

УДК 62-752.2

І. І. Сидоренко, д-р техн. наук,
А. В. Ткачов, О. А. Ткачов, кандидати техн. наук

УЗАГАЛЬНЕНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПАСИВНИХ ДИНАМІЧНИХ ГАСНИКІВ КОЛИВАНЬ З ВРАХУВАННЯМ НЕПРУЖНОЇ СИЛИ ДИСИПАЦІЇ

***Анотація.** Побудована математичної моделі пасивного динамічного гасника коливань з додатковою механічною структурою. Визначено три види нелінійності динамічної характеристики, що реалізують гасники, а їхні вирази відображені інтерполяційним поліномом найкращого наближення. Проведені дослідження з метою встановлення непружної сили дисипації, визначено величину безрозмірного коефіцієнта поглинання, побудовані графіки функції в'язкого опору.*

***Ключові слова:** математична модель, динамічні характеристики, непружна сила дисипації, коефіцієнт поглинання, нелінійна система, додаткова механічна структура*

I. I. Sidorenko, ScD.,
A. V. Tkachev, Ph D., **A. A. Tkachev**, PhD.

GENERALIZED MATHEMATICAL MODEL PASSIVE DYNAMIC VIBRATION ABSORBER WITH ALLOWANCE FOR INELASTICITY POWER DISSIPATION

***Abstract.** This paper presents the preparation of a mathematical model of passive dynamic vibration absorber with additional mechanical structure. It identified three types of nonlinear dynamic characteristics, realizing dampers, and their expressions reflected the interpolation polynomial of best approximation. Studies to determine the inelastic dissipation of forces that determines the irreversible dissipation of energy in the environment. This value is determined by the dimensionless absorption coefficient and provides its data for the principal components of the synthesized absorbers. On the basis of these data, for a more accurate display of forces of inelastic dissipation calculations conducted practical function of resistance dampers, their connection, depending on the dynamic characteristics of the nonlinearity. The developed mathematical model can be used for any passive dynamic damper on the condition that its dynamic response given by a polynomial, and the expectation of the absorption coefficient is set taking into account the composition of the mechanical structure of the device.*

***Keywords:** mathematical model, dynamic characteristics, the inelastic power dissipation, absorption coefficient, nonlinear system, additional mechanical structure*

И. И. Сидоренко, д-р техн. наук,
А. В. Ткачев, А. А. Ткачев, кандидаты техн. наук

ОБОБЩЕННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПАССИВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ГАСИТЕЛЕЙ КОЛЕБАНИЙ С УЧЕТОМ НЕУПРУГОЙ СИЛЫ ДИССИПАЦИИ

***Аннотация.** Составлена математическая модель пассивного динамического гасителя колебаний с дополнительной механической структурой. Определены три вида нелинейности динамической характеристики, которую реализуют гасители, а их выражения отражены интерполяционным полиномом наилучшего приближения. Проведены исследования с целью установления неупругой силы диссипации, определена величина безразмерного коэффициента поглощения, построены графики функции вязкого сопротивления.*

***Ключевые слова:** математическая модель, динамические характеристики, неупругая сила диссипации, коэффициент поглощения, нелинейная система, дополнительная механическая структура*

Вступ. Вибір методів математичного дослідження пасивних динамічних гасників коливань з додатковою механічною структурою (ПДГК з ДМС) залежить від виду його динамічних характеристик, характеру збудовуючих впливів, необхідної частоти налаштування. Враховуючи, що нелінійність динамічної характеристики є невід'ємною ознакою ПДГК з ДМС, завдання математичного

дослідження повинні вирішуватися у нелінійній постановці.

Аналіз досліджень та публікацій. Попередньо проведеними аналітичними дослідженнями встановлено, що при складанні узагальненої математичної моделі пасивного динамічного гасника коливань з додатковою механічною структурою більш точні оцінки оптимальних параметрів та ефективності гасника можуть бути отримані при врахуванні непружної сили дисипації системи [4]. При цьому оптимізація параметрів гасників знач-

© Сидоренко І.І., Ткачов А.В.,
Ткачов О.А., 2016

но ускладнюється, тому в технічній літературі обмежуються локальними рішеннями, що дозволяє не враховувати вплив непружного опору системи, що піддається захисту, та елементів в конструкції гасника [5 – 6]. В зв'язку з цим оцінка впливу непружного опору на оптимальні параметри та ефективність пасивних динамічних гасників коливань є актуальною науковою задачею.

Мета та постановка задачі. Метою проведених досліджень є: складання узагальненої математичної моделі пасивних динамічних гасників коливань з додатковою механічною структурою з урахуванням непружної сили дисипації; визначення типових, за конструктивними особливостями, динамічних характеристик для проведення математичних досліджень коливних процесів у двомасових механічних системах, до складу яких він входить.

Теоретичні дослідження. При математичному моделюванні ПДГК з ДМС у складі двомасової коливної системи його розглядають як додаткову масу з пружним зв'язком, що встановлюється на масі – об'єкті, що підлягає захисту, яка у свою чергу через свій пружний зв'язок пов'язана з джерелом коливань. При цьому вважають, що величина деформації змінюється з часом $x(t)$, а динамічна характеристика (сила пружного зв'язку) має дві складові:

$$F_{\text{дин}}(x, \dot{x}) = F(x) + F_{\text{д}}(\dot{x}), \quad (1)$$

де: $F(x)$ – динамічна характеристика, яка залежить від жорсткості пружних елементів застосованих у гаснику;

$F_{\text{д}}(\dot{x})$ – непружна сила дисипації, що означає незворотне розсіювання енергії в навколишнє середовище, в матеріалі пружних елементів, а також у рухомих з'єднаннях деталей конструкції.

Попередньо проведені дослідження свідчать, що синтезовані ПДГК з ДМС на базі металевих пружних елементів у вигляді витих циліндричних пружин, в силу їхніх конструктивних особливостей, здатні реалізувати динамічні характеристики даффінговського типу «м'якого» і «жорсткого» видів нелінійності, а також комбіновані динамічні характеристики [1; 2; 8]. При математичному моделюванні подібних пристроїв їх динамічні

характеристики часто лінеаризують і приводять до виду лінійних або кусково-лінійних систем, у яких сила дисипації залежить від швидкості руху мас коливної системи або від швидкості деформації пружного елемента. Сила дисипації, що виникає при малих коливаннях у в'язкому середовищі (газі або рідині), а також в гідравлічних демпферах, описується залежністю:

$$F_{\text{д}}(\dot{x}) = b_1 \dot{x}, \quad (2)$$

де: $b_1 = \text{const}$ – розмірний коефіцієнт в'язкого опору.

При високих швидкостях коливань встановлена квадратична залежність:

$$F_{\text{д}}(\dot{x}) = b_2 \dot{x}^2 \text{sgn } \dot{x}, \quad (3)$$

де: $b_2 = \text{const}$ – розмірний коефіцієнт в'язкого опору при високих швидкостях коливань.

При використанні в конструкціях пружних або дисипативних пристроїв елементів сухого тертя характеристика сил дисипації має вигляд

$$F_{\text{д}}(\dot{x}) = b_0 \dot{x}^2 \text{sgn } \dot{x}, \quad (4)$$

де: $b_0 = \text{const}$ – розмірний коефіцієнт сухого тертя.

Проведені дослідження дозволили узагальнити наведені вище залежності у вигляді єдиної нелінійної характеристики сил дисипації у ПДГК з ДМС:

$$F_{\text{д}}(\dot{x}) = b_{\eta} |\dot{x}|^{\eta} \text{sgn } \dot{x}, \quad (5)$$

де: η – постійна, що відповідає природі сил дисипації;

b_{η} – розмірний коефіцієнт опору.

Постійна η може приймати значення 1, 2 і 0, при яких характеристика (5) описується відповідно до залежностей (2) – (4). Враховуючи, що застосування нелінійних ПДГК з ДМС планується при малих коливаннях в середовищі газу, їхню характеристику $F_{\text{д}}(\dot{x})$ можна описати залежністю (2). При цьому коефіцієнт в'язкого опору b_1 потрібно визначати експериментально [10]. Для цього задають функцію відхилення досліджуваного ПДГК з ДМС від положення пружної рівноваги у вигляді $x = x_0 \cos(\omega t)$ з частотою ω і визначають експериментальну характеристику $F_e(x)$. Одержаний графік $F_e(x)$ має форму петлі гістерезису, оскільки через наявність сил дисипації експеримен-

тально встановлювана характеристика виявляється різною в залежності від напрямку швидкості \dot{x} . Площа петлі гістерезису S у визначеному масштабі являє собою роботу сил пружного зв'язку $F_n(x, \dot{x})$ за період коливань з частотою ω і визначається інтегральною функцією:

$$S = \oint F_n(x, \dot{x}) dx = \int_0^{2\pi} F_e(\dot{x}) \dot{x} dt. \quad (6)$$

Оскільки робота консервативних пружних сил за даний період дорівнює нулю, остільки площа петлі дорівнює роботі сил дисипації за цикл деформації [9].

Якщо сила дисипації пропорційна швидкості, то петля має форму еліпса, площа якого дорівнює:

$$S = \int_0^{2\pi} (c_{np} x_0 \cos \omega t - b_1 \omega x_0 \sin \omega t) \times (-b_1 \omega x_0 \sin \omega t) dt = \pi b_1 \omega x_0^2. \quad (7)$$

де: x_0 – початкове відхилення системи від положення пружної рівноваги;

c_{np} – призведена жорсткість пружних елементів гасника.

Нелінійність сил дисипації в реальній механічній системі призводить до того, що форма петлі відрізняється від еліптичної. У цьому випадку коефіцієнт b_1 можна встановити виходячи з рівності площ реальної петлі і петлі, отриманої за умови, що сила опору лінійно залежить від \dot{x} . Тоді величина коефіцієнта опору b_1 , яка залежить від частоти ω і амплітуди x_0 коливного процесу, визначається залежністю:

$$b_1 = \frac{S_e}{\pi \omega x_0^2}, \quad (8)$$

де: S_e – площа петлі, яка отримана у експерименті.

На етапі проектування нових конструкцій ПДГК з ДМС зважаючи на відсутність зразків для експериментальних досліджень, провести випробування для визначення коефіцієнту опору не представляється можливим. У цьому випадку величину при зв'язку демпфіруванні рекомендують розраховувати з урахуванням частоти коливального процесу по залежності:

$$b_1(\omega) = \frac{\psi c}{2\pi\omega}, \quad (9)$$

де: ψ – безрозмірний коефіцієнт поглинання.

Величину безрозмірного коефіцієнта поглинання ψ вибирають з діапазону його значень, отриманих при експериментальних дослідженнях певних механізмів, пристроїв, кінематичних пар, ланок. При проведенні таких експериментів необхідно забезпечити адекватність середовища експерименту реальним умовам експлуатації. Дані за коефіцієнтом поглинання для основних складових елементів синтезованих ПДГК з ДМС наведені в таблиці 1.

Використання виразу (9) для проектних розрахунків дозволяє при передбачуваній розсіювальній здатності системи, яка задається коефіцієнтом поглинання, встановити функцію незалежно від характеристики $F_e(x)$ і форми петлі гістерезису.

Синтезовані пасивні динамічні гасники коливань з додатковою механічною структурою, завдяки своїм структурним особливостям, реалізують не тільки динамічні характеристики дафінгівського типу, але й більш складні функції, наприклад, комбіновані.

1. Значення коефіцієнту поглинання ψ за даними експериментів

№	Механізми, пристрої, кінематичні пари	Діапазон значень
1	Зубчасті передачі	0,2 , ... , 0,6
2	Кулачкові механізми	0,18 , ... , 0,8
3	Виті циліндричні пружини	0,065 , ... , 0,25
4	Направляючі ковзання	0,1 , ... , 0,65
5	Направляючі кочення	0,08 , ... , 0,45

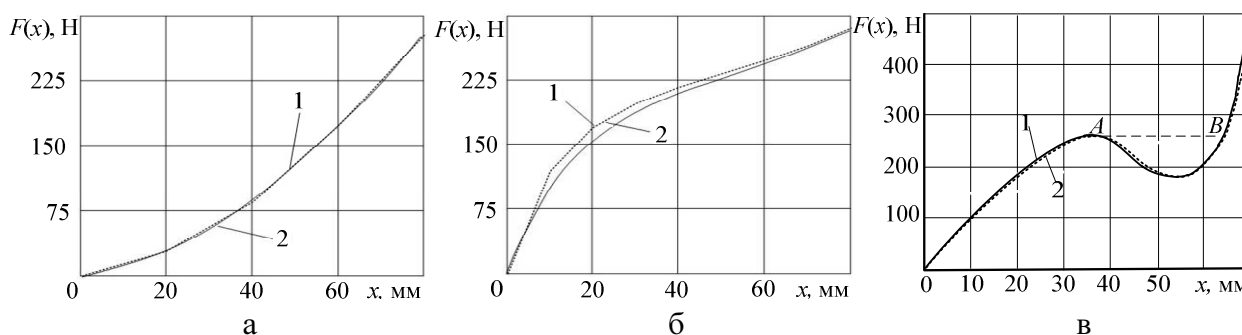


Рис 1. Графіки кубічно-нелінійних динамічних характеристик: «м'який» вид характеристики (а); жорсткий вид характеристики (б); комбінований вид характеристики (в) (1 – розрахункова крива, 2 – поліноміальна)

Враховуючи, що одна і та ж динамічна характеристика може бути отримана за допомогою різних пасивних динамічних гасників коливань з додатковою механічною структурою, а також здатність даних пристроїв реалізовувати безліч різноманітних характеристик, з метою конкретизації подальших досліджень встановлено три види нелінійності динамічної характеристики ПДГК з ДМС у визначеному діапазоні робочого переміщення маси гасника [3 – 4].

За першу і другу типові нелінійності динамічної характеристики приймемо кубічно-нелінійні характеристики «м'якого» і «жорсткого» видів (рис. 1, а, б). Кубічно-нелінійна динамічна «м'якого» виду може бути реалізована як у ПДГК з ДМС у вигляді шарнірно – важільного механізму (кількість пружин – $n = 2$; жорсткість пружини – $c = 5$ Н/мм, початкова довжина пружини – $L = 120$ мм; довжина важеля – $r = 65$ мм), так і у ПДГК з ДМС у вигляді кулачкового механізму (початкова довжина пружини – $L = 112$ мм; кривизна пазу – $y(x) = 0,034x^3 + 0,034x + 0,3$).

Кубічно-нелінійна динамічна «жорсткого» виду може бути реалізована як у ПДГК з ДМС у вигляді шарнірно – важільного механізму (кількість пружин – $n = 2$; жорсткість пружини – $c = 5$ Н/м, початкова довжина пружини – $L = 112$ мм; додаткова механічна структура – від'єднана), так і у ПДГК з ДМС у вигляді кулачкового механізму (початкова довжина пружини – $L = 112$ мм кривизна пазу – $y(x) = -0,021x^3 - 0,041x + 0,28$).

Оскільки коливальні процеси в механічних системах з аналогічною нелінійністю характеристик досить добре вивчені, то наявні результати можна використовувати як

при перевірці прийнятих в роботі методів розрахунку та математичного апарату, так і при проведенні порівняльного аналізу коливальних процесів з іншими видами нелінійності динамічних характеристик.

Третя типова нелінійність відповідає комбінованій характеристиці (рис. 1, в). Така динамічна характеристика може бути реалізована тільки у ПДГК з ДМС у вигляді кулачкового механізму (початкова довжина пружини – $L = 112$ мм і кривизна пазу – $y(x) = -0,021x^3 - 0,041x + 0,28$). Динамічна характеристика має дві ділянки збільшення (орієнтовно на першій та третій третині робочого ходу) та одну ділянку зменшення (орієнтовно на другій третині робочого ходу).

Враховуючи, що вирази, які описують наведені динамічні характеристики в реальних пасивних динамічних гасниках коливань з додатковою механічною структурою, є досить громіздкими, то з метою їхнього узагальнення і спрощення подальших розрахунків кожна з них була відображена інтерполяційним поліномом найкращого наближення згідно з існуючими рекомендаціями:

$$F(x) = \sum_{i=1}^N a_i x^i, \quad (10)$$

де: a_i – відповідний коефіцієнт при елементі поліному i -го ступеня при достатньому ступені полінома $N > 3$.

Інтерполяційні поліноми отримані методом найменших квадратів з використанням програмного математичного пакета *Maple 18* [7]. Коефіцієнти інтерполяційних поліномів для кожної з розглянутих динамічних характеристик наведені в таблиці 2.

Лінеаризація або приведення наданих нелінійних характеристик до кусково-

лінійного вигляду з метою визначення коефіцієнта в'язкого опору $b_1 = \text{const}$ істотно знижує точність моделювання коливальних процесів у механічній системі, особливо при великих значеннях амплітуди. Більш точним є відображення сил дисипації за допомогою функції в'язкого опору

$$b_1(x, \omega) = c(x) \frac{\psi_\Sigma}{\pi\omega}, \quad (11)$$

що залежить від функції зведеної жорсткості пружних елементів пристрою $c(x) = dF(x)/dx$ і безрозмірного коефіцієнта поглинання у системі ψ , для визначення якого є певна статистика даних, отриманих при гармонійному обуренні (див. таблицю).

У конструкцію пасивного динамічного гасника коливань з додатковою механічною структурою, крім пружних елементів, входять направляючі і зворотний зв'язок у вигляді додаткового механічного контуру, тому для розрахунків пристроїв такого типу доцільно використовувати вірогідну оцінку коефіцієнта поглинання:

$$b_1(x, \omega) = c(x) \frac{\psi_\Sigma}{\pi\omega}, \quad (12)$$

де: $\bar{\psi}_i \forall i, n$ – математичні очікування коефіцієнтів поглинання відповідно для пружних елементів, направляючих і додаткових механічних структур.

Для практичних розрахунків функції опору $b_1(x, \omega)$ по залежності (11) статистично обґрунтованим є наступний діапазон значень коефіцієнта поглинання $0,12 \leq \psi_\Sigma \leq 0,45$. У припущенні про нормальний розподіл випадкової величини ψ_Σ і її складових: для пружних елементів $\psi_{пр}$, для напрямних ψ_n , для додаткових механічних структур $\psi_{дмс}$

встановлені значення відповідного математичного очікування $\bar{\psi}_\Sigma = 0,285$ і дисперсії $\sigma^2 = 3,025 \cdot 10^{-3}$.

Застосування функції (12) є обґрунтованим при аналізі гармонійних і близьких до гармонійних коливальних процесів. У випадках, що потребують підвищеної точності розрахунків, необхідно додатково враховувати внутрішню тертя в матеріалі пружних елементів, а також конструкційне демпфірування.

Аналіз виразу (11) для нелінійності динамічних характеристик пасивних динамічних гасників коливань з додатковою механічною структурою, що відповідає «м'якій» та «жорсткій» характеристикам, дозволив встановити наступне: в системі з нелінійністю «м'якого» виду функція опору нелінійно зменшується з ростом амплітуди коливань (рис. 2, а, крива 1), а в системі з нелінійністю «жорсткого» виду – нелінійно збільшується (рис. 2, а, крива 2). До того ж в обох випадках значення функції опору при низьких ($x \leq 10$ мм) і високих ($x \leq 50$ мм) значеннях амплітуд відрізняються в 1,5...2 рази. Збільшення частоти коливань при нелінійності «м'якого» виду призводить до збільшення кута нахилу функції опору (рис. 2, а, крива 3). Для моделі системи з комбінованою динамічною характеристикою, встановлено, що функція опору має одну ділянку нелінійного зменшення (рис. 2, б, ділянка AB) і одну ділянку нелінійного збільшення (ділянка BC). У діапазоні амплітуд $10 \leq x \leq 20$ мм, значення функції опору мінімально [3].

2. Коефіцієнти a_i і K_R інтерполяційного поліному найкращого наближення динамічних характеристик для математичної моделі ПДГК з ДМС

Вид та позначення динамічної характеристики	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
Кубічно-нелінійна «м'якого» виду, D1	0	0	-0,0012	0,0781	4,51	1,02
Кубічно-нелінійна «жорсткого» виду, D2	-	-	0,0006	0,0107	3,056	1,77
Комбінована, KM	10^{-6}	10^{-6}	-0,0027	$2 \cdot 10^{-13}$	2,5	$3 \cdot 10^{-10}$

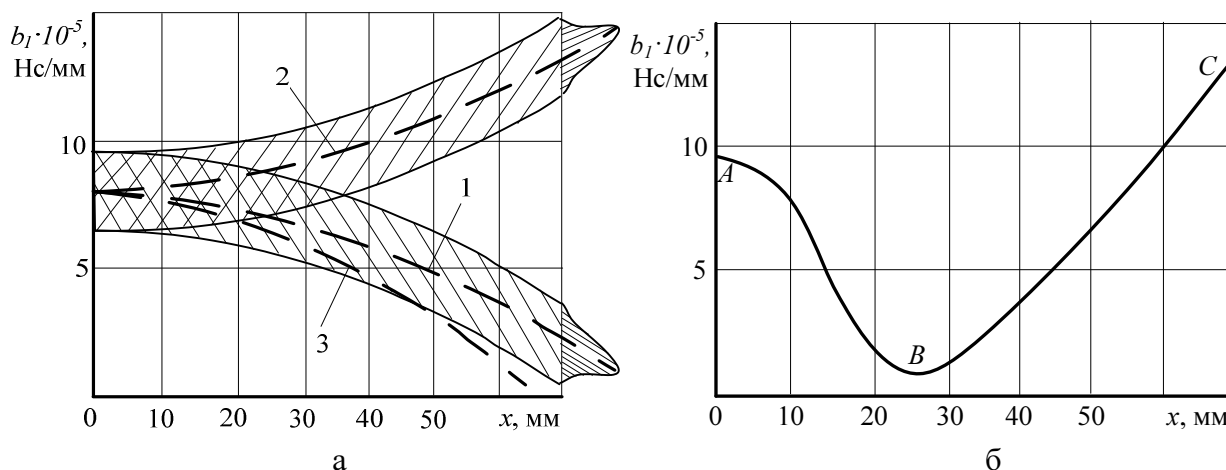


Рис. 2. Графіки зміни функції опору для моделей ПДГК з ДМС: з «м'якою» та «жорсткою» динамічними характеристиками, криві 1 та 2 при $\omega = 1,5 \text{ c}^{-1}$, 3 – $\omega = 2,5 \text{ c}^{-1}$ (а); з комбінованою динамічною характеристикою при $\omega = 1,5 \text{ c}^{-1}$ (б)

Висновки. За результатами проведених досліджень зроблені наступні висновки:

1. Розроблено узагальнену математичну модель пасивного динамічного гасника коливань з додатковою механічною структурою, яка є адекватним відображенням динамічної характеристики у вигляді адитивної функції, яку він відтворює. Отримана функція враховує тип додаткової механічної структури, спосіб реалізації динамічної характеристики, фактори, що визначають дисипацію.

2. Розроблена математична модель може використовуватися для будь-якого пасивного динамічного гасника коливань за умови, що його динамічна характеристика задається відповідним поліномом, а математичне очікування коефіцієнта поглинання $\bar{\psi}_\Sigma$ встановлено з урахуванням складу механічної структури пристрою.

Список використаної літератури

1. Сидоренко І. Динамічні характеристики пружинного погашувача коливань розширеної структури / І. І. Сидоренко, О. А. Ткачов, К. Г. Мосієнко // *Праці Одес. політехн. ун-ту.* – Одеса : ТЭС.– Вип. 1(40). – 2013. – С. 54 – 59.

2. Сидоренко І. І. Динамічні характеристики пружинного погашувача коливань з структурою розширеною кулачковим механізмом / І. І. Сидоренко, Г. Б. Параско, О. А. Ткачов // *Вісн. Хмельницького нац. ун-ту.* – Хмельницький : – 2014. – Вип. 1 (209). – С. 16 – 21.

3. Алабужев П. М. Виброзащитные системы с квазиулевою жесткостью / П. М. Алабужев, А. А. Гритчин, И. И. Ким. – Л. : Машиностроение, 1986. – 96 с.

4. Коловский М. З. Нелинейная теория виброзащитных систем / М. З. Коловский. – М. : Наука, 1966. – 320 с.

5. Коренев Б. Г. Динамические гасители колебаний : теория и технические приложения / Б. Г. Коренев, Л. М. Резников. – М. : Наука, 1988. – 304 с.

6. Гутиря С. М. Фактор дисипації при моделюванні пасивних віброізолюючих пристроїв з механічним зворотним зв'язком / С. М. Гутиря, І. І. Сидоренко // *Машинознавство.* – 2008. – № 2 (128). – С. 28 – 31.

7. Shampine L.F., (2000), Initial Value Problems for ODEs in Problem Solving Environments, *J. Comp.*, Vol. 125 (1 – 2), pp. 31 – 40.

8. Duffing G., (1958), Erzwungene Schwingungen bei Veränderlicher Eigenfrequenz, Braunschweig, F. Vieweg und Sohn, – 134 p.

9. Gutyrya S., and Sidorenko I., (2008), Dissipation Factor at Simulating Oscilating Systems with Elastic Response of Duffing type, *MOTROL*, Vol. 10 A, Lublin, pp. 47 – 52.

10. Пановко Я. Г. Диссипативные системы / Я. Г. Пановко // *Вибрации в технике: справочник.Машиностроение.Колебания нелинейных механических систем*, в 6 т. – М. : – 1980. – Т. 2.– С. 12 – 126.

Отримано 10.06.2016

Reference

1. Sidorenko I., Tkachev A.A., and Mosienko K.G. Dynamichni harakterystyky pruzhynnogo pogashuvacha kolyvan' rozshyrenoi' struktury [The Dynamic Characteristics of the Spring Shock Absorber], (2013), *Proceedings of Odessa. Politehn. Univ.*, Odessa, Ukraine, *TES*, Vol. 1(40), pp. 54 – 59 (In Ukrainian).

2. Sidorenko I.I., Parasko G.B., and Tkachov O.A. Dynamichni harakterystyky pruzhynnogo pogashuvacha kolyvan' z strukturoju rozshyrenuju kulachkovym mehanizmom [The Dynamic Characteristics of the Spring shock Absorber with the Structure of the Extended cam Mechanism], (2014), *Journal of Khmelnytsky Nat. Univ.*, Khmelnytskyi, Ukraine, Vol. 1 (209), pp. 16 – 21 (In Ukrainian).

3. Alabuzhev P.M., Gritchin A.A., and Kim I.I. Vibrozashhitnye sistemy s kvazinulevoj zhestkost'ju [Vibration System with quasi-zero Stiffness], (1986), Leningrad, Russian Federation,

Mechanical engineering, 96 p. (In Russian).

4. Kolovskiy M.Z. Nelinejnaja teorija vibrozashhitnyh sistem [Nonlinear theory of Vibration-protection Systems], (1966), Moscow, Russian Federation, *Nauka*, 320 p. (In Russian).

5. Korenev B.G., and Reznikov L.M. Dinamicheskie gasiteli kolebanij: teorija i tehnicheskie prilozhenija [Dynamic Dampers theory and Technical Application], (1988), Moscow, Russian Federation, *Nauka*, 304 p. (In Russian).

6. Gutyrja S.M., and Sydorenko I.I. Faktor dysypacii pry modeljuvanni pasyvnyh vibrozoljjujuchykh prystroi'v z mehanichnym zvorotnym zv'jazkom [Dissipation Factor when Simulating Passive Vibration Isolating Device with Mechanical Feedback], (2008), *Mashynoznavstvo*, No. 2 (128), pp. 28 – 31 (In Ukrainian).

7. Shampine L.F., (2000), Initial Value Problems for ODEs in Problem Solving Environments, *J. Comp.*, Vol. 125 (1 – 2), pp. 31 – 40 (In English).

8. Duffing G., (1958), *Erzwungene Schwingungen bei veranderlicher Eigenfrequenz*, Braunschweig: F. Vieweg und Sohn, – 134 p. (In English).

9. Gutyrja S., and Sidorenko I., (2008), Dissipation Factor at Simulating Oscilating Systems with Elastic Response of Duffing type, *MOTROL*, Vol. 10 A, Lublin, pp. 47 – 52 (In English).

10. Panovko Ja.G. Dissipativnye sistemy [Dissipative System], (1980), *Vibracii v Tehnike: Spravochnik v 6 t.*, Moscow, Russian Federation, *Mashinostroenie*, Vol. 2, *Kolebanija Nelinejnyh Mehanicheskikh Sistem*, pp. 12 – 126 (In Russian).



Сидоренко

Ігор Іванович,
д-р техн. наук,
професор, завідувач
кафедри Теоретичної ме-
ханіки Одеського нац. політехн. ун-ту.
E-mail: igs@ukr.net



Ткачов

Анатолій Вікторович,
канд. техн. наук, доцент,
завідувач кафедри Загальноосвітньої підготовки
Одеського нац. політехн. ун-ту.
E-mail:
tkachov@ui.opu.ua



Ткачов

Олексій Анатолійович,
канд. техн. наук, ст. ви-
кладач кафедри Автомо-
більного транспорту Оде-
ського нац. політехн. ун-
ту.
E-mail:
aleksey.tkachev.88@mail.ru