

ЕЛЕКТРОНІКА
РАДІОТЕХНІКА
ЗАСОБИ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙ
ELECTRONICS
RADIO ENGINEERING
TELECOMMUNICATION FACILITIES

УДК 621.391

Ю.К. Филипский, д-р техн. наук, проф.,
С.В. Семенюк, магістр,
Одес. нац. політехн. ун-т

АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК
АНАЛОГОВЫХ И ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ
ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОРЯДКОВ

Ю.К. Филипський, С.В. Семенюк. Аналіз динамічних характеристик аналогових і цифрових фільтрів довільних порядків. Розглянуто шляхи визначення динамічних характеристик аналогових і цифрових фільтрів на основі стаціонарного коефіцієнта передачі, включаючи імпульсний відгук. Проведено аналіз аналогових і цифрових фільтрів нижніх частот другого і третього порядків. Визначено динамічні характеристики цифрових фільтрів другого і третього порядків за аналоговими прототипами.

Ключові слова: дискретне перетворення Фур'є, цифровий фільтр, фільтр нижніх частот, динамічний коефіцієнт передачі, зворотне дискретне перетворення Фур'є.

Ю.К. Филипский, С.В. Семенюк. Анализ динамических характеристик аналоговых и цифровых фильтров произвольных порядков. Рассмотрены пути определения динамических характеристик аналоговых и цифровых фильтров на основании стационарного коэффициента передачи, включая импульсный отклик. Проведен анализ аналоговых и цифровых фильтров нижних частот второго и третьего порядков. Определены динамические характеристики цифровых фильтров второго и третьего порядков по аналоговым прототипам.

Ключевые слова: дискретное преобразование Фурье, цифровой фильтр, фильтр нижних частот, динамический коэффициент передачи, обратное дискретное преобразование Фурье.

Yu.K. Filipisky, S.V. Semenyuk. Analysis of the dynamic characteristics of analog and digital filters of arbitrary orders. The ways of determining the dynamic characteristics of analog and digital filters on the basis of stationary gain, including pulse response, are considered. The analysis of the analog and digital low-pass filters of the second and third orders is carried out. Dynamic characteristics of digital filters of second and third order on the analog prototypes are determined.

Keywords: discrete Fourier transform, digital filter, low-pass filter, dynamic gain, inverse discrete Fourier transform.

Основними напрямками використання методів цифрової обробки аналогових сигналів являються їх цифрова фільтрація і спектральний аналіз. Основні проблеми цифро-

вой фильтрации связаны с дискретизацией непрерывного сигнала для получения цифрового аналога и его восстановления из цифрового сигнала. Дискретизация аналогового сигнала позволяет сократить время работы канала передачи информации. Спектральный анализ можно проводить путем вычисления спектров с помощью дискретного преобразования Фурье (ДПФ) или путем вычисления спектров с применением статистических методов [1]. Анализ и проектирование цифровых фильтров производится с использованием аналоговых прототипов. Под проектированием цифрового фильтра (ЦФ) понимают поиск коэффициентов аппроксимации характеристик фильтра, при которых достигаются требуемые параметры фильтра. При проектировании по аналоговому прототипу применяется метод билинейного z -преобразования [1].

Цифровые цепи используются в современных системах передачи информации. Фильтры нижних частот, будучи низкочастотным прототипом, проектируются в основном на основании рекурсивных цепей. Информация о реакции цепи при этом получается из динамических режимов при постоянно меняющемся внешнем воздействии. Анализ фильтра верхних частот и полосового фильтра (ПФ), как правило, производится по низкочастотному прототипу. Для анализа цепей и сигналов применяют преобразование Фурье и Лапласа.

В реальных условиях любой процесс или сигнал имеют начало и конец и, кроме этого, исследуемый сигнал может менять свои параметры в процессе развития. В таких случаях необходимо переходить к частотно-временным методам анализа и динамическим характеристикам цепей, которые в последнее время получили широкое развитие [1].

Частотно-временные характеристики электрических фильтров используются для анализа фильтров в динамическом режиме, а именно, для определения динамических погрешностей, связанных с перестройками параметров сигналов и цепей.

К частотно-временным методам анализа относятся: метод динамического коэффициента передачи (ДКП) [2], применение текущего и мгновенного спектров [3], оконное преобразование Фурье и вейвлет-преобразование [4].

Стабильность характеристик и надежность работы ЦФ недостижима в аналоговых вариантах. Исследование ЦФ второго порядка — актуально, т. к. по ним строятся фильтры высших порядков. При высокой стабильности параметров они более просты в построении.

Динамический коэффициент передачи предполагает использование известной импульсной характеристики цепи

$$K(j\omega, t) = \int_0^t h(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (1)$$

где $h(t)$ — импульсная характеристика цепи;

ω — круговая частота.

В этом случае можно определить закон изменения огибающей сигнала на любой частоте при изменениях амплитуды, частоты, фазы либо других параметров.

Недостатком таких вычислений является необходимость определения импульсной характеристики цепи.

Для цепей выше второго порядка определить импульсную характеристику цепи $h(t)$ чаще всего затруднительно.

Исследована динамика аналоговых и цифровых фильтров нижних частот второго и третьего порядков в предположении, что эффекты квантования отсутствуют.

Предлагается развитие метода ДКП путем использования коэффициента передачи в операторной $K(p)$ или комплексной $K(j\omega)$ формах с коэффициентами, зависящими от параметров цепи.

Стационарный коэффициент передачи в операторной форме

$$K(p) = \frac{M(p)}{N(p)},$$

где $M(p)$, $N(p)$ — полиномы переменной p с действительными коэффициентами.

Для этого импульсную характеристику цепи следует представить обратным преобразованием Фурье или обратным преобразованием Лапласа, которое вычисляется с помощью вычетов, взятых в полюсах стационарного коэффициента передачи, в виде

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi j} \int_{C-j\infty}^{C+j\infty} K(p) e^{pt} dp = \sum_{i=1}^n \frac{M(p_i)}{N'(p_i)} e^{p_i t}, \quad (2)$$

где p_i — i -й корень $N(p)$.

После подстановки (2) в (1), ДКП

$$K(p, t) = \int_0^t h(t) e^{-pt} dt = \int_0^t \sum_{i=1}^n \frac{M(p_i)}{N'(p_i)} e^{-(p-p_i)t} dt = \sum_{i=1}^n \frac{M(p_i)}{N'(p_i)(p-p_i)} [1 - e^{-(p-p_i)t}]. \quad (3)$$

После преобразования

$$K(p, t) = K(p) - \sum_{i=1}^n \frac{M(p_i)}{N'(p_i)(p-p_i)} e^{-(p-p_i)t}, \quad (4)$$

где первое слагаемое — стационарный коэффициент передачи, а второе — динамическая поправка.

Согласно выражению (4), после перехода к комплексной частоте, ДКП

$$K(j\omega, t) = K(j\omega) - e^{-j\omega t} \sum_{i=1}^n \frac{M(p_i)}{N'(p_i)(j\omega - p_i)} e^{p_i t}. \quad (5)$$

Условием физической реализуемости аналогового фильтра является расположение всех полюсов передаточной функции — коэффициента передачи — фильтра в левой части плоскости ее комплексного аргумента.

Для фильтра нижних частот (ФНЧ) второго порядка комплексный коэффициент передачи

$$K(j\omega) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + 2j\alpha\omega - \omega^2}, \quad (6)$$

где $\omega_0 = \sqrt[2]{LC}$ — резонансная частота цепи;

$\alpha = 0,5RL^{-1}$ — затухание цепи.

Применив выражение (4) к (6), перейдя к частотным свойствам системы и полагая $p = j\omega$, получаем

$$K(j\omega, t) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + 2j\alpha\omega - \omega^2} \left[1 - e^{-(\alpha+j\omega)t} \left[\cos(\omega_c t) + j \frac{\omega}{\omega_c} \sin(\omega_c t) \right] \right],$$

где $\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ — частота собственных колебаний цепи.

После нормирования $K(j\omega, t)$ по частоте $\Omega = \omega\omega_0^{-1}$ и по времени $y = \alpha t$, учитывая, что $\omega_c \approx \omega_0$, получим ДКП

$$K(j\Omega, y) = \frac{1}{1 + j\Omega Q^{-1} - \Omega^2} \left[1 - e^{-y - j2Q\Omega y} \left[\cos(2Qy) + j\Omega \sin(2Qy) \right] \right],$$

где $Q = \omega_0(2\alpha)^{-1} = R^{-1}\sqrt{LC}^{-1}$ — добротность цепи.

Приведем модуль ДКП этого выражения для ФНЧ второго порядка как функция частоты Ω времени в виде трехмерного изображения и как функция частоты Ω (рис. 1, а, б, соответственно) при $Q=1$.

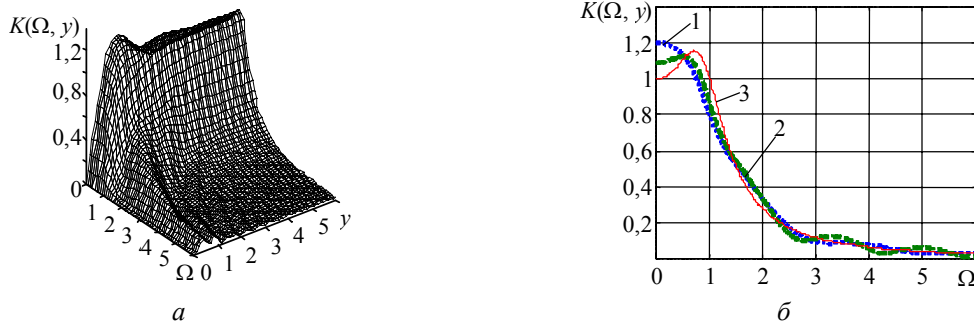


Рис. 1. Модуль ДКП аналогового ФНЧ второго порядка как функция частоты Ω и времени y (а), и как функция частоты Ω при $y=1,6$ (1); 2 (2); 20 (3) (б); $Q=1$

Анализ полученного модуля ДКП показывает, что динамические резонансные характеристики (кривые 2 и 3) заметно отличаются от стационарной характеристики (кривая 1, рис. 1, б), а временная зависимость приобретает колебательный характер (рис. 1, а).

Выражение (5) относится к цепям произвольного порядка. В результате анализа ФНЧ третьего порядка с коэффициентом передачи

$$K(p) = \frac{\omega_0^3}{Q} \frac{1}{p^3 + 2 \frac{\omega_0}{Q} p^2 + \left(\omega_0^2 + \frac{\omega_0^2}{Q^2} \right) p + \frac{\omega_0^3}{Q}}$$

где $p_1 = -2\alpha_2$, $p_{2,3} = -\alpha_2 \pm j\omega_c$ — корни коэффициента передачи.

Нормированный ДКП фильтра согласно выражению (5) и $y = 2\alpha_2 t$ принимает вид

$$K(j\Omega, y) = K(j\Omega) \left[1 - e^{-\frac{y}{2} - jQ\Omega y} \left[\left(1 + j \frac{\Omega}{Q} - \Omega^2 \right) e^{-\frac{y}{2}} + (1 + j\Omega Q) \left[\left(\frac{2Q + j\Omega}{2Q^2} \right) \sin(Qy) - \frac{j\Omega}{Q} \cos(Qy) \right] \right] \right]$$

где $K(j\Omega) = \frac{1}{(1 + jQ\Omega)(1 + j\Omega Q^{-1} - \Omega^2)}$ — нормированный коэффициент передачи.

В виде динамических характеристик приведем модуль ДКП ФНЧ третьего порядка при $Q=1$ (рис. 2).

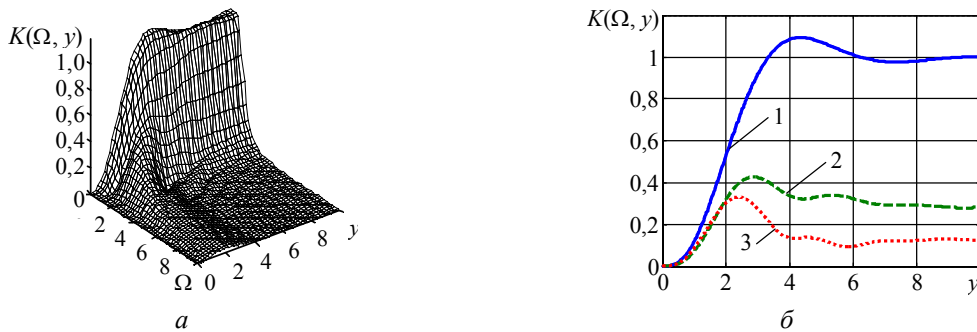


Рис. 2. Модуль ДКП аналогового ФНЧ третьего порядка как функция частоты Ω и времени y (а); как функция времени y при $\Omega=0$ (1); 1,5 (2); 2 (3) (б); $Q=1$

Трехмерное изображение модуля ДКП позволяет достаточно точно производить анализ фильтра и по времени, и по частоте.

Для анализа цифровых фильтров предлагается использовать метод билинейного z -преобразования, осуществляемый заменой переменной

$$p = \frac{2(1 - z^{-1})}{T(1 + z^{-1})},$$

где T — период (интервал) дискретизации;

$$z = e^{j\omega T}.$$

Частотная характеристика ЦФ обращается в нуль на частоте $\frac{\pi}{T}$. Выбор весьма маленького значения интервала дискретизации обеспечивает устойчивость синтезированного ЦФ.

При этом отсутствует эффект наложения сдвинутых амплитудно-частотных характеристик аналогового фильтра, но происходит деформация частотной шкалы, т. к. аналоговые и цифровые частоты не совпадают

$$\omega' = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \left(\frac{\omega T}{2} \right),$$

где ω' — деформированная частота для аналогового фильтра.

При аппроксимации частотной характеристики применение метода (1) оправданно из-за абсолютно точного совпадения частотных характеристик аналогового и цифрового фильтров в диапазоне частот $|\omega| \leq 0,25\pi T^{-1}$.

Тогда коэффициенты передачи цифровых ФНЧ второго и третьего порядков, выраженные через коэффициенты a_0, b_1, b_2 и b_3 методом [1], соответственно, имеют вид.

$$K_2(z) = \frac{a_0(1 + 2z^{-1} + z^{-2})}{1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}; \quad K_3(z) = \frac{a_0(1 + 3z^{-1} + 3z^{-2} + z^{-3})}{1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3}},$$

где a_0, b_1, b_2 и b_3 — коэффициенты передаточной функции, полученные при переходе от аналогового фильтра к цифровому.

Для анализа и синтеза ЦФ используем прямое и обратное дискретные преобразования Фурье конечных дискретных сигналов длины N [2]:

$$K(jm\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n e^{-j\Omega T mn} = \sum_{n=0}^{N-1} h_n e^{-j\frac{2\pi}{N} mn} = \sum_{n=0}^{N-1} h_n W^{mn}; \quad (7)$$

$$h_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} K(jm\Omega) e^{j\frac{2\pi}{N} mn} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} K(jm\Omega) W^{-mn}, \quad (8)$$

где $\Omega = 2\pi T_c^{-1}$ — интервал между соседними спектральными линиями;

$T_c = NT$ — длительность сигнала;

h_n — выборки импульсной характеристики, $0 \leq n \leq N-1$;

$W = e^{-j2\pi N^{-1}}$ — комплексное число;

$K(jm\Omega)$ — выборки коэффициента передачи, $0 \leq m \leq N-1$.

Частоты Ωm равномерно расположены на интервале $0 \dots 2\pi$. Выражения (7) и (8) позволяют определить динамические характеристики фильтра по частоте и по времени — столбцы и строки матрицы ДПФ. Матрица обратного дискретного преобразования Фурье (ОДПФ) приведена в таблице.

Проектирование цифровых фильтров осуществляется с помощью матрицы дискретного преобразования Фурье (ДПФ).

Матрица ОДПФ

Выборки коэффициента передачи					Импульсная характеристика
$K(0)$	$K(j\Omega)$	$K(j2\Omega)$...	$K[j(N-1)\Omega]$	
$1/N$	$1/N$	$1/N$...	$1/N$	h_0
$1/N$	W^{-1}/N	W^{-2}/N	...	$W^{-(N-1)}/N$	h_1
$1/N$	W^{-2}/N	W^{-4}/N	...	$W^{-2(N-1)}/N$	h_2
...
$1/N$	$W^{-(N-1)}/N$	$W^{-2(N-1)}/N$...	$W^{-(N-1)(N-1)}/N$	h_{N-1}

Удобным инструментом для анализа и контроля качества ЦФ при ограниченной выборке является ДКП. Экспериментально подтверждается, что при возрастании объема выборки динамические характеристики стремятся к стационарной. Его использование позволяет количественно оценить оптимальный порядок ЦФ при обработке сигналов конечной длины, а также оценить реакцию цепи на сигнал.

Для определения ДКП ЦФ следует использовать переход от (7) к

$$K(m, n) = \sum_{n=0}^k h_n W^{mn},$$

где $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Для получения полной информационной картины частотно-временных характеристик ЦФ в стационарном и динамическом режимах работы цепей используется матрица ДПФ, определяющая ДКП. Временные характеристики получаются из горизонтальных усечений (расчет комплексной огибающей), а частотные из — вертикальных (расчет ДКП).

Графики вертикальных и горизонтальных пересечений матрицы ДПФ для рассмотренных ФНЧ второго и третьего порядков с количеством отсчетов $N = 64$, периодом дискретизации $T = 0,25\pi\omega_0^{-1}$ и добротностью $Q = 1$ приведены рис. 3.

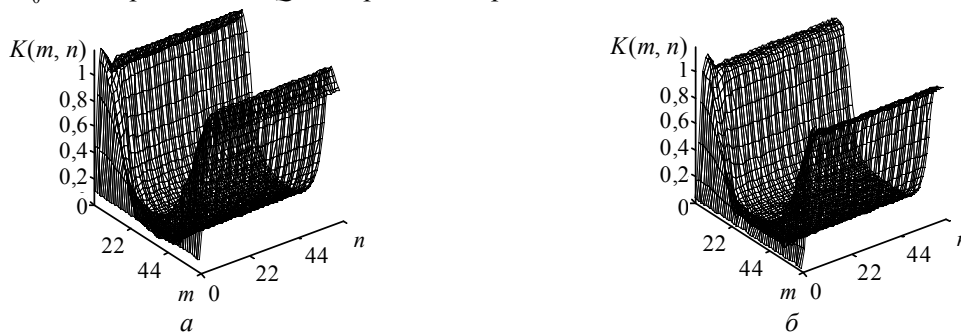


Рис. 3. Модуль ДКП цифрового ФНЧ второго (а) и третьего (б) порядка

Полученные характеристики модулей ДКП цифровых ФНЧ совпадают с аналоговыми вариантами, несмотря на погрешность дискретизации и деформацию частотной шкалы. ДКП ЦФ определяется пересечениями матрицы ДПФ и, как в случае с аналоговым вариантом, раскрывает в частотно-временной плоскости полную картину динамического режима цепи.

Как видно из проведенного анализа, динамические резонансные характеристики заметно отличаются от стационарных характеристик из-за динамических искажений. При достаточно малом периоде дискретизации T ЦФ точно аппроксимирует аналоговый фильтр. Метод ДКП позволяет проводить анализ не отдельно в плоскости времени или частоты, а одновременно на частотно-временной плоскости, что расширяет его возможности.

Литература

1. Гоноровский, И.С. Радиотехнические цепи и сигналы: учеб. пособие для вузов / И.С. Гоноровский. — [5-е изд.]. — М.: Дрофа, 2006. — 719 с.
2. Філіпський, Ю.К. Динаміка сигнальних перетворень: навч. посіб. для студентів ВНЗ / Ю.К. Філіпський. — Одеса: ОДПУ, 2006. — 104 с.
3. Харкевич, А.А. Спектры и анализ / А.А. Харкевич. — М.: Физматгиз, 1962. — 236 с.
4. Воробьев, В.И. Теория и практика вейвлет-преобразования / В.И. Воробьев, В.Г. Грибунин. — СПб.: ВУС, 1999. — 204 с.

References

1. Gonorovskiy, I.S. Radiotekhnicheskie tsepi i signaly: ucheb. posobie dlya vuzov [Radio Circuits and Signals: a manual for higher education] / I.S. Gonorovskiy. — 5th edition. — Moscow, 2006. — 719 p.
2. Filip'skiy, Yu.K. Dynamika syhnalnykh peretvoren: navch. posib. dlia studentiv VNZ [Dynamics of Signal Change: a teach. manual for students of higher educational establishments] / Yu.K. Filip'skiy. — Odesa, 2006. — 104 p.
3. Kharkevich, A.A. Spektry i analiz [Spectra and Analysis] / A.A. Kharkevich. — Moscow, 1962. — 236 p.
4. Vorob'ev, V.I. Teoriya i praktika veyvlet-preobrazovaniya [Theory and Practice of Wavelet Transforms] / V.I. Vorob'ev, V.G. Gribunin. — St.Peterburg, 1999. — 204 p.

Рецензент д-р техн. наук, проф., Одес. нац. политехн. ун-та Ситников В.С.

Поступила в редакцию 13 февраля 2012 г.