

# МАШИНОБУДУВАННЯ ТЕХНОЛОГІЯ МЕТАЛІВ МАТЕРІАЛОЗНАВСТВО

MACHINE BUILDING  
PROCESS METALLURGY  
MATERIALS SCIENCE

УДК 624.073.8

В.П. Белоус, магистр, Одес. нац. политехн. ун-т

## ОСОБЕННОСТИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПАНЕЛЕЙ ПРИ СЖАТИИ ПОСЛЕ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ

*В.П. Белоус. Особливості деформування циліндричних панелей при стиску після втрати стійкості.* Розглянута циліндрична панель при стиску вздовж утворюючої. На базі теорії гнучких оболонок у залежності від кривизни поверхні одержано вирази для критичних зусиль і параметрів хвилеутворення при закритичному стані панелі після втрати стійкості.

*Ключові слова:* циліндрична панель, кривизна поверхні, втрата стійкості, критичне зусилля, хвилеутворення.

*В.П. Белоус. Особенности деформирования цилиндрических панелей при сжатии после потери устойчивости.* Рассмотрена цилиндрическая панель при сжатии вдоль образующей. На базе теории гибких оболочек в зависимости от кривизны поверхности получены выражения для критических усилий и параметров волнообразования при закритическом состоянии панели после потери устойчивости.

*Ключевые слова:* цилиндрическая панель, кривизна поверхности, потеря устойчивости, критическое усилие, волнообразование.

*V.P. Belous. Deformation features of cylindrical panels under compression after the loss of stability.* A cylindrical panel is considered under compression along the generatrix. On the basis of the theory of flexible shells in dependence on the curvature of a surface the expressions for critical efforts and wave-formation parameters are obtained at supercritical condition of the panel after the loss of stability.

*Keywords:* cylindrical panel, surface curvature, loss of stability, critical effort, wave-formation.

Корпусные элементы машиностроительных и строительных конструкций, представляющие собой тонкостенные цилиндрические оболочки, часто подкреплены системой продольных и кольцевых ребер жесткости. Ограниченные этими ребрами части оболочки, обычно называемые панелями обшивки, как правило, подвергаются действию той или иной “местной” поперечной нагрузки, а также воспринимают “основные” нагрузки вместе с другими элементами конструкции, например, от общего изгиба корпуса. Эти “основные” нагрузки часто являются

превалирующими, вызывая сжатие, изгиб или сдвиг панелей, что приводит, при известных условиях, к потере ими устойчивости. Поэтому расчет цилиндрических панелей на устойчивость обычно является частью общего расчета корпусной конструкции [1].

Цилиндрические панели обшивки способны и после потери устойчивости нести закритическую нагрузку. Для некоторых конструкций считается вполне допустимым, чтобы обшивка получала относительно мелкие вмятины, с тем, однако, условием, чтобы подкрепляющие ее элементы оставались достаточно жесткими. В этой связи существует необходимость исследовать не только явление потери устойчивости панелей в малом, соответствующее геометрически линейной постановке задач, но и явление потери их устойчивости в большом. В последнем случае соответствующую закритическую деформацию следует рассматривать, используя положения теории гибких оболочек (так называемых оболочек большого прогиба), и постановка задач будет уже нелинейной. Поскольку получение аналитических решений задач при этом весьма затруднительно, прибегают к введению дополнительных гипотез и упрощениям, среди которых следует отметить те, которые вытекают из анализа геометрии деформирования элементов, а также принимают во внимание результаты соответствующих экспериментов. Это позволяет получать менее строгие решения, но дает возможность использовать их результаты непосредственно в проектировании конструкций [2...4].

При решении сложных задач механики деформируемого твердого тела широко используются численные методы, наиболее распространенным из которых является метод конечных элементов (МКЭ). Одним из средств, использующих МКЭ как математическую основу для научных исследований и инженерных расчетов, является комплекс ANSYS/Structural, среда которого Nonlinear Buckling Analysis позволяет определять формы потери устойчивости и критические нагрузки для оболочечных объектов, а также исследовать их поведение после потери устойчивости [5].

Известные теоретические исследования закритического деформирования сжатых цилиндрических панелей относятся лишь к квадратным панелям [6]. В случае произвольного соотношения их сторон они практически отсутствуют, а редкие их фрагменты не систематизированы. Поэтому аналитическое рассмотрение деформирования таких панелей при сжатии вдоль образующей после потери устойчивости, являющееся целью данной работы, можно считать актуальным для обеспечения эффективного решения соответствующих инженерных задач.

Рассмотрим цилиндрическую панель радиуса  $R$ , длиной  $a$ , шириной  $b$  и толщиной  $h$  с центральным углом обхвата  $\theta = b/R$ , которая сжата равномерно распределенными вдоль криволинейных краев усилиями  $N_1$  (рис. 1). В качестве геометрической характеристики панели можно использовать ее относительную кривизну  $k = \theta \cdot b / h = b^2 / (Rh)$  при соотношении сторон  $\phi = a / b \geq 1$ . Края панели будем считать шарнирно опертыми на абсолютно жесткие ребра.

Пусть началом координат является угловая точка срединной поверхности панели, координата  $x$  отсчитывается вдоль прямолинейной образующей, координата  $y$  — вдоль дуги (криволинейной направляющей), а координата  $z$  — по нормали к срединной поверхности. Перемещения точки срединной поверхности вдоль осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  —  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , соответственно.

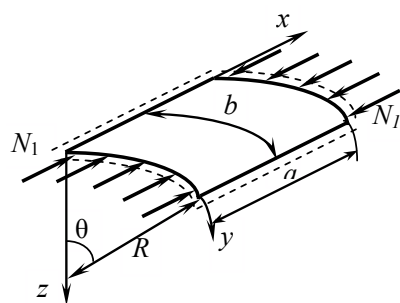


Рис. 1. Цилиндрическая панель при сжатии вдоль образующей

Положительное перемещение  $w$ , которое называют прогибом панели, отвечает направлению к центру кривизны.

Разрешающие уравнения теории гибких оболочек в случае цилиндрической оболочки, равномерно сжатой вдоль образующей усилиями  $N_1$ , в виде системы смешанного типа двух уравнений относительно прогиба  $w$  и функции усилий  $\Phi$  [6] имеют вид

$$D \cdot \nabla^2 \nabla^2 w = \frac{N_y}{R} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \quad (1)$$

$$\frac{1}{Eh} \cdot \nabla^2 \nabla^2 \Phi = -\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2, \quad (2)$$

где  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$  — цилиндрическая жесткость оболочки;

$E, \mu$  — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки;

$N_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$ ;  $N_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$ ;  $N_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$  — внутренние усилия в срединной поверхности.

В силу условий шарнирного опирания для функции прогиба  $w$  на краях панели

$$w|_{x=0,a} = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}|_{x=0,a} = 0; \quad w|_{y=0,b} = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}|_{y=0,b} = 0. \quad (3)$$

При сжатии панели вдоль образующей для функции усилий  $\Phi$  на ее краях

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}|_{x=0,a} = -N_1; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}|_{y=0,b} = 0; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}|_{x=0,a} = 0. \quad (4)$$

Выражение для прогиба  $w$ , удовлетворяющее граничным условиям (3), можно принять в виде

$$w(x, y) = f \cdot \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y \quad (\lambda_m = m\pi / a; \lambda_n = n\pi / b), \quad (5)$$

где  $f$  — амплитуда прогиба при потере устойчивости;

$m$  и  $n$  — число полуволн вдоль образующей и по дуге, соответственно.

Тогда, после подстановки выражения (5) в уравнение (2) и его интегрирования с учетом условий (4), функция усилий примет вид

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) = & -N_1 \cdot \frac{y^2}{2} + \frac{Eh}{32} \left( \frac{\lambda_n^2}{\lambda_m^2} \cos 2\lambda_m x + \frac{\lambda_m^2}{\lambda_n^2} \cos 2\lambda_n y \right) f^2 + \\ & + \frac{Eh}{R} \frac{\lambda_m^2}{(\lambda_m^2 + \lambda_n^2)^2} f \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y. \end{aligned} \quad (6)$$

Подставляя выражения (5) для прогиба  $w$  и (6) для функции усилий  $\Phi$  в уравнение (1) и применяя вариационный метод Бубнова-Галеркина [7], после его интегрирования

$$\left\{ -N_1 + D \frac{(\lambda_m^2 + \lambda_n^2)^2}{\lambda_m^2} + \frac{Eh}{R^2} \frac{\lambda_m^2}{(\lambda_m^2 + \lambda_n^2)^2} + \frac{Eh}{16} \frac{\lambda_m^4 + \lambda_n^4}{\lambda_m^2} f^2 - \right. \\ \left. - \frac{32\lambda_n}{3b^2 \phi \lambda_m^3} \frac{Eh}{R} \left[ \frac{\lambda_m^2}{(\lambda_m^2 + \lambda_n^2)^2} + \frac{1}{16} \right] f \right\} \cdot \lambda_m^2 f = 0. \quad (7)$$

Введем в рассмотрение безразмерные усилия, прогиб и параметры волнообразования

$$\bar{N}_1 = \frac{N_1 b^2}{Eh^3}; \quad \zeta = \frac{f}{h}; \quad \vartheta = \frac{l_y}{l_x} = \frac{m}{n\phi} = \frac{\lambda_m}{\lambda_n}; \quad \eta = \frac{\pi^2 Rh}{l_y^2} = \frac{n^2 \pi^2}{k} = \lambda_n^2 Rh, \quad (8)$$

где  $l_y = b/n$  и  $l_x = a/m$  — длины полуволн по дуге и вдоль образующей, соответственно.

Для этих параметров из выражения (7) получим зависимость между сжимающими усилиями  $\bar{N}_1$  и закритическим прогибом  $\zeta$  после потери устойчивости, условие которой  $\zeta \neq 0$ ,

$$\bar{N}_1(\zeta) = \frac{\pi^2 n^2}{12(1-\mu^2)} \frac{(\vartheta^2+1)^2}{\vartheta^2} + \frac{k^2}{\pi^2 n^2} \frac{\vartheta^2}{(\vartheta^2+1)^2} + \frac{\pi^2 n^2}{16} \frac{\vartheta^4+1}{\vartheta^2} \cdot \zeta^2 - \frac{2k}{3\phi\pi^2 n^2} \frac{1}{\vartheta} \left[ \frac{16\vartheta^2}{(\vartheta^2+1)^2} + \frac{1}{\vartheta^2} \right] \cdot \zeta. \quad (9)$$

Из условия минимизации  $\partial \bar{N}_1 / \partial \zeta = 0$  усилия (9) определяем соответствующий прогиб

$$\zeta_M = \frac{16k}{3\phi\pi^4 n^4} \frac{\vartheta}{\vartheta^4+1} \left[ \frac{16\vartheta^2}{(\vartheta^2+1)^2} + \frac{1}{\vartheta^2} \right]. \quad (10)$$

Тогда зависимость (9) можно представить в виде

$$\bar{N}_1(\zeta) = \frac{\pi^2 n^2}{12(1-\mu^2)} \frac{(\vartheta^2+1)^2}{\vartheta^2} + \frac{k^2}{\pi^2 n^2} \frac{\vartheta^2}{(\vartheta^2+1)^2} - \frac{16k^2}{9\pi^2 n^6} \frac{1}{\phi^2(\vartheta^4+1)} \left[ \frac{16\vartheta^2}{(\vartheta^2+1)^2} + \frac{1}{\vartheta^2} \right]^2 + \frac{\pi^2 n^2}{16} \frac{\vartheta^4+1}{\vartheta^2} \cdot (\zeta - \zeta_M)^2. \quad (11)$$

При определенной величине прогиба  $\zeta$  наименьшее из всех усилий  $\bar{N}_1(\zeta)$  для некоторой пары целых чисел  $m$  и  $n$  будет представлять собой критическое усилие

$$\bar{N}_{1c}(\zeta) = \min_{m,n} \bar{N}_1(\zeta).$$

Если в выражении (9)  $\zeta \rightarrow 0$ , что соответствует потере устойчивости в малом, то получим так называемое верхнее критическое усилие

$$\bar{N}_{1B} = \frac{\pi^2 n_B^2}{12(1-\mu^2)} \frac{(\vartheta^2+1)^2}{\vartheta^2} + \frac{k^2}{\pi^2 n_B^2} \frac{\vartheta^2}{(\vartheta^2+1)^2}. \quad (12)$$

Если же в выражении (11)  $\zeta \rightarrow \zeta_M$ , получаем нижнее критическое усилие при потере устойчивости в большом

$$\bar{N}_{1H} = \frac{\pi^2 n_H^2}{12(1-\mu^2)} \frac{(\vartheta^2+1)^2}{\vartheta^2} + \frac{k^2}{\pi^2 n_H^2} \frac{\vartheta^2}{(\vartheta^2+1)^2} - \frac{16k^2}{9\phi^2\pi^6 n_H^6} \frac{1}{\vartheta^4+1} \left[ \frac{16\vartheta^2}{(\vartheta^2+1)^2} + \frac{1}{\vartheta^2} \right]^2. \quad (13)$$

Поскольку из одного выражения (12) нельзя однозначно определить два параметра  $\vartheta$  и  $n_B$ , а из одного выражения (13) два параметра  $\vartheta$  и  $n_H$ , то логично сделать предположение о форме волнообразования, учитывающее результаты соответствующих экспериментов. Так, при потере устойчивости в малом и большом можно полагать размеры вмятин вдоль образующей  $l_x$  и по дуге  $l_y$  почти одинаковыми, т.е. считать  $\vartheta = l_y / l_x = 1$  [6].

Учитывая (12) при значении  $\vartheta = 1$  верхнее критическое усилие имеет вид

$$\bar{N}_{1B} = \frac{\pi^2 n_B^2}{3(1-\mu^2)} + \frac{k^2}{4\pi^2 n_B^2}, \quad (14)$$

где число полуволен  $n_B$  определяется из условия  $\partial \bar{N}_{1B} / \partial n_B = 0$ , используя которое, получим

$$n_B = \sqrt{\frac{k}{2\pi^2} \sqrt{3(1-\mu^2)}} = \sqrt{\frac{k}{12,0}} \quad (\mu = 0,3). \quad (15)$$

Очевидно, что целым числам  $n_B = 1, 2, 3, \dots$  отвечают значения кривизны панели  $k = 12, 48, 108, \dots$ . Если же число  $n_B$  не целое, то из двух ближайших к нему целых следует принять такое, при котором усилие, определяемое выражением (14), будет меньше. Переход от

числа  $n_B$  полуволн к числу  $n_B + 1$  будет иметь место при одинаковых значениях соответствующих им усилий  $\bar{N}_{1B}$ , а из равенства этих усилий можно получить следующее выражение для кривизны панели, при котором имеет место этот переход

$$k = 12 \cdot n_B (n_B + 1).$$

Тогда, например, переходу от числа  $n_B = 1$  к числу 2 соответствует величина  $k = 24$ , от числа  $n_B = 2$  к числу 3 —  $k = 72$ , от числа  $n_B = 3$  к числу 4 —  $k = 144$  и т.д. Как показывают результаты соответствующих вычислений, с приемлемой точностью можно считать, что при значении кривизны  $k > 108$  верхнее критическое усилие (14)

$$\bar{N}_{1B} = \frac{k}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} = 0,605 \cdot k \quad (\mu = 0,3) \quad (16)$$

и оно будет таким же, как и для замкнутой цилиндрической оболочки.

В силу выражения (13) при значении  $\vartheta = 1$  нижнее критическое усилие

$$\bar{N}_{1H} = \frac{\pi^2 n_H^2}{3(1-\mu^2)} + \frac{k^2}{4\pi^2 n_H^2} - \frac{200k^2}{9\phi^2 \pi^6 n_H^6}, \quad (17)$$

где число полуволн  $n_H$  определяется из условия  $\partial \bar{N}_{1H} / \partial n_H = 0$ , используя которое, получим

$$n_H = \sqrt{\frac{k}{2\sqrt{2}\pi^2} \sqrt{3(1-\mu^2)}} \cdot \sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{1422}{(1-\mu^2)\phi^2 k^2}}} = \sqrt{\frac{k}{17,0}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{40,0}{\phi k}\right)^2}} \quad (\mu = 0,3). \quad (18)$$

Тогда целым числам  $n_H = 1, 3, \dots$  отвечают значения кривизны панели  $k = 24, 108, \dots$ . Отметим, что здесь числа  $n_H$  могут быть только нечетными, т.к. если эти числа четные, то форма деформированной поверхности (5) будет соответствовать амплитудам прогибов  $f$  разных знаков (к центру и от центра кривизны панели), что противоречит экспериментам [6]. Очевидно, что при значении кривизны  $k \leq 108$  следует принимать  $n_H = 1$ . С учетом результатов соответствующих вычислений можно считать, что при значении кривизны  $k > 108$  нижнее критическое усилие (17)

$$\bar{N}_{1H} = (2,760 - 2,500 / \phi^2) \cdot k \quad (\mu = 0,3). \quad (19)$$

Результаты расчетов по формулам (14)...(19) представлены графически (рис. 2). На основании этих результатов, а также численных вычислений, полученных с помощью комплекса ANSYS/Structural, можно получить следующие формулы для определения критических усилий при сжатии цилиндрической панели вдоль образующей в зависимости от ее кривизны  $k$ :

— для верхнего критического усилия

$$\text{при } k \leq 24 \quad \bar{N}_{1B} = 3,61 + 0,0253 \cdot k^2 \quad (n_B = 1),$$

$$\text{при } 24 \leq k \leq 72 \quad \bar{N}_{1B} = 14,4 + 0,00632 \cdot k^2 \quad (n_B = 2),$$

$$\text{при } 72 \leq k \leq 108 \quad \bar{N}_{1B} = 32,5 + 0,00281 \cdot k^2 \quad (n_B = 3),$$

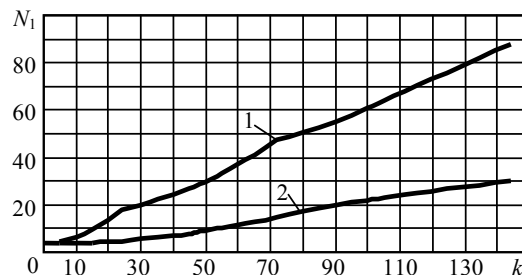


Рис. 2. Зависимости критических усилий от кривизны поверхности панели  $k$ : 1 — верхнее критическое усилие  $\bar{N}_{1B}$ ; 2 — нижнее критическое усилие  $\bar{N}_{1H}$

$$\text{при } k > 108 \quad \bar{N}_{\text{IB}} = 0,605 \cdot k ;$$

— для нижнего критического усилия

$$\text{при } k \leq 108 \quad \bar{N}_{\text{IH}} = 3,61 + (0,02533 - 0,02311 / \phi^2) k^2 \quad (n_{\text{H}} = 1) .$$

$$\text{при } k > 108 \quad \bar{N}_{\text{IH}} = (2,760 - 2,500 / \phi^2) k .$$

Следует отметить, что практически всегда присущие оболочечным элементам конструкций отклонения от правильной формы поверхности (начальные прогибы, вмятины, отдулины и др.) могут привести к существенному снижению верхних критических усилий, и сжимающая эксплуатационная нагрузка по отношению к этим усилиям должна выбираться с некоторым запасом [1]. Требование же полной безопасности конструкции с позиции обеспечения устойчивости ее элементов подразумевает, что эта нагрузка должна быть меньше нижних критических усилий, которые практически не зависят от отмеченных факторов. Хотя это требование и кажется излишним, практические расчеты цилиндрических панелей на устойчивость целесообразно вести с учетом их деформирования при больших прогибах, располагая графиками, аналогичными приведенным на рисунке 2, поскольку, очевидно, что реальные критические усилия больше нижних критических усилий и меньше верхних. При таком подходе устойчивость цилиндрических панелей при сжатии всегда будет обеспечена с определенным запасом.

### Литература

1. Биргер, И.А. Расчет на прочность деталей машин: справочник / И.А. Биргер, Б.Ф. Шорр, Г.Б. Иосилевич. — М.: Машиностроение, 1979. — 702 с.
2. Алфутов, Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем / Н.А. Алфутов. — М.: Машиностроение, 1991. — 336 с.
3. Farshad, M. Stability of structures / M. Farshad. — London: Elsevier Science Publishing Ltd, 1994. — 425 p.
4. Yoo Chai, H. Stability of structures: principles and applications / H. Yoo Chai, C. Lee Sung. — London: Elsevier Science Publishing Ltd, 2011. — 529 p.
5. Басов, К.А. ANSYS: справочник / К.А. Басов. — М.: ДМК Пресс, 2005. — 640 с.
6. Вольмир, А.С. Устойчивость деформируемых систем / А.С. Вольмир. — М.: Наука, 1967. — 984 с.
7. Васидзу, К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности / К. Васидзу. — М.: Мир, 1987. — 544 с.

### References

1. Birger, I.A. Raschet na prochnost detaley mashin: spravochnik [Strength analysis of machine parts: Handbook]. / I.A. Birger, B.F. Shorr, G.B. Iosilevich. — Moscow, 1979. — 702 pp.
2. Alfutov, N.A. Osnovy rascheta na ustoychivost uprugikh sistem [Principles of calculation of elastic systems on stability]. / N.A. Alfutov. — Moscow, 1991. — 336 pp.
3. Farshad, M. Stability of structures / M. Farshad. — London: Elsevier Science Publishing Ltd, 1994. — 425 pp.
4. Yoo Chai, H. Stability of structures: principles and applications / H. Yoo Chai, C. Lee Sung. — London: Elsevier Science Publishing Ltd, 2011. — 529 pp.
5. Basov, K.A. ANSYS: spravochnik [ANSYS: reference book]. / K.A. Basov. — Moscow, 2005. — 640 pp.
6. Volmir, A.S. Ustoychivost deformiruemykh sistem [Stability of deformable systems] / A.S. Volmir. — Moscow, 1967. — 984 pp.
7. Vaidzu, K. Variatsionnye metody v teorii uprugosti i plastichnosti [Variational methods in the theory of elasticity and plasticity] / K. Vaidzu. — Moscow, 1987. — 544 pp.

Рецензент д-р техн. наук, проф. Одес. нац. политехн. ун-та Дашенко А.Ф.

Поступила в редакцию 30 сентября 2012 г.