная», т. к. известно, что уравнение (1) с  $\Delta = 1$  всегда имеет ре-

шение в классе обобщенных функций с компактным носителем, которое в отдельных случаях может представлять собой и интегрируемую функцию.

Присутствие в определении 2 слова «гребенчатая» связано с отличительной особенностью решения уравнения (1) при  $\Delta = 1$ : в частотной области приближения этого решения обладают периодической ПФ, характерной для гребенчатого фильтра. Функция из определения 2 названа масштабной, т. к. решения уравнения (1) с  $\Delta = 1$ , представляющие интегрируемые функции, используются в литературе для определения масштабных функций вейвлет-анализа.

Вычисление значений функции  $\varphi(x)$ , представляющей решение двумасштабного разностного уравнения (1), выполнялось итерационно с помощью метода последовательных приближений. Согласно этому методу решение уравнения (1) представляет собой фиксированную точку  $\varphi(x) = G\varphi(x)$   $\varphi(x) = G\varphi(x)$  линейного оператора  $G\varphi(x) = \sum_{n=0}^N c_n \varphi(kx - n)$ .

Ее получают в результате применения итеративной схемы  $\varphi_j(x) = G\varphi_{j-1}(x), j = 1, 2, \dots$ ; к начальному приближению  $\varphi_0(x)$ .

В результате исследования поведения обобщенных гребенчатых масштабных функций в частотной области показано, что ПФ приближений этих функций  $\varphi_j(x), j = 1, 2, \dots$ , представляют собой тригонометрические полиномы, и, следовательно, являются ПФ гребенчатых фильтров. Последнее соответствует требованию к анализирующим функциям преобразования для задачи сегментации изображений структурных текстур.

С учетом поведения обобщенных гребенчатых масштабных функций в частотной области разработано преобразование с этими функциями, предназначенные для подчеркивания границ области структурной текстуры на изображении с однородным фоном. В качестве анализирующих функций этого преобразования предложено использовать функции  $\varphi_j(x), j = 1, 2, \dots$ , являющиеся последовательными приближениями обобщенной гребенчатой масштабной функции. Однако параметром этих преобразований выбран не масштаб вейвлета, а индекс  $j$  функций  $\varphi_j(x)$ , т. к. в частотной области при возрастании  $j$  увеличивается и число основных гармоник у ПФ этих функций, а ширина боковых лепестков на графике модуля этой характеристики убывает.

Тогда изменение  $j$  позволяет настроить преобразования на конкретный тип текстуры, идентифицируемый определенными значениями протяженности импульса, соответствующего производному элементу структурной текстуры, и периода следования импульсов, характеризующего расстояние между производными элементами текстуры.

Тогда для функции  $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$  результат преобразования с обобщенными гребенчатыми масштабными функциями определялся формулой

$$T_\varphi(j, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi_j(x - b) dx,$$

где  $b$  - параметр преобразования, определяющий сдвиг аргумента анализирующей функции. Это преобразование является дискретным по параметру  $j$  и непрерывным по параметру  $b$ .

Построение обобщенной гребенчатой масштабной функции основано на решении двумасштабного разностного уравнения (1), вид которого определяется его коэффициентами.

Поэтому решение уравнения (1) также зависит от количества итераций приближения. Следовательно, для подчеркивания границ области структурной текстуры на изображении с однородным фоном целесообразной является разработка метода определения параметров обобщенных гребенчатых масштабных функций для настройки их на конкретный вид структурной текстуры.

#### 4.1. Этапы определения параметров масштабной функции

Предлагаемый метод определения параметров обобщенной гребенчатой масштабной функции для подчеркивания границ области структурной текстуры на изображении с однородным фоном включает 2 этапа.

На 1-м этапе строится базовая функция, т. е. функция, график которой определяет вид обобщенной гребенчатой масштабной функции, предназначенной для подчеркивания границ области структурной текстуры с известными параметрами этой текстуры.

На 2-м этапе метода на основе значений базовой функции выполняется определение параметров обобщенной гребенчатой масштабной функции. Эта задача сводится к вычислению коэффициентов уравнения (1), при условии, что известно его решение, и представляет собой задачу, обратную непосредственно решению уравнения (1).

Рассмотрим оба этапа разрабатываемого метода подробнее.

При построении базовой функции заметим, что для обнаружения границ области структурной текстуры на изображении с однородным фоном в ряде работ используется совместная оценка параметров и обнаружение пачки импульсов с помощью согласованной фильтрации.

Преимущество этого подхода заключается в высокой помехоустойчивости подчеркивания границ области структурной текстуры. Недостатком является низкое быстродействие и высокая погрешность определения координат для точек границ области такой текстуры, обусловленная шириной пика корреляционной функции от импульсной характеристики согласованного фильтра (СФ) и фрагмента изображения.

Для преодоления подобных недостатков, во-первых, предлагается строить СФ в пространстве преобразования Гильберта, что позволяет уменьшить протяженность импульсов пачки и, следовательно, снизить ширину пика корреляционной функции. Во-вторых, для снижения погрешности определения координат для точек границ области структурной текстуры предлагается выполнять свертку исходного изображения с последовательностью импульсов, для которой значения интенсивности убывают на границах области определения. Тогда 1-й этап метода оценивания параметров для обобщенной гребенчатой масштабной функции содержит следующие подэтапы.

1. Определение размера и периода следования производных элементов структурной текстуры. Для

этого с помощью одного из известных из литературы методов [9] для строк и столбцов изображения вычислялись период следования  $T_n^0$  и протяженность  $\tau_n^0$  импульсов, соответствующих производным элементам структурной текстуры.

2. Генерация последовательности прямоугольных импульсов, для которой период следования импульсов равен  $T_n^0$ , а протяженность каждого импульса -  $\tau_n^0$ .

3. Вычисление преобразования Гильберта полученной последовательности импульсов. При выполнении этого преобразования протяженность носителя импульсной характеристики фильтра преобразования не должна превышать  $\tau_n^0$  (протяженность импульса последовательности). Тогда на границах каждого из прямоугольных импульсов исходной последовательности получаем импульсы формы близкой к треугольной форме, но с амплитудами разных знаков.

4. Умножение результата преобразования Гильберта, полученного на предыдущем этапе метода, на функцию  $q(x) = \begin{cases} 1/|x|^\alpha, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$  Результирующую функцию обозначим  $\phi_b(x)$ ,  $\phi_b(x) = p(x)q(x)$ .

Покажем, что построенная таким образом базовая функция  $\phi_b(x)$  обнаруживает границы области структурной текстуры на изображении с однородным фоном. Рассмотрим результат свертки базовой функции  $\phi_b(x)$  с последовательностью прямоугольных импульсов  $e(x)$ , характеризующейся протяженностью импульсов  $\tau_n^0$  и периодом следования импульсов  $T_n^0$ . Если  $\phi_b(x)$  попадает на границу последовательности импульсов, то получаем всплеск значений функции на этой границе. Однако за счет множителя

$q(x) = \begin{cases} 1/|x|^\alpha, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$  базовой функции этот всплеск более узкий, чем при согласованной фильтрации.

Если базовая функция при свертке с последовательностью прямоугольных импульсов попадает на середину пачки импульсов, то импульсы  $\phi_b(x)$ , умноженные на импульсы  $e(x)$ , взаимно погашают друг друга, так как функция  $\phi_b(x)$  - четная. В результате обнаруживаем на изображении с однородным фоном границы области структурной текстуры.

На 2-м этапе метода оценивания параметров обобщенных гребенчатых масштабных функций в данном пункте использовалось известное из литературы векторное представление уравнения (1) [10]. Сформулируем это представление.

Предположим, что коэффициенты уравнения (1) - это действительные или комплексные постоянные  $\{c_n\}_{n=0}^N$  такие, что  $c_0 c_N \neq 0$  и  $N \geq 1$ .

Для  $x = 0$  и  $x = N$  уравнение (1) принимает вид:

$$\phi(0) = c_0 \phi(0) \text{ и } \phi(N) = c_N \phi(2N).$$

Пусть  $c_0 \neq 1$  и  $c_N \neq 1$ . Тогда функция  $\phi(x)$  удовлетворяет равенству  $\phi(0) = \phi(N) = 0$ .

Для решения уравнения (1) - функции  $\phi(x)$  - определим вектор  $\phi(x) = (\phi(x), \phi(x+1), \dots, \phi(x+N-1))^T$ . Так как  $\text{supp } \phi(x) \subseteq [0, N]$ , то далее учитываются значения компонент вектора  $\phi(x)$  только при  $0 \leq x \leq 1$ .

По аналогии с работами [10], введем также матрицы  $A_0 = \|c_{2j-k+1}\|_{j,k=0}^{N-1}$  и  $A_1 = \|c_{2j-k+1}\|_{j,k=0}^{N-1}$ , где  $c_j = 0$  при  $j < 0$  и  $j > N$  соответственно. Тогда

$$A_0 = \begin{pmatrix} c_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_2 & c_1 & c_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & c_{N-1} & c_{N-2} & c_{N-3} \\ 0 & \dots & 0 & c_N & c_{N-1} \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} c_1 & c_0 & 0 & \dots & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & c_N & c_{N-1} & c_{N-2} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & c_N \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Например, в случае  $N=7$  матрицы  $A_0, A_1$  имеют вид

$$A_0 = \begin{pmatrix} c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_1 & c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_4 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & 0 & 0 \\ c_6 & c_5 & c_4 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 \\ 0 & c_7 & c_6 & c_5 & c_4 & c_3 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & c_7 & c_6 & c_5 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_7 & c_6 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} c_1 & c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & 0 & 0 & 0 \\ c_5 & c_4 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & 0 \\ c_7 & c_6 & c_5 & c_4 & c_3 & c_2 & c_1 \\ 0 & 0 & c_7 & c_6 & c_5 & c_4 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_7 & c_6 & c_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_7 \end{pmatrix}.$$

Обе матрицы,  $A_0$  и  $A_1$ , содержат подматрицу  $M = \|c_{2j-k+1}\|_{j,k=0}^{N-2}$ .  
С учетом формулы (2), уравнение (1) представляется в векторной форме:

$$\varphi(x) = A_0\varphi(2x), \varphi\left(x + \frac{1}{2}\right) = A_1\varphi(2x), \quad (3)$$

для  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$  [25, 26]. Из (3) следует, что

$$\varphi(0) = A_0\varphi(0), \varphi(1) = A_1\varphi(1). \quad (4)$$

Если ввести обозначение

$$\tilde{\varphi}(x) = (\varphi(x), \varphi(x+1), \dots, \varphi(x+N-2))^T,$$

то уравнения (4) записываются в виде единственного уравнения  $\tilde{\varphi}(1) = M\tilde{\varphi}(1)$ .

Предположим, что  $\tilde{\varphi}(1) \neq 0$ , то есть  $\tilde{\varphi}(1)$  - ненулевой вектор. Тогда  $\tilde{\varphi}(1)$  представляет собой собственный вектор матрицы  $M$ , соответствующий собственному значению 1 [10]. Единица также является собственным значением матриц  $A_0$  и  $A_1$  [10].

Для того чтобы по значениям решения двумасштабного разностного уравнения (1) - функции  $\varphi(x)$  - определить значения коэффициентов  $\{c_n\}_{n=0}^N$  этого уравнения, заметим, что из формулы (3) имеем системы линейных уравнений, позволяющих вычислить значения  $\varphi(x)$  в диадических рациональных точках:

$$M\tilde{\varphi}(1) = \tilde{\varphi}(1), A_0\varphi(1) = \varphi\left(\frac{1}{2}\right), A_0\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \varphi\left(\frac{1}{4}\right),$$

$$A_1\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \varphi\left(\frac{3}{4}\right), \dots, A_1\varphi\left(\frac{2^{k_{\max}}-1}{2^{k_{\max}}}\right) = \varphi\left(\frac{2^{k_{\max}}-1}{2^{k_{\max}}}\right). \quad (5)$$

В этих формулах матрицы  $A_0$  и  $A_1$  содержат  $\{c_n\}_{n=0}^N$  как известные коэффициенты для получения неизвестных  $\tilde{\varphi}(1), \varphi\left(\frac{1}{2}\right), \varphi\left(\frac{1}{4}\right), \dots, \varphi\left(\frac{2^{k_{\max}}-1}{2^{k_{\max}}}\right)$ .

При решении обратной задачи воспользуемся теми же системами уравнений, однако неизвестные переменные теперь -  $\{c_n\}_{n=0}^N$ , а значения функции  $\varphi(x)$  формируют новые матрицы систем уравнений (5). Например, в (5) 1-я система уравнений  $M\tilde{\varphi}(1) = \tilde{\varphi}(1)$  имеет вид:

$$\begin{cases} c_1\varphi(1) + c_0\varphi(2) = \varphi(1), \\ c_2\varphi(1) + c_1\varphi(2) + c_0\varphi(3) = \varphi(2), \\ \dots \\ c_N\varphi(N-2) + c_{N-1}\varphi(N-1) = \varphi(N-1). \end{cases}$$

Выполнив перестановку слагаемых в этих уравнениях, а именно, упорядочив их по возрастанию индекса у неизвестных переменных  $\{c_n\}_{n=0}^N$ , получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} c_0\varphi(2) + c_1\varphi(1) = \varphi(1), \\ c_0\varphi(3) + c_1\varphi(2) + c_2\varphi(1) = \varphi(2), \\ \dots \\ c_{N-1}\varphi(N-1) + c_N\varphi(N-2) = \varphi(N-1). \end{cases} \quad (6)$$

Сформируем матрицу  $M_0 = \|\varphi(2j-k+1)\|_{j,k=1}^{N-1, N+1}$  и вектор  $c = (c_0, \dots, c_N)$ , с учетом которых система (6) принимает вид  $M_0c = \tilde{\varphi}(1)$ . Аналогично преобразуются остальные системы уравнений в формуле (5).

Так, для системы уравнений  $A_0\varphi(1) = \varphi\left(\frac{1}{2}\right)$  вводится матрица  $A_0^1 = \|\varphi(2j-k)\|_{j,k=1}^{N, N+1}$ , для системы уравнений  $A_0\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \varphi\left(\frac{1}{4}\right)$  - матрица  $A_0^{1/2} = \|\varphi(2j-k-\frac{1}{2})\|_{j,k=1}^{N, N+1}$  и т. д.

Тогда системы уравнений (5) преобразуются к виду:

$$M_0c = \tilde{\varphi}(1), A_0^1c = \varphi\left(\frac{1}{2}\right), A_0^{1/2}c = \varphi\left(\frac{1}{4}\right),$$

$$A_1^{1/2}c = \varphi\left(\frac{1}{4}\right), \dots, A_1^{(2^{k_{\max}}-1)/2^{k_{\max}}}c = \varphi\left(\frac{2^{k_{\max}}-1}{2^{k_{\max}}}\right). \quad (7)$$

В результате для определения коэффициентов  $\{c_n\}_{n=0}^N$  получаем  $2^{k_{\max}} \times N-1$  линейных неоднородных



уравнений с  $(N+1)$  неизвестными. Так как количество уравнений превышает количество неизвестных, то для решения системы (7) был выбран метод наименьших квадратов, который реализовывался с помощью нейронной сети.

Тогда 2-й этап метода определения параметров для обобщенной гребенчатой масштабной функции включает следующие подэтапы.

**4.2. Формирование последовательности дискретных значений базовой функции**

На этом подэтапе задается  $k_{max}$  - положительное целое число, определяющее шаг дискретизации  $2^{-k_{max}}$  базовой функции  $\phi_b(x)$  по оси  $x$ . Также задается  $N$  - количество коэффициентов  $\{c_n\}_{n=0}^N$ . Выделяется носитель функции  $\phi_b(x)$  и далее учитываются только значения  $\phi_b(x)$ , определенные на носителе этой функции.

Не ограничивая общности, предположим, что  $\text{supp } \phi_b(x) \subseteq [0, N]$ . В противном случае выполнение этого включения достигается с помощью аффинного преобразования  $\text{supp } \phi_b(x)$ . Проводится выборка  $2^{k_{max}} \times N - 1$  значений  $\phi_b(x)$ , определенных на  $\text{supp } \phi_b(x)$ , с шагом  $2^{-k_{max}}$ .

**4.3. Формирование системы линейных неоднородных уравнений вида (7).**

Создается матрица размера  $N \times 2^{k_{max}}$ . Первому элементу первой строки этой матрицы присваивается значение 0, т. к.  $\phi(0) = 0$ . Далее полученные на предыдущем подэтапе метода дискретные значения базовой функции  $\phi_b(x)$  записываются в эту матрицу построчно.

Тогда столбцы матрицы размера  $N \times 2^{k_{max}}$  представляют вектора  $\phi_b(1), \phi_b\left(\frac{1}{2^{k_{max}}}\right), \phi_b\left(\frac{2}{2^{k_{max}}}\right), \dots, \phi_b\left(\frac{2^{k_{max}}-1}{2^{k_{max}}}\right)$ .

Полученные вектора используются в качестве правых частей системы уравнений (7). Далее из векторов  $\phi_b(1), \phi_b\left(\frac{1}{2^{k_{max}}}\right), \phi_b\left(\frac{2}{2^{k_{max}}}\right), \dots, \phi_b\left(\frac{2^{k_{max}}-1}{2^{k_{max}}}\right)$  создаются матрицы  $M_0, A_0^1, A_0^{1/2}, A_1^{1/2}, \dots, A_1^{(2^{k_{max}-1}-1)/2^{k_{max}-1}}$ . В качестве элементов этих матриц вместо значений функции  $\phi(x)$  используются соответствующие значения базовой функции  $\phi_b(x)$ . Полученные матрицы используем в левой части системы уравнений (7). С учетом результатов формирования правой и левой частей системы уравнений (7) строится сама эта система уравнений.

**4.4. Выбор структуры нейронной сети**

Решение системы линейных неоднородных уравнений (7) проводилось с использованием однослойного персептрона. На вход нейронной сети подавались известные коэффициенты при неизвестных  $\{c_n\}_{n=0}^N$  каждого из уравнений (7). Поэтому число входов сети выбиралось равным  $N+1$ . Выходные значения сети соответствовали значению правой части каждого из уравнений (7). Соответственно количество нейронов выходного слоя равнялось 1. В качестве функции активации единственного нейрона использовалась функция линейного скачка, не достигающая порога насыщения – линейный сумматор [11]. Искомые коэффициенты  $\{c_n\}_{n=0}^N$  представляли весовые коэффициенты сети.

**4.5. Формирование обучающей выборки**

Для передачи на вход нейронной сети в обучающую выборку включались строки матриц систем уравнений

(7):  $M_0, A_0^1, A_0^{1/2}, A_1^{1/2}, \dots, A_1^{(2^{k_{max}-1}-1)/2^{k_{max}-1}}$ . В качестве целевых значений при обучении сети использовались компоненты векторов  $\tilde{\phi}(1), \phi\left(\frac{1}{2}\right), \phi\left(\frac{1}{4}\right), \dots, \phi\left(\frac{2^{k_{max}}-1}{2^{k_{max}}}\right)$ .

**4.6. Обучение нейронной сети**

Обучение нейронной сети выполнялось путем минимизации суммарной квадратической ошибки на выходе сети.

Количество проходов по обучающей выборке выбиралось равным 200. Время обучения, например, при  $N=7, k_{max}=3$  составило 0,1с на компьютере Intel (R) Celeron (TM) CRU 1000MHz 128 Мб ОЗУ.

**5. Апробация результатов исследований**

В ходе экспериментальных исследований предложенного метода определения параметров обобщенной гребенчатой масштабной функции на вход нейронной сети подавались значения этой функции, вычисленные путем интерполяции ее значений в целых точках. На значения обобщенной гребенчатой масштабной функции на входе нейронной сети накладывался гауссовский белый шум так, чтобы ОСШ составляло 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 1000 по мощности. Для значений параметров обобщенной гребенчатой масштабной функции – коэффициентов  $\{c_n\}_{n=0}^N$  вычислялась относительная погрешность по формуле

$$\delta = \frac{\sqrt{\sum_{n=0}^N (c_n - \hat{c}_n)^2}}{\sqrt{\sum_{n=0}^N c_n^2}},$$

где  $\{\hat{c}_n\}_{n=0}^N$  - оценки коэффициентов  $\{c_n\}_{n=0}^N$ . Последние использовались при интерполяции значений обобщенной гребенчатой масштабной функции, результат которой передавался на вход нейронной сети. Также вычислялась относительная погрешность

$$\delta_i = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (\varphi_j(x_i) - \hat{\varphi}_j(x_i))^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \varphi_j^2(x_i)}}$$

где  $\varphi_j(x_i)$  и  $\hat{\varphi}_j(x_i)$  - значения приближений обобщенной гребенчатой масштабной функции, которые рассчитывались в точках  $x = x_i, i = \overline{1, n}$  с использованием коэффициентов  $\{c_n\}_{n=0}^N$  и  $\{\hat{c}_n\}_{n=0}^N$  соответственно. Строились графики зависимости  $\delta, \delta_i$ , а также коэффициента корреляции  $r_\varphi$  между  $\{\varphi_j(x_i)\}_{i=1}^n$ ,  $\{\hat{\varphi}_j(x_i)\}_{i=1}^n$  и коэффициента корреляции  $r_c$  между  $\{c_n\}_{n=0}^N$  и  $\{\hat{c}_n\}_{n=0}^N$  от ОСШ  $q$  по мощности (рис. 1). При получении этих зависимостей  $k_{max} = 3, \{c_n\}_{n=0}^7 = \left\{ -\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, 1, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8} \right\}$ .

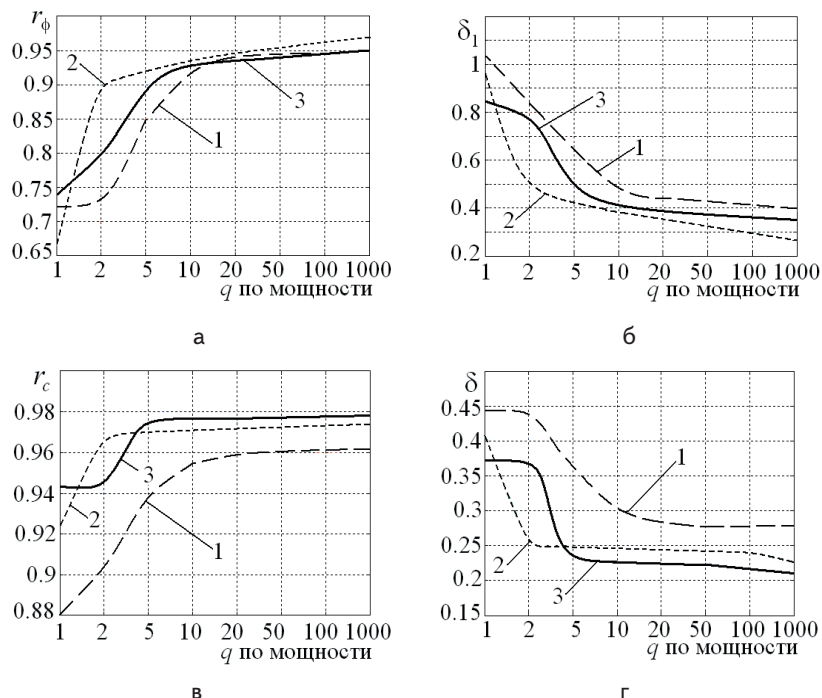


Рис. 1. Результаты экспериментальных исследований: а – зависимость  $r_\phi$  от ОСШ  $q$  по мощности; б – зависимость  $\delta_1$  от ОСШ  $q$  по мощности; в – зависимость  $r_\lambda$  от ОСШ  $q$  по мощности; г – зависимость  $\delta$  от ОСШ  $q$  по мощности; 1 – для  $j=3$ ; 2 – для  $j=4$ ; 3 – для  $j=5$

Анализируя полученные результаты заметим, что при ОСШ 10 и более по мощности значения коэффициентов корреляции  $r_\phi$  и  $r_\lambda$ , а также относительных погрешностей  $\delta$  и  $\delta_1$  практически не изменяются. С увеличением индекса  $j$  приближения  $\phi_j(x)$  обобщенной гребенчатой масштабной функции характеристики ухудшаются:  $r_\lambda$  уменьшается на 4 - 7%,  $\delta$  увеличи-

вается на 18 – 43%. При увеличении уровня помех на входе нейронной сети  $r_\phi$  снижается на 22%,  $r_\lambda$  – на 4 - 7%. Относительные погрешности  $\delta$  и  $\delta_1$  увеличиваются на 40% и 60% соответственно. Таким образом, предложенный метод определения параметров обобщенной гребенчатой масштабной функции целесообразно применять при уровне помех на исходном изображении не более 10 по мощности.

## 6. Выводы

Преобразования с обобщенными гребенчатыми масштабными функциями отличаются от используемых методов вейвлет-преобразования анализирующими функциями, которые представляют импульсные характеристики гребенчатых фильтров с разной пространственно-частотной локализацией, что обуславливает низкие вычислительные затраты при определении на изображении границ области структурной текстуры требуемых для достижения цели геометрических размеров. Для повышения степени автоматизации решения этой задачи выполнено определение параметров обобщенных гребенчатых масштабных и вейвлет-функций, относительная погрешность которого при ОСШ 10 и выше по мощности составила 0,23 - 0,34; а коэффициент корреляции с истинными значениями параметров составил 0,95 - 0,98.

## Литература

1. Харалик, Р. М. Статистический и структурный походы к описанию текстур [Текст] / Р. М. Харалик // ТИИЭР. - 1979. - Т. 67, № 5. - С. 98-120.
2. Гонсалес, Р. Цифровая обработка изображений [Текст] : пер. с англ. – П. : Чочиа; М. : Техносфера, 2005. - 1072с.
3. Lee, K. L. Unsupervised texture segmentation by determining the interior of texture regions based on wavelet transform [Текст] / K. L. Lee, L. H. Chen // International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence. - 2001. - Vol. 15, №8. - P. 1231-1250.
4. Dunn, D. Texture segmentation using 2D Gabor elementary function [Текст] / D. Dunn, W. Higgins, J. Wakeley // IEEE Trans. on PAMI. – 1994. - Vol. 16, №2. - P. 130-149.
5. Yang, J. C.-Y. Document image segmentation and quality improvement by moiré pattern analysis [Текст] / J. C.-Y. Yang, W.-H. Tsai // Signal Processing: Image Communication. - 2000. -Vol. 15. - P. 781-797.
6. Финкельштейн, М. И. Гребенчатые фильтры [Текст] / М. И. Финкельштейн. - М. : Советское радио, 1969. - 320 с.
7. Полякова, М. В. Обобщенные масштабные функции с компактным носителем в задаче сегментации изображений упорядоченных текстур [Текст] / М. В. Полякова, В. Н. Крылов // Автоматика. Автоматизация. Электротехнические комплексы и системы. Межвузовский журнал. - 2007. - №1(19).- С. 75-84.
8. Daubechies, I. Two-scale difference equations. I. Existence and global regularity of solutions [Текст] / I. Daubechies, J. C. Lagarias // SIAM J. Math. Anal. - 1991. -Vol. 22, №5. - P. 1388-1410.
9. Оценка периода следования импульсов для пропадающего сигнала методом полных достаточных статистик [Текст] : докл. 8-й междунар. конф.-выст. «Цифровая обработка сигналов и ее применение», 29-30 марта 2006 г. Москва / А. Д. Говорухина, К. Н. Жучков, С. Г. Хоружий. - Москва : DSPA, 2006. - Т. 1. - С. 36-39.
10. Berg, L. Compactly supported solutions of two-scale difference equations [Текст] / L. Berg, G. Plonka // Linear Algebra Appl. - 1998. - Vol. 275-276. - P. 49-75.
11. Хайкин, С. Нейронные сети: полный курс [Текст] : пер. с англ. – Н. : Куссуль, А. : Шелестовой. - 2-е изд. ; М. : Вильямс, 2006. - 1104 с.