

Усов А.В., Савельєва О.С., Становська І.І. Перпері А.О.

---

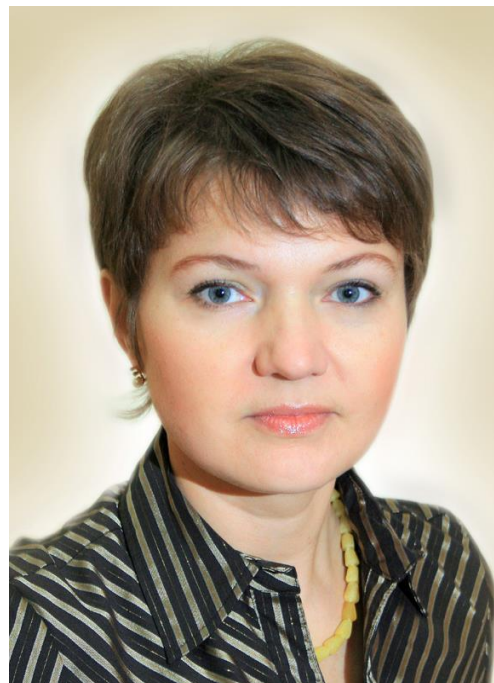
---

МАТЕМАТИЧНІ  
МЕТОДИ  
МОДЕЛЮВАННЯ



**Усов Анатолій Васильович**

Лауреат Державної премії України,  
доктор технічних наук, професор,  
завідувач кафедри вищої математики  
та моделювання систем  
Одеського національного  
політехнічного університету



**Савельєва Оксана Степанівна**

доктор технічних наук, професор,  
професор кафедри нафтогазового та  
хімічного машинобудування  
Одеського національного  
політехнічного університету



**Становська Іраїда Іванівна**

доктор технічних наук, доцент,  
професор кафедри вищої математики  
та моделювання систем Одеського  
національного політехнічного  
університету



**Перпері Алла Олександрівна**

кандидат технічних наук, доцент,  
завідувачка кафедри нарисної  
геометрії та інженерної графіки  
будівництва Одеської державної  
академії будівництва та архітектури

# **МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ**

**Усов А.В., Савельєва О.С., Становська І.І., Перпері А.О.**

Усов А.В., Савельєва О.С., Становська І.І., Перпері А.О.

## МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ

Під. науковою редакцією докт. техн. наук, проф. Становського О.Л.

Затверджено Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України  
як підручник для студентів вищих навчальних закладів

Одеса – 2020



ББК В22  
М34  
УДК 51-74: 004.942

**Усов А.В., Савельєва О.С., Становська І.І., Перпері А.О.**

М24 Математичні методи моделювання. Підручник / Під ред. О.Л. Становського. – Одеса: ВМВ, 2011. – 500 с.

У підручнику розглянуті методи та засоби математичного моделювання об'єктів машинобудування (конструкцій, технологічних процесів, тощо). Наведені основні за-сади побудови та експлуатації аналітичних, скінченноелементних, структурних та ін-телектуальних математичних моделей.

Підручник розрахований на студентів і аспірантів вищих технічних навчальних закладів, які навчаються за машинобудівними спеціальностями.

Рецензенти: **О.Ф. Дащенко**, лауреат Державної премії України, Заслужений діяч нау-ки і техніки України, д-р техн. наук, професор, директор Інституту ма-шинобудування Одеського національного політехнічного університету;  
**В.М. Варганян**, д-р техн. наук, професор, зав. кафедри економіки і мар-кетингу Харківського національного аерокосмічного університету;  
**В.Б. Мокін**, д-р техн. наук, професор, зав. кафедри моделювання та мо-ніторингу складних систем Вінницького національного технічного уні-верситету;

**Рекомендований** до видання рішенням Вченої ради Одеського національного політе-хнічного університету 26 квітня 2011 року (Протокол № 9)

**Затверджено** Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України як підручник для студентів вищих навчальних закладів (лист № 1/11-7323 від 5 серпня 2011 р.)

ISBN

© Усов А.В., Савельєва О.С., Становська І.І., Перпері А.О., 2020

## ПЕРЕДМОВА РЕДАКТОРА

Моделювання – побудова та дослідження *моделі* будь-якого об'єкта (*оригінала, прототипу*) з метою одержання знань про останній методом *аналогії*.  
...Модель повинна представляти оригінал в тому ж сенсі, в якому він цікавить дослідника.

**Філософський словник**

*Я образ твоїй намалював,  
Відбив у ньому нескінченне...  
У нього щастя я благав,  
І поринав у нездійсненне!..*

З раннього дитинства людина захоплюється моделюванням. Хлопчики майструють моделі літаків та космічних кораблів. Дівчата моделюють різноманітні аспекти нашого побуту. Вони ще не знаються в математиці, і тому їхні моделі не є математичними. Їх намагання отримати якнайближчу до оригіналу модель ще не обтяжені потребами математично доводити її адекватність, точність та стійкість.

Коли мій син був ще маленьким, а комп'ютери надто дорогими, зробив він якось собі комп'ютер з паперу, намалював на клавіатурі квадратики з буквами та й заходився в ці букви тикати пальцями. Дивитись на це без розчулення було неможливо... І лише набагато пізніше я зрозумів, чому. Адже насправді дитина зробила модель не обчислювальної системи, а *свого майже матеріального бажання* мати це чудо техніки у себе!

Тепер син вже виріс, захистив дисертацію з комп'ютерних наук, але створена ним модель, як посмішка Чеширського Кота досі витає у повітрі, відбиваючи найскладнішу для формалізації сутність людини – її почуття!

Підручник, який Ви взяли в руки, створено саме на межі моделювання почуттів – настільки широкий клас задач «одержання знань про об'єкт» він охоплює.

Залишилося зовсім небагато: «навчити» цим почуттям той самий комп'ютер, зробити його союзником в усіх аспектах людської діяльності. Єди-

ною спільною мовою для такого навчання є ті ж самі математичні моделі. Але ж їх дуже багато! В світі існує нескінченна кількість об'єктів. В кожного з них – нескінченна кількість моделей! Підрахуйте самі, скільки ж треба знати та вміти, щоб навчитися будувати та використовувати цей океан моделей! Путівником в цьому океані і є підручник, який ви тримаєте в руках.

Тим не менш, авторський колектив усвідомлює, що за 36 годин лекційного курсу неможна на високому рівні опанувати весь матеріал, який увійшов до цього видання. Не допоможуть і 126 годин самостійної роботи студентів... Але ці знання та вміння у повному обсязі й не входять до Кваліфікаційної характеристики магістрів та спеціалістів-прикладників. Їх завдання значно глибше: дійти розуміння, що єдине, чим, власне, оперують їх колеги в своїй повсякденній праці – це моделі різноманітних об'єктів!

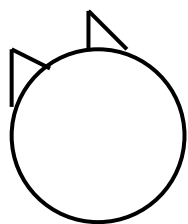
Проектна організація отримує заказ на проектування машини або технології у вигляді опису вимог – *модель*! Начальник конструкторського відділу отримує деталізований опис, прив'язаний до конкретних вимог – теж *модель*! Конструктор отримує технічне завдання у вигляді ескізів та нотаток до них – *моделі*! Рядовий конструктор виконує креслення, будує рівняння, створює тексти – і це все *моделі*! Нарешті, готовий проект у будь-якому вигляді (кіпа паперу або комп'ютерна програма) – це лише модель майбутнього об'єкта!

Підрозділи управління машинами та процесами повинні якось розрахувати вплив на об'єкт управління. Для цього фахівці використовують його *модель*, – чим вона «краще», тим ефективніше буде вплив.

Моделі всюди!

Природно, не кожен опис системи придатний для моделювання: опис повинен бути настільки точним, щоб після проведення обчислень на ЕОМ (також достатньо точних) результати дослідження в необхідному ступені співпали би з даними експерименту або з іншими відомостями, наприклад з результатами аналітичного дослідження в якихось часткових випадках. Такі «достатньо точні» моделі в машинному аналізі називають адекватними. Властивості адекватної моделі і об'єкта інколи можна охарактеризувати числом або набором чисел (вектором), якщо це бажано. Кожна модель є результат «огрублення» реальності; якісь риси реальної технічної системи ми вимушені ігнорувати – інакше моделювання було б неможливим.

Але якщо таке «відкидання» виконане вдало, то модель виходить адекватною і, разом з тим, не такою складною, щоб її неможливо було обробити у нашому розпорядженні обчислювальними ресурсами.



Розглянемо жартівливий і одночасно дуже серйозний приклад. На рисунку всього три лінії – одна крива і дві ламані. Їх можна накреслити на папері, на екрані, на піску, тощо. Вони можуть бути різного розміру, кольору, яскравості. Але, тим часом, кожен впізнає в ньому... того самого кота!

Але чому саме кота? Чому не лисицю, тигра або нову модель літака? І, якщо це все ж таки кіт, то чи придатна для будь-яких потреб машинного аналізу котячих проблем ця модель? Тут два питання: розпізнавання образу (це окрема

наука) і взаємовідносини об'єкта та його моделі. Реальний об'єкт має нескінченну кількість параметрів. Модель враховує (зв'язує між собою) тільки ті параметри, які необхідні на даному етапі моделювання.

Чим більше таких параметрів, тим ближче модель до об'єкта, але тим вона складніша і дорожча, тим важче нею користуватися, тим більше спрощувальних допущень доводиться використовувати, роблячи адекватність такої моделі дуже сумнівною. Неточність моделювання при збільшенні кількості параметрів багаторазово збільшується, тому, бажаючи підвищити таким чином точність моделі, ми можемо добитися зовсім протилежного результату.

В підручнику ви знайдете відповідь на питання «Як це робиться?». Він складається із чотирьох частин і дванадцяти розділів.

*Перша частина* присвячена загальним питанням теорії моделювання за допомогою **аналітичних моделей**, а також побудові моделей у вигляді звичайних диференціальних рівнянь та диференціальних рівнянь в частинних похідних.

*Друга частина* присвячена **скінченноелементним моделям**. Зокрема, в ній мова йде про методи дискретизації простору-часу, а також про використання симетрії скінченноелементних моделей та чисельні методи роботи з останніми.

*Третя частина* присвячена проблемам зв'язку структури об'єктів з їхніми властивостями, що відбивається у відповідних **структурних моделях**. Тут йдеться про так звані «віртуальні моделі», коли об'єкта, якого ці моделі представляють просто не існує, а також про моделі у вигляді графів. При розмові про структуру об'єктів неможна не згадати про різновиди марковських моделей та їх синергетичне поєднання.

*Четверта частина* присвячена **моделям інтелектуальним**. Їх головна риса – обов'язок до навчання та право на помилку. Останнє викликає сум, але саме ці моделі найближчі до нашого, повного проб та помилок життя! Нечіткий світ, в якому ми живемо, нейронні мережі які лежать в основі нашої свідомості, та еволюційні процеси, які підтримують наше життя наближують процес відбивання навколишнього середовища до його найвищої форми – математичного моделювання почуттів!

*Науковий редактор,  
доктор технічних наук, професор  
О.Л. Становський*

## ЧАСТИНА I АНАЛІТИЧНІ МОДЕЛІ

### Розділ 1 ЗАГАЛЬНІ ПИТАННЯ ТЕОРІЇ МОДЕЛЮВАННЯ

#### 1.1. Основні поняття моделювання

**М**оделювання – заміщення об'єкта (оригінала), що досліджується його умовним відображенням, описом або іншим об'єктом (моделлю) і пізнання властивостей оригіналу шляхом дослідження властивостей моделі.

В процесі мислення людина оперує образами об'єктів оточуючого світу, які є різновидами моделей – когнітивними моделями. У широкому розумінні твори живопису, скульптури й літератури можна також вважати моделями реальних об'єктів. Для цього:

- модель повинна бути адекватною оригіналу в тому розумінні, що вона з достатньою точністю повинна відображати ті характеристики оригіналу, які цікавлять дослідника;
- модель повинна усувати проблеми, пов'язані з фізичними вимірюваннями будь-яких сигналів чи характеристик оригіналу.

##### 1.1.1. Основні види моделей та їх властивості

**Основні види моделей.** В залежності від способу реалізації всі моделі можна розділити на два класи:

- *фізичні* моделі передбачають, як правило, реальне втілення тих фізичних властивостей оригіналу, які цікавлять дослідника; вони прості, менші розміром і називаються макетами; фізичне моделювання інакше називають макетуванням;

- *математичні* моделі є формалізованими описами об'єкта або системи за допомогою деякої абстрактної мови, наприклад, у вигляді сукупності математичних співвідношень або схеми алгоритму; розрізняють такі види математичного моделювання: вербальні (словесні), графічні, аналітичні та алгоритмічні.

Інколи математичні моделі описуються рівняннями, які витікають із розгляду фізичної сутності явища або системи, що моделюються. Однак частіше

опис об'єктів і систем, що моделюються, носить чисто формальний характер і базується на тому, що багато явищ найрізноманітнішої природи описуються рівняннями (алгебраїчними, диференціальними тощо) того самого вигляду. У цьому випадку мова йде про формальні моделі.

Крім того, явища, системи та їхні моделі можуть бути *нестационарними* і *стационарними*. Нестационарні моделі характеризуються залежністю їхніх параметрів від часу. У стационарних моделях такої залежності немає. Природно, що моделювання нестационарних явищ набагато складніше, ніж стационарних.

**Основні властивості моделей.** Моделі повинні мати ряд властивостей, від яких залежить успіх їхнього застосування. Відзначимо деякі з найбільш важливих.

*Адекватність* – це ступінь відповідності моделі досліджуваному реальному об'єкту. Вона ніколи не може бути повною. На практиці модель вважають адекватною, якщо вона із задовільною точністю дозволяє досягти мети дослідження.

*Простота (складність)* також є однією з характеристик моделі. Чим більша кількість властивостей об'єкта описує модель, тим вона складніша. Не завжди, чим складніша модель, тим вища її адекватність. Необхідно прагнути знайти найпростішу модель, яка дозволить одержати необхідні результати дослідження.

*Потенційність* (передбачуваність) – здатність моделі дати нові знання про досліджуваний об'єкт, спрогнозувати його поведінку або властивості.

### 1.1.2. Мета, принципи та технологія моделювання

**Мета моделювання.** Моделювання може здійснюватися:

- для вивчення механізму явищ (пізнавальна мета);
- для керування об'єктом, тобто для вироблення за моделлю оптимальних керуючих впливів.

В обох випадках модель створюється для визначення й прогнозу характеристик або сигналів об'єкта, що досліджується.

**Основні принципи моделювання.** Моделювання базується на декількох основних принципах.

**Принцип інформаційної достатності.** При повній відсутності інформації про досліджуваний об'єкт побудова його моделі неможлива. З іншого боку, при наявності повної інформації про об'єкт побудова його моделі не має сенсу. Існує деякий рівень апріорної інформації про об'єкт, при досягненні якої може бути побудована його адекватна модель.

**Принцип здійснюваності.** Створювана модель повинна забезпечувати досягнення поставленої мети дослідження з імовірністю, що істотно відрізняється від нуля.

**Принцип множинності моделей.** Даний принцип є ключовим. Мова йде про те, що створювана модель повинна відображати, в першу чергу, ті властивості реальної системи, які цікавлять дослідника. Відповідно, при використанні

будь-якої конкретної моделі, пізнаються лише деякі боки реальності. Для більш повного її дослідження необхідно побудувати ряд моделей, що дозволить з різних боків і з різним ступенем деталізації розглянути досліджуваний об'єкт.

**Принцип агрегування.** У більшості випадків складну систему можна представити складеною з агрегатів (підсистем), для адекватного математичного опису яких придатні деякі стандартні математичні схеми.

**Принцип параметризації.** Цей принцип означає, що модель будується у вигляді відомої системи, параметри якої невідомі.

**Технологія моделювання.** Ступінь реалізації перерахованих принципів кожної конкретної моделі може бути різною. Це залежить не тільки від бажання дослідника, але й від дотримання ним технологій моделювання. А будь-яка технологія має на увазі певну послідовність дій. Найпоширенішою технологією моделювання є *комплексне* моделювання, під яким розуміють математичне моделювання з використанням засобів обчислювальної техніки. Під комплексним моделюванням розуміють таку послідовність дій.

1. Визначення мети моделювання.
2. Розробка концептуальної моделі.
3. Формалізація моделі.
4. Програмна реалізація моделі.
5. Планування модельних експериментів.
6. Реалізація плану експерименту.
7. Аналіз та інтерпретація результатів моделювання.

**Основні методи рішення завдань моделювання.** На етапі програмної реалізації моделі та реалізації плану експериментів необхідно зроби вибір методів рішення завдань моделювання. При цьому використовуються три основні групи методів:

- графічні методи, засновані на побудові та аналізі графіків;
- аналітичні методи засновані на перетворенні аналітичних виразів (придатні для вузького кола завдань);
- чисельні методи – основний інструмент для рішення складних математичних завдань.

Аналітичне рішення вдається одержати рідко і частіше лише при спрощеному формулюванні завдання в лінійному наближенні. Основним засобом рішення є алгоритмічний підхід, що реалізує обчислювальний експеримент на ЕОМ. Одержуване на ЕОМ рішення майже завжди містить деяку погрішність (абсолютну чи відносну).

Наявність погрішності рішення обумовлена рядом причин, наприклад:

- математична модель є лише наближеним описом реального процесу (погрішність моделі);
- початкові дані, як правило, містять погрішності, оскільки є результатами експериментів (вимірів), або рішеннями допоміжних завдань (погрішність даних);
- методи, які застосовуються для рішення завдання, в більшості випадків є наближеними (погрішність методу);

- виконання округлень при введенні початкових даних до ЕОМ чи виконанні операцій (обчислювальна погрішність).

*Теоретично стійкість* завдання означає, що його рішення можна знайти з якою завгодно малою погрішністю, якщо тільки гарантувати досить малу погрішність вхідних даних.

*Оцінка обумовленості* обчислювального завдання (чутливість рішення обчислювального завдання до малих погрішностей вхідних даних) – ще одна обов'язкова вимога при виборі методу рішення та побудові математичної моделі.

Завдання називають добре обумовленим, якщо малим погрішностям вхідних даних відповідають малі погрішності рішення, і погано обумовленим, якщо можливі великі зміни рішення. Часто є можливість ввести кількісну оцінку ступеню обумовленості – число обумовленості, – його можна інтерпретувати як коефіцієнт можливого зростання погрішності в рішенні стосовно до погрішності вхідних даних, що їх викликала.

В залежності від вимог до точності рішення та від рівня забезпечуваної точності вихідних даних, задачу можна вважати добре чи погано обумовленою.

Обчислювальні методи приводяться до вигляду, зручного для програмної реалізації. Можна виділити наступні класи чисельних методів:

- *метод еквівалентних перетворень* – вихідне завдання замінюють іншим, що має те ж рішення: наприклад, знаходження кореня нелінійного рівняння приводять до пошуку точок глобального мінімуму;

- *методи апроксимації* – замінюють початкове завдання іншим, рішення якого близьке до рішення основного завдання;

- *методи скінченно-різницевої*, засновані на заміні похідних скінченними різницями;

- *прямі (точні) методи* – рішення може бути отримане за скінченну кількість елементарних операцій (арифметичних та добування кореня); багато прямих методів не годяться до застосування в ЕОМ через чутливість до помилок округлення;

- *ітераційні методи* – методи послідовних наближень до рішення завдання: задається початкове наближення рішення, будується ітераційна послідовність наближень до рішення; якщо ця послідовність сходиться до рішення, то говорять, що ітераційний процес сходиться; множина початкових наближень, для яких метод сходиться, називається областю збіжності методу;

- *метод статистичних випробувань* (Монте-Карло) – заснований на моделюванні випадкових величин і побудові статистичних оцінок рішень завдань (для моделювання великих систем).

Чисельні методи групуються навколо типових математичних завдань: завдань аналізу, алгебри, оптимізації, рішення диференціальних та інтегральних рівнянь, зворотних завдань (синтез). Цей етап рішення закінчується вибором і обґрунтуванням конкретних чисельних методів рішення, розробкою алгоритмів, які можуть бути програмно реалізовані засобами комп'ютерної техніки.

**Контроль правильності моделі.** Для контролю правильності отриманої моделі використовується ряд прийомів:



- аналіз розмірності – величини в лівій і правій частинах виразу, окремі доданки в кожній із частин повинні мати однакову розмірність;
- перевірка порядків і характерів залежностей – параметри та змінні, які в даному завданні виражені величинами більшого порядку малості, можуть бути виключені з розгляду як несуттєві, що часто дозволяє значно спростити модель та її аналіз; характер зміни значень величин, що моделюються, повинен відповідати їхньому реальному сенсу, не суперечити спостережуваним даним;
- дослідження граничних випадків – результати моделювання при крайніх значеннях параметрів моделі, як правило, рівних нулю або нескінченності, не повинні суперечити змісту (наприклад, енергія реальної фізичної системи не може виявитися нескінченно великою, час протікання процесу – негативним і т.п.). Модель у цьому випадку істотно спрощується;
- перевірка замкнутості та коректності математичного завдання – система математичних співвідношень повинна мати єдине рішення.

Завдання називається *коректним*, якщо воно задовольняє трьом вимогам:

- 1) його рішення існує при будь-яких допустимих вхідних даних;
- 2) це рішення єдине (однозначно визначене);
- 3) рішення залежить від даних завдання – стійке стосовно малих збурювань вхідних даних.

Далеко не всі практичні завдання є коректними. До них, наприклад, не відносяться зворотні завдання геофізики, астрофізики, спектрографії, розпізнавання образів, синтез та багато інших важливих прикладних проблем.

Властивість коректності завдання має велике значення для вибору методу рішення. До некоректних завдань не можна застосовувати звичайні чисельні методи обчислювальної математики. Строгий аналіз коректності в багатьох випадках математично складний і обмежується перевіркою відповідності кількості невідомих і рівнянь, що їх об'єднують.

### 1.1.3. Поняття об'єкта та його моделі

В прикладних завданнях, на відміну від математичних, не завжди буває із самого початку ясно, що дано, а що саме потрібно довести. Звичайно задається реальний нематематичний об'єкт: явище природи, фізичний або виробничий процес.

Розв'язок таких практичних завдань починається зі збирання фактів і даних наукових спостережень, потім відбувається формалізація об'єкта та будується математична модель, тобто виділяються найістотніші риси і властивості даного об'єкта та проводиться їхній опис за допомогою математичних рівнянь. Після надання завданню математичної форми можна або скористатися для її вивчення відомими математичними методами, або, якщо їх немає, розробити нові.

Вихідним пунктом для побудови моделі є емпірична реальна картина явища, що висуває перед дослідниками завдання, на яке потрібно знайти відповідь. Процес формулювання завдання часто буває тривалим і вимагає навичок та відомостей, які не відносяться до математики (рис. 1.1).



Рис. 1.1. Основні етапи побудови ММ

Етап 0 – 1: процес схематизації та ідеалізації явища, виділення його істотних особливостей.

Етап 1 – 2: переклад необхідних даних на мову математичних понять і величин, складання системи визначальних параметрів явища, формулювання співвідношень і рівнянь між величинами та параметрами. Це найважча стадія процесу моделювання.

Етап 2 – 3: побудова моделі.

Етап 3 – 4: перевірка адекватності моделі явища на логічну несуперечність або конкретність постановки завдання.

Етапи 4 – 5, 5 – 6: перевірка справедливості моделі за результатами розв'язку теоретичного завдання відповідно до математичної моделі та зіставленням її з реальною ситуацією, яка вивчається.

Моделю можна змусити відображати дійсність, але це не є сама дійсність. Глибина відображення моделлю дійсності залежить від мети, яку перед собою ставить дослідник.

Наприклад, модель математичного маятника – лише ідеалізація реального об'єкта. У процесі розв'язку завдань і порівняння з реальним явищем модель може уточнюватися.

Побудована модель повинна бути простою, зрозумілою тим, хто безпосередньо буде її використовувати.

В сучасних дослідженнях складних явищ природи, техніки та людської діяльності математичні моделі мають багатоступінчасту, складну структуру. Наприклад, при вивченні міцності конструкції мосту необхідно, крім загальної статичної конфігурації моста, вміти розраховувати окремі його вузли на міцність, тобто використовувати моделі механіки твердого тіла для окремих елементів мосту. Модель механіки суцільного середовища складається з математи-

чної моделі рідини, газу, пружного тіла, пластичних середовищ, тощо. Ця модель спочатку є простою, та при подальшому вивченні процесу і поглиблені дослідником знань про неї розвивається та стає поступово все складнішою.

## 1.2. Класифікація моделей. Роль моделювання в пізнавальній діяльності

Будь-яка абсолютна істина пізнається через ланцюжок відносних істин. Ці відносні істини називаються моделями або модельним описом. Якщо модель формулюється мовою математики, то її розуміють як математичну.

Будь-яка математична модель (ММ) може визначатися в результаті:

- прямого спостереження явища, його прямого вивчення й осмислювання; моделі, отримані таким методом, називаються феноменологічними;
- деякого процесу дедукції, коли нова модель виходить як окремий випадок з більш загальної моделі; такі моделі називаються асимптотичними;
- деякого процесу індукції, коли нова модель є природним узагальненням «елементарних» моделей; це – моделі ансамблів.

Приклад феноменологічних моделей – модель механіки Ньютона. Лише Ньютону вдалося першим дати кількісний опис закону збереження імпульсу – сила визначає зміну швидкості:

$$F = m \frac{dV}{dt}, \quad (1.1)$$

де:  $m$  – маса,  $V$  – швидкість тіла.

Інше відкриття – модель тяжіння:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (1.2)$$

де:  $\gamma$  – гравітаційна постійна;  $m_1, m_2$  – маси тіл;  $r^2$  – відстань між ними.

У формулах (1.1) і (1.2) маса виступає в ролі розмірного коефіцієнта пропорційності.

Не всяка модель може бути перевірена. Наприклад, перший закон Ньютона принципово не може бути перевірений, тому що не існує у Всесвіті умов, при яких на матеріальне тіло не діяли б сили.

Сутність асимптотичних моделей. Уявимо, що деякий процес описується системою рівнянь

$$\dot{x} = f(x, t, \varepsilon) \quad \text{або} \quad F(\dot{x}, x, t, \varepsilon) = 0, \quad (1.3)$$

де  $\varepsilon$  – малий параметр;  $x$  – фазовий вектор.

Розв'язок цього рівняння вивчається при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . При цьому, представлення

величин у формі рядів, асимптотичну поведінку яких можна встановити, дозволяє більш точно описати досліджуване явище.

Моделі ансамблів дозволяють обчислити поведінку деякої системи об'єктів за інформацією про поведінку елементів та їхню взаємодію. Приклад таких моделей – моделі планетарних систем або гіббсовські моделі.

Побудова моделі будь-якого фізичного процесу починається із законів збереження, які є основними. Необхідні також і різноманітні залежності, одержувані з досвіду, – рівняння стану, зв'язки між тензорами швидкості, деформації, емпіричні коефіцієнти, тощо.

### 1.3. Приклади математичних моделей. Форми їх представлень

Математична модель є спрощенням реальної ситуації. Саме при такому підході виникають спрощенні віртуальні поняття: «блок без тертя», «невагомні нерозтяжні нитки», «нев'язкі рідини».

Іноді спрощення можна досягти порівнянням порядку різних величин, що фігурують у моделі. Наприклад, зміну деякої величини  $x(t)$  можна описати рівнянням виду:

$$a \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = 0. \quad (1.4)$$

Можна відразу приступити до розв'язання цього рівняння, однак допустимо, що член  $b \frac{dx}{dt}$  набагато більший за величиною, ніж  $cx$ . Можна заощадити час, спростивши рівняння (зневаживши  $cx$ ).

Детерміновані змінні – відомі характеристики (величини), що піддаються точному вимірюванню та управлінню. Стохастичні змінні ніколи не можуть бути точно виміряні і мають випадковий характер. Важливо також розуміти, що означають отримані рішення.

Приклад 1.1. Спроекувати канат мінімальної маси для дослідження океанських глибин за допомогою батискафа.

Канат представимо у вигляді стрижня довжиною  $l$  (рис. 1.2), що перебуває під дією сили ваги  $\vec{F}$  власної маси та сили  $\vec{P}_\sigma$ , прикладеної до його кінця при  $z = l$  та рівної за величиною масі батискафа. Сили  $\vec{P}_\sigma$  і  $\vec{F}$  спрямовані уздовж осі стрижня. Потрібно визначити площу поперечного перерізу  $S(z)$  стрижня мінімальної маси. Конструкція рівномісна.

Рівняння для елементарної довжини  $\Delta z$  стрижня:

$$N = P_\sigma + F(z). \quad (1.5)$$

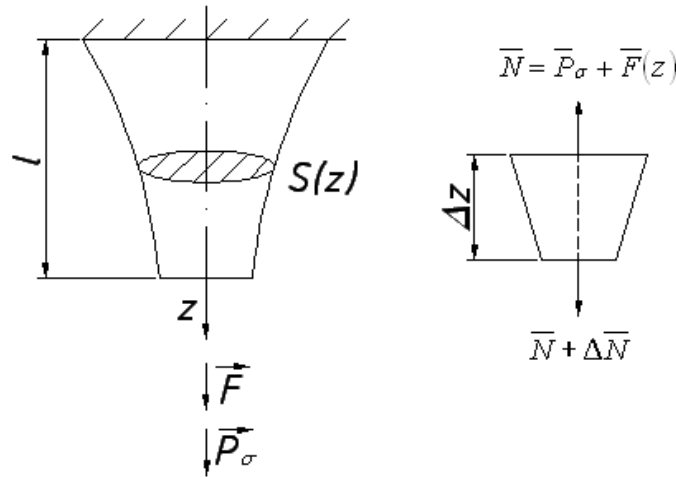


Рис. 1.2. Розрахункова схема для прикладу 1.1

Вага канату довжиною  $z$

$$F = \rho g S(z) z, \quad (1.6)$$

де:  $\rho$  – густина матеріалу канату;  $\rho g$  – питома вага матеріалу канату.

Отже,  $\Delta N = -\rho g S \Delta z$ .

Використовуючи граничний перехід, одержуємо:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta z} = \frac{dN}{dz} = -\rho g S; \quad \frac{dN}{dz} = -\rho g S(z). \quad (1.7)$$

Умова рівномірності  $N = \sigma_b S$ , де:  $N$  – зусилля;  $\sigma_b = [\sigma]_p$  – граничне значення напружень у будь-якому перерізі канату.

Формалізація вихідного завдання із залученням елементів математичного аналізу приводить до розв'язання крайового завдання для звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) 1-го порядку:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dz} = \rho g S; \\ N = \sigma_b S; \\ N(l) = P_\sigma; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_b \frac{dS}{dz} = -\rho g S; \\ \sigma_b \frac{dS}{S} = \rho g dz; \\ \ln S = \frac{\rho g}{\sigma_b} z + \ln C. \end{cases} \quad (1.8)$$

Нехай  $\frac{\rho g}{\sigma_b} = \lambda$ , тоді  $S = e^{-\lambda z}$ .

Для визначення *const*  $C$  скористаємося крайовими умовами:

$$z = l; N = F_k; S(z) = S = Ce^{-\lambda l} = \frac{F_k}{\sigma_b} = Ce^{-\lambda l}. \quad (1.9)$$

Звідси  $C = \frac{F_k}{\sigma_b} e^{\lambda l}$ ,  $F_k$  – вага канату довжиною  $l$ . Остаточно одержуємо, що площа поперечного перерізу рівномірного канату експоненціально зменшується з ростом  $z$ , тобто

$$S = S(z) = \frac{F_k}{\sigma_b} e^{\lambda(l-z)}. \quad (1.10)$$

Застосуємо отриманий розв'язок для проектування троса мінімальної ваги. Нехай вага батискафа разом з екіпажем  $P_g = 98 \cdot 10^3 \text{ Н}$ . Оцинкована сталь, яка використовується в тросах, має часовий опір близько  $196 \cdot 10^{-5} \text{ Н/м}^2$ . З урахуванням коефіцієнта запасу, який для тросів звичайно приймають рівним 4,  $\sigma_b = 49 \cdot 10^{-5} \text{ Н/м}^2$ . Виберемо  $k = 2$ , тоді  $\sigma_b = 98 \cdot 10^{-5} \text{ Н/м}^2$ .

Силою Архімеда зневажаємо, що теж йде в запас міцності. Глибина Маріанської западини –  $10^4 \text{ м}$ .

Відповідно до формули (1.10) площа поперечного перерізу рівномірного троса, що втримує батискаф,  $S = S_{\max} e^{-\lambda z} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ;  $S_{\max} = 1478 \text{ мм}^2$ ;  $S_{\min} = \frac{F_k}{\sigma_b} = 200 \text{ мм}^2$ . Звідси очевидно, що звичайний трос дозволить опускати батискаф на  $5000 \text{ м}$ .

#### 1.4. Структурна стійкість математичних моделей

Основний принцип стійкості – якісне пояснення явищ – жодним чином не є чимось другорядним стосовно їхнього кількісного опису. ММ повинна, насамперед, відображати якісну сторону об'єкта. ММ вважається структурно стійкою, якщо досить малі зміни в структурі самої моделі викликають таку її поведінку, яка якісно аналогічна поведінці вихідної моделі. Розв'язок проблеми можливий при наявності системи критеріїв, що гарантують структурну стійкість будь-якої заданої ММ, а також повного опису всіх способів втрати стійкості. Для цього необхідно конкретизувати модель.

В якості прикладу завдань, де математично сформульовані принципи стійкості, можна розглядати проблему рівноваги динамічних систем не тільки механічного походження, але й економічних, біологічних, електричних, тощо.

Розглянемо динамічну систему, процеси в якій неперервно змінюються у часі. Для математичного моделювання можна вибрати набір спостережуваних і вимірюваних величин  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , що представляють положення системи в

будь-який момент часу як точку  $x(t) = x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  в евклідовому  $n$ -мірному просторі, а потім вивчити вигляд траєкторій, по яких вона буде рухатися зі зміною  $t$ . Наприклад, якщо  $x(t)$  залишається в одному положенні при всіх  $t$ , то вважають, що система перебуває в рівновазі стосовно величин  $x_i$ , якщо ж  $x(t)$  повторно описує деяку замкнену петлю – система перебуває в періодичному стані.

Часто інформацію про еволюцію системи задають системою диференціальних рівнянь, які характеризують «нескінченно малу» зміну положення точки  $x(t)$ .

У цьому випадку точками рівноваги служать саме ті точки, для яких  $\dot{x}(t) = 0$  при всіх  $t$ .

Динамічну систему часто описують гладкою функцією  $V$ , яка диференціюється нескінченну кількість разів. В просторі координат  $(x_1, \dots, x_n)$  ця функція має властивості.

1. Точка рівноваги системи збігається із критичними точками  $V$ , тобто із точками, де  $\frac{\partial V}{\partial x_1} = \frac{\partial V}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial V}{\partial x_n} = 0$ .

2. Відходячи від рівноваги, функція  $V(x(t))$  зменшується з ростом  $t$ . Очевидно, що коли система описується гладкою функцією  $V$ , то форма графіка цієї функції визначає поведінку системи.

У процесі побудови ММ прагнуть, щоб функція  $V(x)$  мала тільки дві критичні точки – максимуму та мінімуму. Тоді всі критичні точки нової функції будуть точками строгого максимуму та мінімуму.

*Гіпотеза структурної стійкості* говорить: будь-яка математична модель реальної системи повинна в деякому сенсі мати глобальну стійкість, яка б відповідала дійсній стійкості явищ, що спостерігаються. Це основний принцип математичного моделювання.

У випадку функцій двох змінних  $V(x_1, x_2)$  картина стає більш складною. У цьому випадку єдиними типами критичних точок, які не можуть бути усунуті в результаті малих довільних збурювань самої функції, є точки екстремуму (рис. 1.3, а, в) та сідлові точки (рис. 1.3, б).

В них досягається максимум в одному напрямку і мінімум в іншому (рис. 1.3).

Якщо прийняти гіпотезу структурної стійкості, то можна стверджувати, що найбільший інтерес представляють такі функції, критичними точками яких служать максимумами, мінімумами та сідлові точки. Саме їх і необхідно вивчати при розгляданні еволюції реальних систем, що описуються гладкими функціями.

Положенням стійкої рівноваги відповідають лише такі критичні точки, які відповідають мінімумам. В протилежному випадку більшість збурювань рівноважного стану (якщо не всі) викличуть подальше відхилення системи від положення рівноваги.

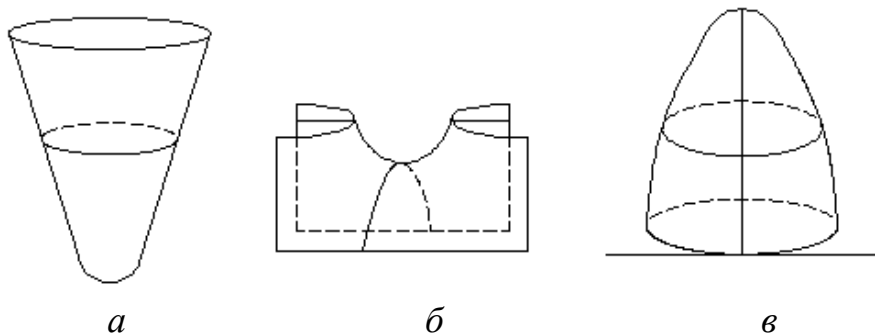


Рис 1.3. Типи критичних точок

### 1.5. Диференціальні рівняння математичної фізики для моделювання технічних систем

Більшість фізичних законів природи можна сформулювати мовою рівнянь у часткових похідних. У якості прикладів можна привести рівняння Максвелла теорії електромагнітних полів, закони теплообміну Ньютона, рівняння Нав'є – Стокса, рівняння руху Шредінгера у квантовій механіці. У всіх цих рівняннях фізичні явища описуються мовою просторових і часових похідних. Похідні з'являються в рівняннях тому, що вони описують найважливіші величини (швидкість, прискорення, силу, потік і т.д.). Таким чином, виникають рівняння із частковими похідними, що містять невідому функцію, яку необхідно визначити.

На відміну від звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР), у яких невідома функція залежить тільки від однієї змінної, у диференціальних рівняннях із частковими похідними (ДРЧП) невідома функція залежить від декількох змінних. Наприклад, температура  $U(x, t)$  залежить від координат  $x$  і  $t$ .

Для спрощення запису будемо використовувати наступні позначення:

$$U_t = \frac{\partial U}{\partial t}, \quad U_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad U_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \dots \quad (1.11)$$

В якості прикладів диференціальних ДРЧП розглянемо наступні найбільш відомі рівняння математичної фізики:

$$U_t = U_{xx} \text{ – одномірне рівняння теплопровідності;}$$

$$U_t = U_{xx} + U_{yy} \text{ – двомірне рівняння теплопровідності;}$$

$$U_{tt} = U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} \text{ – тривимірне хвильове рівняння;}$$

$$U_{tt} = U_{xx} + \alpha U_t + \beta U \text{ – телеграфне рівняння;}$$

$$U_t = \alpha \Delta U + \beta f U \text{ – рівняння Шредінгера.}$$

Рівняння із частковими похідними класифікують за багатьма ознаками. Класифікація рівнянь важлива, оскільки для кожного класу існують свої загальні теорія та методи їхнього розв'язку.



Для класифікації ДРЧП використовуються такі основні ознаки:

1. *Порядок рівняння* – найвищий порядок похідних, що входять до рівняння; наприклад,  $U_t = U_{xx}$  – рівняння другого порядку;  $U_{tt} = U \cdot U_{xxx} + \cos x$  – рівняння третього порядку.

2. *Кількість змінних* – кількість незалежних змінних; наприклад,  $U_t = U_{xx}$  – рівняння із двома змінними  $x$  і  $t$ ;  $U_{tt} = U_{zz} + \frac{1}{2}U_z + \frac{1}{z^2}U_{\theta\theta}$  – рівняння із трьома змінними  $z$ ,  $\theta$  та  $t$ .

3. *Лінійність*. Рівняння із частковими похідними бувають лінійні та нелінійні. До лінійних рівнянь залежна змінна і усі її часткові похідні входять лінійним чином, тобто вони не множаться один на одного, не зводяться в ступінь і т.д. Більш точно лінійним рівнянням другого порядку із двома незалежними змінними називається рівняння вигляду

$$AU_{xx} + BU_{xy} + CU_{yy} + DU_x + EU_y + FU = G, \quad (1.12)$$

де  $A, B, C, D, E, F, G$  – константи або задані функції незалежних змінних  $x$  і  $y$ .

4. *Однорідність*. Рівняння (1.12) називається однорідним, якщо права частина  $G(x, y)$  тотожно дорівнює нулю для всіх  $x$  та  $y$ . Якщо  $G(x, y)$  не рівна тотожно нулю, то рівняння називається неоднорідним.

5. *Види коефіцієнтів*. Якщо коефіцієнти  $A, B, D, E, F$  рівняння (1.12) постійні, то воно називається рівнянням з постійними коефіцієнтами.

6. *Тип лінійних рівнянь*. Усі лінійні рівняння із частковими похідними другого порядку виду (1.12) відносяться до одного із трьох типів:

– параболічний тип, який визначається умовою  $B^2 - 4AC = 0$  (наприклад, рівняння теплопровідності);

– гіперболічний тип, який визначається умовою  $B^2 - 4AC > 0$  (наприклад, хвильове рівняння);

– еліптичний тип, який визначається умовою  $B^2 - 4AC < 0$  (наприклад, рівняння, що описує стаціонарні процеси).

Для розв'язку ДРЧП існує багато методів, придатних для практичного використання. Найбільш важливими є ті, у яких рівняння із частковими похідними зводяться до звичайних диференціальних рівнянь. До таких методів відносяться.

1. Метод поділу змінних. Рівняння в частинних похідних з  $n$  незалежними змінними зводиться до  $n$  звичайних диференціальних рівнянь.

2. Метод інтегральних перетворень. Рівняння в частинних похідних з  $n$  незалежними змінними зводиться до рівняння із частковими похідними з  $n - 1$  незалежними змінними; отже, рівняння із частковими похідними із двома незалежними змінними можна звести до звичайного диференціального рівняння.

3. Метод перетворення координат. Вихідне рівняння із частковими похідними зводиться до звичайного диференціального рівняння або до іншого більш

простого ДРЧП (канонічного виду) за допомогою відповідного перетворення координат (наприклад, повороту координатних осей, тощо).

4. Чисельні методи. Вихідне рівняння із частковими похідними зводиться до системи різницевих рівнянь, яка розв'язується методом ітерацій на ЕОМ. Крім різницевих методів розв'язку ДРЧП існують і інші чисельні методи, у тому числі й засновані на апроксимації рішення поліноміальними поверхнями (апроксимація сплайнами).

5. Метод функцій Гріна. Початкові та граничні умови замінюються системою найпростіших рівнянь, і завдання вирішується для кожного з них окремо. Повний розв'язок вихідного завдання отримують в результаті підсумовування всіх розв'язків.

6. Метод інтегральних рівнянь. Рівняння із частковими похідними зводиться до інтегрального рівняння, методи розв'язку якого найбільш розвинені.

7. Варіаційні методи. Замість рівняння із частковими похідними вирішується завдання мінімізації. Функція, яка забезпечує мінімум деякому виразу (типу повної енергії системи), є, в той же час, розв'язком вихідного рівняння із частковими похідними.

8. Метод розкладання по власних функціях. Розв'язок рівняння із частковими похідними шукають у вигляді ряду за власними функціями. Ці власні функції знаходять як розв'язки так званого завдання на власні значення, відповідно до початкового завдання для рівняння із частковими похідними.

### 1.6. Питання до самоконтролю

1. Що таке моделювання? Для яких потреб використовуються моделі?
2. Як визначити, скільки змінних, які відображають стан об'єкта моделювання повинна містити його модель?
3. За якими характеристиками оцінюють моделі?
4. Основні види моделей та їх властивості.
5. В чому полягають основні принципи моделювання?
6. Що таке добре або погано обумовлена модель?
7. Чому методи моделювання набули «другого життя» після винайдення ЕОМ?
8. Як змінилися вимоги до моделей, що передбачається реалізувати на ЕОМ?
9. Класифікація моделей. Чому найчастіше використовують математичні моделі?
10. Наведіть приклади математичних моделей в різних формах їх представлення.
11. Детерміновані та стохастичні змінні, що входять до математичних моделей.
12. Формалізація початкового завдання із залученням елементів математичного аналізу.
13. Співвідношення математичної моделі та якісного боку об'єкта, який вона моделює.
14. Принципи структурної стійкості математичної моделі.
15. В чому полягає гіпотеза структурної стійкості математичних моделей?

## Розділ 2

### МОДЕЛІ У ВИГЛЯДІ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

#### 2.1. Загальні поняття

Нехай задані  $k$  рівнянь

$$F_i(t, x_1, \dot{x}_1, \dots, x_1^{m_1}; x_2, \dot{x}_2, \dots, x_2^{m_2}; \dots; x_k, \dot{x}_k, \dots, x_k^{m_k}) = 0, \quad i = \overline{1, k},$$

які поєднують незалежну змінну  $t$ ,  $k$  шуканих функцій  $x_1, \dots, x_k$  та їх похідні до порядків  $m_1, \dots, m_k$ , відповідно. Потрібно знайти шукані функції. Кількість рівнянь звичайно дорівнює кількості невідомих функцій.

У більшості практичних випадків задану систему можна звести до наступного вигляду:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.1)$$

який називається системою звичайних диференціальних рівнянь у нормальній формі Коші. Тут  $t$  – незалежна змінна;  $x_i(t)$  – шукані функції;  $f_i(x_1, \dots, x_n)$  – функції, які визначені та неперервні по всіх аргументах у деякій області  $(n+1)$ -вимірному простору  $(t, x_1, \dots, x_n)$ .

Число  $n$  називається порядком системи. Вводячи позначення  $x = (x_1, \dots, x_n)^*$ ,  $f = (f_1, \dots, f_n)^*$ , ( $*$  – знак транспонування),  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ , систему (2.1) можна записати також у векторній формі:  $\dot{x} = f(t, x)$ .

#### Приклад 2.1. Співвідношення

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2(\sin \ln t + \cos \ln t); \\ \dot{x}_2 = x_1(\sin \ln t + \cos \ln t); \end{cases} \\ \text{б)} \quad & \begin{cases} \dot{x}_1 = \sin x_2 + x_3^2; \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2 + \cos x_3; \\ \dot{x}_3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2)$$

є системами диференціальних рівнянь відповідно, другого та третього порядків.

Розв'язком системи (2.1) на інтервалі  $(a, b)$  називається будь-яка сукупність  $n$  функцій  $x_i = \varphi_i(t)$  ( $i = \overline{1, n}$ ), які визначені та неперервно диференційовані на

$(a, b)$  і перетворюють рівняння (2.1) у тотожності на цьому інтервалі. Так, сукупність функцій

$$\begin{aligned}x_1 &= C_1 e^{t \sin lnt} + C_2 e^{-t \sin lnt}; \\x_2 &= C_1 e^{t \sin lnt} - C_2 e^{-t \sin lnt}\end{aligned}\quad (2.3)$$

є розв'язком системи диференціальних рівнянь прикладу 2.1 на інтервалі  $(0, +\infty)$  при будь-яких значеннях постійних  $C_1$  і  $C_2$ . Система диференціальних рівнянь має нескінченно багато розв'язків.

З геометричної точки зору кожний розв'язок системи (2.1) можна розглядати як криву в  $(n+1)$ -вимірному просторі  $(t, x_1, \dots, x_n)$ . Її називають інтегральною кривою системи (2.1). Загальним розв'язком системи (2.1) в області простору  $(t, x_1, \dots, x_n)$  називають сукупність функцій

$$x_i = \varphi_i(t, C_1, C_2, \dots, C_n) \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.4)$$

залежних від  $n$  довільних постійних  $C_1, C_2, \dots, C_n$  і таких, що:

1) в околиці будь-якої точки  $(t, x_1, \dots, x_n) \in G$  система рівнянь (2.4) розв'язна відносно  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , тобто

$$C_i = \psi_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad (i = \overline{1, n}); \quad (2.5)$$

2) при цих значеннях  $C_i$  функції (2.2) тотожно задовольняють системі (2.1).

Частковим розв'язком називається розв'язок, який витікає із загального при конкретних значеннях констант  $C_1, \dots, C_n$ .

Для системи (2.1) завдання Коші вважається поставленим, якщо потрібно знайти розв'язок системи, яка задовольняє початковим умовам:

$$x_1(t_0) = x_{1_0}, \dots, x_n(t_0) = x_{n_0}, \quad (2.6)$$

де  $t_0, x_{1_0}, \dots, x_{n_0}$  – задані числа. Тобто необхідно знайти інтегральну криву системи, яка проходить крізь точку  $(t_0, x_{1_0}, \dots, x_{n_0})$   $(n+1)$ -вимірному просторі. Якщо знайдений загальний розв'язок системи (2.1), то, як видно з формул (2.4) і (2.5), розв'язок завдання Коші матиме вигляд:

$$x_i(t, t_0, x_{1_0}, \dots, x_{n_0}) = \varphi_i(t, \psi_1(t_0, x_{1_0}, \dots, x_{n_0}), \dots, \psi_n(t_0, x_{1_0}, \dots, x_{n_0})), \quad (i = \overline{1, n}) \quad (2.7)$$

Умови існування та єдиності розв'язку завдання Коші обумовлюються наступною теоремою.

*Теорема.* Нехай функції  $f_i(t, x_1, \dots, x_n)$ ,  $(i = \overline{1, n})$  неперервні по всіх аргументах у замкненій області

$$G_0 : \left\{ |t - t_0| \leq a, |x_i - x_{i_0}| \leq b (i = \overline{1, n}) \right\}, \quad (2.8)$$

де  $a, b$  – позитивні постійні, і задовольняють у цій області умові Ліпшиця, тобто знайдеться постійна  $L > 0$ , така, що для будь-яких точок  $(t, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in G_0$  і  $(t, x_1, \dots, x_n) \in G_0$  має місце нерівність

$$\left| f_i(t, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - f_i(t, x_1, \dots, x_n) \right| \leq L \sum_{k=1}^n |\bar{x}_k - x_k| \quad (i = \overline{1, n}). \quad (2.9)$$

Тоді існує єдиний розв'язок системи (2.1), що задовольняє початковим умовам  $x_i(t_0) = x_{i_0}$ ,  $(i = \overline{1, n})$ . Даний розв'язок визначений принаймні на інтервалі

$|t - t_0| \leq h$ , де  $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ , постійна  $M$  така, що  $|f_i(t, x_1, \dots, x_n)| \leq M$ ,  $(i = \overline{1, n})$ ,  $(t, x_1, \dots, x_n) \in G_0$ .

## 2.2. Лінійні системи

Нехай задана система лінійних диференціальних рівнянь у векторній формі

$$\dot{x} = Ax, \quad (2.10)$$

де  $A$  – квадратна постійна матриця розмірності  $n \times n$ .

Розв'язок системи (2.10) будемо шукати у вигляді

$$x = e^{\lambda t} C, \quad (2.11)$$

де  $C$  – деякий постійний вектор-стовпець, координати якого  $C_1, \dots, C_n$  залежать від вибору початкових умов системи (2.10), і  $\lambda$  – постійне число.

Підставивши розв'язок (2.11) у систему (2.10) та виконавши відповідні перетворення, одержимо

$$(A - \lambda E)C = 0. \quad (2.12)$$

Помітимо, що  $\|C\| \neq 0$ , а  $E$  – одинична матриця порядку  $n \times n$ .

Для того, щоб існував нетривіальний розв'язок системи (2.12) щодо вектора  $C$ , необхідно та достатньо, щоб

$$\det(A - \lambda E) = 0. \quad (2.13)$$

Це співвідношення є алгебраїчним рівнянням  $n$ -го ступеню відносно  $\lambda$ . Його корені  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  – власні числа матриці  $A$ . Для кожного  $\lambda = \lambda_j$  одержимо розв'язок  $C = C_j$  системи (2.12). Можна взяти в якості коефіцієнтів вектора  $C_j$  алгебраїчні доповнення елементів будь-якого рядка визначника (2.13) при  $\lambda = \lambda_j$ , якщо не всі вони дорівнюють нулю.

Частковими розв'язками системи (2.10) будуть

$$x_j = \varphi_i(t), \quad (i = \overline{1, n}) \quad (2.14)$$

Щоб одержати загальний розв'язок системи (2.10), візьмемо лінійну комбінацію частинних розв'язків (2.14):

$$x(t) = \sum_{j=1}^n \gamma_j x_j = \sum_{j=1}^n \gamma_j e^{\lambda_j t} C_j. \quad (2.15)$$

Ця лінійна комбінація є загальним розв'язком системи (2.10) за умови  $\lambda_i \neq \lambda_j$ , якщо  $i \neq j$ . У загальному випадку розв'язок (2.14) можна представити у формі

$$x_j(t) = p_j(t) e^{\lambda_j t}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (2.16)$$

де  $p_j(t)$  – поліноми відносно  $t$ , ступінь яких менше кратності кореня  $\lambda_j$ , а коефіцієнти поліномів  $p_j(t)$  є постійними векторами.

Розглянемо наступні випадки:

1) усі корені  $\lambda_j$  мають від'ємну дійсну частину, тобто  $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$ ,  $j = \overline{1, n}$ ; тоді будь-який розв'язок системи (2.10) прагне до нуля при необмеженому зростанні часу  $t$ ;

2) існує принаймні один корінь  $\lambda_{j_0}$  такий, що  $\lambda_{j_0} > 0$ , тоді, відповідно, розв'язок (2.14) необмежено зростає при  $t \rightarrow +\infty$  при будь-яких, навіть при як зазвичай малих, значеннях координат вектора  $x_j$  в початковий момент часу.

Наявність кратного кореня  $\lambda_j$  не змінює поведінку інтегральних кривих системи (2.10), оскільки  $p_n(t) e^{\lambda t} \rightarrow 0$ , якщо  $e^{\lambda t} \rightarrow 0$ .

Розіб'ємо всі корені  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , тобто всі власні числа матриці  $A$ , на три групи:

- 1)  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  – власні числа з позитивною дійсною частиною;
- 2)  $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_{k+s}$  – власні числа з нульовими дійсними частинами;
- 3)  $\lambda_{k+s+1}, \dots, \lambda_n$  – власні числа з негативними дійсними частинами.

Існує неособливе лінійне перетворення  $X = SY$  над вектором  $X$ , при якому

система (2.11) приводиться до:

$$\frac{dY}{dt} = S^{-1}ASY, \quad (2.17)$$

де  $S^{-1}$  – матриця, зворотна до  $S$ .

Розіб'ємо систему (2.17) на три підсистеми:

$$\frac{dY_1}{dt} = A_+Y_1, \quad \frac{dY_2}{dt} = A_0Y_2, \quad \frac{dY_3}{dt} = A_-Y_3, \quad (2.18)$$

де  $A_+, A_0, A_-$  – матриці, що відповідають зазначеним трьом групам власних чисел.

Вектор  $Y_1$  має розмірність  $k$ , і всі розв'язки системи рівнянь відносно  $Y_1$  зростають необмежено при  $t \rightarrow \infty$ , в той час як усі розв'язки системи щодо вектора  $Y_3$  зменшуються і прагнуть до нуля при  $t \rightarrow \infty$ . Власні числа матриці  $A_0$  мають вигляд  $\lambda_j = i\mu_j$ . Частинний розв'язок, що відповідає такому  $\lambda_j$ , запишеться у формі

$$Y_{2j} = e^{j\mu_j t} C_j, \quad (2.19)$$

яка описує одночастотні коливання. Загальний розв'язок для вектор-стовпця  $Y_2$  буде мати вигляд

$$Y_2 = \sum_{j=1}^n \gamma_j e^{j\mu_j t} C_{2j}, \quad (2.20)$$

якщо вважати, що  $\mu_j$  ( $j = 1, s/2$ ) різні.

Розв'язок (2.20) описує складне коливання, яке є результатом накладення частинних коливань. Ці коливання будуть періодичними, якщо частоти можна порівняти, тобто коли відношення  $\frac{\mu_j}{\mu_k}$  – раціональне, і майже періодичними, якщо частоти непорівнянні.

Таким чином, весь  $n$ -вимірний простір можна розкласти в пряму суму підпросторів, де розв'язки в будь-якому підпросторі поведуться однаково чином, а рух у всьому просторі складається з рухів у цих підпросторах.

Розглянемо систему нестационарних лінійних диференціальних рівнянь

$$\dot{X} = A(t)X. \quad (2.21)$$

Матриця, стовпцями якої є  $n$ -лінійно незалежних розв'язків системи (2.21),



називається фундаментальною матрицею цієї системи, а її визначник називається визначником Вронського або вронськіаном.

Властивості фундаментальної матриці:

- 1) визначник фундаментальної матриці в жодній точці не дорівнює нулю;
- 2) якщо  $Y_1(t)$  – фундаментальна матриця, а  $S$  – постійна невідроджена матриця, то матриця  $Y_2(t) = Y_1(t)S$  також буде фундаментальною;
- 3) якщо  $Y_1(t)$  й  $Y_2(t)$  – дві фундаментальні матриці системи (2.21), то тоді існує постійна невідроджена матриця  $S$  така, що  $Y_2(t) = Y_1(t)S$ ;
- 4) якщо  $Y(t)$  – фундаментальна матриця, а  $t_0$  – деяке число з області визначення (і неперервності), то

$$\det Y(t) = \det Y(t_0) \exp \left( \int_{t_0}^t \text{Sp}A(r) dr \right), \quad (2.22)$$

де  $\text{Sp}A(t) = a_{11}(t) + \dots + a_{nn}(t)$  слід матриці  $A(t)$  (формула Остроградського-Ліувілля).

Фундаментальна матриця  $Y(t)$ , яка задовольняє умові  $Y(t_0) = E$ , називається нормованою при  $t = t_0$ .

Загальний розв'язок у формі Коші має вигляд

$$X(t, t_0, x_0) = Y(t)Y^{-1}(t_0)x_0. \quad (2.23)$$

Розв'язок неоднорідної системи

$$\dot{X} = A(t)X + f(t) \quad (2.24)$$

при будь-якому виборі неперервності векторної функції  $f(t)$  може бути знайдений за допомогою квадратур і представляється формулою Коші:

$$X(t) = Y(t)Y^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t Y(t)Y^{-1}(r)f(r)dr. \quad (2.25)$$

Аналітична природа функцій, що утворюють фундаментальну матрицю  $Y(t)$ , в більшості випадків практично не вивчена.

Візьмемо знову систему (2.21) з матрицею  $A(t)$ , неперервною, дійсною,  $2\pi$ -періодичною:  $A(t + 2\pi) = A(t)$ .

Нехай  $Y(t)$  – фундаментальна матриця системи (2.21).

*Теорема Флоке.* Існує неособлива матриця перетворення, така, що систему (2.21) з періодичними коефіцієнтами можна звести до системи з постійними коефіцієнтами

$$\dot{Z} = BZ, \quad (2.26)$$

так що

$$Y(t) = \Phi(t)e^{Bt}. \quad (2.27)$$

Оскільки  $\Phi(t)$  – періодична матриця, маємо

$$B = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{Y(2\pi)}{Y(0)}. \quad (2.28)$$

### 2.3. Крайова задача

Для лінійної системи (2.21) розглянемо замість завдання Коші наступну однорідну крайову задачу: знайти розв'язок  $x(t)$  системи (2.21), що задовольняє крайовим умовам

$$PX(a) + QX(b) = 0, \quad (2.29)$$

де матриці  $P, Q$ , числа  $a, b$  задані.

Нехай  $Y(t)$  – нормована при  $t = a$  фундаментальна матриця системи (2.21). Розв'язок крайової задачі будемо шукати у вигляді

$$X(t) = Y(t)C. \quad (2.30)$$

З умови (2.17) випливає, що  $C$  визначається рівнянням

$$(P + QY(b))C = 0. \quad (2.31)$$

Крайова точка допускає нетривіальний розв'язок, тоді й тільки тоді, коли

$$\det(P + QY(b)) = 0. \quad (2.32)$$

Розглянемо тепер неоднорідну крайову задачу

$$\dot{X} = A(t)X + f(t); \quad (2.33)$$

$$PX(a) + QX(b) = 0. \quad (2.34)$$

Припустимо, що  $\det(P + QY(b)) \neq 0$ .

Функція  $G(t, s)$ ,  $(t, s \in [a, b], t \in s)$  називається функцією Гріна крайової задачі (2.28), (2.34), якщо вона задовольняє наступним умовам:

$$1) \text{ при } t \in [a, s) \quad t \in (s, b], \quad \frac{dG}{dt} = A(t)G;$$

$$2) PG(a, s) + QG(b, s) = 0 \text{ при всіх } s \in (a, b);$$

$$3) G(s+0, s) - G(s-0, s) = E.$$

З умови 1 і властивостей фундаментальної матриці випливає, що

$$G(t, s) = \begin{cases} Y(t)S(s), & t \in [a, s); \\ Y(t)T(s), & t \in (s, b]. \end{cases} \quad (2.35)$$

З умов 2 і 3 одержуємо

$$PS + QY(b)T = 0, \quad Y(S - T) = -E, \quad (2.36)$$

звідки

$$S - T = -Y^{-1}; \quad (2.37)$$

$$S(s) = -(P + QY(b))^{-1} QY(b)Y^{-1}(s); \quad (2.38)$$

$$T(s) = [E - (P + QY(b))^{-1} QY(b)]Y^{-1}(s). \quad (2.39)$$

Отже,  $G(t, s)$  однозначно визначається формулою

$$G(t, s) = \begin{cases} -Y(t)(P + QY(b))^{-1} QY(b)Y^{-1}(s), & t \in [a, s); \\ Y(t)[E - (P + QY(b))^{-1} QY(b)]Y^{-1}(s), & t \in (s, b]. \end{cases} \quad (2.40)$$

*Теорема.* Якщо  $\det(P + QY(b)) \neq 0$ , то неоднорідна крайова задача (2.31), (2.32) має єдиний розв'язок, що задається формулою

$$X(t) = \int_a^b G(t, s)f(s)ds, \quad (2.41)$$

де  $G(t, s)$  – функція Гріна однорідної крайової задачі (2.21), (2.29).

## 2.4. Різницеві системи

Дискретним аналогом диференціального є різницеве рівняння. Розглянемо систему стаціонарних різницевих рівнянь

$$X(k+1) = AX(k) \quad (2.42)$$

з початковими умовами

$$X(0) = X_0. \quad (2.43)$$

Розв'язком (2.42) і (2.43) є числова послідовність  $\{X(k)\}_{k=0}^{\infty}$ , елементи якої обчислюються за формулою

$$X(k) = A^k X(0) = S I^k S^{-1} X(0), \quad (2.44)$$

де  $I$  – жорданова форма матриці  $A$ .

З формули (2.44) випливає, що власним числам матриці  $A$ , які за модулем менше одиниці, відповідають розв'язки, що зменшуються до нуля при  $k \rightarrow \infty$ ; власним числам, за модулем більше одиниці, відповідають розв'язки, що необмежено зростають при  $k \rightarrow \infty$ ; якщо власне число за модулем дорівнює одиниці і є простим (або йому відповідає простий елементарний дільник), то відповідний йому розв'язок обмежений.

Приклад 2.2. Розглянемо систему

$$X(k+1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} X(k), \quad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

За формулою (2.44) маємо:

$$\begin{aligned} X(k) &= \begin{pmatrix} i & -i & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\pi/4} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} \frac{1}{2i} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2i} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi k}{4} & -\sin \frac{\pi k}{4} & 0 \\ \sin \frac{\pi k}{4} & \cos \frac{\pi k}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \cos \frac{\pi(k-1)}{4} \\ -\sqrt{2} & \sin \frac{\pi(k-1)}{4} \\ & \left(\frac{1}{2}\right)^k \end{pmatrix}. \quad (2.46) \end{aligned}$$

## 2.5. Рівняння систем управління

Для розв'язку будь-якого завдання, пов'язаного з аналізом динаміки систем управління, необхідно насамперед скласти математичну модель (ММ) досліджуваної системи. Найпоширенішими ММ є системи диференціальних рівнянь (звичайних, із частковими похідними) або функціонально-диференціальних рівнянь.

Різні системи управління можуть містити в собі пружні системи технічних об'єктів (несучі системи, шпindelні вузли, механізми руху), робочі процеси технічних об'єктів (процеси різання металів, процеси в приводах технічних систем, процеси тертя механізмів, що рухаються, тощо), замкнені технологічні системи (технологічні системи лезової і абразивної обробки матеріалів, технологічні системи машин і механізмів, автоматичного транспорту, промислових роботів) та інші. Наприклад, технологічна система (ТС) може бути утворена еквівалентною пружною системою машини (верстата) і робочих процесів у їхній взаємодії (рис. 2.1).

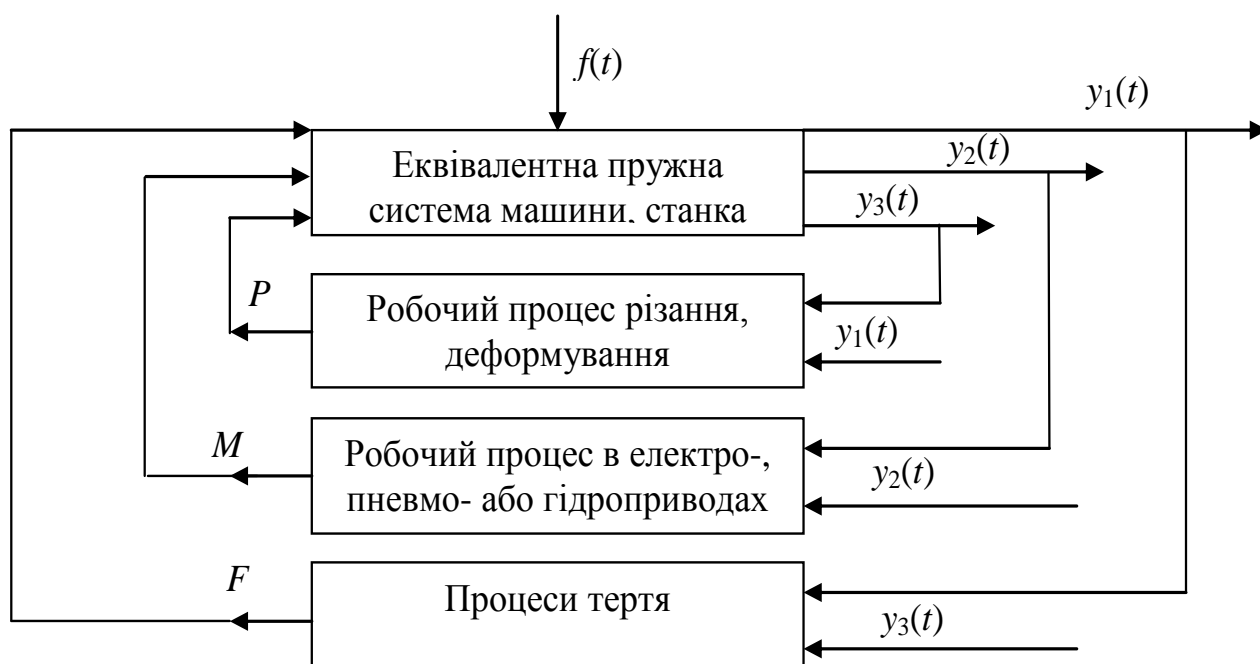


Рис. 2.1. Структурна схема технологічної системи:  $f(t)$  – зовнішній вплив на пружну систему;  $P$ ,  $M$ ,  $F$  – силовий вплив робочих процесів (відповідно сили різання, моменту двигуна, сили тертя) на пружну систему;  $y_i(t)$  – деформація еквівалентно-пружної системи

Розрізняють два роди рівнянь систем управління – рівняння режимів, що встановилися, або рівняння статички, і рівняння перехідних процесів або рівняння динаміки процесу управління.

*Рівняння режимів, що встановилися.* Зазвичай це алгебраїчні рівняння. Вони зв'язують узагальнені координати, що визначають систему, і дозволяють знайти положення будь-якого елемента системи або величину, що характеризує її стан (температуру регульованої печі, положення регульовального органа, кі-



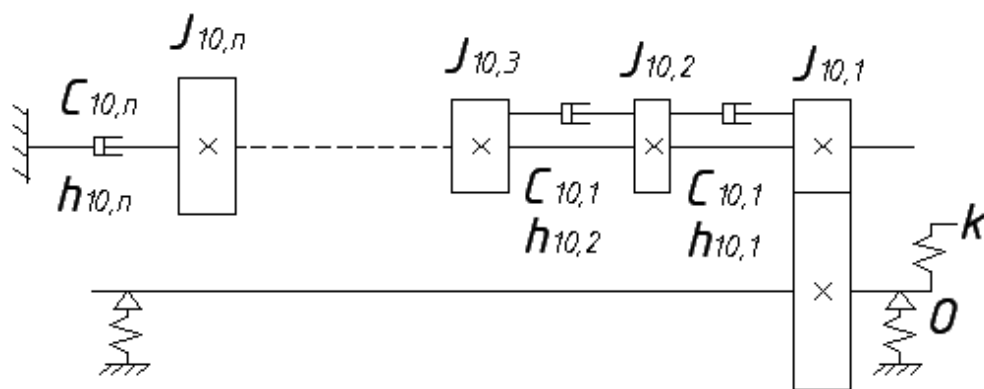


Рис. 2.2. Розрахункова схема головного приводу

Наприклад, для складання розрахункової схеми верстату в загальному випадку необхідно мати:

- 1) паспорт на верстат, де зазначені його загальний вигляд, схеми установки та кріплення на фундаменті;
- 2) складальні креслення всіх основних вузлів верстата;
- 3) креслення всіх основних корпусних деталей, шпинделів, ходових гвинтів, шестірень і валів, ланцюгів головного приводу подачі;
- 4) креслення основних пристосувань для кріплення деталей і різального інструменту;
- 5) креслення різальних інструментів і дані про спосіб їхньої установки та кріплення, геометрії і матеріалів ріжучої частини;
- 6) схеми кріплення оброблюваної деталі, її розміри, дані про матеріал;
- 7) відомості про режими обробки;
- 8) відомості про механізми робочих процесів (електродвигунів, гідро- і пневмосистем, вузлів тертя).

Верстат розглядається як пружна система, що складається з окремих елементів, деталей або груп деталей, для яких потім складаються рівняння руху.

У токарному верстаті можна виділити наступні елементи розрахункової схеми: верстат як єдине ціле, фундамент, передню частину станини, задню частину станини, власне станину, шпиндельну бабку, задню бабку, шпиндель із деталями установки й затискування оброблюваної заготовки, ланцюг приводу головного руху, каретку із супортом.

Фундамент розглядають як пружний елемент і джерело збурювань. Фундамент і стик верстата з фундаментом замінюють трьома пружинами – двома поступальними  $k$  і однією поворотною  $C$ . Вказуються координати центру ваги верстата. Шпиндель із закріпленими на ньому деталями розглядається як балка на пружних опорах. При розрахунках вона розбивається на 5 – 10 мас, перетворюючись на систему з 5 – 10 ступенями свободи.

Головний привід разом з електродвигуном розглядається як ланцюгова система, яка складається з послідовно з'єднаних пружних демпфуючих елементів, розділених зосередженими маховими масами. Податливість цих елементів складається із закручування та вигину валів, контактних деформацій у шліцах,

шпонках, посадках і місцях контакту зубів.

Розрахункові схеми можна спрощувати. Якщо коливання у верстаті мають частоту 100 Гц, то можуть не враховуватися ті ступені свободи елементів, за якими парціальні частоти перевищують 500 – 1000 Гц. До спрощення також веде врахування симетрії конструкцій кареток, розмірів заготовок, твердості окремих елементів.

Такі спрощення ведуть до зменшення ступенів свободи (розмірності системи диференціальних рівнянь) при збереженні адекватності математичної моделі.

## 2.7. Приклад складання рівнянь

Приклад 2.3. Вивести диференціальні рівняння для гідравлічного приводу із силовим циліндром.

*Розв'язок.* Для побудови математичної моделі використовуємо рівняння мас і рівняння Ньютона для переміщення штока.

При переміщенні золотника донизу на величину  $x_3$  рівняння витрат мастила, що протікає крізь нижній дроселюючий отвір, буде мати вигляд

$$q_1 = \mu\sigma x_3 \sqrt{\frac{2g}{\gamma}(P_0 - P_1)}, \quad (2.48)$$

де  $\mu$  – коефіцієнт витрат мастила при повністю відкритих отворах;  $\sigma$  – ширина відкритого отвору.

Рівняння витрат мастила, що витікає крізь через верхній отвір (на злив), можна записати у вигляді

$$q_2 = \mu\sigma x_3 \sqrt{\frac{2g}{\gamma} P_2}. \quad (2.49)$$

Складемо рівняння витрат мастила в золотниковій системі для нижньої і верхньої площин:

$$q_1 = q_n + q_{C_1}; \quad q_2 = q_n + q_{C_2}, \quad (2.50)$$

де  $q_n$  – витрати мастила, затрачувані на переміщення поршня силового циліндра;  $q_{C_1}, q_{C_2}$  – кількість мастила, що витрачається на стискування (розширення). При цьому  $q_n = F\dot{x}$ , де  $F$  – площа поршня;  $\dot{x}$  – швидкість переміщення штока поршня.

Для визначення  $q_{C_1}, q_{C_2}$  введемо коефіцієнт об'ємного стискування:



$$\beta = \frac{\frac{\Delta V}{x}}{\Delta p}, \quad (2.51)$$

де  $\Delta V$  – зменшення об'єму мастила, викликане збільшенням тиску на  $\Delta p$ .

Кількість стисненого мастила

$$q_c = \dot{V} = V\beta\dot{p}. \quad (2.52)$$

Отже,

$$\begin{cases} q_{c_1} = V_1\beta\dot{p}_1; \\ q_{c_2} = V_2\beta\dot{p}_2. \end{cases} \quad (2.53)$$

Використовуючи остаточні вирази для  $q_1$  й  $q_2$ , а також рівняння переміщення штока, одержуємо систему

$$\begin{cases} m\ddot{x} = f(p_1 - p_2); \\ f\dot{x} + V_1\beta\dot{p}_1 = \mu\sigma\sqrt{\frac{2g}{\gamma}}x_3\sqrt{(P_0 - P_1)}; \\ f\dot{x} - V_2\beta\dot{p}_2 = \mu\sigma\sqrt{\frac{2g}{\gamma}}x_3\sqrt{P_0}. \end{cases} \quad (2.54)$$

Лінеаризовані рівняння можна спростити. Нехай

$$x_3 = x_{3,0} + x_3, \quad x = x_0 + x \quad (x_0 = (0)) \quad \text{і} \quad V_1 = V_2 = V. \quad (2.55)$$

Тоді можна виключити змінні  $p_1, p_2$ :

$$\frac{mV\beta\sqrt{2p_0}}{f}\ddot{x} + \frac{m\mu\sigma x_{30}}{f}\sqrt{\frac{2g}{\gamma}}\ddot{x} + 2f\sqrt{2P_0} = 2\mu\sigma p\sqrt{\frac{2g}{\gamma}}x_3. \quad (2.56)$$

## 2.8. Математичні моделі пружних систем

Розглянемо шпindelний вузол (рис. 2.3). Деформацією шпинделя можна зневажити в порівнянні з деформацією підшипникових опор. Тоді рівняння прийме вигляд:

$$m\ddot{x} = -k_1q_1 - k_2q_2 - h_1\dot{q}_1 - h_2\dot{q}_2; \quad (2.57)$$

$$i\ddot{\varphi} = -l_1(k_1q_1 + h_1\dot{q}_1) + l_2(k_2q_2 + h_2\dot{q}_2), \quad (2.58)$$

$$q_1 = x + l_1\varphi, \quad q_2 = x - l_2\varphi. \quad (2.59)$$

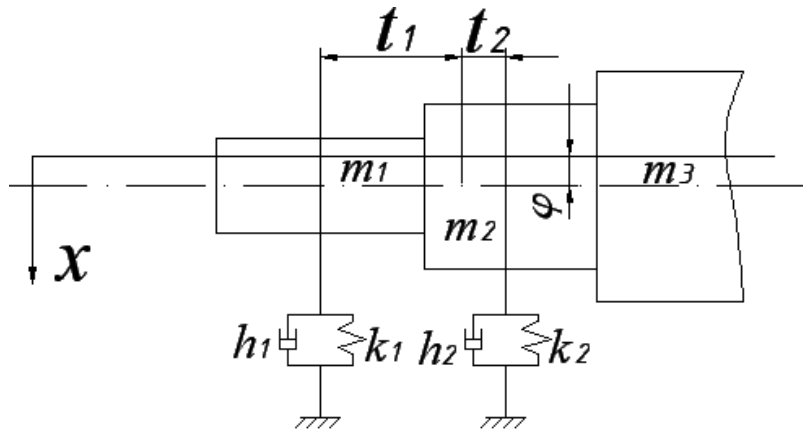


Рис. 2.3. Розрахункова схема найпростішого шпиндельного вузла

Тут  $m$  – маса балки;  $i$  – момент інерції балки щодо центру ваги;  $k_1, k_2$  – жорсткості опор;  $h_1, h_2$  – демпфірування підшипникових вузлів;  $l_1, l_2$  – відстані від опор до центру ваги;  $x$  – вертикальне переміщення центру ваги балки;  $\varphi$  – кут її закручування навколо центру ваги.

## 2.9. Математичні моделі замкнених технологічних систем

Диференціальне рівняння у відхиленнях ( $x, x_3$ ) записується у вигляді

$$\frac{mv\beta\sqrt{2P_0}}{f} \frac{d^3x}{dt^3} + \frac{m\mu bx_{3,0}}{f} \sqrt{\frac{2g}{\gamma}} \frac{d^2x}{dt^2} + 2f\sqrt{2P_0} \frac{dx}{dt} = 2\mu bP_0 \sqrt{\frac{2g}{\gamma}} x_3, \quad (2.60)$$

де:  $x_{3,0} = x_3 - \tilde{x}_3$ ;  $m$  – маса штока поршня;  $v$  – об'єм мастила;  $\beta$  – коефіцієнт об'ємного стискування;  $f$  – площа поршня;  $\mu$  – коефіцієнт витрати мастила при повністю відкритих отворах;  $b$  – ширина відкритого отвору.

Верстат в технологічному процесі, наприклад, при різанні, розглядається як замкнена система автоматичного регулювання. Вхідним сигналом для пружної системи та вихідним для процесу різання є сила різання, вхідним сигналом для процесу різання і вихідним для пружної системи є відносне переміщення різального інструменту та оброблюваної заготовки в напрямку зміни товщини шару, що зрізується.

У загальному випадку замкнений ланцюг регулювання < пружна система – процес різання > є багатовимірним.

Розглянемо процес заточування (рис. 2.4).

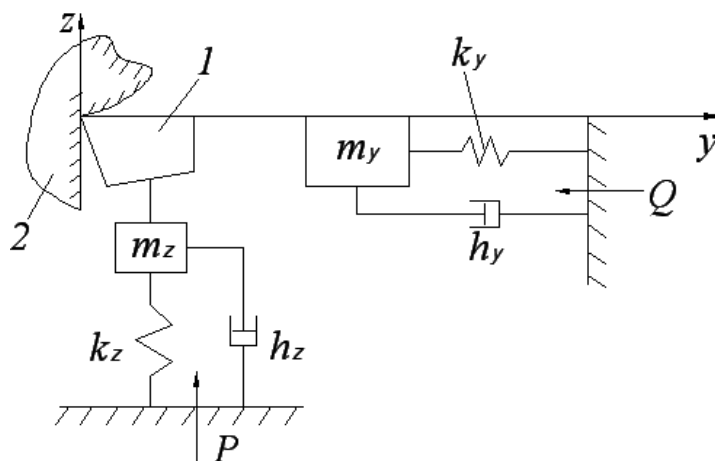


Рис. 2.4. Розрахункова схема технологічної автоколивальної системи процесу заточування:  
1 – різець; 2 – оброблювана заготовка

Система рівнянь у безрозмірній формі при заточуванні з поперечною подачею має вигляд

$$\begin{cases} T_{y2}^2 \ddot{y} + T_{y1} \dot{y} + y = 0; \\ T_{z2}^2 \ddot{z} + T_{z1} \dot{z} + z = 0; \\ T_p \dot{P} + P = -K_y \dot{y} - T_{kz1} \dot{z}; \\ T_q \dot{q} + q = P - T_{ky} \dot{y} - T_{kz2} \dot{z}, \end{cases} \quad (2.61)$$

де  $P$  – дотична сила (різання);  $q$  – нормальна сила (тертя);  $T_p, T_q$  – постійні часу запізнювання дотичної сили  $P$  щодо переміщення  $y$  й відповідної нормальної сили  $q$  щодо сили  $P$ ;  $K_y$  – коефіцієнт передачі контуру;  $T_{kz1}, T_{kz2}, T_{ky}$  – коефіцієнти, що характеризують запізнювання дисипативних сил;  $T_{y2}^{-1}, T_{z2}^{-1}$  – парціальні кругові частоти по координатах;  $T_{y1}, T_{z1}$  – постійні часу демпфірування.

## 2.10. Програмні управління

Розглянемо систему рівнянь

$$\dot{x}_i + f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r), \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.62)$$

Тут вектор-функцію  $u = u(t)$  розмірності  $r$  назвемо програмним управлінням. При цьому будемо вважати, що при кожному допустимому управлінні на проміжку  $[0, T]$ , тобто такому, для якого інтеграл  $\int_0^T u^*(r)u(r)dr$  обмежений, для системи (2.62) виконані умови існування та одиницності розв'язку завдання

Коші.

Завдання програмного управління полягає в пошуку допустимого управління  $u(t)$ , при якому система (2.62) має розв'язок  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^*$ , що задовольняє умові

$$x(0) = x^1, \quad x(T) = x^2. \quad (2.63)$$

Тут  $x^1, x^2$  – задані вектори.

Якщо таке управління існує, то його називають програмним, а пари точок  $(x^1, x^2)$  – керованими на  $[0, T]$  парою.

Система називається повністю керованою на  $[0, T]$ , якщо кожна пара точок  $(x^1, x^2)$  керована на  $[0, T]$ .

Загальних способів відшукування програмних управлінь для системи (2.62) немає.

Розглянемо лінійну систему

$$\dot{x}(t) = a(t)x + b(t)u + f(t). \quad (2.64)$$

Тут елементи матриць  $a(t), b(t)$  і вектора  $f(t)$  задані і неперервні на  $[0, T]$ .

*Теорема.* Система (2.64) повністю керована на  $[0, T]$  тоді й тільки тоді, коли матриця

$$P(t) = \int_0^T M M^* dt, \quad (2.65)$$

де  $M = y^{-1}B$ , не особлива,  $y(t)$  – фундаментальна матриця системи  $\dot{x} = Ax$ .

При цьому вся множина програмних управлінь задається формулою  $u = M^* C + v$ , інтеграл  $\int_0^T u^* u dt$  обмежений і  $\int_0^T M v dt = 0$ ,

$$C = P^{-1}(T) \left[ y^{-1}(T)x^1 - \int_0^T y^{-1}(r)f(r)dr - x^0 \right].$$

Система різницевого управління з початковими та граничними умовами  $x(0) = x^1, \quad x(m) = x^2$ :

$$x(k+1) = a(k)x(k) + b(k)u(k) + f(k). \quad (2.66)$$

*Теорема.* Система (2.26) повністю керована на  $[0, T]$  тоді й тільки тоді, коли ранг матриці

$$S = (b(m-1), a(m-1)b(m-2), a(m-1)a(m-2)b(m-3), \dots, a(m-1) \cdot \dots \cdot a(1)b(0))$$

рівний  $n$ .

Якщо матриці  $a(k)$  та  $b(k)$  не залежать від  $k$ , то  $S = (b, ab, \dots, a^{n-1}b)$

Якщо система (2.25) повністю керована на  $[0, T]$ , то для кожної пари точок  $(x^1, x^2)$  серед програмних управлінь існує кусочно-постійне.

Приклад 2.4. Чи буде керована на  $[0, T]$  пара точок для системи  $\ddot{x} + u\dot{x} = 0$  з початковими і граничними умовами

$$a) \begin{cases} \begin{pmatrix} x(0) \\ \dot{x}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x(1) \\ \dot{x}(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad б) \begin{cases} \begin{pmatrix} x(0) \\ \dot{x}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x(1) \\ \dot{x}(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} ? \quad (2.67)$$

*Розв'язок.* Маємо інтегральну систему:

$$\begin{cases} \frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -u dt, & \dot{x}(t) = \dot{x}(0)u(t), \\ V(t) = e^{-\int_0^t u(r) dr} \\ x(t) = x(0) + \dot{x}(0) \int_0^t V(\xi) d\xi. \end{cases} \quad (2.68)$$

Із граничних умов одержуємо

$$\begin{cases} x(1) = 1 + \int_0^1 V(\xi) d\xi, \\ \dot{x}(1) = V(1). \end{cases} \quad (2.69)$$

Оскільки  $V(t) > 0$  і  $x(1) > 1$ , то, у випадку а) пара точок не керована, у випадку б) – керована, оскільки можна обрати  $u(t) = 1$ .

### 2.10.1. Стійкість за Ляпуновим програмних рухів

Нехай дана система звичайних диференціальних рівнянь

$$\dot{X} = f(x, t), \quad (2.70)$$

де  $X$  – вектор; вектор –  $f(x, t)$  – функція розмірності  $n$ .

Нехай відомий деякий розв'язок цього диференціального рівняння

$$x = \bar{x}(t), \quad (2.71)$$

дійсний при  $t_0 \geq 0$ . Цей розв'язок назвемо незбуреним (програмним) рухом, а будь-який інший, на відміну від нього, збуреним.

Незбурений рух  $x = \bar{x}(t)$  називається стійким за Ляпуновим, якщо для будь-якого  $t_0 \geq 0$  й будь-якого числа  $\varepsilon > 0$  можна вказати число  $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$  таке, що при  $\|x - \dot{x}_0\| < \delta(\varepsilon, t_0)$  буде  $\|x(t, x_0, t_0) - \bar{x}(t)\| < \varepsilon$  при  $t \geq t_0$ , де  $x(t_0, x_0, t_0) = x_0$ ,  $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$ .

Геометрична стійкість за Ляпуновим означає, що як завгодно вузька  $\varepsilon$ -область розв'язку  $\bar{x}(t)$  містить усі розв'язки, які в початковий момент  $t_0$  перебували на відстані від  $\bar{x}_0$  не більше ніж на  $\delta$ .

Має сенс говорити тільки про стійкість певного розв'язку  $\bar{x}(t)$ , а не всіх розв'язків рівнянь (2.70).

### 2.10.2. Стабілізація програмних рухів

Нехай поведінка технічної системи описується векторним звичайним диференціальним рівнянням

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y, \varpi), \quad y(0) = y_0. \quad (2.72)$$

Тут  $y, y_0 \in r^n$  – вектори поточного і початкового станів системи;  $\varpi \in r^r$  – вектор керуючих впливів.

Виберемо програмний (незбурений) розв'язок  $y = y_0(t)$ , відповідно до програмного початкового стану  $y_0 = y_{0p}$  і деякого програмного управління  $\varpi = \varpi_p(t)$ . Прийmemo відхилення збуреного розв'язку та управління від аналогічних програмних

$$x = y - y_p(t), \quad u = \varpi - \varpi_p(t). \quad (2.73)$$

Рівняння у відхиленнях має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = g(t, x, u), \quad x(0) = x_0. \quad (2.74)$$

Оскільки  $g(t, 0, 0) = 0$ , завдання вивчення розв'язку в околиці виділеного програмного початкового стану зводиться до завдання вивчення розв'язків рівняння (2.74) в околиці положення рівноваги  $x = 0, u = 0$ . Координати вектора управління  $u$  звичайно називають входами системи. Під виходами системи ро-

зміють координати доступного вимірювання вектора  $\eta$ , що є функцією стану  $x$ . Якщо на входи системи подаються управління  $u = u(t, \eta)$  залежно від вимірюваних сигналів виходів, то говорять про управління за принципом зворотного зв'язку. Якщо в кожний момент часу вимірювання доступні всі координати вектора стану системи, то говорять, що управління побудоване за принципом повного зворотного зв'язку.

Сформулюємо класичне завдання стабілізації програмного розв'язку (режиму, руху, процесу) системи (2.72) управлінням, побудоване за принципом повного зворотного зв'язку: потрібно побудувати управління  $u = u(t, x)$ , ( $u(t, 0) = 0$ ), при якому всі розв'язки системи (2.74), що починаються в досить малій околиці нуля, убивають за експонентним законом.

Управління, які вирішують завдання стабілізації називаються стабілізуючими. Якщо існує хоч одне таке управління, то систему (2.74) будемо називати стабілізуємою. Виділимо в системі (2.74) члени, лінійні відносно  $x$  і  $u$ . Тоді одержимо

$$\dot{x} = a(t)x + b(t)u + H(t, x, u), \quad (2.75)$$

де  $\|H(t, x, u)\| < l(\|x\| + \|u\|)^{1+\alpha}$ , причому  $\alpha = \text{const} > 0$ ,  $l = \text{const}$ .

Припустимо, що при управлінні  $u = M \cdot t(x)$  нульовий розв'язок системи  $\dot{X} = a(t)x + b(t)u$  експоненціально стійкий за Ляпуновим. Тоді розв'язок  $x = 0$  системи (2.75) асимптотично стійкий.

### 2.11. Питання до самоконтролю

1. Що таке система диференціальних рівнянь у нормальній формі Коші?
2. Що таке порядок системи диференціальних рівнянь?
3. Що є розв'язком системи диференціальних рівнянь? Як виглядає цей розв'язок з геометричної точки зору?
4. Якою теоремою обумовлюються умови існування та єдиності розв'язку завдання Коші?
5. Що таке лінійні системи диференціальних рівнянь? Векторна форма їх завдання.
6. Що таке вронський? Які властивості фундаментальної матриці ви знаєте?
7. Як використовуються системи диференціальних рівнянь для розв'язання крайових задач?
8. При яких умовах функція  $G(t, s)$  називається функцією Гріна крайової задачі?
9. Що є дискретним аналогом диференціального рівняння? Наведіть приклади.
10. Застосування диференціальних рівнянь для моделювання систем управління.
11. Два роди рівнянь систем управління: рівняння режимів (статика) та рівняння процесів (динаміка).
12. Роль розрахункових схем в побудові математичних моделей об'єктів. Наведіть приклади.
13. Що треба мати для складання розрахункової схеми верстату?
14. Розберіть приклад виведення диференціального рівняння гідравлічного приводу і з силовим циліндром.
15. Чим відрізняються математичні моделі пружних систем.
16. Наведіть особливості (на прикладі гідравлічного приводу) побудови математичної моделі робочого процесу.
17. Особливості математичних моделей замкнених математичних систем.
18. Диференціальні рівняння в програмному управлінні.
19. Як математично дослідити стійкість програмних рухів за Ляпуновим?
20. Моделі у вигляді звичайних диференціальних рівнянь при розв'язанні проблеми стабілізації програмних рухів.



## Розділ 3

### МОДЕЛІ У ВИГЛЯДІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

#### 3.1. Диференціальні рівняння параболічного типу

##### 3.1.1. Деякі питання теорії теплопровідності

Для моделювання процесу теплопровідності необхідно скласти рівняння, що описує передачу теплоти від однієї частини тіла до іншої, або від одного тіла до іншого, сформулювати граничні умови, які описують теплообмін на границях тіл, що контактують, і визначити початкові умови, які описують стан системи в початковий момент часу.

Процес теплопередачі відбувається в просторі й часі. Тому аналітичне дослідження теплопровідності зводиться до вивчення просторово-часового виміру основної фізичної величини – температури, тобто до знаходження залежності  $T = f(x, y, z, t)$ , яка визначає миттєве значення температури у всіх точках досліджуваної технічної системи (ТС). Сукупність цих значень температури називається температурним полем.

Поле, що відповідає несталому тепловому режиму теплопровідності, називається нестационарним температурним полем. Якщо тепловий режим встановився, то температура в кожній точці тіла із часом залишається незмінною. Таке температурне поле називається стационарним і температура є функцією тільки координат:  $T = T'(x, y, z)$ .

У тілі, що має температуру  $T(x, y, z, t)$ , можна виділити поверхню, у всіх точках якої в деякий момент часу температура однакова – ізотермічну поверхню. Для ізотермічних поверхонь, які описуються рівнянням  $T(x, y, z, t) = C$ , характерно те, що теплота не поширюється уздовж поверхні, а направляється від однієї поверхні до іншої.

Розглянемо дві нескінченно близькі ізотермічні поверхні з температурами  $T$  і  $T + \Delta T$  ( $\Delta T > 0$ ) і яку-небудь точку  $M$ , що лежить на одній з них (рис. 3.1).

Переміщуючись із точки  $M$  уздовж будь-яких напрямків, можна виявити, що інтенсивність зміни температур в різних напрямках неоднакова. Швидкість зміни температури  $T$  у точці  $M$  у напрямку  $l$  характеризується похідною

$$\frac{\partial T}{\partial l} \quad l = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma), \quad (3.1)$$

яка обчислюється за формулою:

$$\frac{\partial T}{\partial l} = \frac{\partial T}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial T}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial T}{\partial z} \cos \gamma. \quad (3.2)$$

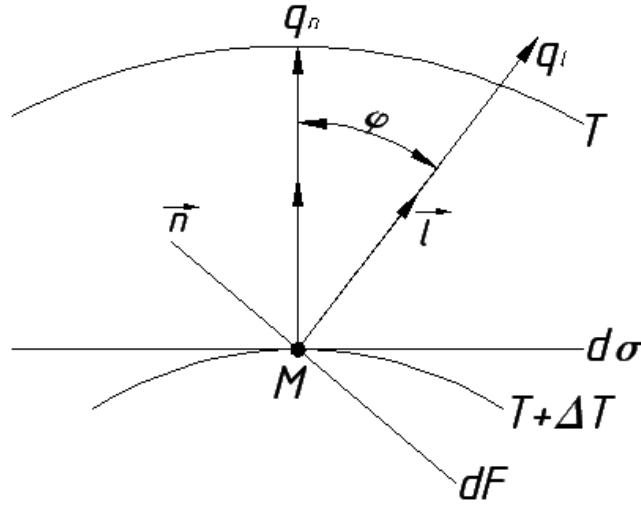


Рис. 3.1. Розрахункова схема до виведення рівняння теплопровідності

Найбільша різниця температури на одиницю довжини вектора переміщення спостерігається в напрямку нормалі  $\vec{n}$  до ізотермічної поверхні. Таким чином, у будь-якій точці  $M$  ізотермічної поверхні максимальна швидкість зміни температури відбувається в напрямку нормалі  $\vec{n}$ , тобто

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \vec{n} \overrightarrow{\text{grad}T} = \left( \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k} \right) \vec{n} = \vec{\nabla} T \vec{n}. \quad (3.3)$$

Температурний градієнт показує, наскільки інтенсивно змінюється температура усередині тіла. У цьому сенсі температурний градієнт є основним фізичним параметром, який визначає умову виникнення теплового процесу, тобто при  $\overrightarrow{\text{grad}T} \neq 0$  усередині тіла виникає тепловий потік.

Тепловий потік має певний напрямок, а саме: від точок тіла з більш високою до точок з більш низькою температурою. Інакше кажучи, тепловий потік можна розглядати як вектор, спрямований у бік зменшення температур, а поле теплових потоків – векторним.

Під вектором теплового потоку в точці  $M$  температурного поля будемо розуміти вектор, напрямком якого збігається з напрямком перенесення теплоти  $Q$ . Абсолютна величина, яка виражає тепловий потік або інтенсивність перенесення теплоти, вимірюється кількістю теплоти, що проходить в одиницю часу  $t$  через одиницю площі поверхні  $d\sigma$ , перпендикулярної до напрямку потоку в розглянутій точці, тобто

$$q = \frac{dQ}{(d\sigma dt)}. \quad (3.4)$$

Вектори щільності теплового потоку  $\vec{q}$  та  $\overrightarrow{\text{grad}T}$  спрямовані по нормалі до ізотермічної поверхні, але протилежно направлені. Зі збільшенням температур, тобто зростанням температурного градієнта, збільшується й щільність теплового потоку. Експерименти показали, що між щільністю теплового потоку й різницею температур існує залежність. Це і стало основою гіпотези Фур'є про наявність найпростішої кількісної залежності між абсолютними значеннями векторів щільності теплового потоку та температурного градієнта. У векторному вигляді закон Фур'є записується рівнянням

$$\vec{q} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}T}, \quad (3.5)$$

яке відбиває механізм теплопровідності і використовується при виведенні рівняння теплопровідності. Це рівняння лежить в основі побудови математичних моделей теплофізичних процесів у ТС.

Коефіцієнт пропорційності  $\lambda$  називається коефіцієнтом теплопровідності і є константою, що характеризує теплопровідні властивості матеріалу тіла, та має розмірність  $\text{Вт} / \text{м}^2 \cdot \text{град}$ .

### 3.1.2. Диференціальне рівняння теплопровідності

В основу виведення диференціального рівняння теплопровідності покладений закон збереження енергії, що поєднується із законом Фур'є.

Виділимо в тілі деяку частину об'єму  $V$ , обмежену замкненою поверхнею  $S$ , крізь яку відбувається тепла взаємодія виділеної частини з навколишнім середовищем – іншою частиною тіла.

Має місце наступне твердження: кількість теплоти  $Q$ , отримана виділеним об'ємом за час  $dt$  внаслідок теплопровідності, а також від внутрішніх джерел теплоти, дорівнює зміні внутрішньої енергії речовини, що міститься у виділеному об'ємі:

$$Q = Q_1 + Q_2, \quad (3.6)$$

де  $Q$  – зміна внутрішньої енергії речовини, яка відбувається у виділеному об'ємі  $V$  за час  $dt$ ;  $Q_1$  – кількість теплоти, введена у виділений об'єм шляхом теплопровідності за час  $dt$ ;  $Q_2$  – кількість теплоти, яка виділилася в об'ємі  $V$  за час  $dt$  внаслідок внутрішніх джерел теплоти.

Для визначення  $Q_1$  скористаємося законом Фур'є в скалярній формі:

$$dQ_1 = \lambda \frac{\partial T}{\partial n} d\sigma dt = \lambda \overrightarrow{\text{grad}T} \cdot \vec{n} d\sigma dt = -q_n d\sigma dt, \quad (3.7)$$

де  $\vec{q} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}T}$  – вектор щільності теплового потоку.

Кількість теплоти, яка протікає за час  $dt$  крізь поверхню  $S$ , виразиться інте-

гралом

$$Q_1 = -dt \int_S \int \vec{q} n d\sigma = -dt \int_S \int q_n d\sigma. \quad (3.8)$$

Поверхневий інтеграл (3.8) можна перетворити в об'ємний за формулою Остроградського-Гаусса:

$$\iint_S q_n d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{q} dV. \quad (3.9)$$

Тоді

$$Q_1 = -dt \iiint_V \operatorname{div} \vec{q} dV. \quad (3.10)$$

Виділення або поглинання теплоти всередині об'єму  $V$  зручно характеризувати за допомогою щільності  $F(M, t)$  (потужності) теплових джерел:

$$dQ_2 = F(M, t) dV dt. \quad (3.11)$$

За проміжок часу  $dt$  в тілі об'ємом  $dV$  виділиться кількість теплоти

$$Q_2 = dt \iiint_V F(M, t) dV. \quad (3.12)$$

Тут  $F(M, t) > 0$ , якщо  $F(M, t) < 0$  то теплота не виділяється, а поглинається. Загальна кількість теплоти, отримана виділенням об'ємом:

$$Q = dt \iiint_V F(M, t) dV - dt \iiint_V \operatorname{div} \vec{q} dV. \quad (3.13)$$

З іншого боку, ця кількість теплоти дорівнює зміні внутрішньої енергії речовини, що міститься в об'ємі  $V$ ,

$$Q = CdT, \quad (3.14)$$

де  $C$  – теплоємність тіла, Дж/кг·град;  $dT$  – зміна його температури.

У точці  $M(x, y, z) \in V$  за проміжок часу  $dt$  температура  $T(x, y, z, t)$  зміниться на

$$T(x, y, z, t + dt) - T(x, y, z, t) = \frac{\partial T}{\partial t} dt. \quad (3.15)$$

Елементу  $dV$  масою  $\rho dV$  (тут  $\rho$  – густина речовини) для такої зміни температури потрібна кількість теплоти, яка дорівнює  $\rho c \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right) dV dt$ , Для всього об'єму  $V$

$$CdT = dt \iiint_V c\rho \frac{\partial T}{\partial t} dV, \quad (3.16)$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} -Q_2 - Q_1 + Q &= \iiint_V \left[ F(M, t) + \operatorname{div} \vec{q} + c\rho \frac{\partial T}{\partial t} \right] dV = \\ &= \iiint_V \left[ c\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q} - F(M, t) \right] dV = 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Рівність (3.17) повинна виконуватися для будь-якої частини тіла об'ємом  $V$ . Це можливо тільки тоді, коли в кожній точці всередині тіла

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q} - F(M, t) = 0. \quad (3.18)$$

Приймаючи до уваги, що  $q = -\lambda \overrightarrow{\operatorname{grad} T}$ , (3.18) можна записати:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div} (\lambda \overrightarrow{\operatorname{grad} T}) + F(M, t). \quad (3.19)$$

Це рівняння називається диференціальним рівнянням теплопровідності або рівнянням Фур'є.

Для ізотропного гомогенного тіла параметри  $c$ ,  $\rho$ ,  $\lambda$  постійні:  $\operatorname{div}(\operatorname{grad} T) = \Delta T$ , де  $\Delta$  – оператор Лапласа. Остаточо, після ділення на  $c\rho$  одержимо:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T(M, t) + \frac{1}{c\rho} F(M, t). \quad (3.20)$$

Тут  $a = \frac{\lambda}{c\rho}$  – коефіцієнт пропорційності (температуропровідності). На відміну від  $\lambda$ , яка характеризує теплопровідну здатність тіла,  $a$  характеризує теплоінерційні властивості тіла і є представленням швидкості вирівнювання температурного поля в середовищі, що розглядається.

В декартових координатах рівняння (3.20) має вигляд:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \frac{1}{c\rho} F(M, t), \quad (3.21)$$

В циліндричних  $(r, \varphi, z)$  координатах, пов'язаних з декартовими співвідношеннями

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, & y &= r \sin \varphi, & z &= z; \\ 0 &\leq r < \infty, & 0 &\leq \varphi \leq 2\pi, & -\infty &< z < \infty, \end{aligned}$$

рівняння (3.21) має вигляд:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{c\rho} F(r, z, \varphi, t). \quad (3.22)$$

Рівняння теплопровідності (3.20) відноситься до диференціальних рівнянь параболічного типу.

Якщо температура розглянутого тіла в будь-якій його точці не змінюється в часі, тобто  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ , то рівняння (3.20) приймає вигляд

$$\Delta T(M) + \frac{1}{\lambda} F(M) = 0. \quad (3.23)$$

Це рівняння називається рівнянням Пуассона.

Якщо всередині тіла відсутні теплові джерела і температурне поле стаціонарне, то отримуємо рівняння

$$\Delta T(M) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, \quad (3.24)$$

яке називається рівнянням Лапласа і належить до диференціальних рівнянь еліптичного типу.

### 3.1.3. Метод інтегральних перетворень

До переваг методу інтегральних перетворень слід віднести можливість його безпосереднього застосування як до однорідних, так і до неоднорідних крайових задач. Для інтегральних методів властиві однаковість методик і значне спрощення у зв'язку з більш простою технікою обчислення. При наявності прямих і зворотних перетворень техніка розв'язку спрощується до застосування

стандартних процедур, що веде до розв'язку завдання коротким шляхом і в більш простому вигляді, ніж в методі розподілу змінних.

Метод інтегральних перетворень застосовується тільки до лінійних диференціальних рівнянь із лінійними граничними умовами.

Сутність методу інтегральних перетворень в наступному.

Нехай потрібно визначити функцію  $T(x, y, z, t)$ , яка задовольняє в області  $\Omega = (a < x < b)$ ,  $y, z \in G$ ;  $t > 0$  диференціальному рівнянню теплопровідності (нестационарному або стационарному) із заданими початковими і граничними умовами. Рішення завдання помітно спрощується, якщо замість безпосереднього визначення функції шукати попередньо її інтегральне перетворення, обумовлене формулою

$$T(\xi, y, z, t) = \int_a^b T(x, y, z, t)k(x, \xi)dx, \quad (3.25)$$

де  $c < \xi < d$ ;  $k(x, \xi)$  – належним чином обрана функція, обмежена в області  $(a < x < b, c < \xi < d)$ . Її називають ядром інтегрального перетворення (3.25).

В результаті інтегрального перетворення отримують деяку нову функцію  $T(\xi, y, z, t)$ , яка вже незалежна від  $x$  і називається інтегральною трансформантою, зображенням або образом функції  $T(x, y, z, t)$ . Початкова функція  $T(x, y, z, t)$  називається оригіналом трансформанти  $T(\xi, y, z, t)$ , змінна  $x$  є змінною перетворення. Межі  $a$  і  $b$  (відповідно,  $c$  і  $d$ ) можуть бути як скінченими, так і нескінченими. У першому випадку перетворення (3.25) називається інтегральним перетворенням зі скінченими межами, у другому – перетворення за декількома змінними.

Інтегральне перетворення (3.25) може бути представлено у вигляді

$$T(\xi, y, v, \eta) = \iiint_a^b R(x, \xi, z, v, t, \eta)T(x, y, z, t)dx dz dt, \quad (3.26)$$

називаному кратним інтегральним перетворенням.

Перетворення, коли деяка функція  $T(\xi, y, z, t)$  знову перетворюється у функцію  $T(x, y, z, t)$  називається зворотним інтегральним перетворенням (3.25). Відповідна формула, що дає перехід від зображень до оригіналів, називається формулою обігу:

$$T(x, y, z, t) = \int_c^d R(x, \xi)T(\xi, y, z, t)d\xi. \quad (3.27)$$

Основна ідея застосування інтегрального перетворення (3.25) до завдань для диференціальних рівнянь у частинних похідних полягає у виборі ядра  $R(x, \xi)$  таким чином, щоб диференціальні операції по змінній перетворення в

початковому завданні змінити алгебраїчними операціями при перетворенні. При цьому вибір ядра  $R(x, \xi)$  інтегрального перетворення здійснюється відповідно до диференціального рівняння та граничних умов завдання, тобто з урахуванням геометричної форми тіла і законом його теплової взаємодії з навколишнім середовищем.

Інтегральні перетворення, застосовувані для розв'язку завдань теплопровідності, можна розділити на два класи: інтегральні перетворення за часом  $t$  і інтегральні перетворення по просторових змінних. Це обумовлене тим, що рівняння теплопровідності є рівнянням першого порядку щодо змінної  $t$ , тоді як щодо просторових координат – це рівняння другого порядку. Причому час змінюється в межах від нуля до нескінченності ( $0 \leq t < \infty$ ), що дає можливість застосувати по змінній  $t$  інтегральне перетворення одного виду від геометрії розглянутого тіла та виду граничних умов. Цей клас перетворень є операційним численням. Трансформанта температури по  $t$  визначається за формулою

$$\bar{T}(M, p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} T(M, t) dt, \quad p = \sigma + iw \quad (3.28)$$

або

$$\bar{T}(M, p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} T(M, t) dt. \quad (3.29)$$

Перетворення (3.28) називається перетворенням Лапласа. Перетворення Лапласа – Карсона (3.29) відрізняється від першого лише множником  $p$  перед інтегралом.

Для того, щоб зображення  $T(m, p)$  існувало, інтеграл (3.28) і (3.29) повинні сходитися. Це накладає певні обмеження на функцію температури  $T(M, t)$ , властивості якої в більшості розглянутих на практиці випадків задовольняють умовам існування зазначених інтегралів.

Якщо завдання вирішене в зображеннях, то знаходження інтеграла за трансформантою (зворотнє перетворення) у загальному випадку виконується за формулою

$$T(M, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{P-j\infty}^{P+j\infty} e^{-pt} \bar{T}(M, p) dp. \quad (3.30)$$

Інтегрування відбувається в комплексній площині  $p = \sigma + iw$  вздовж прямої  $\sigma = const$ , паралельній уявній осі. Дійсні числа  $\sigma$  вибираються так, щоб усі особливі точки інтегрального виразу в (3.30) лежали в лівій півплощині комплексної площини  $p$ .

Знаходження оригіналу функції за її зображенням можна отримати в елементарних функціях, якщо трансформанта представлена у вигляді ряду по негативних ступенях  $p$ :



$$\bar{T}(M, p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k(M)}{p^{k+1}}. \quad (3.31)$$

Тоді оригінал  $T(M, t)$  також представляється у вигляді ряду

$$\bar{T}(M, p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k(M) t^k}{k!}. \quad (3.32)$$

Якщо зображення є дробовою функцією

$$T(M, p) = \frac{T_1(M) \Phi(p)}{\Psi(p)} = T_1(M) \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots}, \quad (3.33)$$

то за теоремою розкладання

$$T(M, t) = \sum_{n=1}^k \frac{\Phi(p)}{\Psi(p)} T_1(M) e^{-P_n t}, \quad (3.34)$$

де  $P_n$  – простий корінь функції  $\Psi(p)$  при цьому знаменник має множину простих коренів в рішеннях.

Якщо ступінь полінома  $\Phi(p)$  менше ступені полінома і серед коренів  $\Psi(p)$  є кратні в точках  $\Psi(p)$ , то

$$T(M, t) = \sum_{m=1} \frac{T_1(M)}{(k-1)!} \lim_{P \rightarrow P_m} \left\{ \frac{d^{k-1}}{dp^{k-1}} \left[ \frac{\Phi(p)(p - P_m)^k}{\Psi(p)} e^{Pt} \right] \right\}, \quad (3.35)$$

де сума береться за всіма коренями  $T(m, p)$ . У загальному випадку оригінал  $T(M, t)$  можна знайти за формулою

$$T(M, t) = \sum_m \operatorname{res} \left\{ e^{Pt}, \bar{T}(M, p) \right\} \Big|_{P=P_m}, \quad (3.36)$$

де підсумовування проводиться по всіх особливих точках  $P_m$  – функції  $\bar{T}(M, p)$ .

У тих випадках, коли не можна одержати аналітичний вираз для оригіналу, користуються наближеними формулами перетворень Лапласа, серед яких можна виділити співвідношення

$$T(t) \approx \frac{(-1)^n (n+k)^{n+k+1}}{\Gamma(n+k+1)(t-t_0)^{n+1}} \left\{ T(p) e^{-Pt} \right\}^n \Big|_{P=\frac{n+k}{t-t_0}}, \quad (3.37)$$

де  $n \in \mathbb{N}$ ;  $k \in \mathbb{R}$ ;  $\Gamma(z)$  – гамма-функція.

**Приклад 3.1.** Знайти розподіл температур  $T(M, t)$  у напівобмеженому тілі по глибині  $x$  ( $0 \leq x < \infty$ ),  $M(x)$ , якщо на границі його підтримується задана температура  $q(t)$ , а початкова температура тіла дорівнює нулю, тобто знайти рішення рівняння

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = a^2 \left[ \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \right], \quad (3.38)$$

яке задовольняє умовам  $x \geq 0, t \geq 0$ .

Нехай  $T(x, 0) = 0, T(0, t) = q(t)$ . Шукана функція  $T(x, t)$  та її похідні є оригіналами (по змінній  $t$ ).

Введемо позначення

$$\bar{T}(x, p) = L[T(x, t)]; \quad \bar{T}(x, p) = \int_0^{\infty} T(x, t) e^{-pt} dt. \quad (3.39)$$

Тоді за правилом диференціювання оригіналів одержуємо з урахуванням початкових умов

$$L \left[ \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \right] = p \bar{T}(x, p); \quad L \left[ \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \right] = \frac{\partial^2 \bar{T}(x, p)}{\partial x^2}; \quad (3.40)$$

$$\bar{T}(0, p) = Q(p) = L[q(t)]. \quad (3.41)$$

Приходимо до наступної крайової задачі відносно трансформанти шуканої функції:

$$p \bar{T}(x, p) = a^2 \left[ \frac{\partial^2 \bar{T}(x, p)}{\partial x^2} \right]; \quad (3.42)$$

$$\bar{T}(0, p) = Q(p). \quad (3.43)$$

Вважаючи в рівнянні (3.42)  $p$  параметром, знаходимо рішення звичайного диференціального рівняння по змінній  $x$ . Оскільки характеристичне рівняння  $a^2 k^2 - p = 0$  має корні  $k_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{p}{a}}$ , то  $T(x, p) = c_1 e^{\left(\sqrt{\frac{p}{a}}\right)x} + c_2 e^{-\left(\sqrt{\frac{p}{a}}\right)x}$  є загальним розв'язком рівняння (3.42).

Функція  $T(x, p)$  повинна бути обмежена при  $x \rightarrow \infty$ , тому  $c_1 = 0$ . З умови (3.43) знаходимо постійну

$$c_1 : T(0, p) = Q(p) = c_2. \quad (3.44)$$

Отже, розв'язком рівняння (3.42), що задовольняє умові (3.43), буде функція  $T(x, p)Q(p)e^{-\left(\frac{p}{a}\right)x}$ . Представимо отримане рішення у вигляді

$$T(x, p) = pQ(p) = \frac{1}{p} e^{-\left(\frac{p}{a}\right)x}. \quad (3.45)$$

Тоді, застосовуючи інтеграл Дюамеля

$$\frac{1}{p} e^{-\left(\frac{p}{a}\right)x} = L \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) \right] \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2a\sqrt{t}} \right), \quad (3.46)$$

одержуємо для розв'язку  $T(x, t)$  вираз

$$T(x, t) = q(t) \operatorname{erfc}(\infty) + \int_0^1 \left[ \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) \right]_t^1 q(t - \tau) d\tau. \quad (3.47)$$

Тут

$$\operatorname{erfc}(\infty) = 1 - \frac{2}{\sqrt{n}} \int_0^\infty e^{-U^2} du = 0 \quad (3.48)$$

$$\left[ \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2a\sqrt{\tau}} \right) \right]_\tau^1 = -\frac{2}{\sqrt{n}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{\tau}}} (e^{-U^2} du) = \frac{-\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)\left(\frac{x}{2a}\right)(-1)}{2} \sqrt{t^3} e^{\frac{-x}{4a^2\tau}}. \quad (3.49)$$

Таким чином, шукане рішення має вигляд

$$T(x, \tau) = \frac{1}{2} a \sqrt{n} \int_0^t \frac{q(t - \tau)}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{-x}{4a^2\tau}} d\tau. \quad (3.50)$$

### 3.1.4. Метод скінченних елементів

Основна ідея методу скінченних елементів (МСЕ) полягає в тому, що будь-яку неперервну величину (температуру, тиск, переміщення) можна апроксимувати дискретною моделлю, яка будується на множині кусочно-неперервних функцій, дійсних на скінченній кількості підобластей. Кусочно-неперервні функції визначаються за допомогою значень неперервної величини в скінченній кількості точок розглянутої області.

## Основні інтегральні перетворення

Таблиця 3.1

Назва	Проміжок ( $a, b$ )	Ядро перетворення $k(\alpha, x)$	Формула $L^{-1}[F(\alpha)]$	Перетворення операцій $L[f(x)]$
Фур'є: еxр	$(-\infty, \infty)$	$e^{i\alpha x}$	$f(x) = \frac{1}{2} \pi \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{i\alpha x} dx$	$\int_{-\infty}^{\infty} f^{(k)}(x) e^{i\alpha x} dx = F(\alpha); \quad f^{(k)}(x) _{x \rightarrow \pm\infty} = 0; \quad k \in N$ $k \in N$
еxр скін- ченне	$(-\pi, \pi)$	$e^{inx}$	$f(x) = \frac{1}{2} \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n) e^{inx}$	$\int_{-\pi}^{\pi} f^{(m)}(x) e^{inx} dx = (-in)^m F(n) +$ $+ (-1)^n \sum_{k=0}^{m-1} (-in)^{m-1-k} \left[ f^{(k)} \left( \frac{\pi}{-f^{(k)}(-\pi)} \right) \right]$
cos	$(0, \infty)$	$\cos \alpha x$	$f(x) = \frac{1}{2} \pi \int_0^{\infty} F(\alpha) \cos \alpha x dx$	$\int_0^{\infty} f^{(m)}(x) \cos \alpha x dx = -d^2(F(\alpha) - f(x)) _{x=0}$ $f^{(k)}(x) _{x \rightarrow 0} = 0$
cos скін- ченне	$(0, \pi)$	$\cos nx$	$f(x) = \frac{f(0)}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cos nx$	$\int_0^{\pi} f^{(m)}(x) \cos nx dx = -n^2 F(n) + (-1)^n f'(\pi) -$ $- f'(0)$
sin	$(0, \infty)$	$\sin \alpha x$	$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F(\alpha) \sin \alpha x dx$	$\int_0^{\infty} f^{(m)}(x) \sin \alpha x dx = -dF(\alpha) + \alpha f(x) _{x=0};$ $f^{(k)}(x) _{x \rightarrow \infty} = 0$
sin скін- ченне	$(0, \pi)$	$\sin nx$	$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin nx$	$\int_0^{\pi} f^{(m)}(x) \sin nx dx = -n^2 F(n) +$ $+ n[(-1)^{n+1} f(\pi) + f(0)]$
Лапла- са	$(0, \infty)$	$e^{-\lambda x}$	$f(x) = \frac{1}{2} \pi i \int_{\gamma_0 - j\infty}^{\gamma_0 + j\infty} F(\alpha) e^{\alpha x} d\alpha$	$f^{(m)}(x) e^{-\alpha x} dx = \alpha^m F(\alpha) - \sum_{k=0}^{m-1} \alpha^{m-k-1} f(x) _{x=0};$ $ f(x)  < M e^{\delta_0}$
Ханке- ля	$(0, \infty)$	$xT, (\alpha, x)$	$f(x) = \int_0^{\infty} \alpha F(\alpha) I_{\nu}(\alpha x) d\alpha$	$\int_0^{\infty} \left[ f^{(m)}(x) + \frac{1}{x} f'(x) - \frac{\nu^2}{x^2} f(x) \right] x I_{\nu}(\alpha x) dx =$ $= \alpha^2 F(\alpha); \quad \nu > -1$
Мел- лина	$(0, \infty)$	$x^{\alpha-1}$	$f(x) = \frac{1}{2} \pi i \int_{\gamma_0 - j\infty}^{\gamma_0 + j\infty} F(\alpha) x^{-\alpha} d\alpha$	$\int_0^{\infty} [x^2 f^{(m)}(x) + x f'(x)] x^{\alpha-1} dx = \alpha^2 f(\alpha);$ $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$
Канто- ровича – Лебе- дєва	$(0, \infty)$	$Ki\tau$	$T(x\nu\varphi) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\infty} \bar{T}(\tau, \varphi) \tau shx$ $x\pi\tau K_{it}(\gamma x) d\tau$	$\int_0^{\infty} T(x\gamma\varphi) \frac{K_{it}(\gamma x)}{x} dx = \frac{d^2 \bar{T}}{d\varphi^2} - \tau^2 \bar{T}$
Мелле- ра – Фока	$(1, \infty)$	$P \frac{1}{2} + i\tau(x)$	$f(x) = \int_1^{\infty} \bar{f}(\tau) \tau th\pi\tau P \frac{1}{2} +$ $+ i\tau(x) d\tau$	$\int_1^{\infty} f(x) P \frac{1}{2} + i\tau(x) dx = \left( \tau^2 + \frac{1}{4} \right) \bar{f}(\tau)$
Лапла- са – Карсо- на	$(0, \infty)$	$e^{-Pt}$	$f(x) = \frac{1}{2} \pi i \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} e^{-Pt} \frac{F(p)}{P} dP$	$\int_0^{\infty} P e^{-Pt} f^{(k)}(t) dt = F(p) - \sum_{n=1}^{k-1} P^{k-1-n} f(t) _{t=0}$

У загальному випадку неперервна величина заздалегідь невідома і потрібно визначити значення цієї величини в деяких внутрішніх точках області. Будують дискретну модель неперервної величини в наступній послідовності.

1. У розглянутій області фіксується скінченна кількість точок. Ці точки називаються вузловими або просто вузлами.

2. Значення неперервної величини в кожній вузловій точці вважається змінним і повинно бути визначене.

3. Область визначення неперервної величини розбивається на скінченну кількість підобластей (елементів). Ці елементи мають загальні вузлові точки і у сукупності апроксимують форму області.

4. Неперервна величина апроксимується на кожному елементі поліномом, який визначається за допомогою вузлових значень цієї величини. Для кожного елемента визначаються свої поліноми, які підбираються таким чином, щоб збереглася неперервність величини уздовж границь елемента.

Розглянемо основну ідею на одномірному прикладі заданого розподілу температури в стрижні, показаному на рис. 3.2. Розглядається неперервна величина  $T(x)$ , область визначення – відрізок  $OL$  уздовж осі  $OX$ . Фіксовано та пронумеровано п'ять точок на осі  $x$ . Не обов'язково розташовувати їх на рівній відстані одна від одної. Очевидно, можна розглядати і більше п'яти точок, але цих п'яти цілком достатньо для ілюстрації ідеї МСЕ. Значення  $T(x_j)$  в цьому випадку відомі в кожній вузловій точці. Вони позначені вузловими точками.

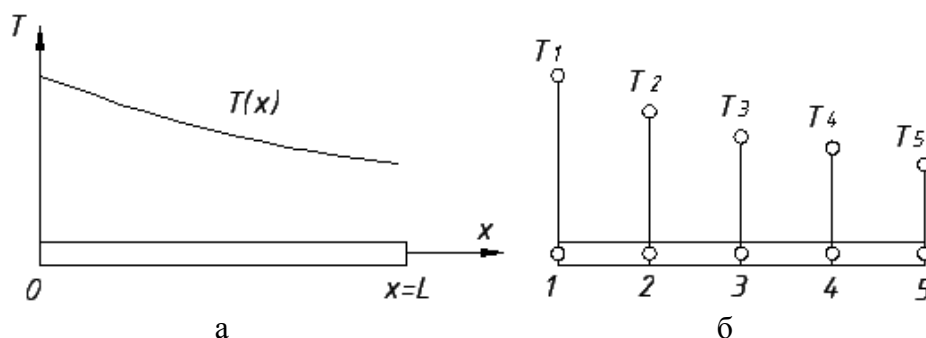


Рис. 3.2. Розподіл температури в одномірному стрижні (а) та вибір вузлових точок за пропонуваними значеннями температури (б).

Розбивання області на елементи проводиться двома способами. Можна, наприклад, обмежити кожний елемент двома сусідніми точками (рис. 3.3, а), утворивши чотири елементи, або розбити область на два елементи, кожний з яких містить три вузли (рис. 3.3, б).

Відповідний до елемента поліном визначається за значеннями  $T(x)$  у вузлових точках елемента. У загальному випадку розподіл температури невідомий і необхідно значення цієї величини визначити. Методика побудови дискретної моделі залишається такою ж, як описано, але з додаванням додаткового кроку. Знову визначаються множини вузлів і значення температури в цих вузлах  $T_1, T_2, T_3, \dots$ , які тепер є змінними і заздалегідь невідомими. Область розбивається на елементи, на кожному з яких визначається відповідна функція.

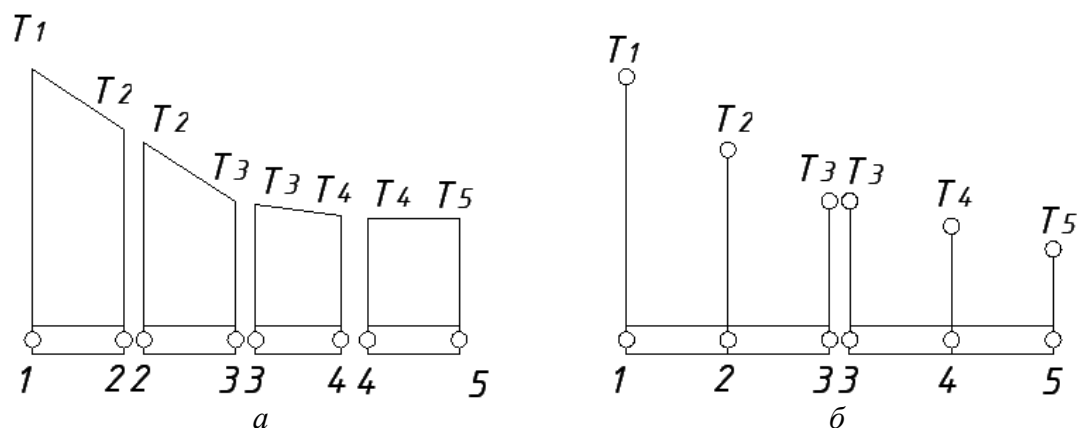


Рис. 3.3. Розбивка області на елементи

При розв'язку теплового завдання мінімізується функціонал, пов'язаний з відповідним диференціальним рівнянням. Процес мінімізації зводиться до розв'язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь щодо вузлових значень  $T(x)$ .

Покажемо процес мінімізації на прикладі теплової задачі для стрижня з теплоізолюваною бічною поверхнею (рис. 3.4). До закріпленого кінця стрижня підводить тепловий потік заданої інтенсивності  $q$ . На вільному кінці стрижня відбувається конвективний обмін. Коефіцієнт теплообміну  $\alpha$ , температура  $T_0$ .

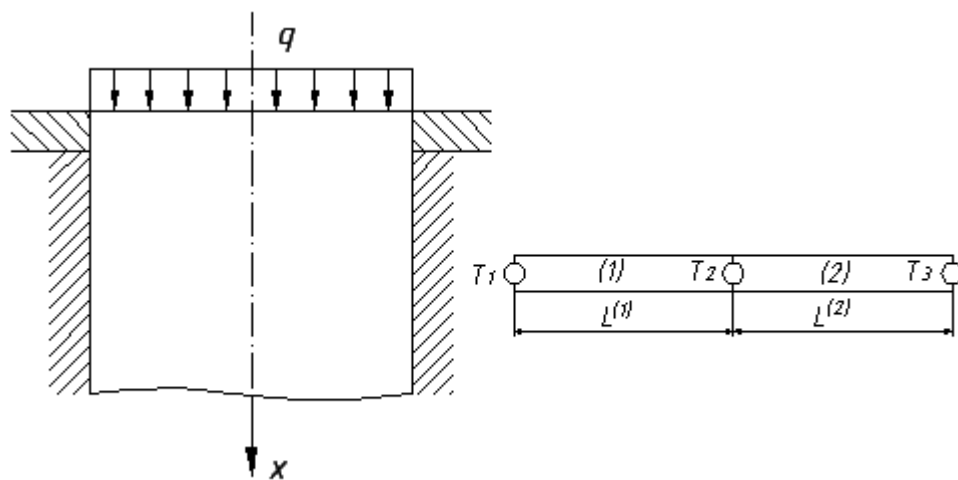


Рис. 3.4. Двоелементна модель, використувувана в завданні про перенос тепла в стрижні

Запишемо диференціальне рівняння теплопровідності всередині стрижня

$$\lambda \frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad (3.51)$$

з граничними умовами

$$\lambda \frac{dT}{dx} + q = 0 \quad \text{при } x = 0; \quad (3.52)$$

$$\lambda \frac{dT}{dx} + \lambda(T - T_0) = 0 \text{ при } x = L. \quad (3.53)$$

В наведених формулах  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності матеріалу стрижня. Тепловий потік  $q$  позитивний.

Рівняння з наведеними граничними умовами має єдине рішення. Воно є початковим пунктом при чисельному розв'язку методом скінченних різниць. Інший метод розв'язку задачі передачі тепла базується на варіаційному принципі.

У варіаційному обчисленні встановлюється, що для мінімізації функціоналу

$$K = \iiint_{(v)} \frac{\lambda}{z} \left( \frac{dT}{dS} \right) du + \iint_{(s)} \left[ qT + \frac{\alpha}{2} (T - T_0) \right]^2 dS, \quad (3.54)$$

необхідно, щоб виконувалося диференціальне рівняння

$$\lambda \frac{d^2T}{dx^2} = 0 \quad (3.55)$$

з граничними умовами

$$\lambda \frac{dT}{dx} + q + \lambda(T - T_0). \quad (3.56)$$

Рівняння (3.54) і (3.55) еквівалентні рівнянням (3.51) – (3.53), тому будь-який розподіл температури, при якому функціонал  $K$ , обумовлений формулою (3.54), стає мінімальним, також задовольняє диференціальним рівнянням і, таким чином, є розв'язком вихідного завдання.

Рівняння (3.54) служить початковим для визначення температури в кожному вузлі. Мінімізуємо функціонал (3.54), використовуючи множину функцій елементів, кожна з яких визначена на окремому елементі та виражена через вузлові значення. Вузлові значення  $N_i$  – невідомі величини при такому формулюванні. Оскільки вони визначають значення функціонала  $K$ , мінімізація  $x$  повинна бути проведена за цими величинами.

Реалізація МСЕ починається з визначення підобластей і вузлових точок. Стрижень може бути розбитий на два лінійні елементи (рис. 3.3) з вузловими значеннями  $T_1, T_2, T_3$ . Температура всередині елементів становить

$$T^{(1)} = N_1^{(1)}T_1 + N_2^{(1)}T_2; \quad T^{(2)} = N_2^{(2)}T_2 + N_3^{(2)}T_3. \quad (3.57)$$

Відповідні функції форми визначені співвідношеннями

$$N^{(i)} = \frac{x_i - x}{L^{(i)}}; \quad N^{(j)} = \frac{x - x_i}{L^{(j)}}. \quad (3.58)$$

Для розглянутого прикладу функціонал є сумою інтегралів

$$x = \iiint_{(v)} \frac{\lambda}{2} \left[ \frac{dT(x)}{dx} \right]^2 dv + \iint_{(s)} qT(x)dS + \iint_{(s_2)} \frac{\lambda}{2} [T(x) - T_0]^2 dS, \quad (3.59)$$

де  $S_1, S_2$  – площі поверхонь. Значення функціонала  $x$  отримують підстановкою температури  $T(x)$  та обчисленням інтегралів.

Поверхня інтеграла легко обчислюється. Почнемо з інтеграла, що містить тепловий потік:

$$\iint_{(s_1)} qT(x)dS = qT_1 \iint_{(s_1)} dS = qT_1 A_1, \quad (3.60)$$

де  $A_1$  – площа поперечного перерізу стрижня, що відповідає першому вузлу.

Розглянемо поверхневий інтеграл, що містить коефіцієнт теплообміну,

$$K = \frac{c^{(1)}}{2} (T_1^2 - 2T_1T_2 + T_2^2) + \frac{c^{(2)}}{2} (T_2^2 - 2T_2T_3 + T_3^2) + qA_1T + \frac{\alpha}{2} A_3 (T_3^2 - 2T_3T_C + T_C^2), \quad (3.61)$$

де  $A_3$  – площа поперечного перерізу стрижня;  $T_3$  – температура в третьому вузлі.

Об'ємний інтеграл в (3.59) містить похідну температури. Диференціюючи вираз (3.57), одержуємо

$$\frac{dT^{(1)}}{dx} = \frac{1}{L^{(1)}} (-T_1 + T_3); \quad \frac{dT^{(2)}}{dx} = \frac{1}{L^{(2)}} (-T_2 + T_3). \quad (3.62)$$

Об'ємний інтеграл повинен бути розбитий на два інтеграли, оскільки вираз для  $\frac{dT}{dx}$  не зберігає неперервності за об'ємом тіла в цілому. Поділ, підстановка та інтегрування дають

$$\iiint_{(v)} \frac{\lambda}{2} \left( \frac{dT}{dx} \right)^2 dv = \frac{\lambda^{(1)} A^{(1)}}{2L^{(1)}} (-T_1 + T_3)^2 + \frac{\lambda^{(2)} A^{(2)}}{2L^{(2)}} (-T_2 + T_3)^2. \quad (3.63)$$

При обчисленні інтеграла передбачалося, що площа поперечного перерізу



кожного елемента постійна, так що  $dV = A^{(i)}dx$ .

Значення функціонала через вузлові значення температури обчислимо за формулою

$$K = \frac{c^{(1)}}{2}(T_1^2 - 2T_1T_2 + T_2^2) + \frac{c^{(2)}}{2}(T_2^2 - 2T_2T_3 + T_3^2) + qA_1T + \frac{\alpha}{2}A_3(T_3^2 - 2T_3T_C + T_C^2), \quad (3.64)$$

$$\text{де } c^{(1)} = \frac{A^{(1)}\lambda^{(1)}}{L^{(1)}}; \quad c^{(2)} = \frac{A^{(2)}\lambda^{(2)}}{L^{(2)}}.$$

Правильними значеннями  $T_1, T_2, T_3$  є ті, при яких величина  $K$  мінімальна, тому

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dT_1} &= c^{(1)}T_1 - c^{(1)}T_2 + qA_1 = 0; \\ \frac{dx}{dT_2} &= c^{(1)}T_1 + [c^{(1)} + c^{(2)}]T_2 - c^{(2)}T_3 = 0; \\ \frac{dx}{dT_3} &= -c^{(2)}T_2 + [c^{(2)} + \alpha A_3]T_3 + A_3T_C = 0. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Рівняння (3.65) можуть бути перетворені до виду

$$\begin{bmatrix} c^{(1)} & c^{(1)} & 0 \\ c^{(1)} & [c^{(1)} + c^{(2)}] & -c^{(2)} \\ 0 & -c^{(2)} & [c^{(2)} + \alpha A_3] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -qA_1 \\ 0 \\ \alpha A_3 T_C \end{bmatrix}, \quad (3.66)$$

або до більш загальної матричної форми

$$[k] [T] = [F]. \quad (3.67)$$

Матриця коефіцієнта  $[k]$  – глобальна матриця теплопровідності.

Останній крок – завдання конкретних значень для фізичних характеристик матеріалу і одержання числових значень температури  $T_1, T_2, T_3$ .

Нехай:  $\lambda = 75 \text{ Вт/(см} \cdot \text{°С)}$ ;  $A = 20 \text{ п см}^2$ ;  $\gamma = 1/2 \text{ Вт/(см} \cdot \text{°С)}$ ;  $L = 75 \text{ см}$ ;  $\alpha A = 10\pi$ ,  $T_0 = 40 \text{ °С}$ .

Обчислюємо коефіцієнти

$$c^{(1)} = \frac{2\pi \cdot 75}{75} = 20\pi = c^{(2)}; \quad \alpha A_3 = 10\pi; \quad (3.68)$$

$$-qA_1 = -(-150\pi) = 150\pi; \quad \alpha A_3 T_C = 10\pi \cdot 40 = 400\pi. \quad (3.69)$$

Мінус перед  $q$  поставлений тому, що теплота підводиться до тіла.

Остаточна система має вигляд

$$\begin{bmatrix} 20 & -20 & 0 \\ -20 & 40 & -20 \\ 0 & -20 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \pi \begin{bmatrix} 150 \\ 0 \\ 400 \end{bmatrix}. \quad (3.70)$$

Цим рівнянням задовольняють наступні вузлові значення температури:  
 $T_1 = 70 \text{ }^\circ\text{C}$ ;  $T_2 = 62,5 \text{ }^\circ\text{C}$ ;  $T_3 = 55 \text{ }^\circ\text{C}$ .

### 3.2. Диференціальні рівняння гіперболічного типу

Розглянемо рівняння малих поперечних коливань струни. Кожну точку струни довжиною  $l$  можна охарактеризувати значенням її абсциси  $x$ . Опис процесу коливання струни може бути проведений за допомогою завдання положення точок струни в різні моменти часу. Для визначення положення струни в момент часу  $t$  досить задати компоненти вектора зсуву  $\{U_1(x,t), U_2(x,t), U_3(x,t)\}$  точки  $x$  у момент часу  $t$ .

Розглянемо просте завдання про коливання струни. Будемо припускати, що зсуви струни лежать в одній площині  $(x, U)$ . Вектор зсуву  $U$  перпендикулярний до осі  $x$ ; тоді процес коливання можна описати однією функцією  $U(x,t)$ , що характеризує вертикальне переміщення струни. Будемо розглядати струну як гнучку пружну нитку. Математичне представлення поняття гнучкості полягає в тому, що напруга, яка виникає у струні, завжди спрямована по дотичній до її миттєвого профілю (рис. 3.5).

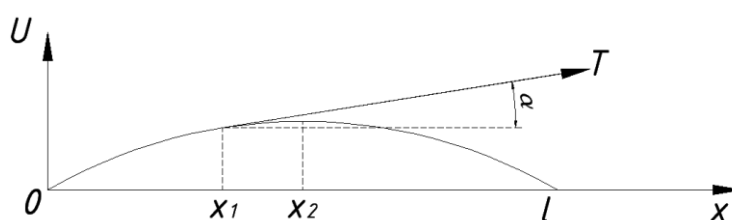


Рис. 3.5. Розрахункова схема для виведення рівняння коливань струни

Ця умова виражає неопір струни вигину. Натяг, що виникає в струні внаслідок пружності, може бути обчислений за законом Гука. Будемо розглядати малі коливання струни. Підрахуємо подовження ділянки струни  $(x_1, x_2)$ . Довжина дуги цієї ділянки

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (U_x)^2} dx = x_2 - x_1 = S. \quad (3.71)$$

Таким чином, у межах точності, подовження ділянки струни в процесі коливання не відбувається; звідси, в силу закону Гука, впливає, що натяг  $T$  у кожній точці не змінюється. Покажемо, що натяг не залежить від  $x$ , тобто

$$T(x) = T_0 = \text{const.} \quad (3.72)$$

Знайдемо проєкції натягу на осі  $x$  і  $U$  (позначимо їх  $T_x$  і  $T_U$ ).

$$T_x(x) = T(x) \cos \alpha = \frac{T}{\sqrt{1 + (U_x)^2}} \cong T(x); \quad (3.73)$$

$$T_U(x) = T(x) \sin \alpha = T(x) \operatorname{tg} \alpha = T(x) U_x, \quad (3.74)$$

де  $\alpha$  – кут між дотичною до кривої  $U(x, t)$  та віссю  $x$ . На ділянку  $(x_1, x_2)$  діють сили натягу, зовнішні сили та сили інерції. Сума проєкцій усіх сил на вісь  $x$  повинна дорівнювати нулю (розглядаємо тільки поперечні коливання). Оскільки інерції та зовнішні сили спрямовані уздовж осі  $U$ , то

$$T_x(x) - T_x(x_1) = 0 \quad \text{або} \quad T(x) = T(x_2). \quad (3.75)$$

Звідси впливає, що натяг не залежить від  $x$ , тобто для всіх значень  $x$  і  $t$

$$T(x) = T_0. \quad (3.76)$$

Складова кількості руху ділянки струни  $(x_1, x_2)$  по осі  $x$

$$\int_{x_1}^{x_2} U_t(\xi, t) \rho(\xi) d\xi; \quad (3.77)$$

де  $\rho$  – лінійна щільність струни. Дорівнюємо зміну кількості руху за проміжок часу  $\Delta t = t_2 - t_1$ :

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(\xi) [U_t(\xi, t_2) - U_t(\xi, t_1)] d\xi \quad (3.78)$$

імпульсу діючих сил, що складаються з натягу

$$T_0 U_x \Big|_{x=x_2} - T_0 U_x \Big|_{x=x_1}$$

у точках  $x_1$  і  $x_2$  та зовнішньої сили, яку будемо вважати неперервно розподіле-

ною щільністю (навантаженням)  $F(x, t)$ , розрахованою на одиницю довжини. У результаті одержимо рівняння поперечних коливань елемента струни в інтегральній формі:

$$\int_{x_1}^{x_2} [U_t(\xi, t_2) - U_t(\xi, t_1)] \rho(\xi) d\xi = \int_{t_1}^{t_2} T_0 [U_x(x_2, \tau) - U_x(x_1, \tau)] d\tau + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} F(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (3.79)$$

### 3.3. Диференціальні рівняння еліптичного типу

Найбільш застосовувані диференціальні рівняння еліптичного типу – це рівняння Гельмгольца, Лапласа та Пуассона.

**Рівняння Гельмгольца** – це еліптичне диференціальне рівняння в частинних похідних:

$$(\Delta + k^2)U = f, \quad (3.80)$$

де  $\Delta = \nabla^2$  – це оператор Лапласа, а невідома функція  $U$  визначена в  $\mathbb{R}^n$  (на практиці рівняння Гельмгольца застосовується для  $n = 1, 2, 3$ ).

Як легко помітити, у рівняння Гельмгольца не входять оператори диференціювання за часом, отже, наявність вихідного завдання в частинних похідних до рівняння Гельмгольца може спростити його рішення. Розглянемо хвильове рівняння:

$$\Delta u(\bar{x}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(\bar{x}, t)}{\partial t^2} = f(\bar{x}, t). \quad (3.81)$$

Нехай функції  $u$  та  $f$  допускають розподіл змінних:  $u(\bar{x}, t) = U(\bar{x})T(t)$ ,  $f(\bar{x}, t) = F(\bar{x})T(t)$ , і нехай  $T(t) = e^{i\omega t}$ . Помітимо, що в просторі Фур'є-перетворень диференціювання за часом відповідає множенню на множник  $i\omega$ . Таким чином, наше рівняння приводиться до виду:

$$\Delta U(\bar{x}) + \frac{\omega^2}{c^2} U(\bar{x}) = F(\bar{x}), \quad (3.82)$$

де  $\frac{\omega^2}{c^2} = k^2$  – квадрат модуля хвильового вектора.

Рішення рівняння Гельмгольца залежить від виду граничних умов. У двовимірному випадку рівняння Гельмгольца застосовується для розв'язку завдання про коливну мембрану, тоді природно задаються однорідні граничні умови, що фізично відповідає закріпленню мембрани на границі. У такому випадку рішення буде залежати від форми мембрани. Так, для круглої мембрани радіуса  $a$  у полярних координатах  $(r, \varphi)$  рівняння приймає вид:

$$U_{rr} + \frac{1}{r}U_r + \frac{1}{r^2}U_{\varphi\varphi} + k^2U = 0, \quad U(a, \varphi) = 0. \quad (3.83)$$

Методом поділу змінних приходимо до завдання на власні значення для частини розв'язку, що залежить тільки від  $\varphi$ :

$$U(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi), \quad (3.84)$$

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = -\lambda^2, \quad (3.85)$$

а функція, що залежить тільки від радіуса, буде задовольняти рівнянню:

$$r^2R'' + rR' + R(r^2k^2 - \lambda^2) = 0. \quad (3.86)$$

Фундаментальними розв'язками цих рівнянь є, відповідно, функції  $\sin(\lambda\varphi)$ ,  $\cos(\lambda\varphi)$  та  $J_\lambda\left(\frac{\mu_i^{(\lambda)}}{a}r\right)$ , де  $\mu_i^{(\lambda)}$  –  $i$ -й корінь функції Бесселя  $\lambda$ -го порядку.

Для випадку неоднорідного рівняння розглянемо рівняння Гельмгольца в просторі узагальнених функцій:

$$\Delta U + k^2U = \delta(x). \quad (3.87)$$

Покажемо, що в тривимірному випадку ( $x = (x_1, x_2, x_3)$ ) фундаментальними розв'язками цього рівняння є функції:

$$U_1^{(3)}(x) = -\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}, \quad U_2^{(3)} = -\frac{e^{-ik|x|}}{4\pi|x|}. \quad (3.88)$$

Насправді, скористаємося рівностями:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{|x|} = -\frac{x_j}{|x|^3}; \quad (3.89)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} e^{ik|x|} = \frac{ikx_j}{|x|} e^{ik|x|}; \quad (3.90)$$

$$\Delta e^{ik|x|} = \left(\frac{2ik}{|x|} - k^2\right) e^{ik|x|} \quad (3.91)$$

і формулою, доказуваною в курсі математичної фізики:

$$\Delta \frac{1}{|x|} = -\frac{2\pi^{3/2}}{\Gamma(3/2)}\delta(x). \quad (3.92)$$

Одержуємо:

$$\begin{aligned} (\Delta + k^2) \frac{1}{|x|} e^{ik|x|} &= e^{ik|x|} \Delta \frac{1}{|x|} + 2 \left( \text{grad } e^{ik|x|}, \text{grad } \frac{1}{|x|} \right) + \frac{1}{|x|} \Delta e^{ik|x|} + \frac{k^2}{|x|} e^{ik|x|} = \\ &= -4\pi e^{ik|x|} \delta(x) + \left( -\frac{2ik}{|x|^2} + \frac{2ik}{|x|^2} - \frac{k^2}{|x|} + \frac{k^2}{|x|} \right) e^{ik|x|} = -4\pi \delta(x). \end{aligned} \quad (3.93)$$

Прямими обчисленнями також перевіряється, що у двовимірному випадку фундаментальним розв'язком будуть функції Ханкеля першого та другого роду:

$$U_1^{(2)} = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x|), \quad U_2^{(2)} = \frac{i}{4} H_0^{(2)}(k|x|), \quad (3.94)$$

а в одновимірному:

$$U_1^{(1)}(x) = \frac{e^{ik|x|}}{2ik}, \quad U_2^{(1)} = -\frac{e^{-ik|x|}}{2ik}. \quad (3.95)$$

**Рівняння Лапласа** – диференціальне рівняння в частинних похідних. У тривимірному просторі рівняння Лапласа записується так:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (3.96)$$

Воно є частинним випадком рівняння Гельмгольца.

Рівняння розглядають також у двовимірному та одновимірному просторах. У двовимірному просторі рівняння Лапласа записується так:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (3.97)$$

За допомогою диференціального оператора

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \dots \quad (3.98)$$

де  $\Delta$  – оператора Лапласа, це рівняння записується (для будь-якої розмірності) однаково:

$$\Delta u = 0. \quad (3.99)$$

У цьому випадку розмірність простору вказується явно (або мається на увазі).

Функції, що є розв'язками рівняння Лапласа, називаються гармонійними функціями. Неоднорідне рівняння Лапласа називається рівнянням Пуассона.

Зауваження: усе сказане вище відноситься до декартових координат у плоскому просторі (яка б не була його розмірність). При використанні інших координат представлення оператора Лапласа змінюється, і, відповідно, змінюється запис рівняння Лапласа. Ці рівняння також називаються рівняннями Лапласа, однак для усунення неоднозначності термінології при цьому, звичайно, явно додається вказівка системи координат (і, при бажанні повної ясності, розмірності), наприклад: «двовимірне рівняння Лапласа в полярних координатах»).

У сферичних координатах рівняння має вигляд:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (3.100)$$

У полярних координатах  $r, \varphi$  рівняння має вигляд:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (3.101)$$

Рівняння Лапласа виникає в багатьох фізичних областях: механіці, теплофізиці, електростатиці, гідравліці, тощо.

*Рішення рівняння Лапласа.* Незважаючи на те, що рівняння Лапласа є одним з найпростіших у математичній фізиці, його рішення часто стикається із труднощами. Особливо важким буває чисельне рішення через нерегулярність функцій і наявність особливостей.

В одновимірному дійсному просторі рівняння Лапласа, що зводиться до рівності нулю другої похідної, має загальним розв'язком лінійну функцію:

$$f(x) = C_1 x + C_2 \quad (3.102)$$

де  $C_1, C_2$  – довільні постійні.

Загальний рішення рівняння Лапласа на двовимірному просторі називається аналітичною функцією. Аналітичні функції розглядаються в теорії функцій комплексного змінного, і рішення рівняння Лапласа можна звести до функції комплексного змінного.

Рівняння Лапласа для двох незалежних змінних формулюється в наступному виді:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0. \quad (3.103)$$

Якщо

$$z = x + iy, \quad (3.104)$$

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad (3.105)$$

то умови Коші – Римана є необхідними і достатніми для того, щоб функція  $f(z)$  була аналітичною:

$$u_x = v_y, \quad v_x = -u_y. \quad (3.106)$$

І дійсна, і уявна частини аналітичних функцій задовольняють рівнянню Лапласа. Продиференціювавши умови Коші – Римана, одержуємо

$$u_{yy} = (-v_x)_y = -(v_y)_x = -(u_x)_x. \quad (3.107)$$

А це не що інше, як рівняння Лапласа для функції  $u$ . Точно також показується, що функція  $v$  задовольняє рівнянню Лапласа.

У тривимірному просторі для рішення рівняння Лапласа використовується функція Гріна. Функції Гріна корисні в електростатиці – для розв'язування рівняння Пуассона; у теорії конденсованих середовищ – де вони дозволяють розв'язати рівняння дифузії (і співпадаюче з ним рівняння теплопровідності); у квантовій механіці – де функція Гріна є однією із ключових і має відношення до щільності станів. Функції Гріна, використовувані в цих областях, дуже схожі, оскільки математичні структури рівняння дифузії та рівняння Шредингера подібні. Усі області математичної та теоретичної фізики, де вкрай корисні функції Гріна, важко навіть перелічити. Вони допомагають знаходити стаціонарні та нестаціонарні розв'язки, у тому числі при різноманітних граничних умовах, і т.д.

У фізиці елементарних часток і статистичній фізиці функції Гріна використовуються як пропагатори в діаграмах Фейнмана (і вираження «функція Гріна» часто застосовується взагалі до кореляційної функції у квантовій теорії поля). Функція Гріна широко застосовується в додатках теорії розсіювання до фізики твердого тіла (рентгенографія, розрахунки електронних спектрів металевих матеріалів).

**Рівняння Пуассона** – еліптичне диференціальне рівняння в частинних похідних, яке, серед іншого, описує: електростатичне поле, стаціонарне поле температури, поле тиску, поле потенціалу швидкості в гідродинаміці.

Це рівняння має вигляд:

$$\Delta\varphi = f, \quad (3.108)$$

де  $\Delta$  – оператор Лапласа або лапласіан, а  $f$  – дійсна або комплексна функція на деякій різноманітності.

У тривимірній декартовій системі координат рівняння приймає форму:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi(x, y, z) = f(x, y, z). \quad (3.109)$$

У декартовій системі координат оператор Лапласа записується у формі  $\nabla^2$ ,



і рівняння Пуассона приймає вид:

$$\nabla^2 \varphi = f. \quad (3.110)$$

Якщо  $f$  прагне до нуля, то рівняння Пуассона перетворюється в рівняння Лапласа (рівняння Лапласа – окремий випадок рівняння Пуассона):

$$\Delta \varphi = 0. \quad (3.111)$$

Рівняння Пуассона може бути вирішене з використанням функції Гріна. Є різні методи для одержання чисельних розв'язків. Наприклад, використовується ітераційний алгоритм – «релаксаційний метод».

Рівняння Пуассона є одним з наріжних каменів електростатики. Знаходження  $\varphi$  для даного  $f$  – важливе практичне завдання, оскільки це звичайний шлях для знаходження електростатичного потенціалу для даного розподілу заряду. В одиницях системи СІ:

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (3.112)$$

де  $\Phi$  – електростатичний потенціал, В;  $\rho$  – об'ємна щільність заряду, кул/м<sup>3</sup>;  $\epsilon_0$  – діелектрична проникність вакууму, Ф/м.

В області простору, де немає непарної щільності заряду, маємо  $\rho=0$ , і рівняння для потенціалу перетворюється в рівняння Лапласа:

$$\nabla^2 \Phi = 0. \quad (3.113)$$

Якщо ми маємо об'ємну сферично симетричну щільність гауссового розподілу заряду  $\rho(r)$ :

$$\rho(r) = \frac{Q}{\sigma^3 \sqrt{2\pi}} e^{-r^2/(2\sigma^2)}, \quad (3.114)$$

де  $Q$  – загальний заряд, то рішення  $\Phi(r)$  рівняння Пуассона надається у вигляді:

$$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \operatorname{erf}\left(\frac{r}{\sqrt{2}\sigma}\right), \quad (3.115)$$

де  $\operatorname{erf}(x)$  – функція помилок. Це рішення може бути перевірене прямо обчисленням  $\nabla^2 \Phi$ . Помітимо, що для  $r$ , багато більших, ніж  $\sigma$ ,  $\operatorname{erf}(x)$  наближається до одиниці, і потенціал  $\Phi(r)$  наближається до потенціалу точкового заряду  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$ , як і можна було очікувати.

### 3.4. Питання до самоконтролю

1. Що таке температурне поле та як створюються моделі стаціонарного та нестаціонарного температурних полів?
2. Як виглядає диференціальне рівняння теплопровідності Фур'є?
3. Проаналізуйте рівняння Фур'є як диференціальне рівняння в частинних похідних другого ступеня параболічного типу.
4. В чому різниця с точки зору математичної моделі фізичного процесу між рівнянням Пуассона, Лапласа та Фур'є?
5. Використання методу інтегральних перетворень для розв'язання теплових задач.
6. Завдяки яким властивостям метод інтегральних перетворень використовується для розв'язання рівнянь Пуассона, Лапласа та Фур'є?
7. Інтегральні перетворення за часом та інтегральні перетворення за простором. В чому принципова різниця математичних моделей таких перетворень?
8. Основні принципи застосування для розрахунків теплових полів методу скінченних елементів.
9. Математичне підґрунтя методу скінченних елементів в теплових задачах.
10. Диференціальні рівняння гіперболічного типу.
11. Математичне представлення поняття гнучкості. В чому воно полягає?
12. Рівняння поперечних коливань струни в інтегральній формі.
13. Диференціальні рівняння еліптичного типу.
14. Вигляд та застосування рівняння Гельмгольца.
15. Вигляд та застосування рівняння Лапласа. Рішення рівняння Лапласа.

## ЧАСТИНА II СКІНЧЕННОЕЛЕМЕНТНІ МОДЕЛІ\*

### Розділ 4 ДИСКРЕТИЗАЦІЯ ПРОСТОРУ-ЧАСУ

Складні за конструкцією деталі сучасних машин і дуже складні умови їх навантаження практично не залишають проектувальнику можливостей для застосування при їхньому моделюванні і розрахунках аналітичних математичних методів. У той же час, сучасні інформаційні комп'ютерні технології дозволяють легко вирішувати подібні задачі чисельними методами. На першому етапі застосування таких методів знаходиться дискретизація моделі об'єкта, яка виконується найчастіше вручну, що різко знижує переваги автоматизованих методів розрахунку.

Останнім часом з'явилися пакети прикладних програм, що дозволяють автоматизувати і цей етап. Найчастіше вони базуються на використанні симетрії об'єкта і симетрії зовнішнього навантаження. При цьому об'єкт розбивається на скінченні елементи (СЕ), група яких утворює умовний «нульовий» осередок, описуваний цілком вручну.

Далі задається кількість інших осередків моделі і тип їхньої симетрії щодо нульового осередку. Вся інша робота по кодуванню ненульових осередків (в основному, вона зводиться до розрахунку координат вузлових точок усіх СЕ моделі) виконується автоматично.

Для з'ясування цих важливих для розрахунків етапів корисно ознайомитися з принципами просторово-часової дискретизації моделей об'єктів проектування.

#### 4.1. Дискретизація одновимірного простору

##### 4.1.1. Скінченні елементи лагранжевого типу

Нехай для опису стану об'єкта необхідно вирішити задачу обчислення інтеграла:

$$I = \int_a^b u(x) dx . \quad (4.1)$$

\* В частині використані матеріали монографії С.О. Балана, Т.П. Становської та О.Л. Становського «Проектирование и управление в машиноведении»

Розіб'ємо інтервал інтегрування на  $n$  СЕ (рис. 4.1). У кожному СЕ певним чином виберемо кілька точок – вузлів. Звичайно вузлами є крайні і кілька внутрішніх точок СЕ. Найпростішим буде так званий симплекс-елемент із двома вузлами в крайніх точках СЕ. Якщо ввести додатковий вузол у середині СЕ, одержимо тривузловий елемент. Два крайніх і два рівномірно розташованих внутрішніх вузли визначають чотиривузловий СЕ.

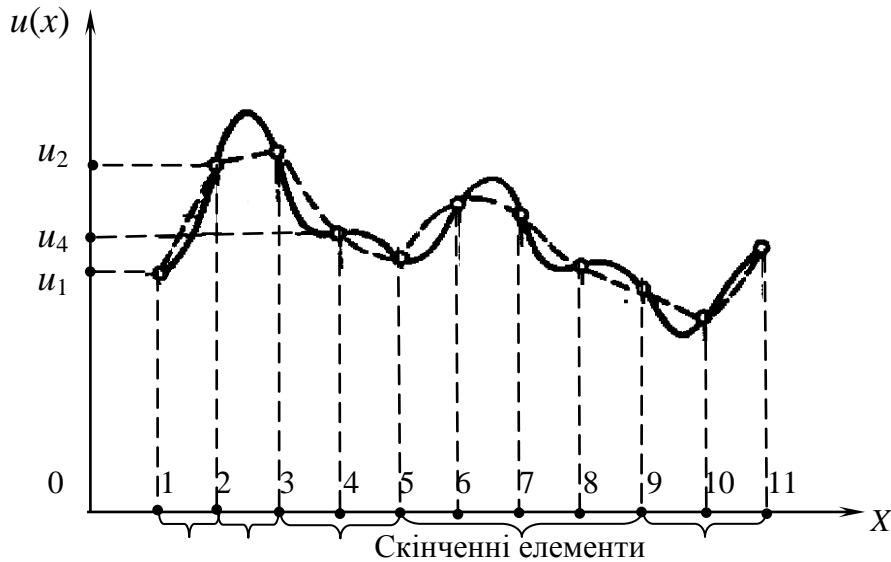


Рис. 4.1. Розбивка відрізка інтегрування на скінченні елементи

Розглянемо один з СЕ з  $m$  вузлами. У межах елемента задану безперервну функцію  $u(x)$  можна приблизно представити (інтерполювати, апроксимувати) поліномом  $(m - 1)$ -го порядку:

$$\bar{u}(x) = a_1 + a_2 x + \dots + a_m x^{m-1}, \quad (4.2)$$

значення якого у вузлах СЕ збігаються з відповідними значеннями функції  $u(x)$ :

$$\bar{u}(x_i) = u(x_i) = u_i = a_1 + a_2 x_i + \dots + a_m x_i^{m-1}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.3)$$

При розв'язанні останньої системи лінійних рівнянь  $m$ -го порядку вдається виразити постійні  $a_k$  через координати вузлів  $x_i$  і значення функції  $u(x)$  у вузлах. Далі слід підставити  $a_i$  в співвідношення (4.2) і згрупувати доданки при множниках  $u_i$ . У результаті одержимо вираження

$$u(x) = N_1(x)u_1 + \dots + N_m(x)u_m, \quad (4.4)$$

де  $N_i(x)$  є так звані базисні функції СЕ.

Для симплекса-елемента, тривузлового і чотиривузлового СЕ довжиною  $l$

базисні функції визначаються за формулами:

$$N_1 = L_1, \quad N_2 = L_2; \quad (4.5)$$

$$N_1 = L_1(2L_1 - 1), \quad N_2 = 4L_1L_2, \quad N_3 = L_2(2L_2 - 1); \quad (4.6)$$

$$N_1 = L_1(3L_1 - 1)(3L_1 - 2)/2, \quad N_2 = 9L_1L_2(3L_1 - 1)/2; \\ N_3 = 9L_1L_2(3L_2 - 1)/2, \quad N_4 = L_2(3L_2 - 1)(3L_2 - 2)/2, \quad (4.7)$$

де  $L_1$  і  $L_2$  є так звані  $L$ -координати СЕ, що змінюються в межах СЕ від нуля до одиниці:

$$L_1 = 1 - L, \quad L_2 = L, \quad L = (x - x_1)/l. \quad (4.8)$$

Введення  $L$ -координат доцільно в силу існування відомої формули:

$$\int_l L_1^a L_2^b dx = \frac{a! b!}{(a + b + 1)!} l, \quad (4.9)$$

корисної при інтегруванні по довжині елемента функцій високих ступенів, у якій «!» – символ операції факторіала  $a! = 1 \times 2 \times \dots \times a$ , причому  $0! = 1$ .

Безпосередньою перевіркою можна переконатися в справедливості таких властивостей базисних функцій: базисна функція  $N_i(x)$  дорівнює одиниці в  $i$ -му вузлі і нулю в інших вузлах:

$$N_i(x_i) = 1, \quad N_i(x_k) = 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad k \neq i; \quad (4.10)$$

сума базисних функцій дорівнює одиниці в будь-якій точці СЕ:

$$N_1(x) + \dots + N_m(x) = 1; \quad (4.11)$$

сума похідних базисних функцій у будь-якій точці СЕ дорівнює нулю:

$$N_1'(x) + \dots + N_m'(x) = 0. \quad (4.12)$$

Базисні функції визначаються формою СЕ (в одномірному випадку довжиною СЕ і координатами вузлів). Тому їх часто називають функціями форми СЕ. Як впливає з формул (4.5) – (4.7), функції форми симплекса-елемента є лінійними, тривузлового СЕ – квадратичними параболоми, чотиривузлового елемента – кубічними параболоми. Відповідно, зазначені СЕ називають лінійними, квадратичними і кубічними. Таким чином, лінійний СЕ має два вузли, квадратичний – три, кубічний – чотири. СЕ і графіки їхніх базисних функцій показані на рис. 4.2.

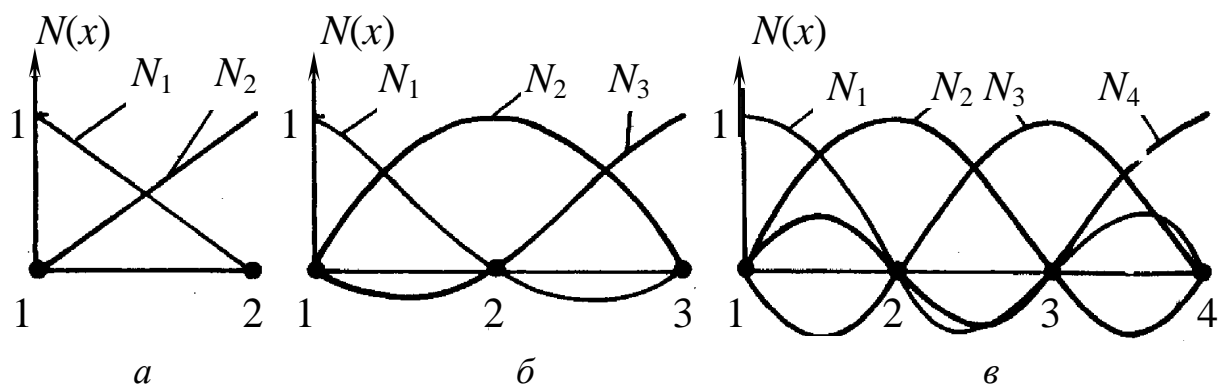


Рис. 4.2. Графіки базисних функцій лінійного (а), квадратичного (б) і кубічного (в) елементів

Апроксимація деякої функції за допомогою лінійних СЕ фактично еквівалентна заміні її ламаною лінією, а з використанням квадратичних і кубічних СЕ – ділянками парабол відповідного ступеня. У загальному випадку формула (4.4) визначає відомий інтерполяційний поліном Лагранжа. Тому побудовані елементи називають СЕ лагранжевого типу. Надалі для всіх типів СЕ будемо визначати такі величини:

$$\alpha_i = \int_V N_i dV ; \quad (4.13)$$

$$\beta_{ij} = \int_V N_i N_j dV ; \quad (4.14)$$

$$\gamma_{ik} = \int_V \partial N_i / \partial x_k dV ; \quad (4.15)$$

$$\mathbf{v}_{ijkl} = \int_V \partial N_i / \partial x_k \partial N_j / \partial x_l dV , \quad (4.16)$$

де  $V$  є займана СЕ область простору, а  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$  є координати, причому величини  $\beta_{ij}$  і  $\mathbf{v}_{ijkl}$  симетричні по відповідних індексах.

В одномірному випадку  $V$  є довжиною СЕ,  $x_1 = x, x_2$  і  $x_3$  не враховуються. Інтеграли  $\alpha_i$  і  $\beta_{ij}$  легко обчислюються за допомогою формули (4.9). При обчисленні похідних від базисних функцій слід враховувати вираз

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial x} = \frac{1}{l} \left( -\frac{\partial N_i}{\partial L_1} + \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \right). \quad (4.17)$$

Для лінійного, квадратичного і кубічного елементів величини (4.13) – (4.16) визначаються відповідними формулами:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = l/2, \beta_{11} = \beta_{22} = 2\beta_{12} = l/3, -\gamma_{11} = \gamma_{21} = 1, \mathbf{v}_{1111} = \mathbf{v}_{2211} = -\mathbf{v}_{1211} = 1/l; \quad (4.18)$$

$$4\alpha_1 = 4\alpha_3 = \alpha_2 = 4l/6; \quad \beta_{11} = \beta_{33} = 4l/30, \quad \beta_{22} = 16l/30, \quad \beta_{12} = \beta_{23} = 2l/30, \quad \beta_{13} = -l/30 \\ -\gamma_{11} = \gamma_{31} = 1, \quad \gamma_{21} = 0; \quad \mathbf{v}_{1111} = \mathbf{v}_{3311} = 7/(3l), \quad \mathbf{v}_{2211} = 16/(3l), \quad \mathbf{v}_{1211} = \mathbf{v}_{3211} = -8/(3l), \\ \mathbf{v}_{1311} = 1/(3l); \quad (4.19)$$

$$3\alpha_1 = 3\alpha_4 = \alpha_2 = \alpha_3 = 3l/8. \quad (4.20)$$

Оскільки визначена на даному СЕ функція приблизно може бути представлена у вигляді (4.4), то для інтеграла від цієї функції одержимо:

$$\int_l u(x) dx = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m. \quad (4.21)$$

Знання коефіцієнтів  $\beta_{ij}$ ,  $\gamma_{il}$  і  $\mathbf{v}_{ij11}$  дозволяє обчислювати і більш складні інтеграли. Наприклад,

$$\int_l u^2(x) dx = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m u_i \beta_{ij} u_j; \quad (4.22)$$

$$\int_l u'(x) dx = \gamma_{i1} u_1 + \dots + \gamma_{m1} u_m; \quad (4.23)$$

$$\int_l [u'(x)]^2 dx = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m u_i \mathbf{v}_{ij11} u_j. \quad (4.24)$$

Повернемося до проблеми обчислення інтеграла (4.1). Оскільки відрізок інтегрування розбитий на  $n$  елементів, інтеграл може бути представлений у вигляді суми інтегралів по окремих СЕ, на кожному з яких інтегрування проводиться за формулою (4.21). Отже,

$$J = \alpha_1^{(1)} u_1^{(1)} + \dots + \alpha_m^{(1)} u_m^{(1)} + \dots + \alpha_1^{(n)} u_1^{(n)} + \dots + \alpha_m^{(n)} u_m^{(n)}. \quad (4.25)$$

Далі перейдемо від «локальних» номерів вузлів кожного елемента 1, 2, ...,  $m$  до «глобальних» номерів вузлів відрізка інтегрування 1, 2, ...,  $n+1$  і при цьому врахуємо, що сусідні елементи мають загальні вузли. В результаті одержимо:

$$J = \phi_1 u_1 + \dots + \phi_{n+1} u_{n+1}. \quad (4.26)$$

Якщо вузол  $i$  належить тільки одному елементові, то коефіцієнт  $\phi_i$  дорівнює відповідному коефіцієнту  $\alpha_k$  для даного елемента. Якщо ж вузол  $i$  лежить на стику двох елементів, то  $\phi_i$  дорівнює сумі коефіцієнтів  $\alpha_k$  даних СЕ. Напри-

клад, для лінійних СЕ усі вузли, крім першого й останнього, належать двом елементам, тому

$$\varphi_1 = \alpha_1^{(1)}, \varphi_2 = \alpha_2^{(1)} + \alpha_1^{(2)}, \dots, \varphi_n = \alpha_2^{(n-1)} + \alpha_1^{(n)}, \varphi_{n+1} = \alpha_2^{(n)}. \quad (4.27)$$

Якщо всі елементи мають однакову довжину  $l = (b-a)/n$ , то з урахуванням (4.18) для обчислення інтеграла одержуємо відому формулу трапецій:

$$J = \frac{b-a}{2n} (u_1 + 2u_2 + 2u_3 + \dots + 2u_n + u_{n+1}). \quad (4.28)$$

Якщо застосовуються квадратичні СЕ, приходимо до формули Симпсона:

$$J = \frac{b-a}{6n} [u_1 + (4u_2 + 2u_3) + \dots + (4u_{n-2} + 2u_{n-1}) + 4u_n + u_{n+1}]. \quad (4.29)$$

У випадку кубічних СЕ:

$$J = \frac{b-a}{8n} [u_1 + (3u_2 + 3u_3 + 2u_4) + \dots + (3u_{n-4} + 3u_{n-3} + 2u_{n-2}) + 3u_{n-1} + 3u_n + u_{n+1}]. \quad (4.30)$$

Методи інтегрування за допомогою різних типів СЕ можна комбінувати. Наприклад, частину відрізка можна представити симплексами-елементами, а іншу частину – кубічними СЕ. Крім того, раціональний спосіб інтегрування полягає в застосуванні нерівномірних розбивок відрізка на СЕ зі згущенням сітки елементів у місцях швидкої зміни функції, що інтегрується. МСЕ дозволяє ефективно реалізувати ці алгоритми.

#### 4.1.2. Скінченні елементи ермітова типу

Якщо розглянути два сусідніх СЕ, наприклад лінійних, то легко переконатися, що в місці їхнього стику апроксимуюча функція  $\bar{u}(x)$  змінюється безперервно, а похідна потерпає розрив, як показано на рис. 4.3. Однак можлива побудова так званих ермітових СЕ, для яких буде забезпечуватися гладкість сполучення апроксимуючих функцій сусідніх елементів (рис. 4.4).

Розглянемо СЕ з двома вузлами: 1 і 2. Деяку функцію  $u(x)$  в межах СЕ будемо апроксимувати кубічною параболою по  $L$ -координаті:

$$\bar{u}(L) = a_1 + a_2 L + a_3 L^2 + a_4 L^3, \quad (4.31)$$

коефіцієнти якої знайдемо з умов збігу у вузлових точках  $L=0$  і  $L=1$  значень



функції  $\bar{u}(L)$  та її похідної з заданими значеннями  $u_i$  і  $u'_i$ :

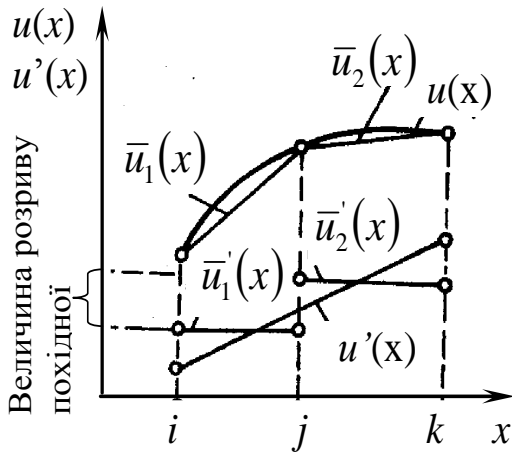


Рис. 4.3. Розривність похідних апроксимуючих функцій на міжелементних границях

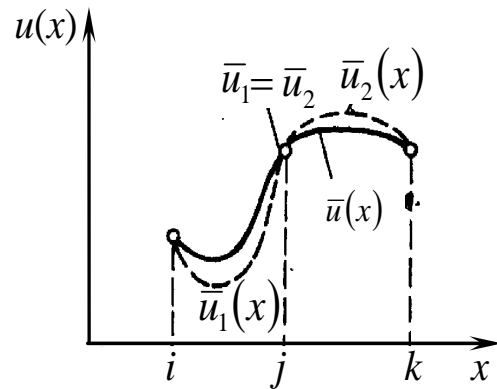


Рис. 4.4. Гладкість сполучення двох ермітових СЕ

$$\begin{aligned} \bar{u}(L=0) &= u_1 = a_1, & \bar{u}(L=1) &= u_2 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \\ \bar{u}'(L=0) &= u'_1 = a_1/l, & \bar{u}'(L=1) &= u'_2 = (a_1 + 2a_2 + 3a_3)/l. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Після знаходження  $a_i$  і підстановки їх у (4.31) одержуємо вираз:

$$\bar{u}(L) = N_1(L)u_1 + M_1(L)u'_1 + N_2(L)u_2 + M_2(L)u'_2, \quad (4.33)$$

де  $N_i(L), M_i(L)$  – базисні функції, що належать класу відомих поліномів Ерміта:

$$\begin{aligned} N_1(L) &= 1 - 3L^2 + 2L^3, & N_2(L) &= 3L^2 - 2L^3, \\ M_1(L) &= l(L - 2L^2 + L^3), & M_2(L) &= l(-L^2 + L^3). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Для базисних функцій ермітових СЕ справедливі такі властивості:

$$\text{у вузлі 1: } N_1 = M'_1 = 1, \quad N_2 = M_1 = M_2 = M'_2 = N'_1 = N'_2 = 0. \quad (4.35)$$

$$\text{у вузлі 2: } N_2 = M'_2 = 1, \quad N_1 = M_1 = M_2 = M'_1 = N'_1 = N'_2 = 0; \quad (4.36)$$

$$N_1(x) + N_2(x) = 1, \quad N'_1(x) + N'_2(x) = 0. \quad (4.37)$$

Інтеграли від базисних функцій дорівнюють:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \int_l N_1(x) dx = \int_l N_2(x) dx = l/2,$$

$$\alpha'_1 = -\alpha'_2 = \int_l M_1(x) dx = -\int_l M_2(x) dx = l^2 / 12. \quad (4.38)$$

Проблема інтегрування деякої функції  $u(x)$  в межах одного ермітова СЕ зводиться до визначення суми:

$$\int_l u(x) dx = \alpha_1 u_1 + \beta_1 u'_1 + \alpha_2 u_2 + \beta_2 u'_2. \quad (4.39)$$

Об'єднання подібних сум для множини СЕ в одну дозволяє вирішити проблему інтегрування на відрізку, причому якщо довжини СЕ однакові і дорівнюють  $l = (b - a) / n$ , то одержуємо вираз

$$J = \frac{l}{2} (u_1 + 2u_2 + \dots + 2u_n + u_{n+1}) + \frac{l^2}{12} (u'_1 - u'_{n+1}), \quad (4.40)$$

який узагальнює формулу трапецій (4.28).

#### 4.1.3. Ізопараметричні елементи

На практиці буває необхідно обчислювати контурні інтеграли, тобто інтеграли вигляду:

$$J = \int_C u(x, y, z) dC, \quad (4.41)$$

де  $C$  – деякий розташований у просторі відкритий або замкнутий контур. Розіб'ємо його на кілька ділянок – скінченних елементів, як показано на рис. 4.5, і розглянемо один з них з вузлами 1 і 2. Формальним чином введемо параметр  $\xi$ , що у межах СЕ змінюється від  $-1$  до  $1$ , причому значенню  $\xi = -1$  відповідає точка (вузол)  $M_1(x, y, z)$ , а  $\xi = 1$  – вузол  $M_2(x, y, z)$  (рис. 4.5).

Можна вважати, що  $\xi$  є криволінійна координата. Кожній точці з координатами  $x, y, z$  відповідає певне значення параметра  $\xi$ , тобто можна вважати, що задано однопараметричне відображення відрізка  $-1 \leq \xi \leq 1$  на СЕ.

Математично таке відображення може бути задано, якщо відомі функції:

$$x = x(\xi), \quad y = y(\xi), \quad z = z(\xi). \quad (4.42)$$

Якщо вони лінійні, то говорять, що задано лінійне відображення, якщо квадратичні – то квадратичне відображення і т.п. За тією ж ознакою відрізняють лінійні, квадратичні, кубічні ізопараметричні СЕ. Очевидно, лінійне відображення

можливе в тому випадку, якщо СЕ є відрізок прямої, квадратичне – ділянка параболи, тощо.

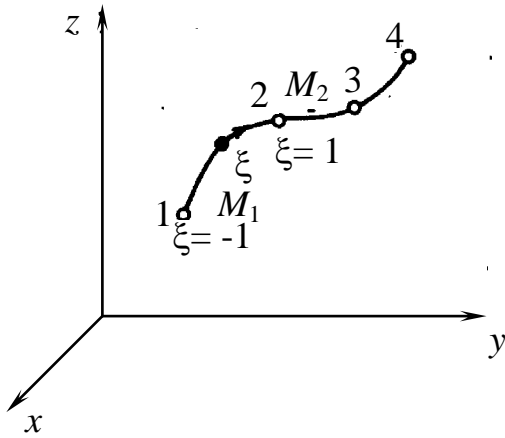


Рис. 4.4. Розбивка контуру на три криволінійних СЕ і система координат одного з них

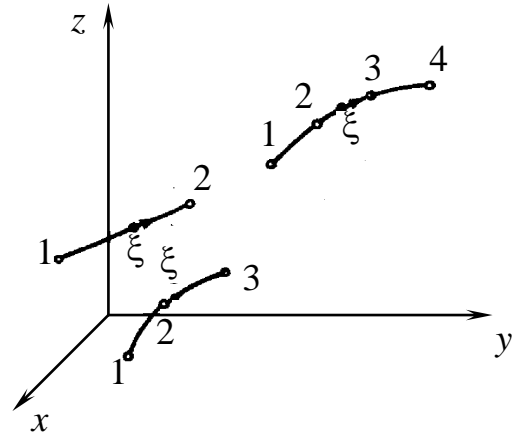


Рис. 4.6. Лінійний, квадратичний і кубічний ізопараметричні СЕ

Лінійне відображення вдається побудувати, якщо:

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi), \quad (4.43)$$

а базисні функції на відрізку  $-1 \leq \xi \leq 1$  і представити функції (4.42) у вигляді

$$\begin{aligned} x &= x(\xi) = N_1(\xi)x_1 + N_2(\xi)x_2, \\ y &= y(\xi) = N_1(\xi)y_1 + N_2(\xi)y_2, \\ z &= z(\xi) = N_1(\xi)z_1 + N_2(\xi)z_2 \end{aligned} \quad (4.44)$$

або у векторному вигляді:

$$\mathbf{R}(\xi) = N_1(\xi)\mathbf{R}_1 + N_2(\xi)\mathbf{R}_2, \quad (4.45)$$

де  $\mathbf{R}_i = \{x_i, y_i, z_i\}$  – радіус-вектор  $i$ -го вузла СЕ.

Квадратичне ( $m = 3$ ) і кубічне ( $m = 4$ ) відображення визначаються за аналогічними формулами:

$$\mathbf{R}(\xi) = N_1(\xi)\mathbf{R}_1 + \dots + N_m(\xi)\mathbf{R}_m, \quad (4.46)$$

причому для квадратичного СЕ базисні функції мають вигляд:

$$N_1(\xi) = -\frac{\xi}{2}(1-\xi), \quad N_2(\xi) = (1+\xi)(1-\xi), \quad N_3(\xi) = \frac{\xi}{2}(1+\xi), \quad (4.47)$$

а для кубічного:

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= -\frac{9}{16}(\xi-1)\left(\xi+\frac{1}{3}\right)\left(\xi-\frac{1}{3}\right), \\ N_2(\xi) &= \frac{27}{16}(\xi+1)(\xi-1)\left(\xi-\frac{1}{3}\right), \\ N_3(\xi) &= -\frac{27}{16}(\xi+1)(\xi-1)\left(\xi+\frac{1}{3}\right), \\ N_4(\xi) &= \frac{9}{16}\left(\xi+\frac{1}{3}\right)\left(\xi-\frac{1}{3}\right)(\xi+1). \end{aligned} \quad (4.48)$$

Ці функції вибирають так, щоб  $N_1 + \dots + N_m = 1$  і щоб  $N_i = 1$  у  $i$ -му вузлі й  $N_i = 0$  в інших вузлах. Лінійний, квадратичний і кубічний ізопараметричні елементи показані на рис. 4.6. Функція  $u(x, y, z)$ , визначена на СЕ, може бути представлена розкладанням по системі базисних функцій:

$$u(x, y, z) \approx \bar{u}(x, y, z) = \bar{u}(x(\xi), y(\xi), z(\xi)) = \bar{u}(\xi) = N_1(\xi)u_1 + \dots + N_m(\xi)u_m, \quad (4.49)$$

де  $u_1, \dots, u_m$  – відомі значення функції  $u(x, y, z)$  у вузлах СЕ.

Особливістю розглянутого варіанта відображення є те, що в силу (4.46), (4.49) і геометрична форма СЕ, і апроксимуюча функція  $u(x, y, z)$  представляються у вигляді розкладання по єдиній системі базисних функцій. Таке відображення називають ізопараметричним, а відповідний СЕ – *ізопараметричним* СЕ.

Відзначимо, що ізопараметричне відображення (4.46) однозначно визначається координатами вузлів СЕ, оскільки базисні функції відомі і не залежать від форми СЕ. Друга приваблива особливість ізопараметричних елементів полягає в можливості побудови СЕ з нерівностоячими внутрішніми вузлами, що дозволяє домогтися кращих апроксимуючих властивостей у порівнянні з лагранжевими СЕ. Ця можливість особливо корисна при апроксимації функцій, що ідуть у нескінченність, і при побудові нескінченних елементів.

Перейдемо до проблеми обчислення контурного інтеграла (4.41), розглядаючи його на черговому СЕ. Відповідно до формул диференціальної геометрії, для диференціала довжини дуги маємо:

$$dC = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2}, \quad d\xi = \sqrt{\frac{\partial \bar{R}}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{R}}{\partial \xi}} d\xi = \det(J) d\xi, \quad (4.50)$$

причому похідні, що входять до виразу для функції  $\det(J)$ , легко знаходяться з (4.46). Після обчислення інтегралів:

$$\alpha_i = \int_{-1}^1 N_i(\xi) \det(J) d\xi \quad (4.51)$$

для контурного інтеграла (4.41) одержуємо такі ж формули (4.11), (4.27), як і для відповідних лагранжевих СЕ.

Тільки для лінійних СЕ функція  $\det(J)$  з (4.50) стала в межах СЕ і дорівнює  $\det(J) = 1/2$ , тому інтеграли (4.51) визначаються аналітично. Для елементів високих порядків застосовуються квадратурні формули інтегрування, відповідно до яких інтеграл представляється у вигляді суми:

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^n H_i f(\xi_i), \quad (4.52)$$

де  $\xi_i$ ,  $H_i$  – точки інтегрування і вагові коефіцієнти, значення яких наведені в табл. 4.1, 4.2.

Таблиця 4.1

Точки інтегрування і вагові коефіцієнти квадратурної формули Ньютона – Котеса до четвертого порядку

					$H_1$	$H_2$	$H_3$	$H_4$	$H_5$
1					1	1			
1					1/3	4/3	1/3		
1	1/3	1/3			1/4	3/4	3/4	1/4	
1	1/2		1/2		7/45	32/45	12/45	32/45	7/45

За подібними квадратурними формулами необхідно обчислювати такі інтеграли:

$$\beta_{ij} = \int_{-1}^1 N_i(\xi) N_j(\xi) \det(J) d\xi, \quad \gamma_{i1} = \int_{-1}^1 \frac{\partial N_i(\xi)}{\partial x_1} \det(J) d\xi, \\ \nu_{ij11} = \int_{-1}^1 \frac{\partial N_i(\xi)}{\partial x_1} \frac{\partial N_j}{\partial x_1} \det(J) d\xi, \quad (4.53)$$

де  $x_1(\xi) = N_1(\xi)x_{11} + \dots + N_m(\xi)x_{1m}$  є спрямована уздовж СЕ криволінійна координата, вузлові значення якої є  $x_{11}, \dots, x_{1m}$ .

Точки інтегрування і вагові коефіцієнти квадратурної формули Гаусса – Лежандра до п'ятого порядку

$n$	2	3	4	5
$\xi_1$	+0,577350	+0,774597	+0,861136	+0,906180
$\xi_2$	-0,577350	0	+0,339981	+0,538469
$\xi_3$		-0,774597	-0,339981	0
$\xi_4$			-0,861136	+0,538469
$\xi_5$				-0,906180
$H_1$	1	5/9	0,347855	0,236927
$H_2$	1	8/9	0,652145	0,478626
$H_3$		5/9	0,652145	0,568889
$H_4$			0,347855	0,478926
$H_5$				0,236927

При визначенні похідної за нею слід враховувати співвідношення:

$$\partial N_i / \partial x_1 = (\partial x_1 / \partial \xi)^{-1} \partial N_i / \partial \xi. \quad (4.54)$$

## 4.2. Дискретизація двовимірного простору

### 4.2.1. Трикутні елементи

Нехай необхідно вирахувати інтеграл по площі

$$J = \int_S u(x, y) dS. \quad (4.55)$$

Замкнуту двовірну область  $S$  приблизно можна розбити на множину трикутних СЕ. Звичайно вузлами є вершини трикутника, точки на його сторонах і, можливо, внутрішні точки. Найпростішим є лінійний симплекс-елемент із трьома вузлами у вершинах (рис. 4.7).

Для визначення системи базисних функцій СЕ зручно ввести природну систему координат, яка визначається трьома відносними координатами  $L_1, L_2$  і  $L_3$ , зображеними на рис. 4.7 а. Значення координати  $L_i$ , що лінійно змінюється в межах СЕ, дорівнює одиниці в  $i$ -й вершині трикутника і нулю – на боці, їй протилежному. Якщо  $x_k, y_k$  є координати вершин, то для  $L_i$  можна записати:

$$L_i = (a_i + b_i x + c_i y) / (2\Delta); \quad (4.56)$$

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1, \quad (4.57)$$

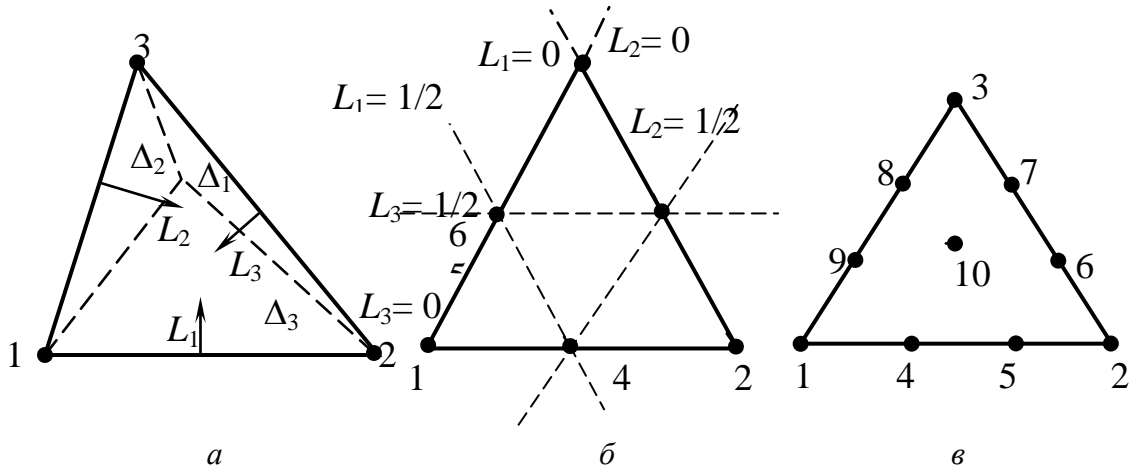


Рис. 4.7. Лінійний (а), квадратичний (б) і кубічний (в) трикутні СЕ

де модуль величини  $2\Delta$  є площа трикутника;

$$\begin{aligned}
 a_1 &= x_2 y_3 - x_3 y_2, & b_1 &= y_2 - y_3, & c_1 &= x_3 - x_2, \\
 a_2 &= x_3 y_1 - y_3 x_1, & b_2 &= y_3 - y_1, & c_2 &= x_1 - x_3, \\
 a_3 &= x_1 y_2 - x_2 y_1, & b_3 &= y_1 - y_2, & c_3 &= x_2 - x_1, \\
 2\Delta &= (x_2 y_3 - x_3 y_2) - (x_1 y_3 - x_3 y_1) + (x_1 y_2 - x_2 y_1).
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

Базисні функції лінійного, квадратичного і кубічного СЕ визначаються так:

$$N_1 = L_1, \quad N_2 = L_2, \quad N_3 = L_3; \tag{4.59}$$

$$\begin{aligned}
 N_1 &= L_1(2L_1 - 1), & N_2 &= L_2(2L_2 - 1), & N_3 &= L_3(2L_3 - 1), \\
 N_4 &= 4L_1 L_2, & N_5 &= 4L_2 L_3, & N_6 &= 4L_1 L_3;
 \end{aligned} \tag{4.60}$$

$$\begin{aligned}
 N_1 &= L_1(3L_1 - 1)(3L_1 - 2)/2, & N_2 &= L_2(3L_2 - 1)(3L_2 - 2)/2, \\
 N_3 &= L_3(3L_3 - 1)(3L_3 - 2)/2, & N_4 &= 9L_1 L_2(3L_1 - 1)/2, \\
 N_5 &= 9L_1 L_2(3L_2 - 2)/2, & N_6 &= 9L_2 L_3(3L_2 - 1)/2, \\
 N_7 &= 9L_2 L_3(3L_3 - 1), & N_8 &= 9L_3 L_1(3L_3 - 1)/2, \\
 N_9 &= 9L_1 L_3(3L_1 - 1), & N_{10} &= 27L_1 L_2 L_3.
 \end{aligned} \tag{4.61}$$

Похідні від базисних функцій визначаються співвідношеннями:

$$\begin{aligned}
 \partial N_i / \partial x &= \partial N_i / \partial L_1 \partial L_1 / \partial x + \dots + \partial N_i / \partial L_3 \partial L_3 / \partial x = \\
 &= (b_1 \partial N_i / \partial L_1 + \dots + b_3 \partial N_i / \partial L_3) / (2\Delta), \\
 \partial N_i / \partial y &= \partial N_i / \partial L_1 \partial L_1 / \partial y + \dots + \partial N_i / \partial L_3 \partial L_3 / \partial y = \\
 &= (c_1 \partial N_i / \partial L_1 + \dots + c_3 \partial N_i / \partial L_3) / (2\Delta).
 \end{aligned} \tag{4.62}$$

Існування відомої формули:

$$\int_{\Delta} L_1^a L_2^b L_3^c dS = \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!} 2\Delta \quad (4.63)$$

дозволяє для не занадто громіздких виразів по площині  $\Delta$  трикутних СЕ аналітично визначити коефіцієнти  $\alpha_i, \beta_{ij}, \gamma_{ik}, \mathbf{v}_{ijkl}$  вигляду (4.13) – (4.16) ( $i, j = 1, \dots, m; l = 1, 2; x_1 = x, x_2 = y$ ).

Зокрема, для лінійного, квадратичного і кубічного СЕ, відповідно, будемо мати вираз:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \Delta/3, \quad \beta_{11} = \beta_{22} = \beta_{33} = 2\beta_{12} = 2\beta_{13} = 2\beta_{23} = 2\Delta/12, \quad (4.64)$$

$$\gamma_{ik} = \Delta h_{ik}, \quad \mathbf{v}_{ijkl} = \Delta h_{ik} h_{jl};$$

$$\alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = \Delta/3, \quad \beta_{11} = \beta_{22} = \beta_{33} = 6\Delta/180,$$

$$\beta_{44} = \beta_{55} = \beta_{66} = 32\Delta/180, \beta_{12} = \beta_{13} = \beta_{23} = -\Delta/180, \beta_{15} = \beta_{26} = \beta_{34} = -4\Delta/180,$$

$$\beta_{45} = \beta_{46} = \beta_{56} = 16\Delta/180, \beta_{14} = \beta_{24} = \beta_{25} = \beta_{35} = \beta_{36} = 0, \gamma_{ik} = \Delta h_{ik} / 3 \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$\gamma_{4k} = 4(h_{2k} + h_{1k})\Delta/3, \quad \gamma_{5k} = 4(h_{3k} + h_{2k})\Delta/3, \quad \gamma_{6k} = 4(h_{3k} + h_{1k})\Delta/3,$$

$$\mathbf{v}_{ijkl} = \mathbf{v}_{ij}, \quad \mathbf{v}_{11} = t_{11}, \quad \mathbf{v}_{22} = t_{22}, \quad \mathbf{v}_{33} = t_{33}, \quad \mathbf{v}_{12} = t_{12}/3, \quad \mathbf{v}_{13} = -t_{13}/3,$$

$$\mathbf{v}_{23} = -t_{23}/3, \quad \mathbf{v}_{14} = 4t_{12}/3, \quad \mathbf{v}_{24} = 4t_{21}/3, \quad \mathbf{v}_{34} = 0, \quad \mathbf{v}_{15} = 0, \quad \mathbf{v}_{25} = 4t_{23}/3, \quad (4.65)$$

$$\mathbf{v}_{35} = 4t_{32}/3, \quad \mathbf{v}_{16} = 4t_{13}/3, \quad \mathbf{v}_{26} = 0, \quad \mathbf{v}_{36} = 4t_{31}/3,$$

$$\mathbf{v}_{44} = 4(2t_{11} + 2t_{22} + t_{12} + t_{21})/3, \quad \mathbf{v}_{55} = 4(2t_{22} + 2t_{33} + t_{23} + t_{32})/3,$$

$$\mathbf{v}_{66} = 4(2t_{11} + 2t_{33} + t_{13} + t_{31})/3, \quad \mathbf{v}_{45} = 4(2t_{21} + t_{13} + t_{31} + t_{33}),$$

$$\mathbf{v}_{46} = 4(t_{11} + t_{13} + t_{21} + 2t_{23}), \quad \mathbf{v}_{56} = 4(2t_{21} + t_{23} + t_{31} + t_{33});$$

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_3 = 4\Delta/120, \quad \alpha_4 = \dots = \alpha_9 = 9\Delta/120, \quad \alpha_{10} = 54\Delta/120, \quad (4.66)$$

де  $h_{i1} = b_i / (2\Delta)$ ,  $h_{i2} = c_i / (2\Delta)$ ,  $t_{ij} = \Delta h_{ik} h_{jl}$ .

Будь-яка функція  $u(x, y)$  з відомими вузловими значеннями  $u_i$  в межах СЕ з  $m$  вузлами приблизно може бути представлена таким чином (рис. 4.8):

$$u(x, y) = N_1(x, y)u_1 + \dots + N_m(x, y)u_m, \quad (4.67)$$

а її інтеграл – у вигляді:

$$\int_{\Delta} u(x, y) dS = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m. \quad (4.68)$$



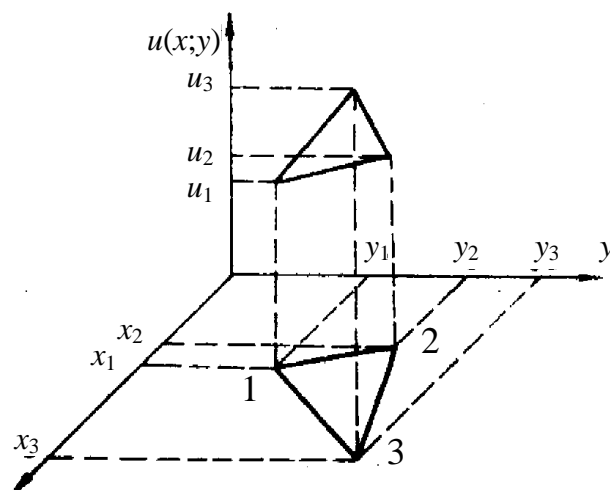


Рис. 4.8. Представлення функції на лінійному трикутному СЕ

Об'єднання подібних формул для усіх елементів, які входять до скінченно-елементної моделі з підсумовуванням коефіцієнтів у загальних вузлах дозволяє приблизно обчислити інтеграл (4.55) на довільній замкнутій області.

#### 4.2.2. Трикутні та чотирикутні ізопараметричні елементи

Для побудови криволінійних трикутних (рис. 4.9) або чотирикутних (рис. 4.10) елементів використовується ізопараметричний принцип.

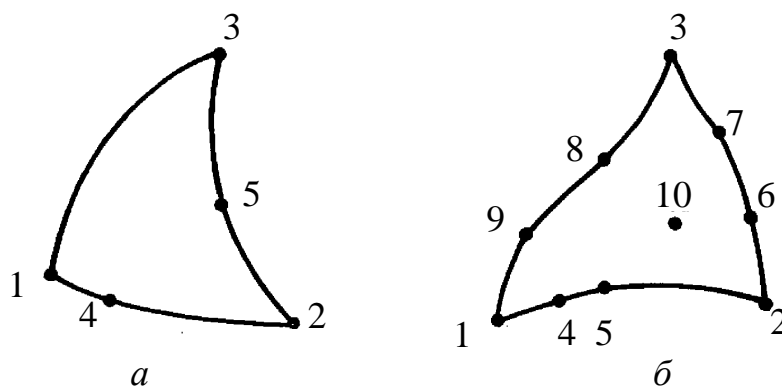


Рис. 4.9. Квадратичний (а) і кубічний (б) трикутні ізопараметричні СЕ

Далі розглянемо застосування ізопараметричних СЕ для обчислення поверхневих інтегралів вигляду:

$$J = \int_S u(X, Y, Z) dS, \quad (4.69)$$

де  $S$  – частина поверхні, яку приблизно можна представити сукупністю криволінійних трикутних або чотирикутних СЕ (рис. 4.11).

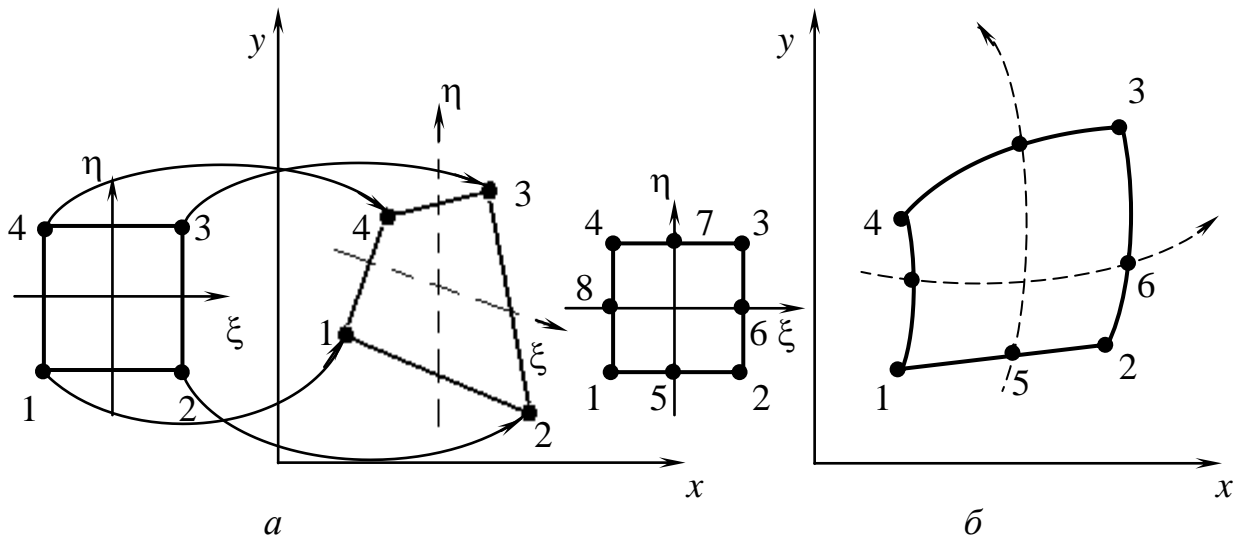


Рис. 4.10. Чотирикутні елементи з білінійним (а) і біквдратичним (б) параметричним відображенням

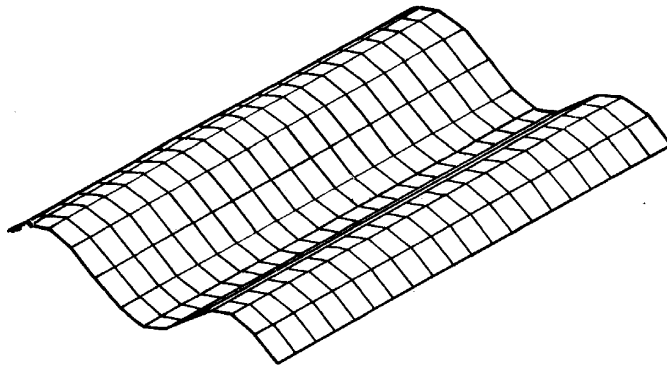


Рис. 4.11. Представлення поверхні криволінійними СЕ

Шестивузловий трикутний і восьмивузловий чотирикутний елементи наведені на рис. 4.12. У двомірному випадку, коли поверхня  $S$  є плоскою, скінченні елементи стають плоскими, а проблема визначення інтеграла (4.69) зводиться до задачі інтегрування по площі (4.55).

Нехай  $\mathbf{R} = X\mathbf{e}_1 + Y\mathbf{e}_2 + Z\mathbf{e}_3$  є радіус-вектор точки з координатами  $X, Y, Z$ , а  $\mathbf{R}_i (i = 1, \dots, m)$  є відомі радіуси-вектори  $m$  вузлів СЕ (рис. 4.12 а);  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  є орти декартових осей. Формальним чином введемо параметри  $\xi, \eta$ , що змінюються в межах СЕ від  $-1$  до  $1$ . Для чотирикутних СЕ цими параметрами можуть бути нормовані криволінійні координати, одна з яких спрямована вправо, а інша – вгору.

Побудуємо відображення, що встановлює взаємно однозначну відповідність між точками одиничного квадрата  $-1 \leq \xi, \eta \leq 1$  і точками СЕ, причому вершини квадрата повинні відображатися у верхні вузли СЕ, боки – у боки, діагоналі – у діагоналі, як показано на рис. 4.10 для плоских чотирикутних елементів.

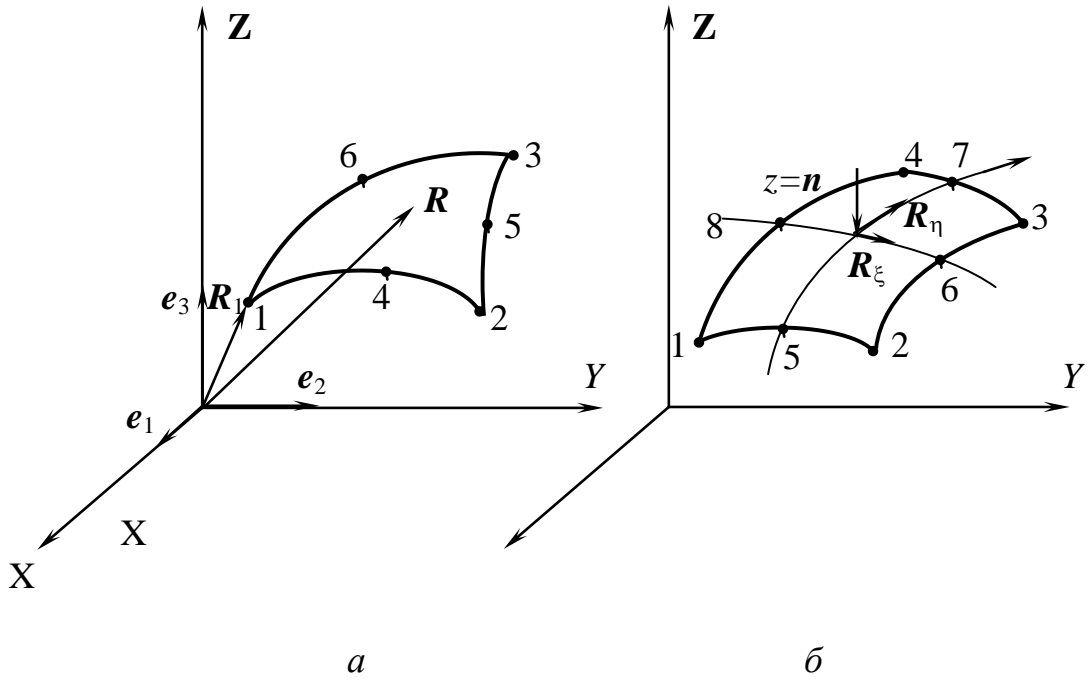


Рис. 4.12. Криволінійні трикутний (а) і чотирикутний (б) СЕ

Для трикутних СЕ параметри  $\xi$  і  $\eta$  зручно зв'язати з  $L$ -координатами:

$$\begin{aligned} \xi &= 1 - 2L_1, & L_1 &= (1 - \xi)/2, & d\xi &= -2dL_1, \\ \eta &= 1 - 2L_2, & L_2 &= (1 - \eta)/2, & d\eta &= -2dL_2. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Математично таке відображення може бути задане у вигляді:

$$\mathbf{R}(\xi, \eta) = N_1(\xi, \eta)\mathbf{R}_1 + \dots + N_m(\xi, \eta)\mathbf{R}_m, \quad (4.71)$$

де базисні функції для трикутних СЕ визначаються формулами (4.59) – (4.61), а для чотирикутних СЕ  $N_i$  є базисними функціями одиничного квадрата. Зокрема, для чотирьохвузлового СЕ  $N_i$  є білінійні функції:

$$\begin{aligned} N_1 &= (1 - \xi)(1 - \eta)/4, & N_2 &= (1 + \xi)(1 - \eta)/4, \\ N_3 &= (1 + \xi)(1 + \eta)/4, & N_4 &= (1 - \xi)(1 + \eta)/4, \end{aligned} \quad (4.72)$$

а для восьмивузлового – біквдратичні:

$$\begin{aligned} N_1 &= -(1 - \xi)(1 - \eta)(\xi + \eta + 1)/4, & N_2 &= (1 + \xi)(1 - \eta)(\xi - \eta - 1)/4, \\ N_3 &= (1 + \xi)(1 + \eta)(\xi + \eta - 1)/4, & N_4 &= -(1 - \xi)(1 + \eta)(\xi - \eta + 1)/4, \\ N_5 &= (1 - \xi)^2(1 - \eta)/2, & N_6 &= (1 - \eta^2)(1 + \xi)/2, \\ N_7 &= (1 - \xi)^2(1 + \eta)/2, & N_8 &= (1 - \eta^2)(1 - \xi)/2. \end{aligned} \quad (4.73)$$

У двомірному випадку  $\mathbf{R} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$  – похідні від базисних функцій визначаються з матричного виразу:

$$\begin{Bmatrix} \partial N_i / \partial x \\ \partial N_i / \partial y \end{Bmatrix} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \partial N_i / \partial \xi \\ \partial N_i / \partial \eta \end{Bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial y / \partial \xi \\ \partial x / \partial \eta & \partial y / \partial \eta \end{bmatrix}, \quad (4.74)$$

де  $J$  є так звана матриця Якобі з визначником (якобіаном):

$$\det(J) = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad (4.75)$$

елементи якого можуть бути обчислені в будь-якій точці SE за формулами, аналогічними до:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} x_1 + \dots + \frac{\partial N_m}{\partial \xi} x_m. \quad (4.76)$$

При обчисленні інтегралів від базисних функцій варто користатися квадратурною формулою:

$$\alpha_i = \int_S N_i(\xi, \eta) dS = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_i(\xi, \eta) \det(J) d\xi d\eta \approx \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n N_i(\xi_k, \eta_l) \det(J)_{\xi_k \eta_l} w_k w_l, \quad (4.77)$$

кожна з точок інтегрування і вагові коефіцієнти якої беруться з табл. 4.1 або 4.2 для чотирикутних SE і з табл. 4.3 – для трикутних, причому для останніх замість  $\xi$  і  $\eta$  слід використовувати параметри  $L_1$  і  $L_2$ .

За формулами, аналогічними (4.23), визначаються й інші необхідні інтеграли:

$$\begin{aligned} \beta_{ij} &= \int_S N_i N_j dS = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_i(\xi, \eta) N_j(\xi, \eta) \det(J) d\xi d\eta, \\ \gamma_{ik} &= \int_S \frac{\partial N_i}{\partial x_k} dS = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( j_{k1} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + j_{k2} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \det(J) d\xi d\eta, \\ \mathbf{v}_{ijkl} &= \int_S \frac{\partial N_i}{\partial x_k} \frac{\partial N_j}{\partial x_l} dS = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} j_{k1} j_{l1} + \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} j_{k1} j_{l2} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} j_{k2} j_{l1} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} j_{k2} j_{l2} \right) \times \\ &\quad \times \det(J) d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (4.78)$$

де  $j_{11}, j_{12}, j_{21}, j_{22}$  – елементи зворотної матриці Якобі.

Точки і вагові коефіцієнти квадратурних формул для чисельного інтегрування по площі трикутних СЕ

$p$	Точки	Координати			Вагові коефіцієнти
		$L_1$	$L_2$	$L_3$	
1	$a$	1/3	1/3	1/3	1/2
2	$a$	1/2	0	1/2	1/6
	$b$	1/2	1/2	0	1/6
	$c$	0	1/2	1/2	1/6
3	$a$	1/3	1/3	1/3	-27/96
	$b$	0,6	0,2	0,2	25/96
	$c$	0,2	0,2	0,6	25/96
	$d$	0,2	0,6	0,2	25/96
3	$a$	1/3	1/3	1/3	27/120
	$b$	1/2	0	1/2	8/120
	$c$	1/2	1/2	0	8/120
	$d$	0	1/2	1/2	8/120
	$e$	0	0	1	3/120
	$f$	1	0	0	3/120
	$g$	0	1	0	3/120
5	$a$	1/3	1/3	1/3	0,11250
	$b$	$\alpha$	$\beta$	$\beta$	0,66197075
	$c$	$\beta$	$\beta$	$\alpha$	0,66197075
	$d$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$	0,66197075
	$e$	$\gamma$	$\gamma$	$\Delta$	0,06296959
	$f$	$\Delta$	$\gamma$	$\gamma$	0,06296959
	$g$	$\gamma$	$\Delta$	$\gamma$	0,06296959
			$\alpha = 0,05961587$ $\beta = 0,47014206$	$\gamma = 0,101286651$ $\Delta = 0,79742699$	

П р и м і т к а:  $p$  – порядок полінома, який точно інтегрується

Повертаючись до (4.71), відзначимо, що ця формула є не що інше, як задане в параметричній формі рівняння поверхні

$$X = X(\xi, \eta), \quad Y = Y(\xi, \eta), \quad Z = Z(\xi, \eta). \quad (4.79)$$

Вектори, дотичні до поверхні в точці  $(\xi, \eta)$ , визначаються так:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial \mathbf{R} / \partial \xi \\ \partial \mathbf{R} / \partial \eta \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^m \begin{Bmatrix} \partial N_i / \partial \xi \\ \partial N_i / \partial \eta \end{Bmatrix} \mathbf{R}_i. \quad (4.80)$$

Модулі цих векторів називають параметрами Ламе:

$$A_i = |\mathbf{P}_i| = \sqrt{P_{i1}^2 + P_{i2}^2 + P_{i3}^2}. \quad (4.81)$$

При переході від точки  $(\xi, \eta)$  до точки  $(\xi + d\xi, \eta + d\eta)$  вектор  $\mathbf{R}$  одержує збільшення, лінійна частина якого є перший диференціал:

$$d\mathbf{R} = \partial\mathbf{R}/\partial\xi \cdot d\xi + \partial\mathbf{R}/\partial\eta \cdot d\eta = \mathbf{P}_1 d\xi + \mathbf{P}_2 d\eta, \quad (4.82)$$

модуль цього вектора є довжина дуги між точками  $(\xi, \eta)$  і  $(\xi + d\xi, \eta + d\eta)$ :

$$dl = |d\mathbf{R}|, (dl)^2 = \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_1 d\xi^2 + 2\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 d\xi d\eta + \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_2 d\eta^2 = Ad\xi^2 + 2Bd\xi d\eta + Cd\eta^2. \quad (4.83)$$

Величини  $A, B, C$  називають коефіцієнтами першої квадратичної форми поверхні. Вони виражаються через параметри Ламе і кут  $\chi$  між дотичними векторами  $\mathbf{P}_1$  та  $\mathbf{P}_2$ :

$$A = A_1^2, \quad C = A_2^2, \quad B = A_1 A_2 \cos \chi, \quad \cos \chi = \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 / |\mathbf{P}_1| |\mathbf{P}_2| = \frac{1}{A_1 A_2} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2. \quad (4.84)$$

Одиничний вектор нормалі до поверхні визначається векторним добутком:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \frac{1}{A_1 A_2 \sin \chi} (\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2) = \left( \frac{\partial Y}{\partial \xi} \frac{\partial Z}{\partial \eta} - \frac{\partial Y}{\partial \eta} \frac{\partial Z}{\partial \xi} \right) \mathbf{e}_1 + \left( \frac{\partial Z}{\partial \xi} \frac{\partial X}{\partial \eta} - \frac{\partial X}{\partial \xi} \frac{\partial Z}{\partial \eta} \right) \mathbf{e}_2 + \\ &\left( \frac{\partial X}{\partial \xi} \frac{\partial Y}{\partial \eta} - \frac{\partial X}{\partial \eta} \frac{\partial Y}{\partial \xi} \right) \mathbf{e}_3 = \cos(\mathbf{n}, X) \mathbf{e}_1 + \cos(\mathbf{n}, Y) \mathbf{e}_2 + \cos(\mathbf{n}, Z) \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (4.85)$$

Трійку одиничних векторів  $\left( \frac{1}{A_1} \mathbf{P}_1, \frac{1}{A_2} \mathbf{P}_2, \mathbf{n} \right)$  називають основним триедром поверхні. Якщо уздовж цих векторів направити координатні лінії, то одержимо зв'язану з СЕ криволінійну систему координат, яку позначимо малими буквами  $x, y, z$  і будемо називати місцевою системою координат СЕ (рис. 4.12 б). Помітимо, що якщо вектори  $\mathbf{P}_1$  і  $\mathbf{P}_2$  неортогональні, то орт місцевої осі  $y$  можна перевизначити, вважаючи його рівним векторному добутку  $(\mathbf{n} \times \mathbf{P}_1) / A_1$ . Для диференціала площі справедливо таке співвідношення:

$$dS = dx dy = A_1 A_2 \sin \chi d\xi d\eta = \sqrt{AC - B^2} d\xi d\eta = \det(J) d\xi d\eta, \quad (4.86)$$

де  $\det(J)$  є якобіан. Якщо вектори  $\mathbf{P}_1$  та  $\mathbf{P}_2$  ортогональні, то  $\sin \chi = 1$ .

Другі похідні від радіуса-вектора (4.71) дають можливість визначити коефіцієнти другої квадратичної форми поверхні:

$$L = \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial \xi^2} \mathbf{n}, \quad M = \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial \xi \partial \eta} \mathbf{n}, \quad N = \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial \eta^2} \mathbf{n}, \quad (4.87)$$

за допомогою яких визначаються кривизни нормальних перетинів, що проходять через лінії  $\xi = \text{const}$ ,  $\eta = \text{const}$ :

$$k_\xi = -L/A_1^2, \quad k_\eta = -N/A_2^2, \quad k_{\xi\eta} = M/A_1A_2. \quad (4.88)$$

Якщо дотичні вектори ортогональні і  $k_{\xi\eta} = 0$ , то лінії  $\xi = \text{const}$ ,  $\eta = \text{const}$ , співнаправлені з осями місцевої системи, називаються лініями кривизни, а кривизни

$$k_x = k_\xi = -L/A_1^2, \quad k_y = k_\eta = -N/A_2^2 \quad (4.89)$$

будуть головними кривизнами. Якщо ж  $\mathbf{P}_1$  і  $\mathbf{P}_2$  неортогональні, то  $k_x$  і  $k_y$  знаходяться з рішення квадратного рівняння:

$$(AC - B^2) + (2BM - AN - CL)k + (LN - M^2) = 0. \quad (4.90)$$

Величини  $R_1 = 1/k_x$ ,  $R_2 = 1/k_y$  називаються головними радіусами кривизни, а їхній добуток  $K = k_x k_y$  – гаусовою кривизною поверхні, що буває позитивною (для сфер, еліпсоїдів), рівною нулю (для площин, циліндрів, конусів) чи негативною (для увігнутих оболонок обертання).

Наприклад, для сфери обидві кривизни є величинами, зворотними радіусу, для циліндра – одна з головних кривизн дорівнює нулю, а друга – зворотній величині радіуса.

Після того, як визначені величини (4.77), легко визначити поверхневий інтеграл (4.69) для одного СЕ:

$$J = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 u(\xi, \eta) \det(J) d\xi d\eta = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m. \quad (4.91)$$

Помітимо, що якщо для криволінійного СЕ введена місцева система координат  $xyz$ , то формально будь-який поверхневий інтеграл типу (4.69) може бути зведений до інтеграла по криволінійних координатах:

$$J = \int_S u(X, Y, Z) dS = \int_S u(x, y) dS, \quad (4.92)$$

причому, якщо покласти  $i = 1$ , одержуємо формулу для визначення площі криволінійного СЕ.

Крім описаної існує ще одна методика інтегрування, відповідно до якої СЕ відразу будується в криволінійній системі координат  $xuz$ . При цьому проблема стає чисто двомірною і для її вирішення можуть бути застосовані двомірні трикутні і чотирикутні СЕ. Однак при їх використанні слід враховувати, що координати вузлів визначаються в криволінійній системі.

На закінчення приведемо корисну формулу для обчислення похідних від вектора  $\mathbf{w} = w_x \mathbf{e}_x + w_y \mathbf{e}_y + w_z \mathbf{e}_z$ , заданого проєкціями на осях  $x$ ,  $y$  та  $z$  місцевої системи координат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} &= \left( \frac{\partial w_x}{\partial x} + k_x w_z \right) \mathbf{e}_x + \frac{\partial w_y}{\partial x} \mathbf{e}_y + \left( \frac{\partial w_z}{\partial x} - k_x w_x \right) \mathbf{e}_z, \\ \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} &= \frac{\partial w_x}{\partial y} \mathbf{e}_x + \left( \frac{\partial w_y}{\partial y} + k_y w_z \right) \mathbf{e}_y + \left( \frac{\partial w_z}{\partial y} - k_y w_y \right) \mathbf{e}_z, \end{aligned} \quad (4.93)$$

у якій є додаткові доданки внаслідок криволінійності.

#### 4.2.3. Двовимірні скінченні елементи ермітова типу

Ермітові СЕ застосовуються в тому випадку, коли на міжелементних границях необхідно забезпечити гладкість сполучення апроксимуючих функцій. Для цього у вузлові параметри необхідно включити значення функції  $u$  та її похідних  $\partial u / \partial x$ ,  $\partial u / \partial y$ :  $q_i = \{u_i, (\partial u / \partial x)_i, (\partial u / \partial y)_i\}^T$ . Таким чином, загальна кількість вузлових параметрів  $n = 9$  для трикутного СЕ ( $m = 3$ ) і  $n = 12$  для чотирикутного ( $m = 4$ ).

Запишемо поліноми з  $n$  коефіцієнтами для трикутного елемента :

$$u(x, y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 + a_7 x^3 + a_8 y^3 + a_9 (x^2 y + y^2 x) \quad (4.94)$$

і

$$u(x, y) = a_1 + \dots + a_7 x^3 + a_8 x^2 y + a_9 xy^2 + a_{10} y^3 + a_{11} x^4 + a_{12} y^4 \quad (4.95)$$

для чотирикутного. Потім випишемо очевидні вирази для похідних від цих поліномів і підставимо в них та в (4.94) або (4.95) координати кожного з  $m$  вузлів, у результаті чого одержимо систему лінійних рівнянь  $n$ -го порядку:

$$\{q\} = C\{A\}, \quad (4.96)$$



де  $\{q\}^T = \{q_1^T, \dots, q_m^T\}$ ,  $\{A\}^T = \{a_1 \dots a_n\}$ ,  $C(n \times n)$  – відома числова матриця. Після обертання (4.96), підстановки знайдених  $a_i$  у (4.94) або (4.95) і угруповання множників при  $u_i$ ,  $(\partial u / \partial x)_i$ ,  $(\partial u / \partial y)_i$  одержимо:

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^m N_i u_i + M_i \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + L_i \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_i, \quad (4.97)$$

де  $N_i$ ,  $M_i$ ,  $L_i$  – ермітові базисні функції, що мають такі властивості:

$$\begin{aligned} \text{у вузлі } i: \quad N_i &= \frac{\partial M_i}{\partial x} = \frac{\partial L_i}{\partial y} = 1, \\ \text{в інших вузлах: } N_i &= \frac{\partial M_i}{\partial x} = \frac{\partial L_i}{\partial y} = 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ \text{в усіх вузлах: } \frac{\partial N_i}{\partial x} &= \frac{\partial N_i}{\partial y} = M_i = L_i = \frac{\partial M_i}{\partial y} = \frac{\partial L_i}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (4.98)$$

Похідні від апроксимуючої функції беруться тривіально ( $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ):

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial N_i}{\partial x_k} u_i + \frac{\partial M_i}{\partial x_k} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \frac{\partial L_i}{\partial x_k} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_i, \quad (4.99)$$

для інтеграла маємо:

$$\begin{aligned} J &= \int_S u(x, y) dS = \sum_{i=1}^m n_i u_i + m_i (\partial u / \partial x)_i + l_i (\partial u / \partial y)_i, \\ n_i &= \int_S N_i dS, \quad m_i = \int_S M_i dS, \quad l_i = \int_S L_i dS. \end{aligned} \quad (4.100)$$

### 4.3. Дискретизація тривимірного простору

#### 4.3.1. Тетраедральні елементи

У тетраедральному елементі (рис. 4.13) об'ємом  $V$  зручно ввести місцеву систему  $L$ -координат, які лінійно змінюються в межах  $SE$ :

$$L_i = (a_i + b_i x + c_i y + d_i z) / (6V), \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (4.101)$$

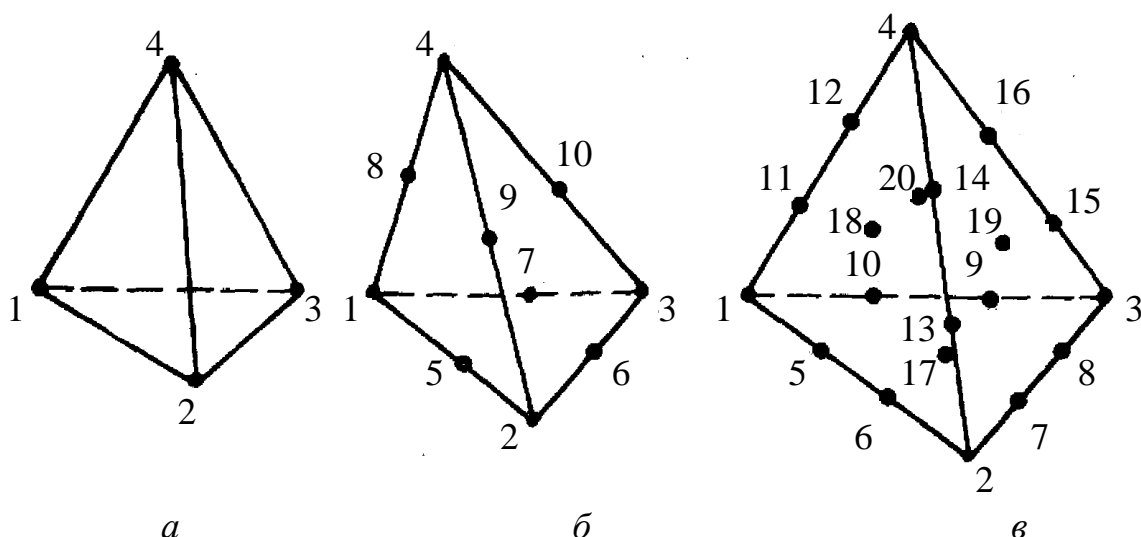


Рис. 4.13. Тетраедральні СЕ з лінійною (а), квадратичною (б) і кубичною (в) апроксимаціями

Коефіцієнти  $a_i, b_i, c_i, d_i$  визначаються таким чином, щоб  $L_i = 1$  у вузлі  $i$  і  $L_i = 0$  у всіх вузлах, крім  $i$ -го. Тоді базисні функції зазначених елементів мають вигляд:

$$\begin{aligned} N_1 = L_1, \quad N_2 = L_2, \quad N_3 = L_3, \quad N_4 = L_4; \\ N_i = L_i(2L_i - 1) \quad (i = 1, \dots, 4), \quad N_5 = 4L_1L_2, \quad N_6 = 4L_2L_3, \end{aligned} \quad (4.102)$$

$$N_7 = 4L_1L_3, \quad N_8 = 4L_1L_4, \quad N_9 = 4L_2L_4, \quad N_{10} = 4L_3L_4; \quad (4.103)$$

$$\begin{aligned} N_i = L_i(3L_i - 1)(3L_i - 2)/2 \quad (i = 1, \dots, 4), \quad N_5 = 9L_1L_2(3L_1 - 1)/2, \\ N_6 = 9L_2L_1(3L_2 - 1)/2, \quad N_7 = 9L_2L_3(3L_2 - 1)/2, \\ N_8 = 9L_3L_2(3L_3 - 1)/2, \quad N_9 = 9L_3L_1(3L_3 - 1)/2, \\ N_{10} = 9L_1L_3(3L_1 - 1)/2, \quad N_{11} = 9L_1L_4(3L_1 - 1)/2, \\ N_{12} = 9L_4L_1(3L_4 - 1)/2, \quad N_{13} = 9L_2L_4(3L_2 - 1)/2, \\ N_{14} = 9L_4L_2(3L_4 - 1)/2, \quad N_{15} = 9L_3L_4(3L_3 - 1)/2, \\ N_{16} = 9L_4L_3(3L_4 - 1)/2, \quad N_{17} = 27L_1L_2L_3, \quad N_{18} = 27L_1L_2L_4, \end{aligned}$$

$$N_{19} = 27L_2L_3L_4, \quad N_{20} = 27L_1L_3L_4. \quad (4.104)$$

Похідні від базисних функцій визначаються за допомогою формул

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial x} + \dots + \frac{\partial N_i}{\partial L_4} \frac{\partial L_4}{\partial x} = \frac{1}{6V} \left( b_1 \frac{\partial N_i}{\partial L_1} + \dots + b_4 \frac{\partial N_i}{\partial L_4} \right),$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{1}{6V} \left( c_1 \frac{\partial N_i}{\partial L_1} + \dots + c_4 \frac{\partial N_i}{\partial L_4} \right), \quad \frac{\partial N_i}{\partial z} = \frac{1}{6V} \left( d_1 \frac{\partial N_i}{\partial L_1} + \dots + d_4 \frac{\partial N_i}{\partial L_4} \right). \quad (4.105)$$

Інтеграли від базисних функцій та інші не занадто складні інтеграли (4.14) – (4.16) можуть бути визначені за допомогою відомої формули:

$$\int_V L_1^a L_2^b L_3^c L_4^d dV = \frac{a! b! c! d!}{(a + b + c + d + 3)!} 6V. \quad (4.106)$$

Зокрема, для лінійного, квадратичного і кубічного СЕ, відповідно, маємо:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= V/4, \quad \beta_{ii} = 2V/20, \quad \beta_{ij} = V/20 \quad (i \neq j), \quad (i, j = 1, \dots, 4), \\ \gamma_{ik} &= Vh_{ik}, \quad \nu_{ijkl} = Vh_{ik}h_{jl}, \quad \alpha_1 = \dots = \alpha_4 = -V/20, \\ \alpha_5 &= \dots = \alpha_{10} = 4V/20. \end{aligned} \quad (4.107)$$

$$\begin{aligned} \beta_{ii} &= 6V/420, \quad \beta_{ij} = V/420 \quad (i, j = 1, \dots, 4) \quad (i \neq j), \\ \beta_{ii} &= 32V/420 \quad (i = 5, \dots, 10), \quad \beta_{15} = \beta_{17} = \beta_{18} = \beta_{25} = \beta_{26} = \\ &= \beta_{29} = \beta_{36} = \beta_{37} = \beta_{310} = \beta_{48} = \beta_{49} = \beta_{410} = -4V/420, \\ \beta_{16} &= \beta_{19} = \beta_{110} = \beta_{27} = \beta_{28} = \beta_{210} = \beta_{35} = \beta_{38} = \beta_{39} = \beta_{45} = \beta_{46} = \beta_{47} = -12V/420, \\ \beta_{510} &= \beta_{68} = \beta_{79} = 2V/420, \quad \beta_{56} = \beta_{57} = \beta_{58} = \beta_{59} = \beta_{67} = \beta_{69} = \beta_{610} = \\ &= \beta_{78} = \beta_{710} = \beta_{89} = \beta_{810} = \beta_{910} = 16V/420; \end{aligned}$$

$$\gamma_{ik} = 0 \quad (i = 1, \dots, 4), \quad \gamma_{5k} = V(h_{1k} + h_{2k}), \quad \gamma_{6k} = V(h_{3k} + h_{2k}), \quad (4.108)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{7k} &= V(h_{3k} + h_{1k}), \quad \gamma_{8k} = V(h_{4k} + h_{1k}), \quad \gamma_{9k} = V(h_{4k} + h_{2k}), \quad \gamma_{10k} = V(h_{4k} + h_{3k}), \\ \alpha_1 &= \dots = \alpha_4 = V/40, \quad \alpha_5 = \dots = \alpha_{16} = 0, \quad \alpha_{17} = \dots = \alpha_{20} = 9V/40. \end{aligned} \quad (4.109)$$

Для визначення громіздких для аналітичного інтегрування виразів слід застосовувати квадратурну формулу:

$$\begin{aligned} J &= \int_V u(x, y, z) dV = \int_V u(L_1, L_2, L_3, L_4) \det(J) dL_1 dL_2 dL_3 = \\ &= \sum_{k=1}^n u(L_{1k}, L_{2k}, L_{3k}, L_{4k}) w_k \det(J_k), \end{aligned} \quad (4.110)$$

вагові коефіцієнти  $w_k$  і точки інтегрування якої беруться з табл. 4.4, причому  $\det(J_k) = 6V$ .

Ця ж квадратурна формула може бути застосована і для ізопараметричних тетраедральних СЕ з криволінійними боками (рис. 4.14).

Точки інтегрування і ваги квадратурної формули Гауса – Лежандра для тетраедрів

$p$	Точки	Координати				Вагові коефіцієнти
		$L_1$	$L_2$	$L_3$	$L_4$	
1	$a$	1/4	1/4	1/4	1/4	1
2	$a$	$\alpha$	$\beta$	$\beta$	$\beta$	1/4
	$b$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$	$\beta$	1/4
	$c$	$\beta$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$	1/4
	$d$	$\beta$	$\beta$	$\beta$	$\alpha$	1/4
$\alpha = 0,58541020; \beta = 0,13819660$						
3	$a$	1/4	1/4	1/4	1/4	-16/20
	$b$	1/3	1/6	1/6	1/6	9/20
	$c$	1/6	1/3	1/6	1/6	9/20
	$d$	1/6	1/6	1/3	1/6	9/20
	$e$	1/6	1/6	1/6	1/3	9/20

П р и м і т к а:  $p$  – порядок полінома, який точно інтегрується.

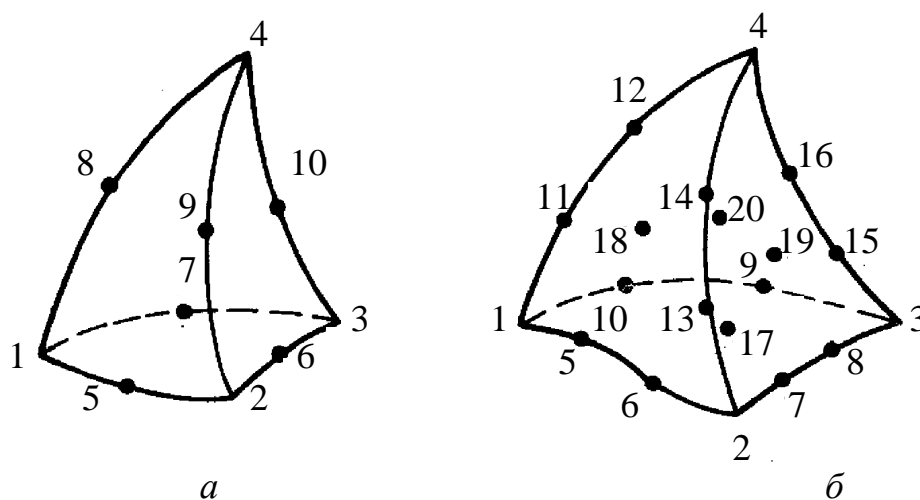


Рис. 4.14. Ізопараметричні тетраедральні СЕ з квадратичною (а) і кубічною (б) апроксимацією

У цьому випадку  $L_1, L_2, L_3$  є незалежними параметрами ( $L_4 = 1 - L_1 - L_2 - L_3$ ) ізопараметричного відображення:

$$\mathbf{R}(L_1, L_2, L_3) = N_1(L_1, L_2, L_3)\mathbf{R}_1 + \dots + N_m(L_1, L_2, L_3)\mathbf{R}_m, \quad (4.111)$$

а  $\det(J)$  – визначник матриці Якобі:

$$J = \begin{bmatrix} \partial x / \partial L_1 & \partial x / \partial L_2 & \partial x / \partial L_3 \\ \partial y / \partial L_1 & \partial y / \partial L_2 & \partial y / \partial L_3 \\ \partial z / \partial L_1 & \partial z / \partial L_2 & \partial z / \partial L_3 \end{bmatrix}, \quad (4.112)$$

що з'єднує похідні:

$$\begin{Bmatrix} \partial u / \partial L_1 \\ \partial u / \partial L_2 \\ \partial u / \partial L_3 \end{Bmatrix} = J \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial u / \partial y \\ \partial u / \partial z \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial u / \partial y \\ \partial u / \partial z \end{Bmatrix} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \partial u / \partial L_1 \\ \partial u / \partial L_2 \\ \partial u / \partial L_3 \end{Bmatrix}; \quad (4.113)$$

$\mathbf{R}$  – радіус-вектор точки з координатами  $x, y, z$ , а  $\mathbf{R}_i$  – відомі радіуси-вектори вузлів.

#### 4.3.2. Гексаедральні ізопараметричні елементи

Шестигранні СЕ у формі чотирикутних призм (рис. 4.15) зручно використовувати для наближення форми прямокутних тіл.

Форма СЕ задається ізопараметричним відображенням куба  $-1 \leq \xi, \eta, \zeta \leq 1$  на шестигранник:

$$\mathbf{R} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 = N_1(\xi, \eta, \zeta)\mathbf{R}_1 + \dots + N_m(\xi, \eta, \zeta)\mathbf{R}_m, \quad (4.114)$$

де  $m = 8$  для елемента з білінійною апроксимацією (рис. 4.15 а),  $m = 20$  – для елемента з біквадратичною апроксимацією (рис. 4.15 б).

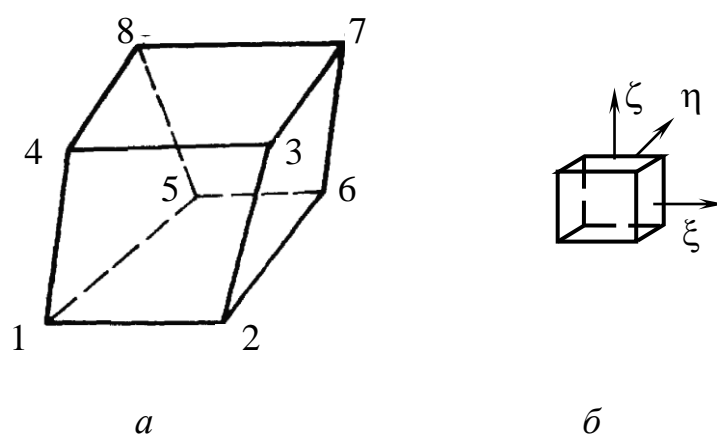


Рис. 4.15. Ізопараметричні шестигранники

Базисні функції цих елементів визначаються таким чином:

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i), \quad i = 1, \dots, 8; \quad (4.115)$$

$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i)(\xi\xi_i + \eta\eta_i + \zeta\zeta_i - 2)$  – для вузлів у вершині  
( $i = 1, \dots, 8$ ),

$N_i = \frac{1}{4}(1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i)$  – для вузлів на серединах боків при  $\xi = 0$ ,

$N_i = \frac{1}{4}(1 - \eta^2)(1 + \xi\xi_i)(1 + \zeta\zeta_i)$  – для вузлів на серединах боків при  $\eta = 0$ ,

$N_i = \frac{1}{4}(1 - \zeta^2)(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)$  – для вузлів на серединах боків при  $\zeta = 0$ . (4.116)

Якобіан ізопараметричного відображення є визначником матриці Якобі:

$$\det(J) = \begin{bmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial x / \partial \eta & \partial x / \partial \zeta \\ \partial y / \partial \xi & \partial y / \partial \eta & \partial y / \partial \zeta \\ \partial z / \partial \xi & \partial z / \partial \eta & \partial z / \partial \zeta \end{bmatrix}, \quad (4.117)$$

яка може бути визначена в будь-якій точці елемента.

Похідні від базисних функцій:

$$\begin{Bmatrix} \partial N_i / \partial x \\ \partial N_i / \partial y \\ \partial N_i / \partial z \end{Bmatrix} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \partial N_i / \partial \xi \\ \partial N_i / \partial \eta \\ \partial N_i / \partial \zeta \end{Bmatrix}, \quad (4.118)$$

причому похідні по параметрах  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  визначаються аналітично.

Для інтегрування по об'єму SE функції  $i(x, y, z)$  застосовується звичайна формула:

$$J = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m, \quad (4.119)$$

причому інтеграл  $\alpha_i$  від базисних функцій можуть бути визначені аналітично лише для білінійного елемента:

$$\alpha_i = V / 8 \quad (i = 1, \dots, 8). \quad (4.120)$$

Для інших необхідних інтегралів (4.13) – (4.16):

$$\begin{aligned}
\alpha_i &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_i(\xi, \eta, \zeta) \det(J) d\xi d\eta d\zeta, \\
\beta_{ij} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_i(\xi, \eta, \zeta) N_j(\xi, \eta, \zeta) \det(J) d\xi d\eta d\zeta, \\
\gamma_{ik} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{\gamma}_{ik} \det(J) d\xi d\eta d\zeta, \\
\nu_{ijkl} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{\gamma}_{ik} \bar{\gamma}_{jl} \det(J) d\xi d\eta d\zeta,
\end{aligned} \tag{4.121}$$

де  $\bar{\gamma}_{ik} = j_{k1} \partial N_i / \partial \xi + j_{k2} \partial N_i / \partial \eta + j_{k3} \partial N_i / \partial \zeta$ ,  $j_{ki}$  – елементи зворотної матриці Якобі, слід застосовувати квадратурну формулу:

$$J = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 u(\xi, \eta, \zeta) \det(J) d\xi d\eta d\zeta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n u(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) w_i w_j w_k \det(J_{ijk}). \tag{4.122}$$

#### 4.3.3. Просторові елементи ермітова типу

Ермітові СЕ, на відміну від лагранжевих, забезпечують міжелементну гладкість апроксимуючих функцій, оскільки у вузлові параметри включаються їхні похідні. Наприклад, для тетраедра з чотирма вузлами в якості вузлових змінних можуть бути використані величини  $i$ ,  $\partial u / \partial x$ ,  $\partial u / \partial y$ ,  $\partial u / \partial z$  і апроксимація має вигляд:

$$u = \sum_{i=1}^4 N_i u_i + M_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + K_i \frac{\partial u_i}{\partial y} + L_i \frac{\partial u_i}{\partial z}. \tag{4.123}$$

Оскільки ермітовий тетраедр має 16 ступенів свободи, то кожна з базисних функцій, наприклад  $M_i$ , представляється поліномом з 16 коефіцієнтами:

$$\begin{aligned}
M_i &= a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 z + a_5 x^2 + a_6 y^2 + a_7 z^2 + a_8 xy + a_9 yz + a_{10} xz + a_{11} x^3 + \\
&+ a_{12} y^3 + a_{13} z^3 + a_{14} (x^2 y + y^2 x) + a_{15} (y^2 z + zy^2) + a_{16} (x^2 z + zx^2).
\end{aligned} \tag{4.124}$$

Коефіцієнти розкладання знаходяться з рішення системи лінійних рівнянь 16-го порядку, кожне рівняння якої складається, виходячи з властивостей базисних функцій:

$$\begin{cases} M_i = \frac{\partial M_i}{\partial y} = \frac{\partial M_i}{\partial z} = 0 & \text{у вузлах } 1, 2, 3, 4; \\ \frac{\partial M_i}{\partial x} = 0 & \text{в усіх вузлах, крім } i\text{-го, де } \frac{\partial M_i}{\partial x} = 1. \end{cases} \quad (4.125)$$

За аналогічним алгоритмом будуються ермітові базисні функції інших типів просторових СЕ.

Відмітимо, що для побудови криволінійних ермітових елементів ізопараметричний принцип не застосовується, оскільки для обчислення похідних необхідно знати значення матриці Якобі в кожному з вузлів.

Інтегрування по об'єму ермітових елементів виконується за допомогою квадратурних формул (4.110) або (4.122).

#### 4.4. Дискретизація часу

Дискретизація часу на окремі часові ітерації, крім перерахованих вище переваг, дозволяє спростити проблему нелінійності властивостей матеріалу об'єкта, що моделюється.

Якщо властивість матеріалу істотно залежить від параметрів стану (наприклад, теплопровідність істотно залежить від температури), а останні, у свою чергу, – від часу, то залежність властивостей від стану можна замінити на їхню залежність від часу, вводячи нові значення властивостей на початку кожної часової ітерації моделювання і вважаючи їх у проміжках між границями ітерацій постійними.

Спроба абстрагуватися від реальних подій, що відбуваються «усередині» часової ітерації, тобто дискретизувати час аналогічний тому, як ми дискретизували простір, приводить до області математики, яка називається *теорією автоматів*. *Скінченним автоматом* (надалі – просто автоматом) називається система  $S = \{A, Q, V, \delta, \lambda\}$ , у якій  $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ ,  $Q = \{q_1, \dots, q_n\}$ ,  $V = \{v_1, \dots, v_k\}$  – скінченні множини (алфавіти), а  $\delta: Q \times A \rightarrow Q$  і  $\lambda: Q \times A \rightarrow V$  – функції, визначені на цих множинах.  $A$  називається вхідним алфавітом,  $V$  – вихідним алфавітом,  $Q$  – алфавітом станів,  $\delta$  – функцією переходів,  $\lambda$  – функцією виходів. Якщо, крім того, в автоматі  $S$  виділено один стан, який називають початковим (звичайно будемо вважати, що це  $q_1$ ), то отриманий автомат називається *ініціальним* і позначається  $(S, q)$ .

Таким чином, по неініціальному автоматі з  $n$  станами можна  $n$  різними способами визначити ініціальний автомат.

Скінченний автомат є хоча й абстрактною, але з функціональної точки зору досить точною моделлю дискретного (цифрового) об'єкта. Вхідна буква – це вхідний сигнал (точніше, комбінація сигналів на усіх входах пристрою), вхідне слово – послідовність вхідних сигналів, що надходять в автомат у дискретні моменти часу (такти)  $t = 1, 2, 3, \dots$ ; вихідне слово – послідовність вихідних сигналів, які



видаються автоматом; стан автомата – це комбінації станів запам'ятовуючих елементів пристрою.

З прикладної точки зору інтерпретація автомата як пристрою не є універсальною. Добре відомо, що всяке моделювання можна реалізувати як апаратно (у вигляді пристрою), так і програмно (у вигляді програми для ЕОМ). Це приводить до більш загального тлумачення автоматів як алгоритмів із скінченною пам'яттю, багато властивостей яких можна досліджувати безвідносно до способу їхньої реалізації.

При підході до теорії автоматів як до частини теорії алгоритмів центральною проблемою є вивчення можливостей автоматів у термінах слів. Можна виділити два основних аспекти «роботи» автоматів:

- 1) автомати розпізнають вхідні слова, тобто відповідають на запитання, чи належить подане на вхід слово даній множині (це автомати-розпізнавачі);
- 2) автомати перетворюють вхідні слова у вихідні, тобто реалізують автоматні відображення (автомати-перетворювачі).

З проблемою можливостей автоматів зв'язане й інше коло задач, традиційних для теорії алгоритмів, – розпізнавання властивостей автоматів. Нарешті, третє коло задач теорії автоматів – це задачі опису автоматів і їхньої реалізації, тобто представлення автомата як структури, що складається з об'єктів фіксованої складності (елементів).

Оскільки функції  $\delta$  і  $\lambda$  визначені на кінцевих множинах, їх можна задавати таблицями. Зазвичай дві таблиці зводяться в одну  $\delta \times \lambda: Q \times A \rightarrow Q \times V$ , яку називають таблицею переходів автомата, або просто автоматною таблицею. Наприклад, табл. 4.5 задає функції переходів і виходів для автомата з алфавітами  $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ ,  $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ ,  $V = \{v_1, v_2\}$ .

Таблиця 4.5

Функції переходів і виходів для автомата з алфавітами  
 $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ ,  $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ ,  $V = \{v_1, v_2\}$

	$a_1$	$a_2$	$a_3$
$q_1$	$q_3, v_1$	$q_3, v_2$	$q_2, v_1$
$q_2$	$q_4, v_1$	$q_1, v_1$	$q_1, v_1$
$q_3$	$q_2, v_1$	$q_3, v_1$	$q_3, v_2$
$q_4$	$q_4, v_1$	$q_2, v_1$	$q_1, v_2$

Ще один розповсюджений і наочний спосіб завдання автомата – орієнтований мультиграф, який називається графом переходів чи діаграмою переходів. Вершини графа відповідають станам; якщо  $\delta(q_i, a_j) = q_k$  і  $\lambda(q_i, a_j) = v_l$ , то з  $q_i$  у  $q_k$  веде ребро, на якому написані  $a_j$  і  $v_l$ . Граф переходів для табл. 4.5 зображений на рис. 4.16.

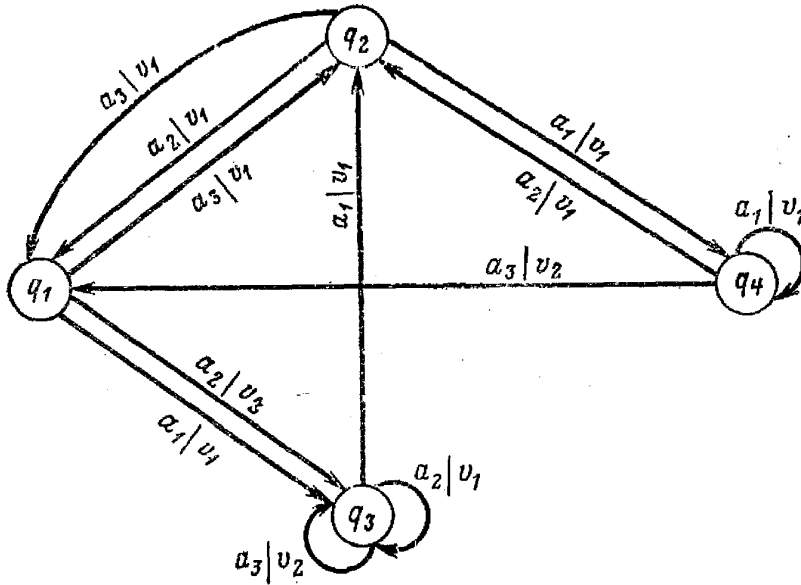


Рис. 4.16. Граф переходів

Кратні ребра не обов'язкові; наприклад, два ребра з  $q_2$  у  $q_2$  можна замінити одним, на якому будуть написані обидві пари  $a_3 | v_1$  і  $a_2 | v_1$ .

Для будь-якого графа переходів у кожній вершині  $q_i$  виконані такі умови коректності:

- 1) для будь-якої вхідної букви  $a_j \in$  ребро, що виходить з  $q_i$ , на якому написане  $a_j$  (умова повноти);
- 2) будь-яка буква  $a_j$  зустрічається тільки на одному ребрі, що виходить з  $q_i$  (умова несуперечності чи детермінованості).

#### 4.5. Питання до самоконтролю

1. З якою метою та на якому етапі здійснюється дискретизація об'єктів моделювання?
2. В якому сенсі використовується по відношенню до елемента дискретизації термін «скінченний»?
3. Чи можна піддавати дискретизації функціональну залежність? Що конкретно при цьому дискретизується?
4. Які вимоги до функції на границях між елементами дискретизації?
5. Я поводять себе функції між границями інтервалу дискретизації?
6. Які види скінченних елементів ви знаєте? Чи вони відрізняються один від одного?
7. В світі якої розмірності ми живемо? Чи можна побудувати на папері графік життєвого циклу деякого об'єкта в просторі-світі?
8. Як обирається розмірність простору для дискретизації?
9. Чи можна піддавати дискретизації час?
10. Що таке функція форми скінченного елемента? Яким чином вони визначають базисні функції?
11. Що таке ізопараметричні елементи?
12. Які скінченні елементи дискретизації тривимірного простору ви знаєте? Чим обмежується їх кількість та склад?
13. З якою метою при побудові скінченноелементної моделі використовується матриця Якобі?
14. Що є визначником матриці Якобі? Наведіть приклади.
15. Чому використання ЕОМ дозволило зробити гігантський стрибок у використанні давно відомого математичного підґрунтя скінченноелементного моделювання?
16. Яку роль відіграють точки та вагові коефіцієнти квадратурних формул при чисельному інтегруванні по площі трикутних скінченних елементів?
17. Чи існують криволінійні скінченні елементи? З якою метою вони використовуються?
18. Квадратурні формули Ньютона – Котеса та Гаусса – Лежандра.
19. Чим відрізняються лінійні, квадратичні та кубічні скінченні елементи і графіки їх базисних функцій?
20. Який математичний апарат використовується при дискретизації простору-часу на скінченні елементи?

## Розділ 5

### ПЕРЕТВОРЕННЯ МОДЕЛЕЙ

#### 5.1. Принцип симетрії

**Я**к було зазначено вище, на жаль, існуючі САПР дуже чутливі до асиметрії. Тут найважливішою обставиною є те, що для розрахунку несиметричних конструкцій у деяких випадках можна застосовувати апарат розрахунку симетричних систем. Можна, наприклад, зупинитися на використанні симетрії на етапі побудови розрахункової схеми і почати її модифікування, у процесі якого окремі елементи можна виключити, замінити, додати, з'єднати, змінити характеристики, що в результаті призводить до несиметричної конструкції. Після цього її розраховують звичайними методами як несиметричну. Особливий інтерес при цьому представляють деталі з різнорідних матеріалів чи деталі з одного матеріалу, але які мають різні модулі пружності на розтягування і стиск – типовий приклад несиметричних за властивостями матеріалу конструкцій.

Використання симетричності конструкції при розробці скінченно-елементних моделей дозволяє значно скоротити час на її розробку, оскільки необхідно кодувати тільки невелику частину при одержанні результатів по всій конструкції. Для такого підходу характерне розуміння симетрії в найбільш широкому сенсі як наявність групи рухів системи, що переводять її в положення, яке не відрізняється від початкового, і послідовне використання апарата теорії представлення груп. Аналіз спрощень, які при цьому досягаються, показав, що системи рівнянь дискретного методу розпадаються на серії незалежних підсистем. Порядок останніх значно нижче, ніж у початкової системи, що призводить до неминучої економії ресурсів ЕОМ.

Історія застосування симетрії в методі скінченних елементів в розрахунках механічних систем така. Спочатку на базі аналізу спектральних властивостей матриць був розроблений алгоритм для різноманітних конструкцій з поворотною симетрією. Він був реалізований у САПР ПАРАДОКС для розрахунків будівельних конструкцій. У процесі експлуатації комплексу успішно виконані складні розрахунки відповідальних інженерних споруд: телевеж, градирень, радіотелескопів тощо. Це також підтвердило актуальність врахування симетрії фізичних властивостей при розрахунку на ЕОМ і доцільність його подальшого удосконалення.

При цьому скінченноелементні моделі з успіхом застосовувалися і для розрахунку елементів конструкцій з ізотропних та трансверсально ізотропних матеріалів, причому розрахунки виконувалися як з усередненням властивостей

таких матеріалів, так і без нього.

Перші варіанти відповідних схем дискретного статичного розрахунку конструкцій зі скінченною симетрією з використанням апарата теорії зображень груп були розроблені практично одночасно різними дослідниками і відрізнялися по своїй суті лише способом доказу: спеціальним співвідношенням ортогональності або трактуванням процесу розпаду розв'язуючих рівнянь в якості результату їх запису в новому базисі з узагальненими симетричними властивостями. Кожна підсистема відповідала одному із зображень груп симетрії, а кожному зображенню – одна підсистема з декількома правими частинами (їхня кількість дорівнювала розмірності зображення). Для матриць підсистем були запропоновані прості аналітичні вирази.

Недолік цих схем – допущення про відсутність особливих (розташованих на осях і площинах симетрії) вузлів. Зв'язані з цими вузлами труднощі з'явилися ще при розробці програми ПАРАДОКС і були переборені за рахунок досить складних процедур.

Розв'язання цієї проблеми було пов'язано з визначенням базисних векторів у вузлах головної елементарної ячейки, тобто з побудовою їх підвекторів, які відповідають особливим вузлам. Алгоритми, розроблені на основі розрахунку цих підвекторів і остаточного варіанта загальної схеми статичного розрахунку конструкцій зі скінченною симетрією, втілилися в САПР ПАРСЕК.

Тривала експлуатація САПР ПАРСЕК і створення її версії для ПЕОМ підтвердили справедливість і доцільність реалізованого в ньому підходу. Одночасно вона дозволила виявити як вдалі, так і недосконалі аспекти алгоритмів і установити найбільш перспективні напрямки подальшого дослідження проблеми. Надалі пішло розширення алгоритму врахування скінченної симетрії на стаціонарні динамічні розрахунки і його реалізацію в ПАРСЕК.

Одна з таких проблем пов'язана із так званими особливими вузлами, яким приділяється важливе місце в універсальних алгоритмах, що використовують спеціальний, хоча і досить широкий, клас систем координат, які представляють собою визначені лінійні і кутові переміщення точок (вузлів), що утворюють деяку симетричну дискретну сітку. Особливими називають вузли, розташовані в площинах, або на осях у центрі симетрії системи. Загальна схема врахування симетрії простіше всього реалізується для вузлів загального положення і ускладнюється при наявності особливих вузлів. Для них складені спеціальні довідкові таблиці, у яких враховується тип вузла і тип симетрії конструкції, а також обмежується вибір координат особливого вузла.

Якщо мова йде про конструкцію або механічну систему, у розгляд повинні вводитися, крім геометричних розмірів, що закріплюють систему зв'язку, пружні характеристики та інерційні властивості. Навантаження на конструкцію ніякими властивостями симетрії володіти не зобов'язані.

Ще один самостійний розділ теоретичних досліджень присвячений статиці і динаміці квазісиметричних конструкцій. Вивчення квазісиметрії показало деяку незавершеність схеми врахування симетрії і призвело до модифікації ряду її етапів. Вона стала складним сплетенням формальних процедур, що містять по-

втори, логічні кільця тощо.

В останній версії САПР механічних конструкцій – програмному комплексі ЛІРА-САПР 2011 – представникові нового покоління програм сімейства ЛІРА проблеми врахування симетрії конструкцій доведені до досконалості. Розглянемо математичні аспекти розв’язання цієї проблеми.

### 5.1.1. Загальні положення

Симетрія (від грецького *Simmetria* – співрозмірність), у широкому понятті слова – інваріантність (незмінність) структури матеріального об’єкта щодо його перетворень, тобто змін ряду фізичних умов. Дві точки, що лежать на одному перпендикулярі до даної прямої чи площини по різні сторони і на однаковій відстані від них, називаються симетричними щодо цієї прямої або площини.

Фігура (плоска чи об’ємна) симетрична відносно прямої (осі симетрії), чи площини (площини симетрії), якщо її точки попарно мають властивість: фігура симетрична щодо центру симетрії, якщо її точки попарно лежать на прямих, що проходять крізь центр симетрії, по різні боки і на однаковій відстані від нього.

Симетричні тіла можуть мати одну або декілька площин симетрії. Куля або тіло, основою якого є напівсфера або коло, мають безліч площин симетрії. На відміну від них, просторова спіраль – геометричний об’єкт цілком позбавлений симетрії. Куб займає проміжне положення, він має дев’ять площин симетрії, а всього з правильних конгруентних (сумісних при переміщенні) плоских фігур можна побудувати п’ять, так званих, платонових симетричних багатогранників: тетраедр, октаедр, гексаедр, ікосаедр і додекаедр.

Цей перелік багатогранників обмежується такими умовами:

- у будь-якому багатограннику сума всіх кутів між ребрами, що сходяться в одній вершині, завжди менше  $360^{\circ}$ ;
- повинно виконуватися співвідношення Ейлера:

$$e + f - k = 2, \quad (5.1)$$

де  $e$  – число вершин;  $f$  – число граней;  $k$  – число ребер багатогранника.

Виконання цих умов приводить до того, що гранями правильних багатогранників можуть бути тільки: рівнобічні трикутники з кутом при вершині  $60^{\circ}$ , квадрати з кутом при вершині  $90^{\circ}$  і п’ятикутники з кутом при вершині  $108^{\circ}$ . Основні геометричні характеристики платонових тіл зведені в табл. 5.1.

Поняття «симетрія» як закон побудови структурних об’єктів є дуже широким. Симетричним називають такий предмет, що складається з геометрично і фізично рівних частин, належним образом розташованих відносно один одного; належне розташування вимагає, щоб упорядкованість була однаковою для всіх частин.

Симетрична механічна система повинна допускати розподіл на однакові частини. У більшості випадків поділ може виконуватися неоднозначно як по кількості частин, так і по їхній конфігурації.

Геометричні характеристики платонових тіл

Тіло	Грані	Кількість граней у одній вершині	Кількість вершин	Кількість граней	Кількість ребер
Тетраедр	Рівносторонній трикутник	3	4	4	6
Октаедр	Рівносторонній трикутник	4	6	8	12
Ікосаедр	Рівносторонній трикутник	5	12	20	30
Гексаедр	Квадрат	3	8	6	12
Додекаедр	Правильний п'ятикутник	3	20	12	20

Надалі передбачається, що система ділиться на максимально можливе число однакових частин, які називаються елементарними ячейками.

Відзначимо, що елементарні ячейки можуть бути сполучені між собою єдиним способом. Пронумеруємо отримані ячейки числами  $0, \dots, h$  у довільному порядку та обмежимося розглядом таких систем, для яких число  $h$  – скінченне.

Можливість розподілу механічної системи на елементарні ячейки є лише необхідною умовою симетрії. Щоб перевірити, чи є система, що складається з  $h$  ячеек, симетричною, введемо в розгляд її копію з ячейками, пронумерованими таким же чином.

Назвемо оригінал нерухомою системою  $S_n$ , а копію – рухомою системою  $S_p$ . Переміщуючи систему  $S_p$  як тверде ціле, з'єднаємо її нульову ячейку з  $i$ -ю ячейкою системи  $S_n$ . Якщо при цьому відбудеться повне поєднання обох систем (включаючи внутрішні зв'язки і зовнішні закріплення) і цей збіг буде виконуватися при всіх значеннях  $i = 0, \dots, h$ , то таку механічну систему називають симетричною із симетрією I роду.

Поєднаємо системи  $S_n$  і  $S_p$  так, щоб ячейки з однойменними номерами збігалися. Переміщення, що переводить систему з даного початкового положення в положення, коли нульова ячейка  $S_p$  збігається з  $i$ -ю ячейкою  $S_n$ , назвемо переміщенням  $g_i$ . Існує  $h$  різних переміщень, які переводять систему  $S_p$  з одного положення, що співпадає із системою  $S_n$ , в одне з положень:  $g_0, \dots, g_h$ , причому переміщення  $g_0$  не змінює положення рухомої системи і називається тривіальним.

Відомо, що будь-яке переміщення твердого тіла в тримірному просторі можна розкласти на елементарні переміщення: поступальне переміщення (трансляцію) і поворот навколо нерухомої осі.

Будь-яке переміщення об'єктів з скінченною кількістю елементарних ячеек  $g_i$  ( $i = 0, \dots, h$ ) можна представити як поворот навколо осі, зв'язаної з нерухомою системою  $S_n$ .

Це дозволяє виключити з розгляду трансляцію. Симетрична система може

мати кілька таких осей, названих поворотними осями симетрії або елементами симетрії системи. Порядком осі симетрії називають кількість переміщень (включаючи тривіальне) з  $g_i$  ( $i = 0, \dots, h$ ), які є поворотами навколо цієї осі. Вісь симетрії  $n$ -го порядку звичайно позначають  $C_n$ .

### 5.1.2. Класифікація симетрії

Класифікація симетричних систем виконується на основі елементів симетрії. Існує п'ять типів симетрії I роду.

1. Циклічна симетрія  $C_n$  характеризується наявністю в системи однієї поворотної осі  $n$ -го порядку. Таку симетрію мають осі, круглі балки та інші аналогічні конструкції. Система із симетрією  $C_n$  розбивається на  $n$  елементарних ячеек. Приклади тіл з циклічною симетрією показані на рис. 5.1. Одна з елементарних ячеек на цьому і наступному рисунках заштрихована.

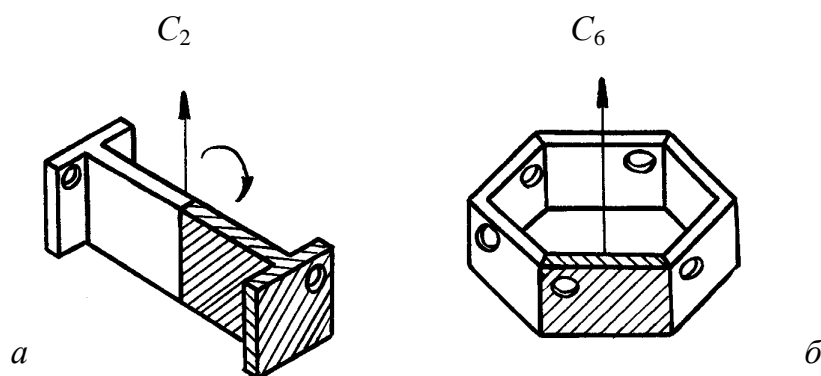


Рис. 5.1. Циклічна симетрія  $C_n$

2. Дієдральна симетрія  $D_n$  характеризується наявністю в системи однієї осі  $C_n$  порядку  $n$  і  $n$  осей другого порядку  $C_2$ , ортогональні осі  $C_n$  і утворюючих між собою кути  $\pi/n$ . Система із симетрією  $D_n$  розподіляється на  $2n$  елементарних ячеек. Приклади тіл із симетрією  $D_n$  показані на рис. 5.2.

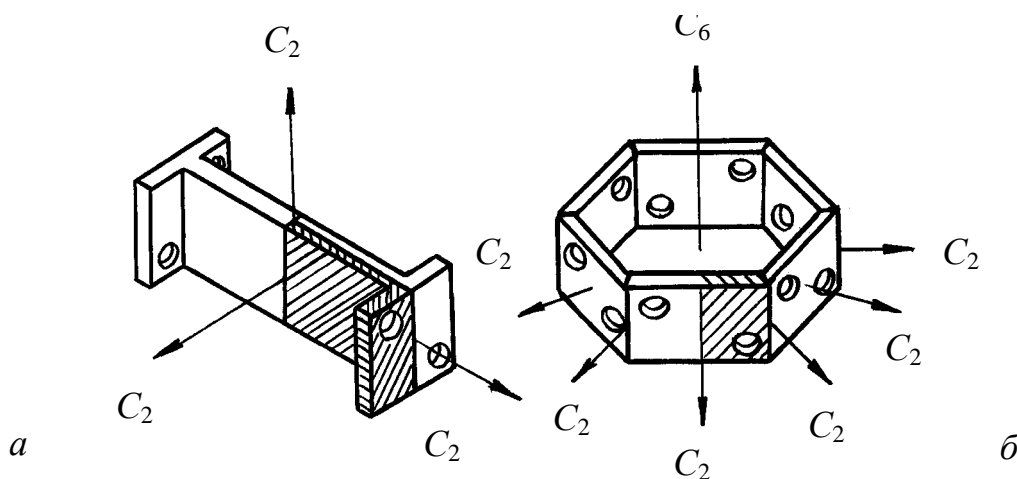
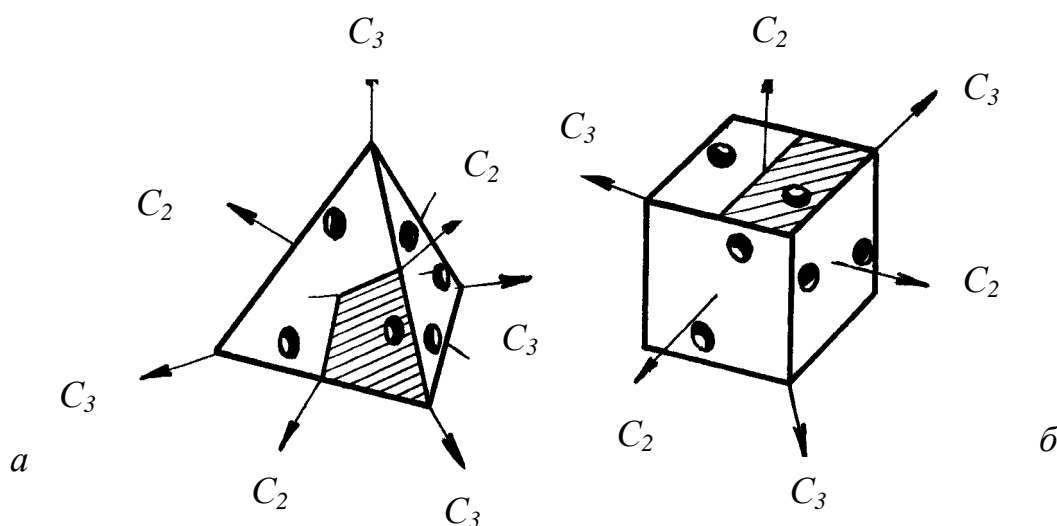


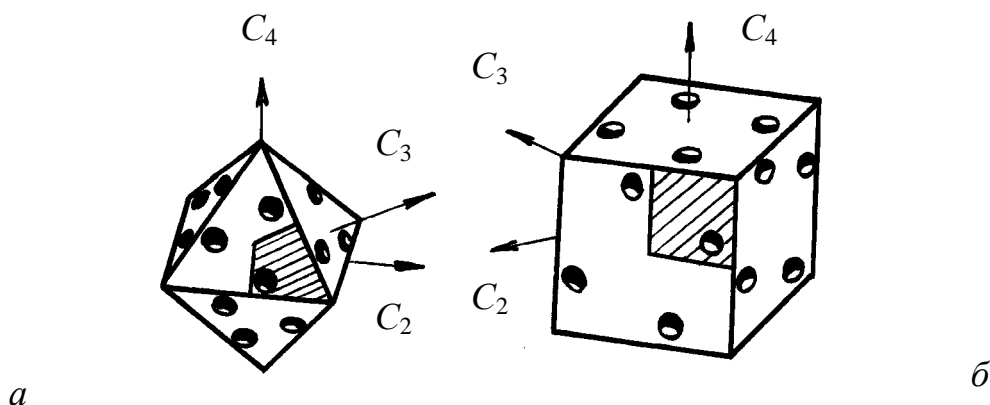
Рис. 5.2. Дієдральна симетрія  $D_n$



3. Симетрія обертання тетраедра  $T$  характеризується наявністю в системі семи поворотних осей (рис. 5.3 *a*). Чотири осі симетрії мають третій порядок і проходять крізь вершини і середини протилежних граней тетраедра. Три осі другого порядку проходять крізь середини перетинних ребер тетраедра. Тіло, що має симетрію  $T$ , може бути розподілене на 12 елементарних ячеек. Така форма тіла не єдина. На рис. 5.3 *б* показаний куб з отворами, що має симетрією обертання тетраедра.

Рис. 5.3. Симетрія обертання тетраедра  $T$ 

4. Симетрія обертання октаедра  $O$  характеризується наявністю в системі тринадцяти поворотних осей симетрії. Три осі четвертого порядку проходять крізь пари протилежних вершин октаедра. Чотири осі третього порядку з'єднують центри паралельних граней. Шість осей другого порядку з'єднують середини паралельних ребер. Тіло, що має симетрію  $O$ , може бути розбите на 24 елементарні ячейки. Прикладами таких тіл є октаедр і куб (рис. 5.4).

Рис. 5.4. Симетрія обертання октаедра  $O$ 

5. Симетрія обертання ікосаедра  $Y$  характеризується наявністю в системі 31 осей симетрії. Серед них шість осей п'ятого порядку  $C_5$ , що проходять крізь про-

тилежні вершини ікосаедра, десять осей третього порядку  $C_3$ , що проходять крізь центри паралельних граней, і 15 осей другого порядку  $C_2$ , що проходять крізь середини протилежних паралельних ребер. Тіло із симетрією обертання ікосаедра ділиться на 60 елементарних ячеек. Характерними фігурами для такого типу симетрії є пентагональний додекаедр і ікосаедр (рис. 5.5).

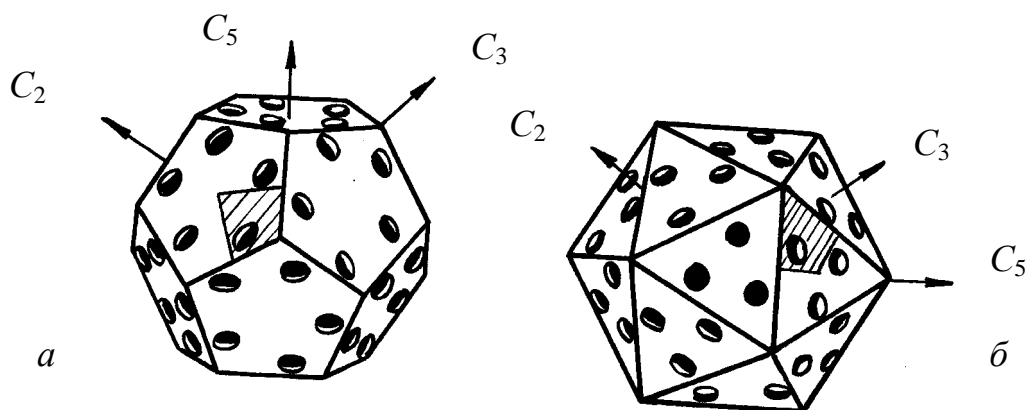


Рис. 5.5. Симетрія обертання ікосаедра  $Y$

Якщо вважати сумісними не тільки два однакових тіла, але також тіло і його дзеркальне відображення, то досліджуваний об'єкт можна розбити на ячейки двох типів так, що ячейка одного типу є дзеркальним відображенням ячеек іншого. Нехай, як і раніше, загальне число ячеек дорівнює  $h+1$  і усі вони пронумеровані довільним чином без розподілу на типи. У цьому випадку процедура суміщення нульової ячейки рухомої системи з ячейками нерухомої здійснена тільки для ячеек одного типу.

Для ячеек іншого типу деякі суміщення виконуються з використанням дзеркального відображення нульової ячейки. Якщо при цьому відбувається повний збіг систем  $S_{\Pi}$  і  $S_{\Pi}$ , то такий об'єкт називають симетричним із симетрією  $\Pi$  роду.

Якщо в перелік елементарних переміщень, крім трансляції і повороту навколо осі, включити дзеркальне відображення в площині, зв'язаній з нерухомою системою, то будь-яке переміщення  $g_i$  ( $i = 0, \dots, h$ ) для об'єктів із симетрією  $\Pi$  роду можна також розкласти на елементарні. Як і у випадку симетрії  $I$  роду для об'єктів зі скінченною кількістю ячеек можна обійтися без трансляції. При цьому, якщо якесь з переміщень розкладається на відображення і поворот, то площину відображення і поворотну вісь можна вибрати так, щоб вони були взаємно ортогональними.

Таке переміщення називається дзеркальним поворотом навколо осі, а вісь, зв'язана із системою  $S_{\Pi}$ , – дзеркально-поворотною віссю симетрії. Дзеркально-поворотна вісь характеризується порядком  $2n$  і позначається символом  $S_{2n}$ . Серед переміщень  $g_i$  ( $i = 0, \dots, h$ ), що є поворотами і дзеркальними поворотами навколо осі  $S_{2n}$ , існує  $n$  простих і  $n$  дзеркальних поворотів. Особливу роль грає дзеркальний поворот на кут  $\pi$ . Переміщення такого типу не залежить від на-

прямку осі обертання і цілком визначається точкою перетину осі і площини відображення. Це переміщення називається інверсією, а точка перетину осі і площини – центром інверсії або центром симетрії.

Таким чином, в симетричних тіл із симетрією II роду в якості елементів симетрії виступають не тільки поворотні осі, але і площини відображення, дзеркально-поворотні осі і центр симетрії. За допомогою цих елементів здійснюється класифікація типів симетрії II роду. Існує 9 таких типів.

1. Симетрія дзеркальних поворотів  $S_{2n}$  характеризується наявністю тільки однієї дзеркально-поворотної осі  $S_{2n}$  порядку  $2n$ . Тіло із симетрією  $S_{2n}$  можна розділити на  $2n$  елементарних ячеек. На рис. 5.6 показані тіла із симетрією  $S_2$  і  $S_6$ . Тіла із симетрією  $S_2$  називають центрально-симетричними.

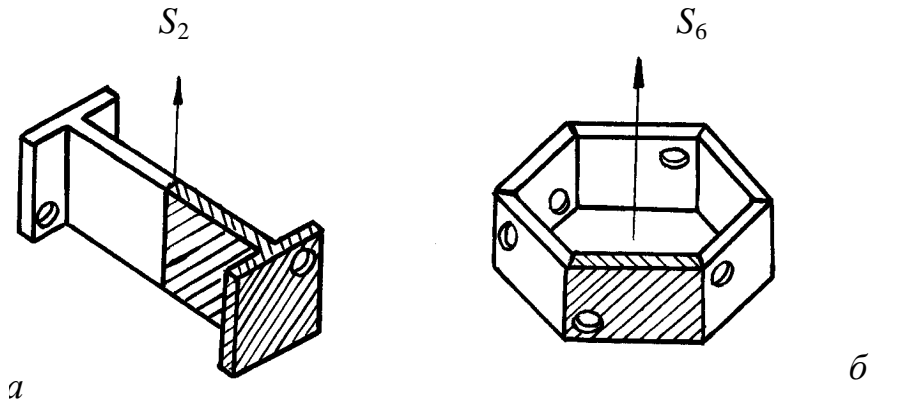


Рис. 5.6. Симетрія дзеркальних поворотів  $S_{2n}$

2. Симетрія  $C_{nh}$  характеризується однією поворотною віссю і нормальною до неї площиною відображення  $\sigma_h$ . Кількість елементарних ячеек у системі –  $2n$ . Приклади тіл із симетрією показані на рис. 5.7.

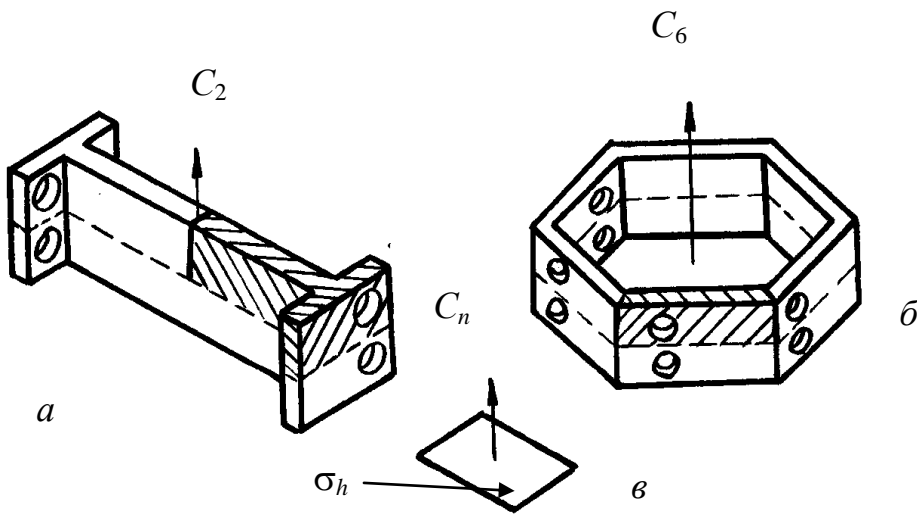


Рис. 5.7. Симетрія  $C_{nh}$

3. Симетрія правильної  $n$ -кутової піраміди  $C_{nv}$  характеризується однією поворотною віссю симетрії  $C_n$  і  $n$  площинами відображення  $\sigma_v$ , що проходять крізь вісь  $C_n$  і утворюють двогранні кути  $\pi/5$ . Тіло ділиться на  $2n$  елементарних ячеек. Приклади тіл із симетрією  $C_{nv}$  показані на рис. 5.8.

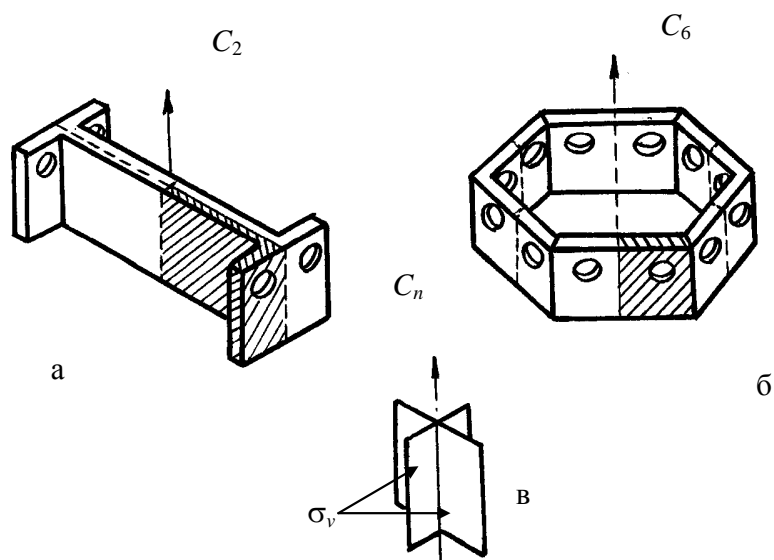


Рис. 5.8. Симетрія правильної  $n$ -кутової піраміди  $C_{nv}$

4. Симетрія правильної  $n$ -кутової призми  $D_{nh}$  характеризується однією поворотною віссю  $C_n$ , нормальною до осі  $C_n$  площиною відображення  $\sigma_h$ ,  $n$  поворотними осями другого порядку  $C_2$ , які лежать у площині  $\sigma_h$  і утворюють кути  $\pi/2$ , і  $n$  площинами відображення  $\sigma_v$ , що проходять крізь осі  $C_n$  і  $C_2$ . Тіло ділиться на  $4n$  елементарних ячеек (рис. 5.9).

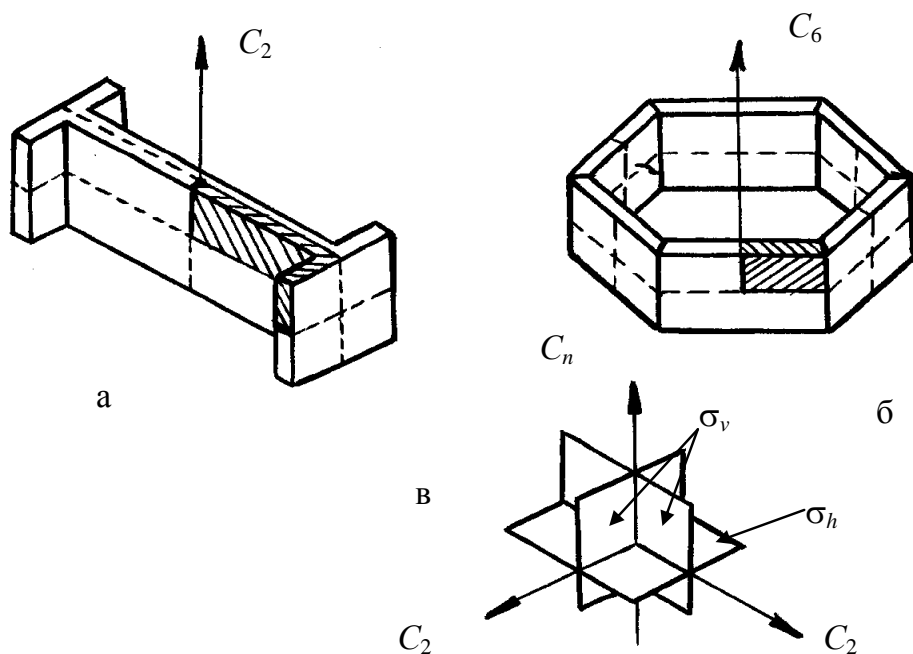
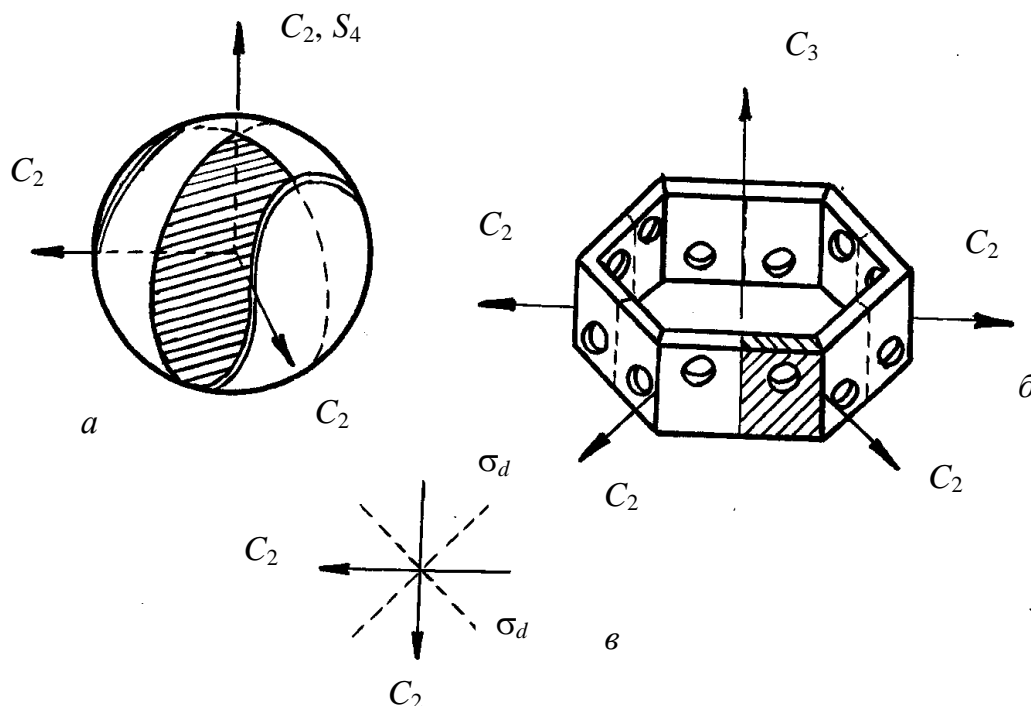


Рис. 5.9. Симетрія правильної  $n$ -кутової призми  $D_{nh}$

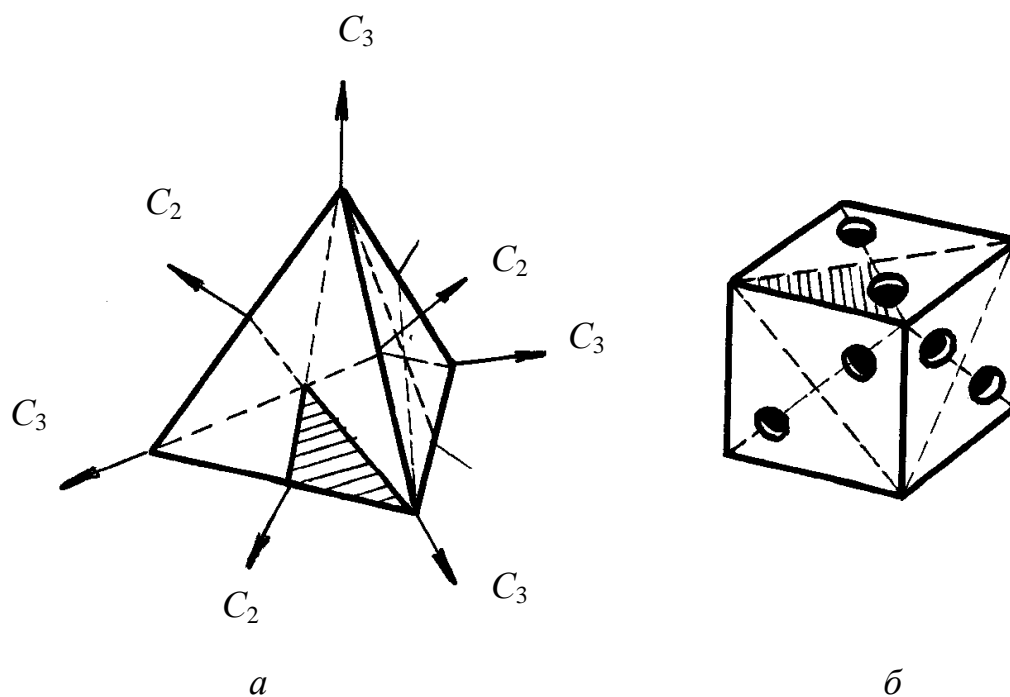
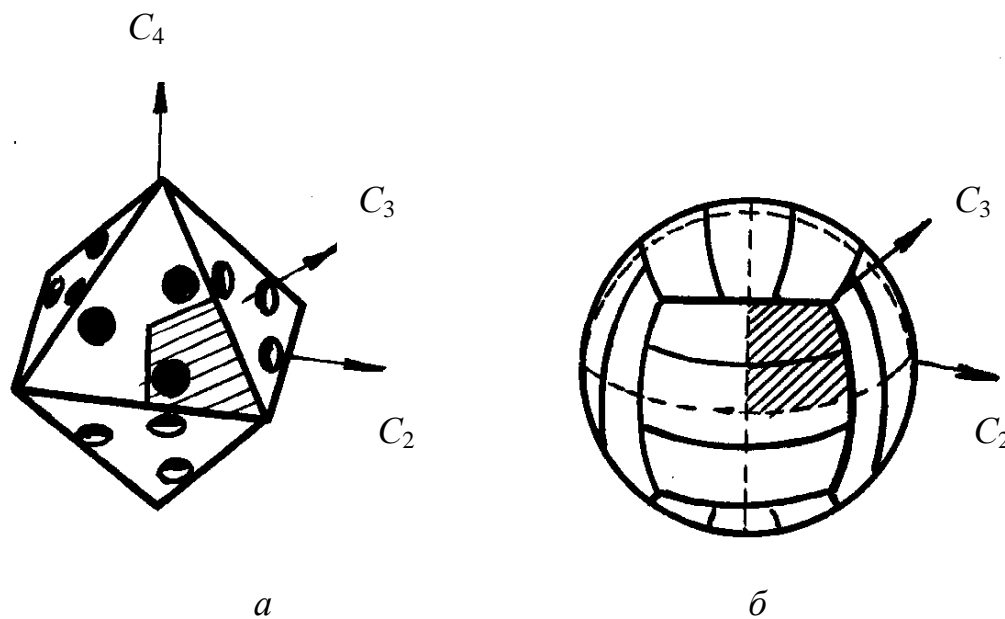
5. Симетрія типу  $D_n$  виходить з дієдральної симетрії  $D_n$  додаванням  $n$  “діагональних” площин відображення  $\sigma_D$ , що проходять крізь вісь  $C_n$  і бісектриси кутів, утворених осями  $C_5$ . Вісь  $C_n$  – дзеркально-поворотна з порядком  $2n$ . Тіло із симетрією  $D_n$  ділиться на  $4n$  елементарних ячеек. Приклади тіл із симетрією  $D_{2D}$  і  $D_{3D}$  показані на рис. 5.10.

Рис. 5.10. Симетрія типу  $D_n$ 

6. Повна симетрія тетраедра  $T_D$  виходить із симетрії обертання тетраедра  $T$  додаванням шести діагональних площин відображення, що проходять крізь ребро і медіану протилежної грані. Внаслідок цього, усі поворотні осі  $C_2$  перетворюються в дзеркально-поворотні осі  $S_6$ . Система із симетрією  $T_D$  розбивається на 24 елементарні ячейки. Приклади тіл із симетрією  $T_D$  показані на рис. 5.11.

7. Симетрія  $T_h$  виходить із симетрії обертання тетраедра  $T$  додаванням інверсії. Внаслідок цього, усі поворотні осі  $C_3$  перетворюються в дзеркально-поворотні осі  $S_6$ , і виникають три площини відображення, нормальні осям  $C_2$ . Тіло із симетрією  $T_h$  може бути розбито на 24 елементарні ячейки. Симетрія  $T_h$  на тілах у формі тетраедра не реалізується. Таку симетрію має октаедр, показаний на рис. 5.12 а. Розповсюджений розкрій покришки футбольного м'яча (рис. 5.12 б) також має симетрію  $T_h$ .

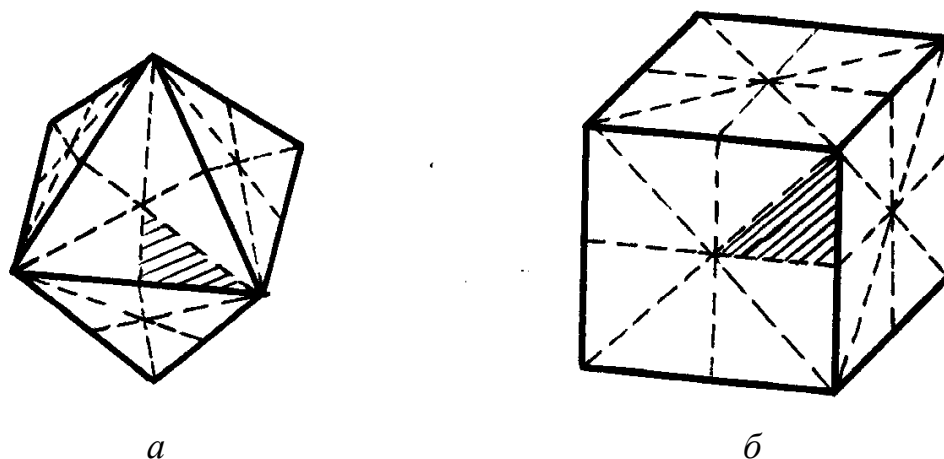
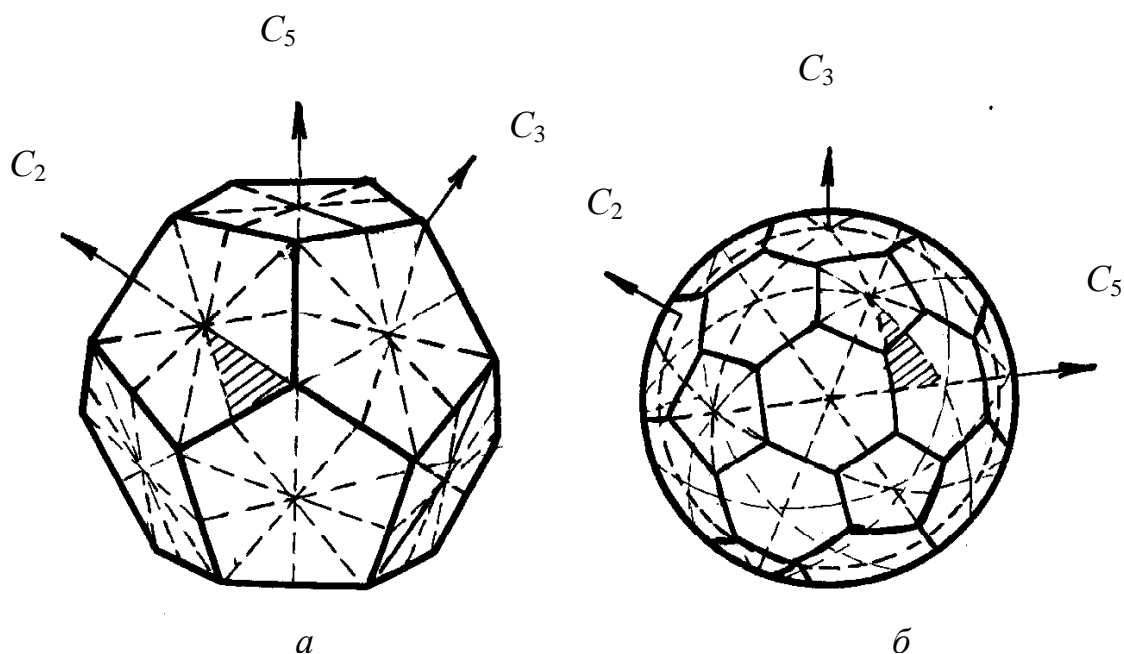
8. Повна симетрія октаедра  $O_h$  виходить із симетрії обертання октаедра  $O$  додаванням трьох площин відображення, нормальних до осей  $C_4$ , і шести діагональних площин відображення  $\sigma_D$ , кожна з яких проходить крізь медіани чотирьох граней. При цьому осі  $C_3$  перетворюються в осі  $S_6$ , а осі  $C_2$  – у  $S_2$ . Симетрія  $O_h$  дозволяє розбити тіло на 48 елементарних ячеек. Такий тип симетрії мають, наприклад, октаедр і куб (рис. 5.13).

Рис. 5.11. Повна симетрія тетраедра  $T_D$ Рис. 5.12. Симетрія  $T_h$ 

9. Повна симетрія ікосаедра  $Y_h$  виходить із симетрії обертання ікосаедра додаванням 15-ти площин відображення, які проходять крізь пари протилежних паралельних між собою ребер. Тіло із симетрією  $Y_h$  розбивається на 120 елементарних ячейки. Приклади тіл із симетрією  $Y_h$  показані на рис. 5.14.

Таким чином, всього існує 14 типів симетрії. Розрізняють тіла нижчої, середньої і вищої симетрії.

До *нижчої* симетрії відносяться тіла із симетрією  $C_n$ ,  $D_n$ ,  $S_n$ ,  $C_{nh}$ ,  $C_{nv}$ ,  $D_{nh}$ ,  $D_n$  при  $n \leq 5$ . Приклади таких тіл показані на рис. 5.1 a; 5.2 a; 5.6 a – 5.10 a.

Рис. 5.13. Повна симетрія октаедра  $O_h$ Рис. 5.14. Повна симетрія ікосаедра  $Y_h$ 

До *середньої* симетрії відносяться циклічні тіла. Їм відповідають типи симетрії  $C_n$ ,  $D_n$ ,  $S_n$ ,  $C_{nh}$ ,  $C_{nv}$ ,  $D_{nh}$ ,  $D_n$  при  $n \geq 3$ . Приклади таких тіл показані на рис. 5.1 б; 5.2 б; 5.6 б – 5.10 б.

Нарешті, до *вищої* симетрії відносяться тіла, які володіють симетрією правильних багатогранників. Вони мають кілька осей порядку  $n \geq 3$ . Їм відповідають типи симетрії  $T$ ,  $O$ ,  $Y$ ,  $T_D$ ,  $T_h$ ,  $O_h$ ,  $Y_h$ . Приклади таких тіл показані на рис. 5.3 – 5.5; 5.11 – 5.14.

### 5.1.3. Опис симетрій скінченних елементів

При розбитті об'єкта (деталі машини) на скінченні елементи, як це описано в третьому розділі, у деяких випадках можна говорити про взаємно симетричне

розташування цих елементів у межах об'єкта. Тоді використання симетрії при розрахунку деталі машини можна інтерпретувати як поділ початкової симетричної системи на незалежні підсистеми менших розмірів – *елементарні підсистеми*.

При довільних навантаженнях необхідно враховувати всі елементарні підсистеми. Для регулярних навантажень, наприклад, симетричних або кососиметричних щодо елементів симетрії, можна не враховувати деякі елементарні підсистеми.

Під кососиметричним розуміють навантаження, отримане відображенням щодо елемента симетрії і зміною його напрямку на протилежне.

Таким чином, якщо на скінченні елементи розбивається симетричне тіло, при його геометричному описі досить даних тільки про один елемент (або групу елементів – елементарну ячейку), а також про тип симетрії. При введенні в ЕОМ інформації, необхідної при рішенні задач з використанням методу скінченних елементів, крім координат вузлів елементарної ячейки використовують машинні коди типів симетрії. У цьому випадку нумерація елементарних ячеек і вибір системи координат визначаються типом симетрії і строго регламентовані.

Як приклад розглянемо інтерпретацію і кодування типів симетрії, застосовувані в САПР «ПАРСЕК», розробленій в Київському Укрнііпроектстальконструкції (табл. 5.2).

### *Симетрія $C_2$*

Симетрія  $C_2$  характеризується наявністю осі, при повороті навколо якої на кути кратні  $\pi$ , не можна відрізнити повернене положення тіла від початкового. Приклад тіла з таким видом симетрії наведений на рис. 5.15. Система із симетрією  $C_2$  розбивається на дві елементарні ячейки: нульову і першу (нульова на рис. 5.15 заштрихована).

*Система координат.* Загальна система координат вибирається таким чином: вісь  $X_3$  спрямована уздовж осі циклічної симетрії  $C_2$ , її позитивний напрямок вибирається так, щоб поворот від нульової ячейки до першої відбувався проти годинникової стрілки, якщо дивитися з боку позитивного напрямку осі  $X_3$ . Осі  $X_1$ ,  $X_2$  і початок координат довільні.

*Елементи симетрії та особливі вузли.* Елементом симетрії  $C_2$  є вісь циклічної симетрії  $C_2$ . Вузлам, що лежать на цій осі, присвоюється тип  $Z$ . Обмеження на закріплення цих вузлів не накладаються.

*Елементарні підсистеми.* Елементарних підсистем для даного типу симетрії дві: нульова і перша. Структура системи розв'язуючих рівнянь, наведеної до квазидіагонального виду, показана на рис. 5.16. Основні параметри симетрії  $C_2$  наведені в табл. 5.3.



## Перелік типів симетрії

Найменування типу симетрії	Загальноприйняті позначення	Кодування
Відсутність симетрії	$C_1$	$\cup\cup\cup$
Циклічна $C_2$	$C_2$	$\cup C2$
Циклічна $C_n$ ( $3 \leq n < \infty$ )	$C_n$	$\cup CN$
Дієдральна $D_1$	$D_1$	$\cup D1$
Дієдральна $D_2$	$D_2$	$\cup D2$
Дієдральна $D_n$ ( $3 \leq n < \infty$ )	$D_n$	$\cup DN$
Симетрія поворотів тетраедра	$T$	$\cup\cup T$
Симетрія поворотів октаедра	$O$	$\cup\cup O$
Симетрія поворотів ікосаедра	$Y$	$\cup\cup Y$
Інверсія $S_2$	$I(S_2)$	$\cup\cup I$
Дзеркальні повороти $S_4$	$S_4$	$\cup S4$
Дзеркальні повороти $S_{2n}$ ( $3 \leq n < \infty$ )	$S_{2n}$	$S2N$
Відображення в горизонтальній площині	$C_{1h}$	$C1H$
Поворот на $180^\circ$ з відображенням у горизонтальній площині	$C_{2h}$	$C2H$
Повороти з відображенням у горизонтальній площині	$C_{nh}$	$CNH$
Відображення у вертикальній площині	$C_{1v}$	$C1V$
Відображення в двох вертикальних площинах	$C_{2v}$	$C2V$
Циклічна із симетричною ячейкою	$C_{nv}$	$CNV$
Відображення в горизонтальній і вертикальній площинах	$D_{1h}$	$D1H$
Симетрія паралелепіпеда	$D_{2h}$	$D2H$
Циклічна з двічі симетричною ячейкою	$D_{nh}$	$DNH$
Поворот щодо осі $X_1$ з відображенням у площині $X_1 = 0$	$D_{1D}$	$D1D$
Відображення в двох вертикальних площинах із симетричною ячейкою	$D_{2D}$	$D2D$
Повна симетрія тетраедра	$T_D$	$\cup TD$
Повороти тетраедра з інверсією	$T_h$	$\cup TH$
Повна симетрія октаедра	$O_h$	$\cup OH$
Повна симетрія ікосаедра	$Y_h$	$\cup YH$

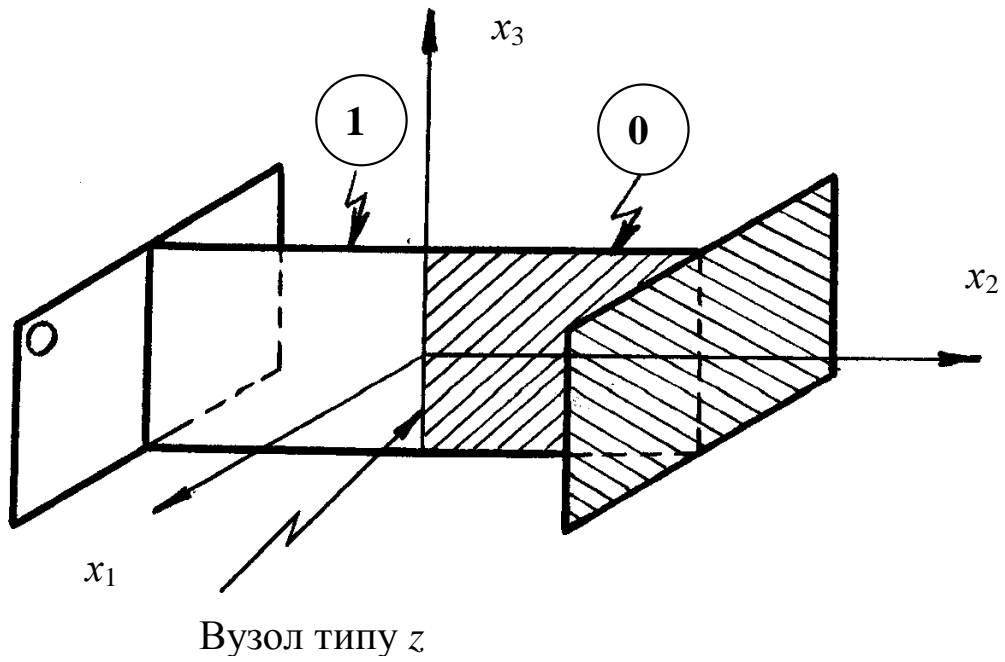


Рис. 5.15. Тіло, яке має симетрію  $C_2$

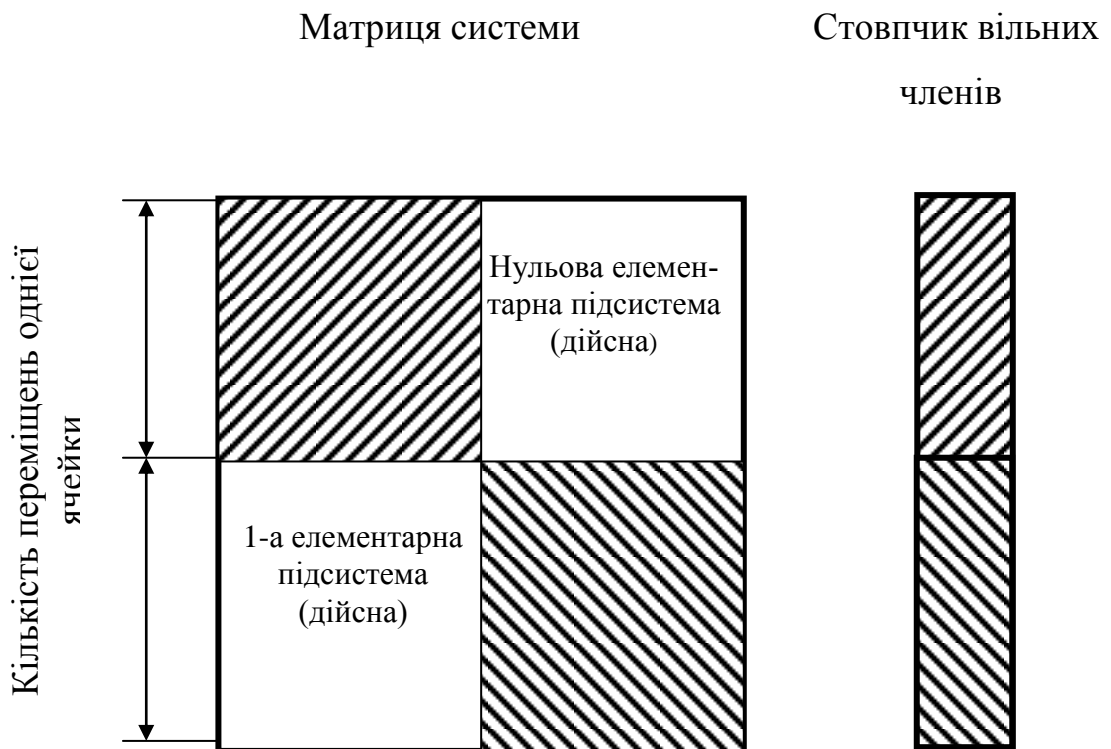


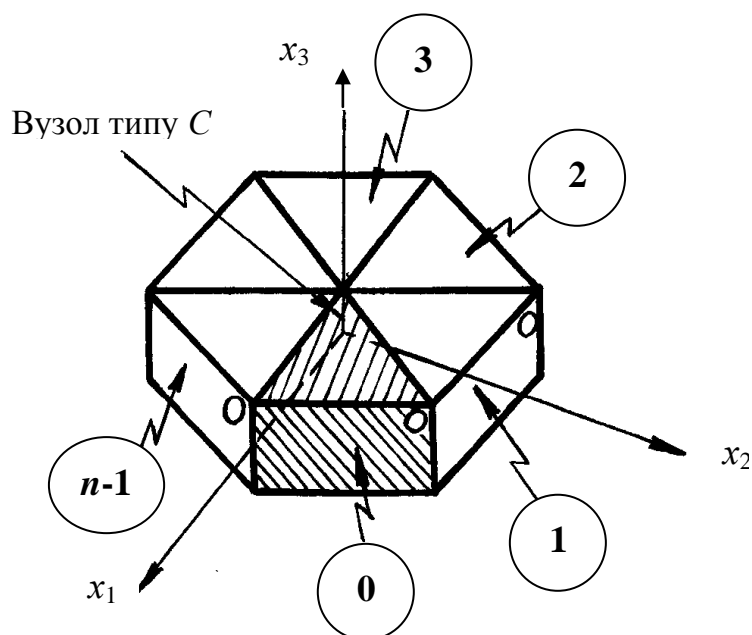
Рис. 5.16. Структура системи розв'язуючих рівнянь симетрії  $C_2$

Параметри симетрії  $C_2$ 

Тип симетрії	$C_2$
Рід симетрії	1
Кількість елементарних ячеек	2
Типи особливих вузлів	$Z$
Кількість елементарних підсистем	2

**Симетрія  $C_N$  ( $n \geq 3$ )**

Циклічна симетрія  $C_N$  характеризується наявністю осі, при повороті навколо якої на кути, кратні  $2\pi/n$ , не можна відрізнити повернене положення тіла від початкового. Приклад тіла з таким видом симетрії наведений на рис. 5.16. Симетрія  $C_N$  відноситься до симетрії I роду. Система із симетрією  $C_N$  розбивається на  $n$  елементарних ячеек. Нумерація ячеек показана на рис. 5.17, нульова ячейка на рисунку заштрихована.

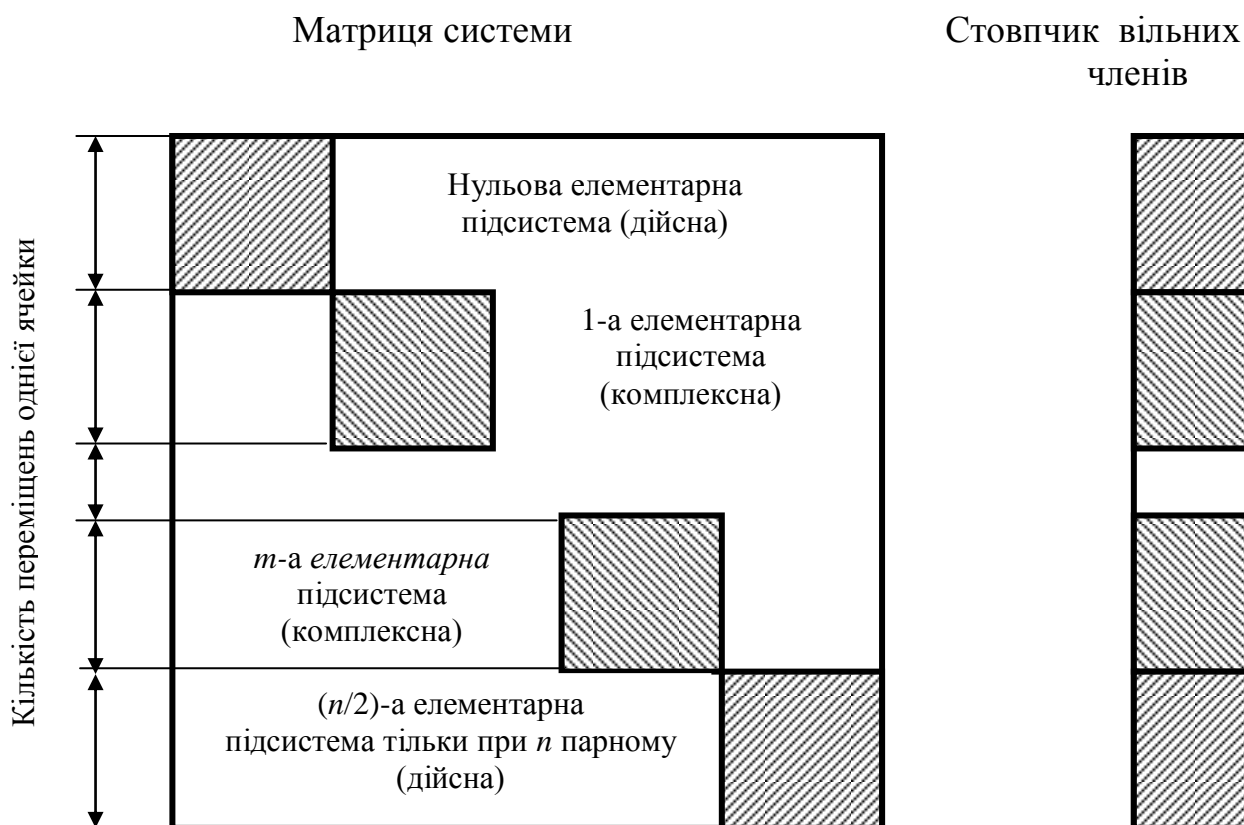
Рис. 5.17. Тіло, яке має симетрію  $C_N$ 

*Система координат.* Загальна система координат вибирається таким чином: вісь  $X_3$  спрямована уздовж осі циклічної симетрії  $C_n$ , її позитивний напрямок вибирається так, щоб зростання номерів елементарних ячеек відбувалося проти годинникової стрілки, якщо дивитися з боку позитивного напрямку осі  $X_3$ . Осі  $X_1, X_2$  і початок координат довільні.

*Елементи симетрії та особливі вузли.* Елементом симетрії  $C_N$  є вісь циклічної симетрії  $C_n$ . Вузлам, які лежать на цій осі, присвоюється тип  $Z$ . Коди закріплення вузлів типу  $Z$  не можуть бути довільними, оскільки на них накладається обмеження: якщо для вузла такого типу накладається зв'язок на перемі-

щення (лінійне чи кутове з вектором уздовж осі  $X_1$ ), то відповідний зв'язок повинен накладатися і на напрямку  $X_2$ , і навпаки.

*Елементарні підсистеми.* Елементарних підсистем для даного типу симетрії  $(n+2)/2$  при  $n$  парному і  $(n+1)/2$  при  $n$  непарному. Структура системи розв'язуючих рівнянь, яка наведена до квазідіагонального виду, показана на рис. 5.18. Основні параметри симетрії  $CN$  наведені в табл. 5.4.



$$m = \begin{cases} \frac{n}{2} - 1 & \text{при } n \text{ парному} \\ \frac{n-1}{2} & \text{при } n \text{ непарному} \end{cases}$$

Рис. 5.18. Структура системи розв'язуючих рівнянь симетрії  $CN$

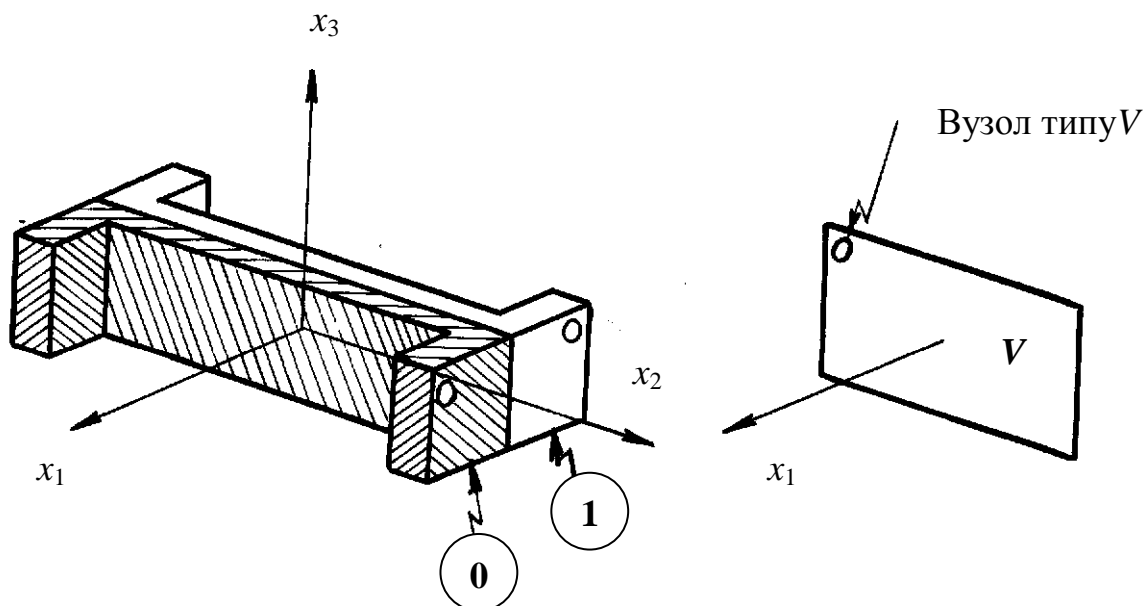
Таблиця 5.4

Параметри симетрії  $CN$

Тип симетрії	$CN$
Рід симетрії	1
Кількість елементарних ячеек	$n(n \geq 3)$
Типи особливих вузлів	$Z$
Кількість елементарних підсистем	$(n+2)/2$ при $n$ парному $(n+1)/2$ при $n$ непарному

Симетрія  $C1V$ 

Симетрія  $C1V$  характеризується наявністю однієї площини відображення  $V$ . Приклад тіла з таким видом симетрії наведений на рис. 5.19. Симетрія відноситься до симетрії II роду. Нумерація ячеек довільна.

Рис. 5.19. Тіло, яке має симетрію  $C1V$ 

*Система координат.* Загальна система координат  $X_1X_2X_3$  вибирається таким чином: вісь  $X_1$  нормальна до площини відображення, початок координат лежить у площині відображення, осі  $X_2$  і  $X_3$  довільні.

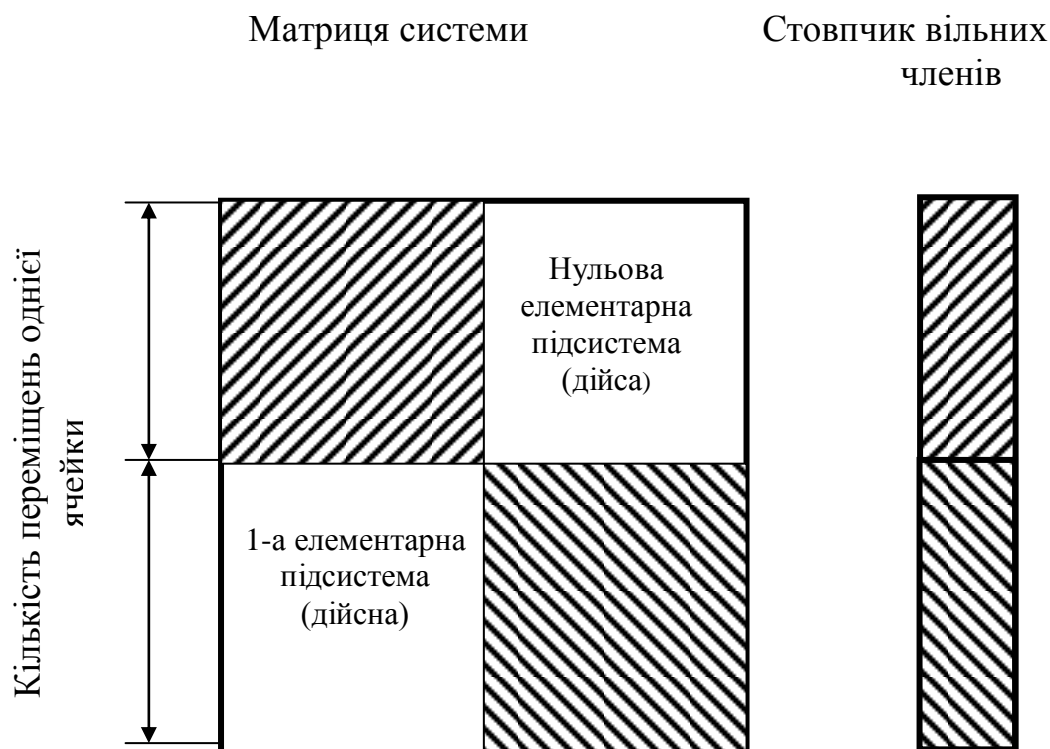
*Елементи симетрії та особливі вузли.* Елементом симетрії даного типу є площина відображення. Вузлам, які лежать на цій площині, присвоюється тип  $V$ . Обмеження на закріплення вузлів типу  $V$  не накладаються.

*Елементарні підсистеми.* Елементарних підсистем для симетрії  $C1V$  дві: нульова і перша. Структура системи розв'язуючих рівнянь, які наведені до квазідіагонального виду, показана на рис. 5.20. Основні параметри симетрії  $C1V$  наведені в табл. 5.5.

Таблиця 5.5

Параметри симетрії  $C1V$ 

Тип симетрії	$C1V$
Рід симетрії	2
Кількість елементарних ячеек	2
Типи особливих вузлів	$V$
Кількість елементарних підсистем	2

Рис. 5.20. Структура системи розв'язуючих рівнянь симетрії  $C1V$ 

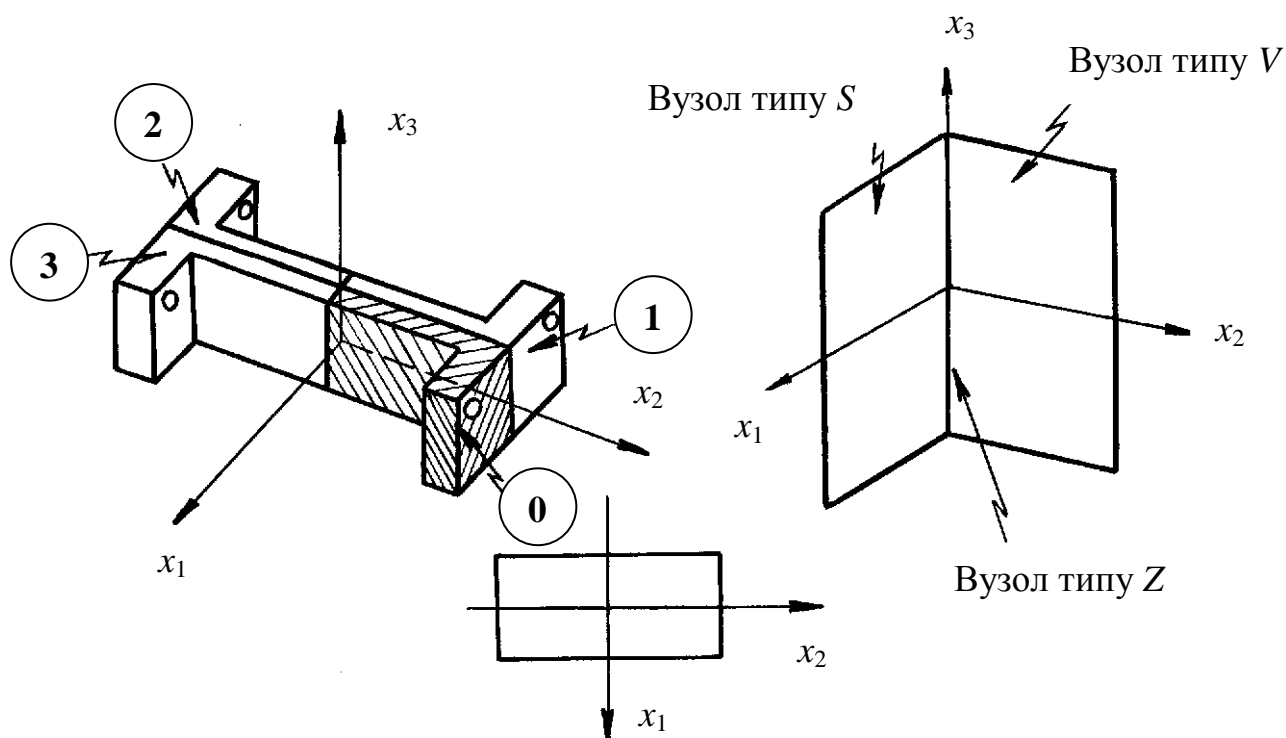
### *Симетрія $C2V$*

Симетрія  $C2V$  характеризується наявністю двох ортогональних вертикальних площин відображення  $S$ ,  $V$  і осі  $C$ , при повороті навколо яких на кут  $\pi$  система збігається сама із собою. Приклад тіла з таким видом симетрії наведений на рис. 5.21.

Симетрія  $C2V$  відноситься до симетрії другого роду. Ця система розбивається на 4 елементарні ячейки. Нумерація ячеек показана на рис. 5.21, нульова ячейка на рисунку заштрихована. Нумерація ячеек виконана так, що при відображеннях парність номерів ячеек, що міняються місцями, змінюється на протилежну.

*Система координат.* Загальна система координат. Загальна система координат  $X_1X_2X_3$  має: вісь  $X_1$ , перпендикулярну площині відображення  $V$ , вісь  $X_2$ , перпендикулярну площині відображення  $S$ , вісь  $X_3$ , що збігається з віссю  $C$ . Напрямок осей вибирається так, щоб осі  $X_1$ ,  $X_2$  і  $X_3$  утворювали праву трійку. Початок координат довільний.

*Елементи симетрії та особливі вузли.* Система із симетрією  $C2V$  характеризується наявністю трьох елементів симетрії: площини відображення  $V$ , площини відображення  $S$  і поворотної осі 2-го порядку  $S$ , що збігається з віссю  $X_3$ . Особливим вузлам, які лежать на площині  $V$ , присвоюється тип  $V$ , на площині  $S$  – тип  $S$ , на осі  $C$  – тип  $Z$ .

Рис. 5.21. Тіло, яке має симетрію  $C2V$ 

Коди закріплення вузлів типу  $Z$  не можуть бути довільними, оскільки з умов симетрії на них накладається обмеження: якщо для вузла такого типу накладається зв'язок на переміщення (лінійне або кутове) уздовж осі  $X_1$ , то відповідний зв'язок повинен накладатися та у напрямку  $X_2$ , і навпаки. Для вузлів типу  $V$  і  $S$  обмеження на закріплення вузлів не накладаються.

*Елементарні підсистеми.* Елементарних підсистем для симетрії даного виду чотири.

Структура системи розв'язуючих рівнянь, яка наведена до квазідіагонального виду, показана на рис. 5.22. Основні параметри симетрії  $C2V$  наведені в табл. 5.6.

Таблиця 5.6

Параметри симетрії  $C2V$ 

Тип симетрії	$C2V$
Рід симетрії	2
Кількість елементарних ячеек	4
Типи особливих вузлів	$V, S, Z$
Кількість елементарних підсистем	4

Рис. 5.22. Структура системи розв'язуючих рівнянь симетрії  $C_{2V}$ 

### Симетрія $C_{NV}$ ( $n \geq 3$ )

Циклічна симетрія із симетричною гранню  $C_{NV}$  характеризується наявністю елементів симетрії, при відображенні щодо яких тіло збігається саме із собою: поворотної осі  $C_n$  при повороті на кути, кратні  $2\pi/n$ , і  $n$  площин відображення, що проходять крізь вісь  $C_n$ .

Система із симетрією  $C_{NV}$  розбивається на  $2n$  елементарних ячеек. Нумерація ячеек показана на рис. 5.23.

Нульова ячейка на рисунку заштрихована. Нумерація ячеек виконана так, що при відображеннях парність номерів ячеек, що міняються місцями, змінюється на протилежну.

*Система координат.* Загальна система координат  $X_1X_2X_3$ : вісь  $X_3$  направлена уздовж осі циклічної симетрії  $C_n$ , її позитивний напрямок вибирається так, щоб зростання номерів елементарних ячеек відбувалося проти годинникової стрілки, якщо дивитися з боку позитивного напрямку осі  $X_3$ .

Вісь  $X_1$  лежить у площині відображення, початок координат вибирається довільно.

*Елементи симетрії та особливі вузли.* Елементами симетрії  $C_{NV}$  є вісь циклічної симетрії  $C_n$  і  $n$  площин відображення. Особливим вузлом, що лежать на площині відображення  $S$  ( $X_2=0$ ), присвоюється тип  $S$ , на площині відображення  $V$  (рис. 5.23) – тип  $V$ , на осі  $C_n$  – тип  $Z$ .

Коди закріплення вузлів типу  $V$  і  $Z$  не можуть бути довільними, оскільки з умов симетрії на них накладається обмеження: якщо для цих типів вузлів вводиться обмеження на переміщення (лінійне або кутове) уздовж осі  $X_1$ , то відповідний зв'язок повинен накладатися та у напрямку  $X_2$ , і навпаки.



*Елементарні підсистеми.* Кількість елементарних підсистем для симетрії  $CNV$  дорівнює  $n/2+3$  при  $n$  парному і  $(n+3)/2$  при  $n$  непарному.

Структура системи розв'язуючих рівнянь, які наведені до квазідіагонального виду, показана на рис. 5.24. Основні параметри симетрії  $CNV$  наведені в табл. 5.7.

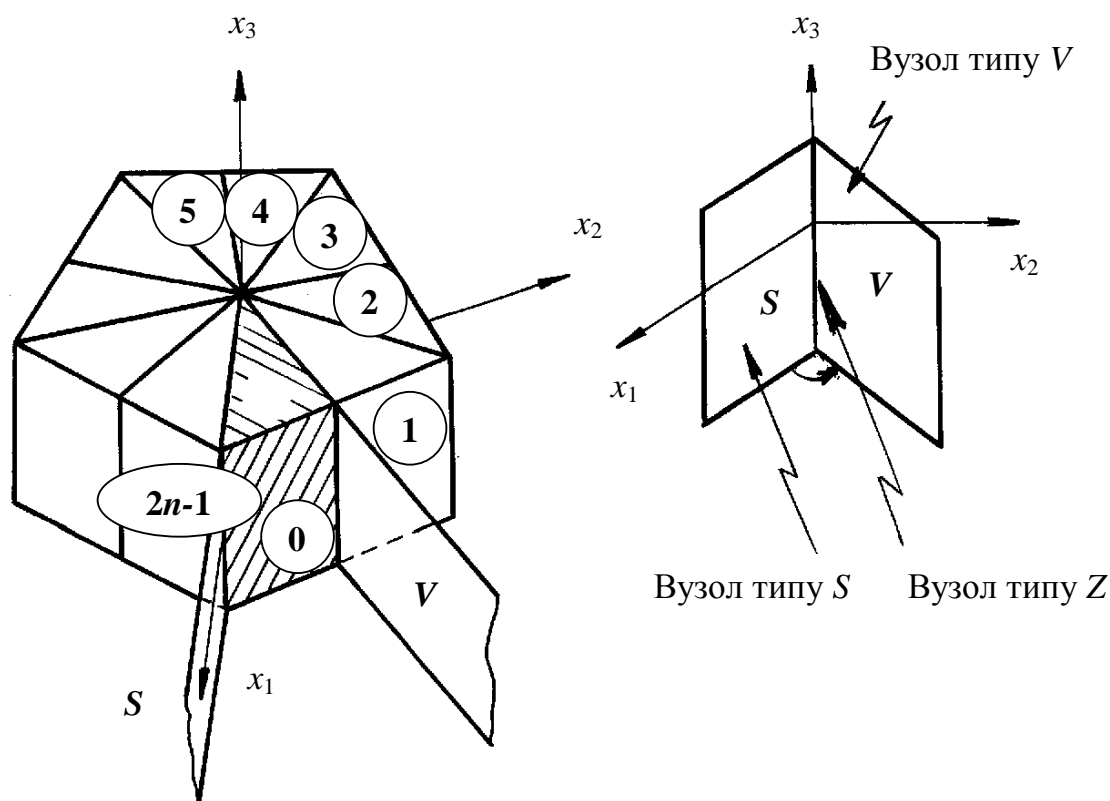


Рис. 5.23. Тіло, яке має симетрію  $CNV$

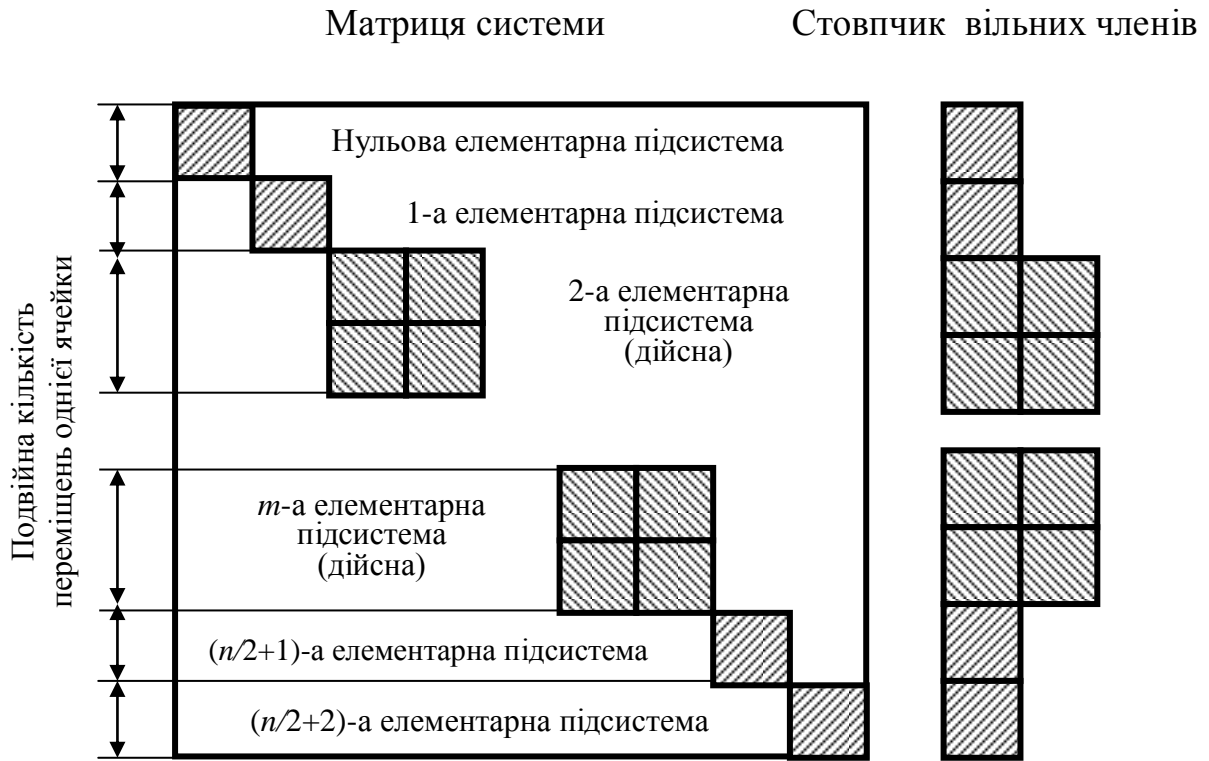
Таблиця 5.7

Параметри симетрії  $CNV$

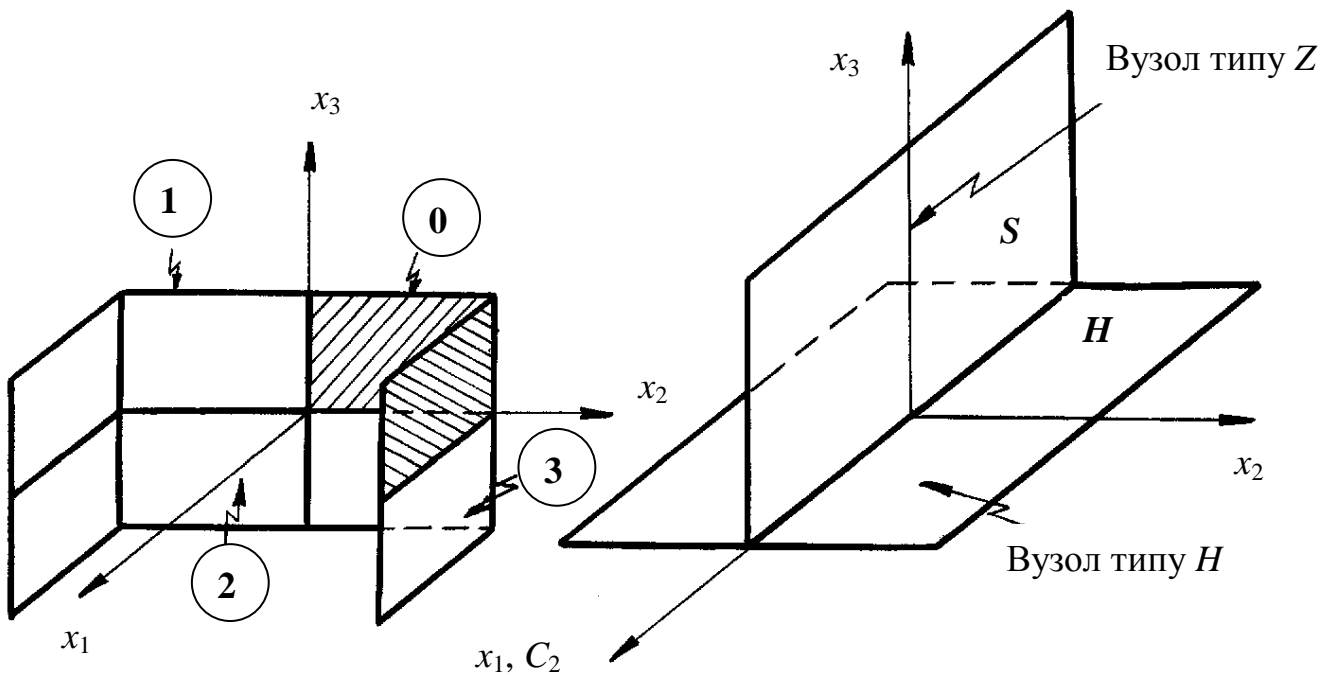
Тип симетрії	$CNV(n \geq 3)$
Рід симетрії	2
Кількість елементарних ячеек	$2n$
Типи особливих вузлів	$S, V, Z$
Кількість елементарних підсистем	$n/2+3$ при $n$ парному $(n+3)/2$ при $n$ непарному

### Симетрія $D1H$

Симетрія  $D1H$  характеризується наявністю двох ортогональних площин відображення (горизонтальної і вертикальної) і поворотної осі другого порядку  $C_2$ . При відображенні щодо цих площин або при повороті навколо осі  $C_2$  на кут  $\pi$  система збігається сама із собою.

Рис. 5.24. Структура системи розв'язуючих рівнянь симетрії  $CNV$ 

Приклад тіла з таким видом симетрії наведений на рис. 5.25. Симетрія  $D1H$  відноситься до симетрії II роду. Система із симетрією  $D1H$  розбивається на 4 елементарні ячейки. Нумерація ячеек показана на рис. 5.25, нульова ячейка на рисунку заштрихована. Нумерація виконана так, що при відображенні парність номерів ячеек, що міняються місцями, змінюється на протилежну.

Рис. 5.25. Тіло, яке має симетрію  $D1H$

*Система координат.* Загальна система координат  $X_1X_2X_3$ : вісь  $X_1$  збігається з віссю  $C_2$ , вісь  $X_2$  лежить у горизонтальній площині, вісь  $X_3$  – у вертикальній. Напрямок осей вибирається так, щоб осі  $X_1$ ,  $X_2$  і  $X_3$  утворювали праву трійку. Початок координат довільний.

*Елементи симетрії та особливі вузли.* Система із симетрією  $D1H$  характеризується наявністю трьох елементів симетрії: вертикальної площини відображення  $S$  ( $X_2 = 0$ ); горизонтальної площини відображення  $H$  ( $X_3 = 0$ ) і поворотної осі 2-го порядку  $C_2$ , що збігається з віссю  $X_1$ .

Особливим вузлам, які лежать на площині  $S$ , присвоюється тип  $S$ , на площині  $H$  – тип  $H$ , на осі  $C_2$  – тип  $X$ . Обмеження на закріплення особливих вузлів не накладаються.

*Елементарні підсистеми.* Елементарних підсистем для симетрії даного виду чотири. Структура системи розв'язуючих рівнянь, яка наведена до квазидіагонального виду, показана на рис. 5.26. Основні параметри симетрії  $D1H$  наведені в табл. 5.8.

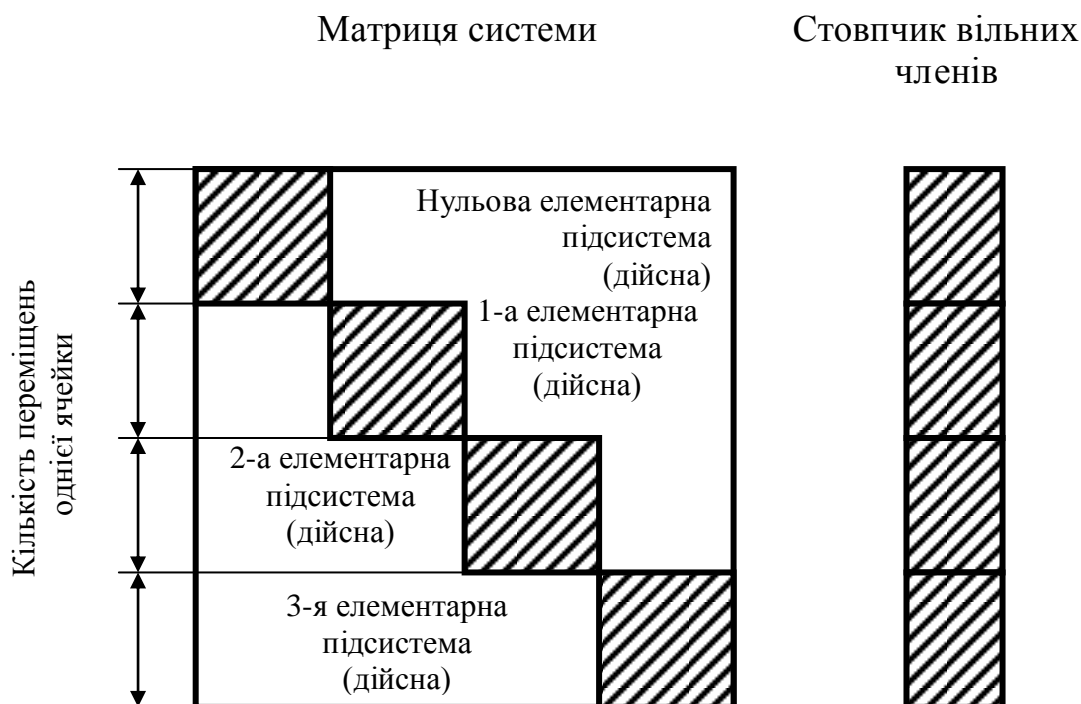


Рис. 5.26. Структура системи розв'язуючих рівнянь симетрії  $D1H$

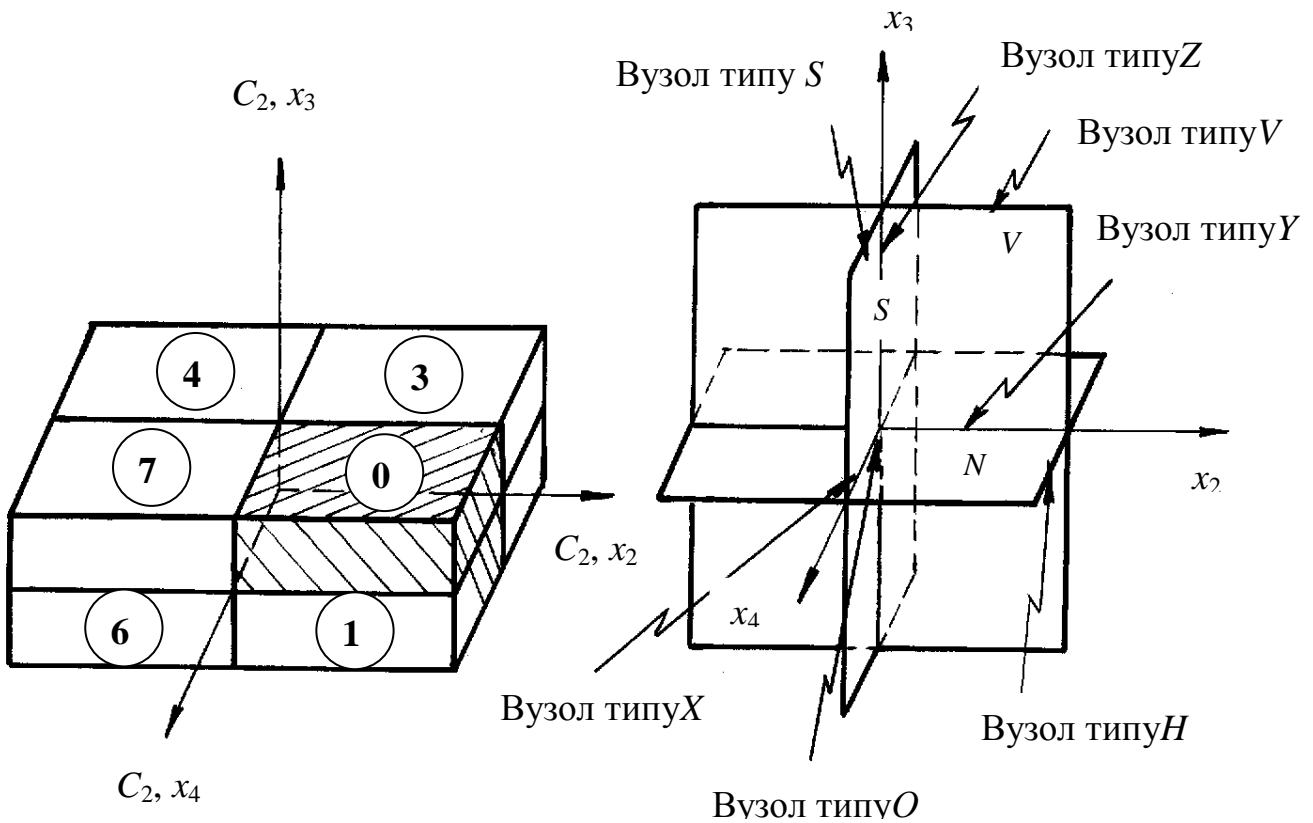
Таблиця 5.8

Параметри симетрії  $D1H$

Тип симетрії	$D1H$
Рід симетрії	2
Кількість елементарних ячеек	4
Типи особливих вузлів	$S, H, Z$
Кількість елементарних підсистем	4

Симетрія  $D2H$ 

Симетрія  $D2H$  характеризується наявністю трьох взаємно перпендикулярних площин відображення. Приклад тіла з таким видом симетрії наведений на рис. 5.27. Симетрія  $D2H$  відноситься до симетрії II роду. Система із симетрією  $D2H$  розбивається на 8 ячеек. Нумерація ячеек показана на рис. 5.27, нульова ячейка на рисунку заштрихована.

Рис. 5.27. Тіло, яке має симетрію  $D2H$ 

*Система координат.* Загальна система координат: осі  $X_1$ ,  $X_2$  і  $X_3$  спрямовані уздовж ліній перетинання площин відображення, початок координат збігається з точкою перетину площин відображення. Взаємне розташування координатних осей і нульової ячейки наведено на рис. 5.27.

*Елементи симетрії та особливі вузли.* Система із симетрією  $D2H$  характеризується наявністю 7 елементів симетрії: площин відображення  $S$  ( $X_2 = 0$ ),  $V$  ( $X_1 = 0$ ) і  $H$  ( $X_3 = 0$ ); поворотних осей 2-го порядку, що збігаються з осями  $X_1$ ,  $X_2$  і  $X_3$ , а також центра симетрії, що збігається з початком координат.

Особливим вузлам, які лежать на площині  $S$ , присвоюється тип  $S$ , на площині  $V$  – тип  $V$ , на площині  $H$  – тип  $H$ . Особливі вузли, які лежать на осі  $X_1$ , мають тип  $X$ , на осі  $X_2$  – тип  $Y$ , на осі  $X_3$  – тип  $Z$ . Вузлу, який лежить у центрі симетрії, присвоюється тип  $O$ . На закріплення особливих вузлів симетрії  $D2H$  обмеження не накладаються.

*Елементарні підсистеми.* Кількість елементарних підсистем для симетрії

$D2H$  дорівнює 8. Структура системи розв'язуючих рівнянь, яка наведена до квазидіагонального виду, показана на рис. 5.28. Основні параметри симетрії  $D2H$  наведені в табл. 5.9.

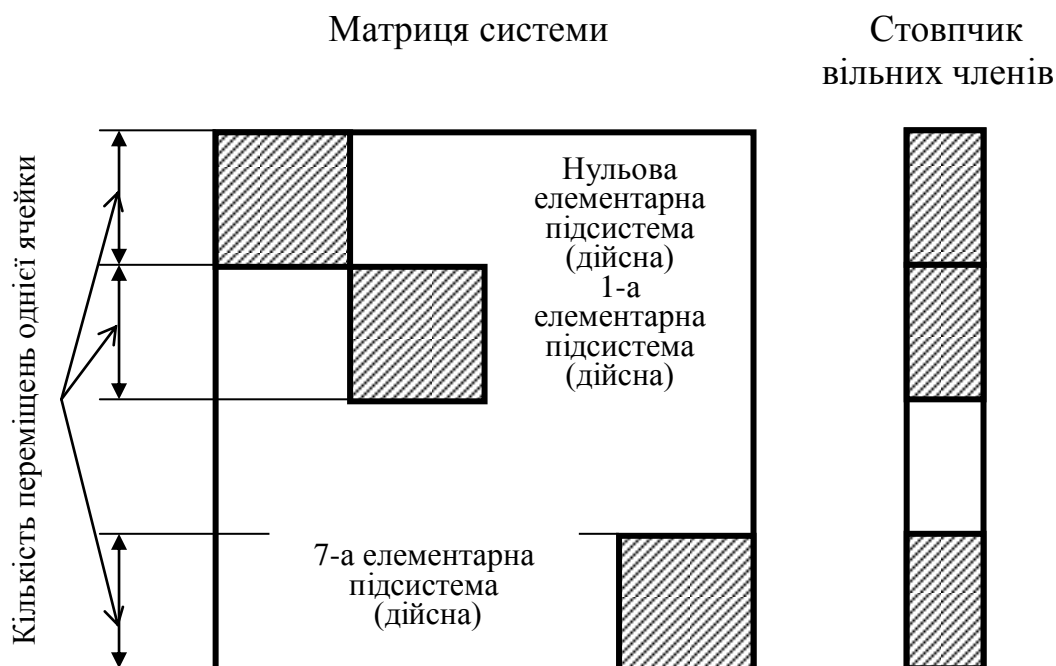


Рис. 5.28. Структура системи розв'язуючих рівнянь симетрії  $D2H$

Таблиця 5.9

Параметри симетрії  $D2H$

Тип симетрії	$D2H$
Рід симетрії	2
Кількість елементарних ячеек	8
Типи особливих вузлів	$S, V, H, X, Y, Z, O$
Кількість елементарних підсистем	4

### Симетрія $DNH$

Циклічна з двічі симетричною гранню симетрія  $DNH$  характеризується наявністю таких елементів симетрії, при відображенні щодо яких тіло збігається саме із собою: осі  $C_n$  (при повороті на кути, кратні  $2\pi/n$ );  $n$  осей  $C_2$ , перпендикулярних до осі  $C_n$ , (при повороті на кут  $\pi$ );  $n$  площин відображення, кожна з яких проходить крізь одну з осей другого порядку і вісь  $C_n$ ; площини відображення, перпендикулярної до осі  $C_n$  і яка проходить крізь осі  $C_2$ , і центра симетрії  $O$ , що знаходиться на перетинанні осі  $C_n$  і перпендикулярної до неї площини відображення. Приклад тіла з таким видом симетрії наведений на рис. 5.29.

Симетрія відноситься до симетрії II роду. Система із симетрією  $DNH$  розбивається на  $4n$  елементарних ячеек. Нумерація ячеек показана на рис. 5.29,

нульова ячейка на рисунку заштрихована. Нумерація ячеек виконана так, що при відображеннях парність номерів ячеек, які міняються місцями, змінюється на протилежну.

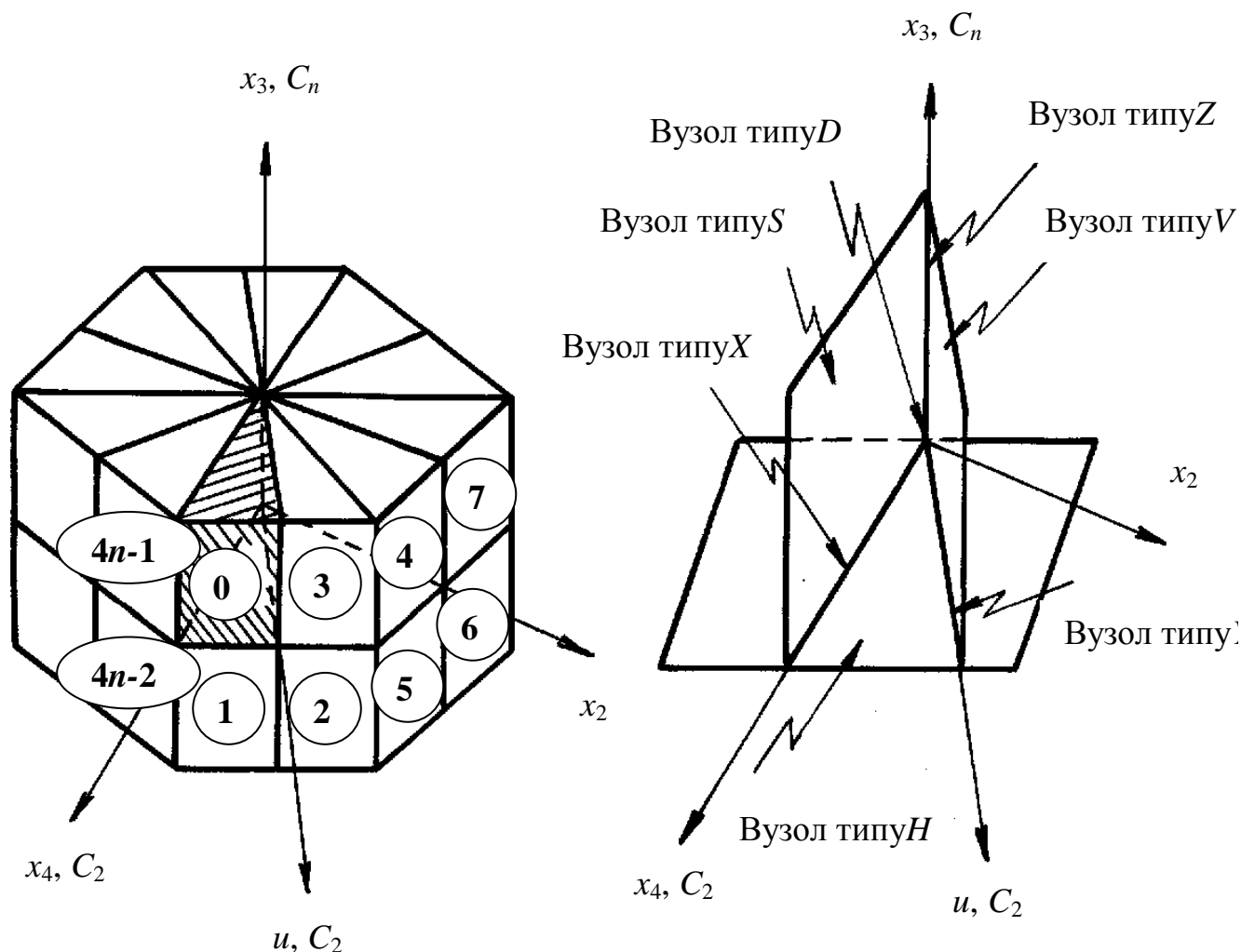


Рис. 5.29. Тіло, яке має симетрію  $D_{nh}$

*Система координат.* Загальна система координат  $X_1X_2X_3$ : вісь  $X_3$  направлена уздовж осі циклічної симетрії  $C_n$ , її позитивний напрямок вибирається так, щоб зростання номерів елементарних ячеек відбувалося проти годинникової стрілки, якщо дивитися з боку позитивного напрямку осі  $X_3$ . Вісь  $X_1$  збігається з однією з осей  $C_2$ .

Початок координат збігається з центром симетрії  $O$ . Взаємне розташування нульової ячейки і системи координат наведено на рис. 5.29.

*Елементи симетрії та особливі вузли.* Елементами симетрії, які належать нульовій ячейці є: вісь циклічної симетрії  $C_n$ , що співпадає з віссю  $X_3$ ; вісь другого порядку, що співпадає з віссю  $X_1$ ; вісь другого порядку  $u_1$ , що повернена від осі  $X_1$  у бік осі  $X_2$  на кут  $\pi/n$ ; площина відображення  $S$ , що проходить крізь осі  $X_1$  і  $X_3$ ; площина відображення  $V$ , що проходить крізь осі  $u_1$  і  $X_3$ ; площина відображення  $H$ , перпендикулярна осі  $C_n$ , і центр симетрії  $O$ .

Особливим вузлам, що лежать на осі  $X_1$ , присвоюється тип  $X$ , на осі  $u$  – тип  $Y$ , на осі  $X_3$  – тип  $Z$ .

Особливі вузли, що лежать у площині  $S$ , мають тип  $S$ , у площині  $V$  – тип  $V$ , у площині  $H$  – тип  $H$ . Вузлу, що лежить на початку координат, присвоюється тип  $O$ . Коди закріплення вузлів типу  $Z$ ,  $Y$ ,  $V$ ,  $O$  не можуть бути довільними, оскільки з умов симетрії на них накладаються обмеження: якщо для цих типів вузлів вводиться обмеження на переміщення (лінійне або кутове) уздовж осі  $X_1$ , то відповідний зв'язок повинен накладатися у напрямку  $X_2$ , і навпаки.

*Елементарні підсистеми.* Кількість елементарних підсистем для симетрії  $DNH$  дорівнює  $n+6$  при  $n$  – парному і  $n+3$  при  $n$  – непарному.

Структура системи розв'язуючих рівнянь, яка приведена до квазидіагонального виду, показана на рис. 5.30. Основні параметри симетрії  $DNH$  наведені в табл. 5.10.

Таблиця 5.10

Параметри симетрії  $DNH$ 

Тип симетрії	$DNH(n \geq 3)$
Рід симетрії	2
Кількість елементарних ячеек	$2n$
Типи особливих вузлів	$X, Y, Z, S, V, H, O$
Кількість елементарних підсистем	$n+6$ при $n$ парному $n+3$ при $n$ непарному

## 5.2. Принцип суперпозиції

### 5.2.1. Загальні положення

Перелічені в попередньому розділі основні параметри принципу симетрії відносяться, головним чином, до конфігурації об'єкта проектування, тобто до його геометричних характеристик. У той же час, цей, а також інші принципи покладені в основу врахування взаємного розташування та інших властивостей *зовнішніх джерел* впливу на об'єкт: сил, моментів, тиску, тепла тощо. У цій області найважливішим чинником методології розв'язання задач проектування служить *принцип суперпозиції (накладення)*. Розрізняють принципи елементарної суперпозиції (ПЕС) і складної суперпозиції (ПСС).

ПЕС може бути сформульований таким чином. Якщо дії окремих джерел зовнішнього впливу, розташованих на поверхні тіла або всередині нього, не залежать одна від одної, то можна розглядати дію кожного джерела окремо, а кінцевий ефект знаходити, складаючи алгебраїчно дії всіх джерел. Крім того, можна і дію окремого джерела розглядати як суму дій будь-якої комбінації джерел, розташованих у тому ж місці і тієї ж сумарної інтенсивності, що і початкове джерело.

Стовпчик вільних членів

Матриця системи

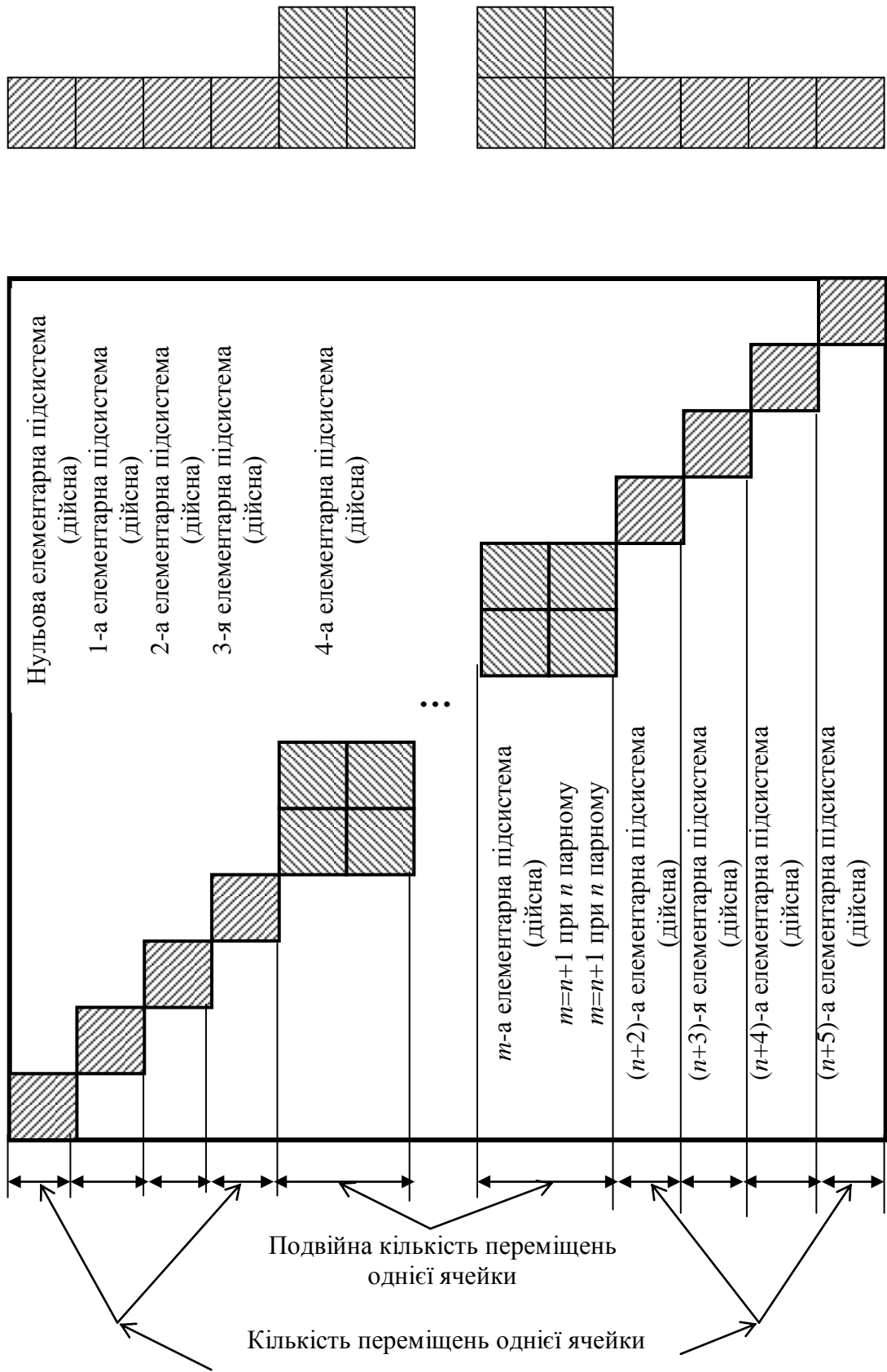


Рис. 5.30. Структура системи розв'язуючих рівнянь симетрії  $DNH$



Розглянемо приклад з теплофізики. Поширення тепла у твердих тілах описується, як відомо, диференціальним рівнянням Фур'є, в яке входять незалежні змінні (аргументи) – час і координати і залежна змінна (функція) – температура. Крім того, у рівняння Фур'є входять: густина тіла  $\rho$ , об'ємна теплоємність  $c$ , коефіцієнт теплопровідності  $\lambda$ , інтенсивність об'ємно-розподілених джерел тепла  $q$ . Значення останніх величин можуть бути постійними або залежати від координат, часу і температури тіла.

ПЕС може застосовуватися у всіх випадках, коли граничні умови, внутрішні джерела і теплофізичні характеристики не залежать від температури тіла, тобто не тільки, коли граничні умови, а також  $c$ ,  $\rho$ ,  $\lambda$ ,  $a$  і  $q$  постійні, але і коли вони залежать від координат і (або) від часу.

Навпаки, ПЕС не може застосовуватися у випадку, якщо будь-які умови вирішення задачі (умови однозначності) істотно залежать від температури. Отже, ПЕС не застосовується, коли в розглянутому діапазоні зміни температури не можуть бути прийняті незалежними від температури параметри:

- теплофізичні характеристики тіла  $\lambda$ ,  $c$ ,  $\rho$  (тому, зокрема, відповідають всі задачі зі зміною агрегатного стану);
- інтенсивність об'ємно-розподілених джерел тепла;
- інтенсивність зосереджених джерел тепла всередині тіла;
- інтенсивність температури джерел тепла на поверхні тіла,
- умови теплообміну на поверхні тіла (коефіцієнт тепловіддачі  $\alpha$ );
- геометричні розміри тіла.

У перелічених випадках не можна безпосередньо складати дії окремих джерел, оскільки диференціальне рівняння Фур'є стає нелінійним.

Тепер візьмемо приклад з механіки. Розглянемо зв'язок між деформацією пружини  $\Delta l$  і прикладеною силою  $P$ . Якщо залежність між силою (аргументом) і деформацією (функцією) прямолінійна, то можна стверджувати, що коли сила  $P_1$ , викликає деформацію  $\Delta l_1$ , а сила  $P_2$  — деформацію  $\Delta l_2$ , то сила  $P_1 + P_2$  викликає деформацію  $\Delta l_1 + \Delta l_2$ . Це означає, що збільшення деформації залежить лише від збільшення сили і не залежить від того, чи навантажена пружина чи ні. Тут можна застосовувати ПЕС.

Якщо, навпаки, залежність  $\Delta l = f(P)$  не прямолінійна, то очевидно, що результат дії сили  $P = P_1 + P_2$  не дорівнює сумі дій  $P_1$  і  $P_2$  окремо, оскільки деформація, викликана прикладенням сили  $P_2$ , залежить від того, діє вже сила  $P_1$  чи ні. У цьому випадку ПЕС застосовувати не можна через фізико-механічні властивості пружини – вони нелінійні.

Існуючі методи чисельного аналізу напружено-деформованого стану механічних систем припускають лінійну залежність величини деформації від прикладених навантажень у пружній області, або, що те ж саме, сталість характеристик пружності досліджуваних матеріалів. Однак у даний час інженерам і науковцям все частіше доводиться зіштовхуватися з нелінійними динамічними процесами. Наявність нелінійностей призводить на практиці до несподіваних явищ, які принципово змінюють результати виконаних розрахунків реальних

динамічних характеристик об'єкта.

Нелінійність деформації металевих конструкцій у пружній області пов'язана з залежністю пружних характеристик не тільки від природи матеріалу, але і від інших параметрів формування НДС системи (навантажень, температур тощо), а також від порушення суцільності матеріалу в процесі деформації (розвитку мікро- і макротріщин). Математичне моделювання нелінійних статичних і динамічних систем створює великі методичні і обчислювальні труднощі. У багатьох випадках динаміка нелінійних систем може бути описана за допомогою сплайнів – ряду лінійних диференціальних рівнянь з різними коефіцієнтами на різних ділянках процесу, обмежених певними розмірами шуканої змінної. У найпростішому випадку це виражається у вигляді нелінійної статичної характеристики, складеної з відрізків прямих. Тоді для одержання точного рішення досить вирішити ці лінійні рівняння окремо на кожній ділянці і узгодити між собою значення змінної та її похідних наприкінці попередньої і на початку наступної ділянок.

Розглянемо природу таких нелінійностей. Механізм пружної деформації металів полягає в оборотних зсувах атомів з положення рівноваги в кристалічних решітках. Фізичний зміст модулів пружності полягає в тому, що вони характеризують опір металів пружній деформації, тобто зсуву атомів з положення рівноваги. Під час відсутності напружень атоми металів коливаються щодо рівноважних положень. Сила взаємодії між двома сусідніми атомами складається із сил притягання між позитивними іонами та електронами, з одного боку, і сил відштовхування між іонами за рахунок деформації їхніх електронних оболонок, з іншого. На схемі розподілу сил відштовхування (крива 1) і притягання (крива 2) у функції відстані між атомами (рис. 5.31) видно, що при зближенні атомів сили відштовхування спочатку повільно, а потім, при перекритті електронних оболонок, швидко зростають.

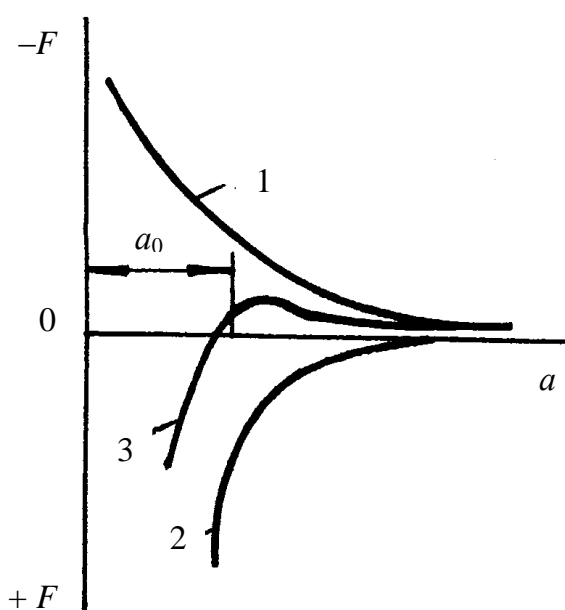


Рис. 5.31. Схема розподілу сил взаємодії між сусідніми атомами

Сили притягання, природно, плавно зменшуються в міру збільшення міжатомної відстані. Результируюча сила (крива 3) стає нульовою на деякій відстані  $a_0$ , що відповідає рівноважному положенню атомів.

Тангенс кута нахилу цієї ділянки кривої 3 поблизу  $a_0$  характеризує інтенсивність приросту напруження, необхідного для пружного зсуву атомів з положень рівноваги, тобто модуль пружності  $E$ . Як видно з малюнка, у точці  $a_0$  має місце перетинання осі з істотно непрямолінійною ділянкою кривої, з чого випливає, що пружні властивості матеріалів повинні залежати від величини напруження в ньому так само, як його теплофізичні властивості залежать від температури. Узагальнений закон Гука виглядає відносно просто для ізотропного тіла. Однак метали мають кристалічну структуру і є тілами анізотропними.

Зокрема, їхні пружні властивості в різних кристалографічних напрямках не однакові. Для анізотропного тіла узагальнений закон Гука істотно ускладнюється: він відбиває пряму пропорційність між кожним компонентом тензора деформацій і всіма шістьма незалежними компонентами тензора напружень.

Модулі пружності металів – структурно малочутливі властивості. Наприклад, розмір зерна майже не впливає на них, а сильна холодна деформація лише небагато (на 1 %) знижує модулі, що зв'язують із впливом залишкових мікронапружень, які виникають при наклепі.

Однак при легуванні металів елементами, які утворюють тверді розчини, модулі пружності змінюються за законом, близьким до лінійного, причому можуть і збільшуватися, і зменшуватися. Модуль пружності твердих розчинів підвищується в тих випадках, коли сили зв'язку розчинених атомів і атомів основи більше, ніж у чистому металі, і навпаки. Спотворення решіток навколо розчинених атомів сприяють зниженню модулів. Якщо при легуванні утворюється друга фаза з власним модулем пружності, більшим, ніж основний, то в цьому випадку модуль пружності сплаву теж підвищується. Однак якщо друга фаза м'якше матриці, то збільшення її кількості викликає зниження модулів пружності базового металу. Не менш важливим фактором нелінійності є температура, з підвищенням якої модулі пружності чистих металів і більшості сплавів знижуються в 2 – 2,5 раз (рис. 5.32).

У свою чергу, розподіл температур у залежності від часу і координат усередині досліджуваного тіла також залежить від нелінійних теплофізичних характеристик. Для більшості конструкційних матеріалів теплофізичні параметри істотно змінюються зі зміною температури. Характер такої зміни параметрів: коефіцієнта теплопровідності  $\lambda$ , коефіцієнта теплоємності  $c$ , густини  $\rho$  різний і визначається матеріалом. Якщо параметри  $c$ ,  $\rho$ , особливо їх добуток  $c\rho$  для багатьох конструкційних матеріалів змінюються у вузьких межах, то коефіцієнт теплопровідності  $\lambda$  при цьому може змінюватися дуже істотно (у кілька разів). Таким чином, має місце «подвійна» нелінійність:

$$E=E(T(\lambda(T))), \quad (5.2)$$

яка істотно ускладнює аналіз НДС механічних систем.

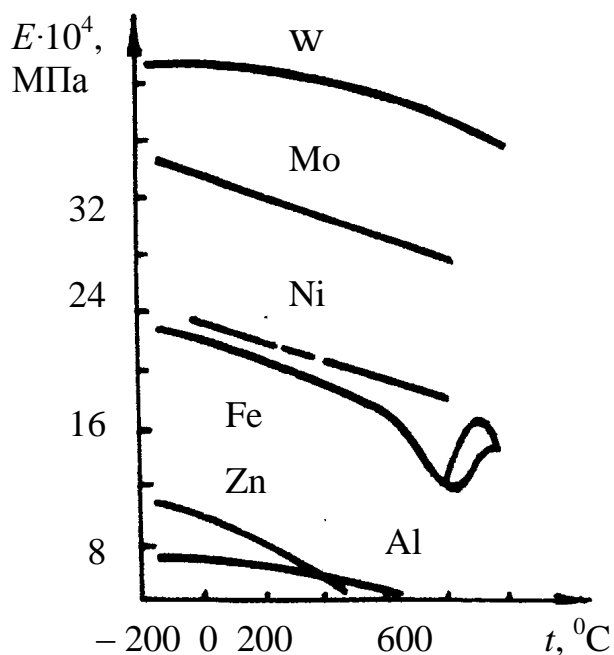


Рис. 5.32. Залежність модуля пружності від температури випробування металів

Відповідно до поставлених при проектуванні задач “введення” нелінійностей у модель може переслідувати одну з цілей: підвищення точності і адекватності моделі за рахунок відтворення існуючих у природі нелінійностей або розширення можливостей проектування за рахунок віртуальних нелінійностей.

Оскільки накопичення чинників, що ведуть до зміни механічних властивостей, відбувається в часі, нелінійності першого виду найпростіше вводити, розглядаючи систему як математичний автомат.

У цьому випадку наприкінці кожної часової ітерації в залежності від параметрів, що змінилися, наприклад, температури, виконується перерахунок значень  $E$  і  $\nu$ .

При досить малій тривалості ітерацій точність такого моделювання дуже висока.

Ще однією перевагою такого підходу є те, що в моделі легко врахувати нелінійність будь-якої форми – від плавних температурних кривих до стрибкоподібних імпульсних характеристик руйнування (рис. 5.33). В останньому випадку повинна бути оговорена поведінка пружних властивостей в околиці точок розриву.

Імпульсний елемент моделі може знаходитися в скінченній кількості станів. Наприклад, при моделюванні руйнування таких станів може бути всього два: «ввімкнений» – руйнування немає, у результаті моделювання НДС елемент не вносить змін; «вимкнений» – руйнування є, у результаті моделювання вносяться зміни з урахуванням характеру пошкодження. Переключення імпульсного елемента здійснюються, наприклад, в автоматичному режимі після чергової ітерації.

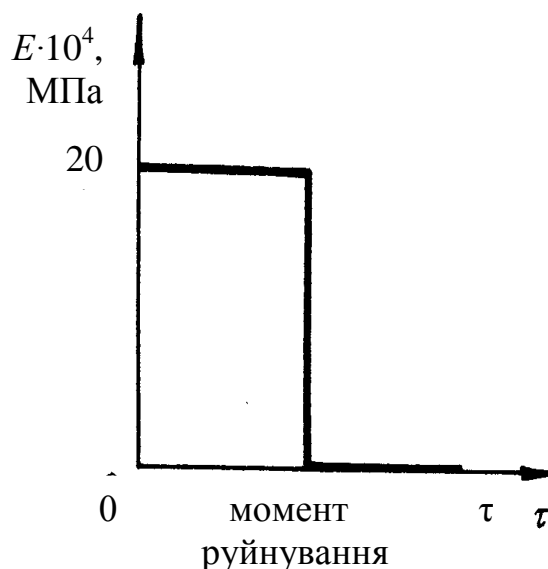


Рис. 5.33. Зміна модуля пружності при руйнуванні деталі

Що стосується віртуальних нелінійностей, то тут знімаються всі обмеження, зв'язані з фізичними властивостями матеріалів. Ввівши нелінійність такого типу, проектувальник як би ставить експеримент: «що буде, якщо...», і при одержанні позитивних результатів повинен лише подбати про відтворення «дивних» нелінійностей у металі. Це можуть бути деталі змінного профілю (компенсація віртуальної нелінійності розміром), поліметалеві і композиційні вироби (компенсація підбором природних властивостей матеріалів) тощо.

ПЕС не можна також застосовувати, якщо значення самих сил залежать одне від одного. Так, наприклад, можливий випадок, коли додаток сили  $P_1$  приводить до зміни величини сили  $P_2$  і навпаки, причому природа сил може бути будь-якою – механічною, електромагнітною, гідростатичною тощо. Тому тут не можна складати результат дії  $P_2$  при відсутності  $P_1$ , оскільки при одночасній дії самі ці сили будуть мати інші значення.

Те ж саме відбувається і при розгляді інших фізичних явищ – електричних, теплових, гідродинамічних і т. д. ПЕС тут застосовувати не можна, якщо відповідні фізичні властивості середовища – питомий електричний опір, коефіцієнт теплопровідності, коефіцієнт кінематичної в'язкості та інші є функціями, відповідно, сили струму, температури, швидкості руху рідини. ПЕС не використовують і якщо робота джерел взаємозалежна чи якщо результат дії кожного джерела, взятого окремо, не є лінійним.

Таким чином, можна виділити велике коло задач, при рішенні яких закономірне застосування ПЕС. Сюди, насамперед, відносяться теплові задачі з джерелами типу  $I_s$ , тобто заданої інтенсивності, зокрема задачі з граничними умовами II і V роду. У даному випадку інтенсивність джерел тепла звичайно не залежить від роботи інших джерел, якого б роду вони не були.

ПЕС можна застосовувати до дії джерел тепла типу  $I_t$ , тобто заданої температури, поки вони не виявляються в зоні впливу сусідніх джерел (будь-якого роду). Тому, якщо тіло піддається дії декількох джерел, то в дії кожного джере-

ла типу  $I_t$  варто розрізняти три періоди:

1-й період – зона дії джерела є автономною і не стикається з зонами дії інших джерел. У цей період температура в зоні дії джерела визначається тільки одним джерелом.

2-й період – зона дії розглянутого джерела перехльостується з зоною дії інших джерел. У цей період у зоні, що перехльостується, можна підсумовувати дію всіх джерел.

3-й період – зона дії будь-якого джерела доходить до місця розташування розглянутого джерела типу  $I_t$  (нагадаємо, що джерело типу  $I_t$  може бути тільки зовнішнім). У цей період дія джерел типу  $I_t$  не може бути врахована по ПЕС.

Принцип складної суперпозиції (ПСС) стосується тільки дії джерел типу  $I_t$  і може бути сформульований таким чином.

При визначенні дії джерела тепла типу  $I_t$  треба приймати, що всі інші джерела типу  $I_t$  мають температуру, рівну нулю, а джерела типу  $I_s$  бездіють. В останньому випадку справедливі всі правила ПЕС про алгебраїчне додавання дії всіх джерел і про можливість розкладання кожного джерела на елементи. Залишається в силі і вимога про лінійність всіх умов однозначності. Слід зазначити, що нульова температура у джерел типу  $I_t$  зовсім не означає, що вони не працюють. Джерела типу  $I_t$  розташовуються лише на границях тіла, тому ПСС повинен застосовуватися, коли сфера впливу якого-небудь джерела доходить до границі тіла, яка є місцем розташування джерела  $I_t$ .

Для з'ясування сказаного розглянемо докладніше процес поширення тепла в пластині при постійних граничних умовах I роду. Поки  $Fo \leq 0,05$ , дія температурних джерел на одній границі практично не досягає протилежної границі, тобто джерела діють незалежно. Тому від початку процесу до моменту часу  $Fo = 0,05$  зміна температури в будь-якій точці пластини може бути розрахована як алгебраїчна сума змін температури під впливом обох джерел (кожної границі). При розрахунках можна довільно користуватися рішеннями або для пластини, або для напівобмеженого тіла – результати будуть однаковими.

Але зі збільшенням часу (тобто критерію  $Fo$ ) число доданків, які треба враховувати, збільшується і тому користуватися методом суперпозиції стає незручно.

Звернемо увагу і на таку обставину: зміна температури в місці розташування температурного джерела під впливом джерела на іншій границі цілком компенсується індукційним джерелом – у сумі вони дорівнюють нулю. Це дозволяє замість індукованого джерела приймати на цій границі температуру, рівну нулю. Звідси і виникає принцип складної суперпозиції.

Тепер подивимося, що відбувається, коли на одній поверхні пластини як і раніше діє температурне джерело  $I_t$ , а на іншій поверхні – джерело типу  $I_s$ .

Насамперед, розглянемо, як у цих умовах буде діяти джерело типу  $I_t$ . Якщо користатися рішенням для напівобмеженого тіла, то треба припустити, що це джерело індукує на протилежній границі джерело типу  $I_s$ . Інтенсивність індукованого джерела дорівнює за величиною, але протилежне за знаком інтенсивності теплового потоку, що доходить до цієї границі від джерела  $I_t$ . Виникнення

(індукування) такого джерела необхідно для того, щоб не порушити заданої граничної умови. Тепло від індукованого джерела  $I_s$  поширюється як у напівобмеженому тілі, причому на границі, де розташоване джерело  $I_t$ , джерело  $I_s$ , у свою чергу, індукує джерело, але вже типу  $I_t$ , що компенсує тут зміну температури, тобто зводить їх до нуля, приводячи температуру до того значення, що задано граничною умовою.

Перейдемо до розгляду роботи джерела  $I_s$ . На протилежній границі він індукує джерело типу  $I_t$ , а той, у свою чергу, індукує на вихідній поверхні джерело типу  $I_s$  і т.д.

Температура в будь-якій точці пластини дорівнює сумі дії двох основних і всіх індукованих джерел, розташованих у напівобмеженому тілі. Тому при малих  $Fo$ , поки немає індукованих джерел, рішення дуже просте – воно дорівнює сумі дії одного температурного й одного потокового джерел, кожний з яких знаходиться на поверхні напівобмеженого тіла.

Рішення може бути отримано й інакше, а саме, як сума дій тільки двох основних джерел у пластині; при визначенні дії кожного з цих джерел на протилежній границі приймається нульове значення температури або теплового потоку в залежності від типу діючого на цій границі джерела. Врахування дії будь-яких внутрішніх джерел, якщо вони є, виконується так само – на всіх границях приймаються нульові умови.

Дія кожного внутрішнього джерела може бути врахована окремо, і тоді приймають, що інші внутрішні джерела бездіють.

Все вищесказане дозволяє дати більш загальне формулювання принципу складної суперпозиції в порівнянні: температура в будь-якій точці тіла дорівнює алгебраїчній сумі дій усіх джерел; дія кожного джерела повинна визначатися, виходячи з того, що всі інші джерела мають нульову температуру або нульову інтенсивність.

Отже, область застосування ПЕС охоплює випадки, коли дія джерела типу  $I_t$  не пригнічується дією інших джерел або коли діють джерела тільки типу  $I_s$ .

Область застосування ПСС – це випадки, у яких дія джерел типу  $I_t$  залежить від дії інших джерел.

Для пояснення сказаного розглянемо приклад.

У необмеженому тілі з нульовою початковою умовою паралельно один одному закладені дві труби малого діаметра. Якщо на поверхні кожної труби задана інтенсивність теплового потоку (у загальному випадку не однакова), то температура в будь-якій точці тіла дорівнює сумі температур, що виникають від кожного джерела (труби), причому дія цих джерел незалежна.

Якщо ж на поверхні труб задана температура, то дія кожного джерела залежить від роботи іншого джерела — адже, очевидно, що якщо, наприклад, на поверхні кожної труби задана температура  $100^\circ \text{C}$ , то, працюючи одночасно, вони все-таки не можуть підвищити температуру тіла вище  $100^\circ \text{C}$ , хоча і кожне джерело окремо може підняти температуру до  $100^\circ \text{C}$ . Отже, їх дії не додаються.

Відзначимо також, що якісна різниця в суперпозиції джерел типу  $I_t$  і  $I_s$  при-

зводить до того, що рішення задач для тіл обмежених розмірів при дії джерел типу  $I_t$  мають вид добутку рішень однорозмірних задач, а при дії джерел типу  $I_s$  – суми рішень.

Таким чином, поширення тепла у твердому тілі може бути виражене як дія багатьох джерел тепла. Так, початковий тепловий стан (початкова умова) виражається миттєвими внутрішніми джерелами тепла, а граничні умови – неперервно діючими зовнішніми джерелами тепла. Тому рішення задач теплопровідності може бути зведене до розгляду поширення тепла від джерел.

Труднощі рішення складних задач звичайно виникають від того, що початкові або граничні умови є складними, на перший погляд, іноді навіть заплутаними. Метод суперпозиції дозволяє привести рішення кожної такої задачі до рішення декількох більш простих задач. При цьому варто керуватися наступним правилом.

Рішення задачі зі складною початковою або граничною умовами може бути представлено у виді суми рішень інших задач з будь-якими іншими початковими і граничними умовами, але алгебраїчна сума значень джерел тепла, тобто початкові і граничні умови, у цих задачах для кожної точки тіла в будь-який момент часу, включаючи початковий, повинна дорівнювати заданим значенням джерел тепла у початковій задачі.

### 5.2.2. Суперпозиція при симетричному розташуванні джерел

Розглянемо випадки, коли розташування джерел тепла є симетричним щодо будь-якої поверхні.

Для простоти розглянемо спочатку випадки симетрії щодо площини в нескінченній області. Симетрія полягає в тому, що кожному джерелу, яке знаходиться з одного боку площини, відповідає інше джерело того ж типу і тієї ж величини, що знаходиться з іншого боку площини на тій же відстані від неї.

Нагадаємо, що розрізняють два роди симетрії. Для «геометричної» симетрії другий рід означає використання дзеркального відображення. Симетрія джерел виглядає трохи по-іншому. При першому роді джерела рівні не тільки за величиною, але і за знаком. При другому – джерела рівні за величиною, але протилежні за знаком. Сказане відноситься до джерел обох типів ( $I_t$  і  $I_s$ ), які постійні або змінні за часом. Якщо діє пара джерел, то залежність від часу в кожній парі може бути індивідуальною.

При першому роді симетрії джерела працюють таким чином, що площина симетрії виявляється адіабатичною площиною – через неї тепловий потік не проходить (рис. 5.34 а). Під цим розуміють те, що симетричні точки тіла знаходяться в однакових умовах і мають в кожен момент часу однакову температуру. Це справедливо також і для пар точок, що знаходяться в безпосередній близькості від площини симетрії; отже, градієнт температури тут дорівнює нулю, і тепловий потік не виникає. Тому тепло не переходить з однієї напівнескінченної області в іншу і у кожній з цих областей нагрівання (охолодження) відбувається тільки за рахунок роботи джерел, розташованих у них.



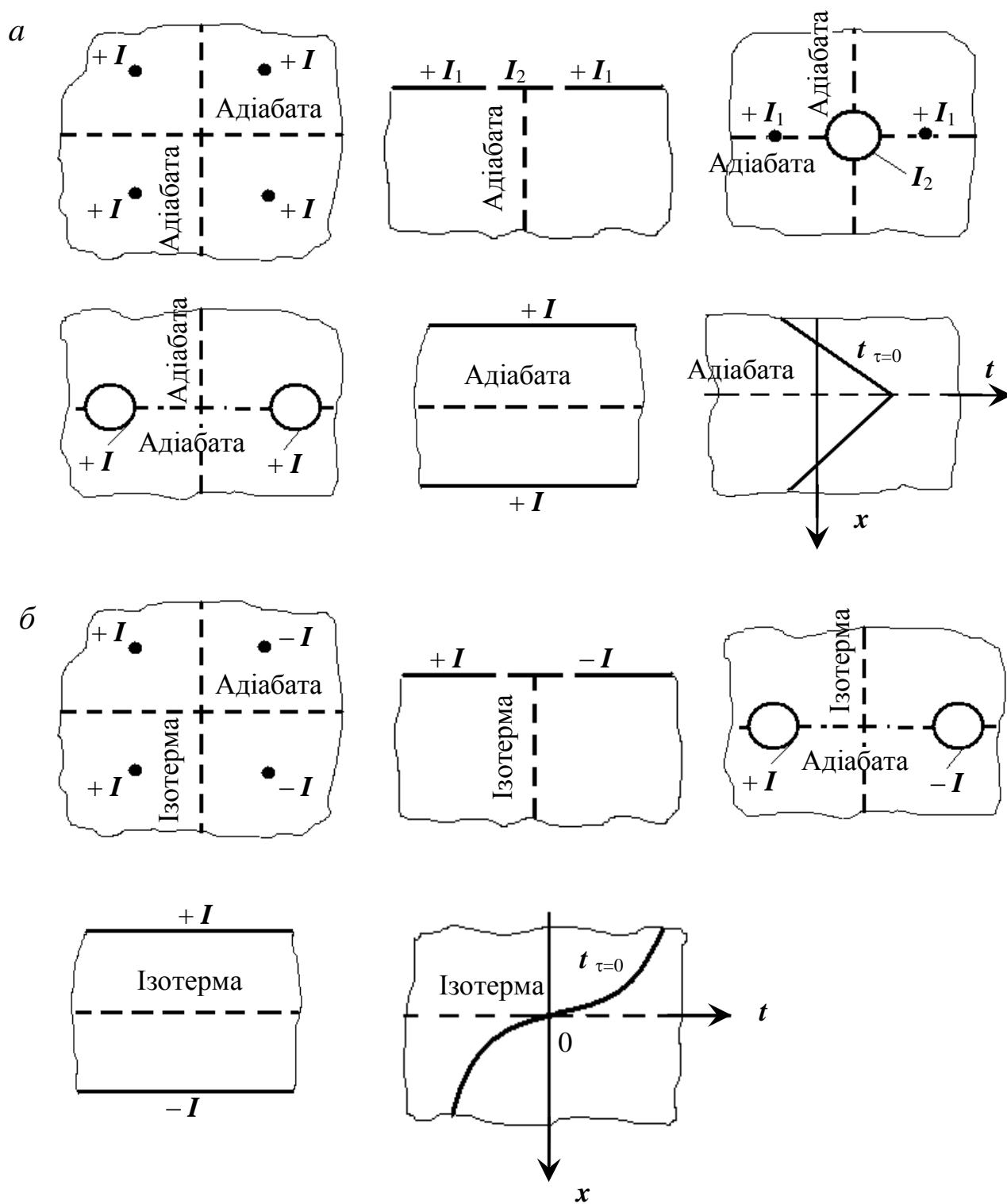


Рис. 5.34. Приклади симетричного розташування джерел:  
*a* – симетрія першого роду, *б* – симетрія другого роду

Температура ж на площині симетрії змінюється в часі і, якщо задача не однорідна, у різних точках не однакова.

При другому роді симетрії джерела підтримують на всій площині симетрії однакову температуру, тобто площина симетрії є екзотермічною (рис. 5.34 б). В кожній парі джерел одне джерело нагріває площину симетрії на стільки, на скільки інші джерела її охолоджують.

У результаті температура залишається незмінною. Це справедливо і тоді, коли діють джерела зі змінною в часі інтенсивністю або рухливі джерела.

Якщо задача дво- чи тримірна, то площина симетрії залишається ізотермічною, оскільки сумарна дія пари джерел для будь-якої її точки дорівнює нулю.

Через площину симетрії другого роду проходить змінний тепловий потік  $i$ , якщо задача не одномірна, його інтенсивність у різних точках не однакова. Таким чином, якщо вдасться знайти симетричне розташування джерел тепла, то можна при рішенні задачі розглядати не все тіло і дію не всіх джерел, а лише частину тіла, замінивши вплив інших частин тіла і розташованих там джерел ізотермічними чи адіабатичними границями. Або, навпаки, можна при бажанні замінити ізотермічні чи адіабатичні границі симетрично розташованими джерелами. При цьому байдуже, що в дійсності існує – але важливо не враховувати і те, і інше разом.

Симетричне розташування джерел тепла часто зустрічається і в обмежених тілах. Візьмемо, наприклад, пластину. Якщо на границях однакові по величині, але протилежні за знаком граничні умови, то середня площина є ізотермічною. Якщо ж і знаки джерел однакові, то середня площина є адіабатичною. З цього, зокрема, випливає, що всі рішення для задач з адіабатичною умовою на одній з поверхонь пластини цілком придатні для задач з однаковими по величині і знаку граничними умовами на обох поверхнях.

Джерело може розташовуватися симетрично не тільки щодо площини, але і щодо точки, прямої тощо. У всіх цих випадках досить досліджувати одну частину тіла, оскільки інші частини мають той же (симетричний) тепловий режим.

### 5.3. Принцип еквівалентності

Суть принципу еквівалентності полягає в тому, що заміна однієї з умов однозначності, якими визначається розглянуте явище, іншою умовою однозначності, не приводить до зміни ходу явища в жодній точці, охопленої даним явищем; заміна приводить до тотожності задач, а не до моделювання явища.

Принцип еквівалентності застосовується в різних галузях науки, зокрема й в електротехніці, де для зручності розрахунку електричних ланцюгів дуже корисно робити заміну джерела е.д.с. еквівалентним джерелом струму чи виконувати зворотню заміну джерела струму еквівалентним джерелом е.д.с. Джерела е.д.с. і струми є еквівалентними, якщо вони мають одні і ті ж зовнішні характеристики.

Іншими словами, режим не повинний змінюватися при заміні джерела е.д.с. еквівалентним джерелом струму і навпаки.

Стосовно до теплових задач принцип еквівалентності полягає в тому, що

заміна будь-якої умови однозначності не впливає на тепловий режим розглянутого тіла – хід температури у всіх точках залишається незмінним. Принцип еквівалентності говорить про можливість еквівалентної заміни джерел тепла і теплових опорів, а також теплофізичних характеристик, геометричної форми і розмірів тіла.

Нагадаємо, що існує два типи джерел тепла:  $I_t$  – джерела заданої температури і  $I_s$  – джерела заданої інтенсивності теплового потоку. Джерела  $I_s$  можуть бути як зовнішні, так і внутрішні.

Джерела  $I_t$  бувають тільки зовнішніми. Тому можуть існувати наступні еквівалентні заміни:

- зовнішні джерела будь-якого одного типу ( $I_t$  чи  $I_s$ ) замінюються зовнішніми джерелами іншого типу;
- зовнішні джерела типу  $I_t$  і  $I_s$  замінюються внутрішніми джерелами типу  $I_s$ ;
- внутрішні джерела типу  $I_s$  замінюються зовнішніми джерелами типу  $I_t$  або  $I_s$ .

Еквівалентна заміна внутрішніх джерел внутрішніми джерелами іншого типу неможлива, оскільки внутрішні джерела можуть бути тільки одного типу –  $I_s$ . Заміни можуть бути повними або частковими, але у всіх випадках зберігається принцип еквівалентності – тепловий режим усього тіла «не помічає» змін умов однозначності.

Всі еквівалентні переходи (заміни) оборотні. Наприклад, якщо показана можливість заміщення джерела типу  $I_s$  джерелом  $I_t$ , то тим самим показана можливість і зворотного переходу. Нехай у поверхні тіла діють джерела обох типів і є температурний опір ( $\alpha \neq \infty$ ), тобто гранична умова має вигляд:

$$-\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x=+0} = S + \alpha(\vartheta - t_{x=+0}), \quad (5.3)$$

де  $S$  – щільність теплового потоку на поверхні тіла,  $\vartheta$  – температура середовища;  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності;  $\alpha$  – коефіцієнт тепловіддачі.

Заміна  $\vartheta$  і  $S$  еквівалентними джерелами в загальному випадку повинна задовольняти співвідношенню:

$$\alpha \vartheta_{екв} + S_{екв} = \alpha \vartheta + S, \quad (5.4)$$

тоді замість (5.2) маємо:

$$-\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x=+0} = S_{екв} + \alpha(\vartheta_{екв} - t_{x=+0}) \quad (5.5)$$

Граничні умови (5.3) і (5.5) можуть бути приведені до ГУ III роду. Для цього треба прийняти  $S_{екв} = 0$  і  $\vartheta_{екв}$  обчислювати згідно:

$$\mathcal{G}_{\text{екв}} = \mathcal{G} + \frac{S}{\alpha}. \quad (5.6)$$

Напроти, перехід від граничних умов III роду до граничних умов II роду неможливий, оскільки не можна цілком виключити дія температурного джерела. Дійсно, якщо прийняти  $\mathcal{G}_{\text{екв}} = 0$ , то це лише означає, що температурне джерело має нульову температуру (нульовий потенціал). Конвективний теплообмін збережеться.

Перехід від граничних умов I роду до граничних умов II роду і навпаки можливий, якщо відома  $t_{x=0} = f(S)$  залежність або залежність  $S = \varphi(t_{x=0})$ .

Для напівнескінченного тіла, коли  $f(S)$  є функцією часу:

$$t_{x=0} = b\tau^m, \quad (5.7)$$

перехід від граничних умов I роду до граничних умов II роду простий:

$$S = k\tau^{m-1}, \quad (5.8)$$

де

$$k = b\sqrt{\lambda c \rho} \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}. \quad (5.9)$$

Якщо на поверхні тіла є рідина і задано граничну умову V роду, то можливий перехід до граничних умов III роду. При цьому теплоемкісний опір  $C$  замінюється температурним опором  $\mathcal{R}$ , а джерело тепла заданої інтенсивності  $I_s$  замінюється температурним джерелом  $I_t$ .

Крім еквівалентних заміни джерел можливі еквівалентні заміни теплових опорів. Перехід від теплового опору будь-якого типу до опору іншого типу повинен задовольняти умові:

$$h_t = h_s, \quad (5.10)$$

де

$$h_s = h' \frac{c' \rho'}{c \rho},$$

$$h_t = \frac{\lambda}{\alpha}.$$

Якщо є система з трьох послідовних теплових опорів – температурне, потім комбіноване (тобто звичайне тіло) і, нарешті, теплоємкісне, то еквівалентна зміна кожного з цих опорів повинна задовольняти сталості суми:

$$\frac{1}{h} = \left( h_t + h_s + \frac{h_t h_s}{h} \right) = idem . \quad (5.11)$$

#### 5.4. Принцип взаємності

Принцип взаємності був установлений Максвеллом у 1864 р. стосовно до деформацій пружних тіл. Суть принципу може бути викладена таким чином (рис. 5.35): у всякій лінійній пружній системі при статичному її навантаженні переміщення  $\delta_{BA}$  за напрямком однієї сили  $B$ , викликане кількісно рівною їй іншою силою  $A$ , відповідно дорівнює переміщенню  $\delta_{AB}$  за напрямком другої сили, викликаній першою.

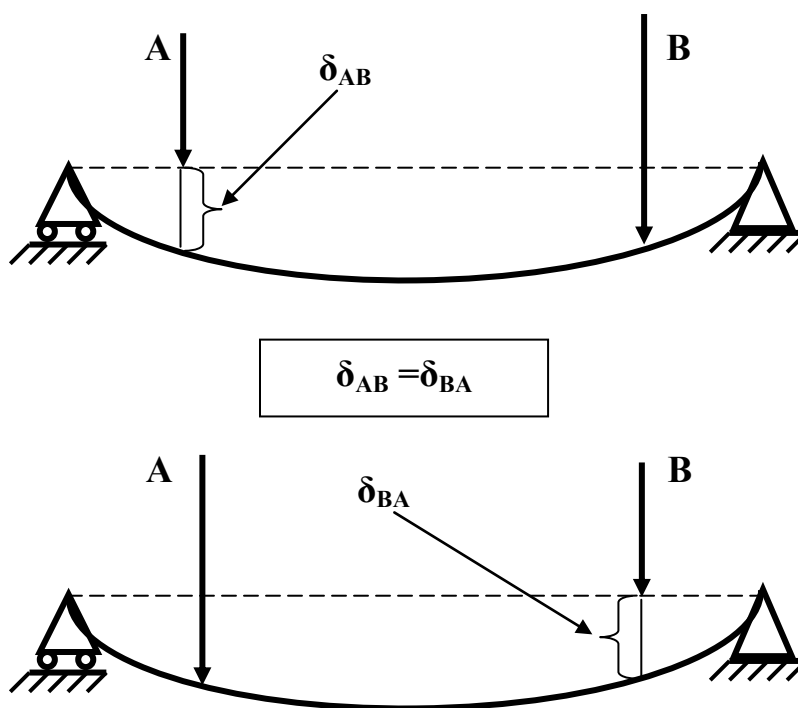


Рис. 5.35. Прояв принципу взаємності при навантаженні пружної балки

Принцип взаємності може бути розповсюдженим на інші системи.

Стосовно лінійних електричних систем принцип взаємності Максвелла полягає в тому, що якщо в одній ланці складного ланцюга діє е.д.с.  $E$ , а в другій ланці з'являється струм  $I$ , то, якщо перенести е.д.с.  $E$  в другу ланку, у першій виникає струм  $I$ . В підсумку можна сказати: якщо в елементі  $a$  складної системи діє збудження  $F$ , яке викликає в іншому елементі цієї системи  $b$  відгук (реакцію)  $H$ , то, якщо перенести збудження  $F$  в елемент  $b$ , воно викличе в елементі  $a$

той же відгук  $H$ . Важливо відзначити, що в інших елементах системи в обох випадках відгуки будуть різні; «взаємність» має місце лише між обраними елементами. Таким чином, система в обох випадках знаходиться в різних станах.

Принцип взаємності може бути застосований і при рішенні деяких задач теплопровідності; це значить, що якщо джерело тепла  $I_s$ , що знаходиться в точці 1, викликає в точці 2 зміну температури  $\Delta t = f(\tau)$ , то якщо перемістити джерело в точку 2, у точці 1 буде мати місце та ж сама зміна температури  $\Delta t$ .

Варто підкреслити, що у взаємних точках швидкості зміни температур однакові, але градієнти температур різні, тому потрібно пам'ятати, що перехід до взаємної задачі не є переходом до еквівалентної задачі – температурні поля виявляються різними.

### 5.5. Питання до самоконтролю

1. З якою метою та на якому етапі моделювання здійснюється перетворення моделей?
2. Що таке симетрія? Які види симетрії ви знаєте?
3. Назвіть усі Платонові тіла. Чому їхній перелік обмежується тільки п'ятью варіантами?
4. Назвіть п'ять типів симетрії I роду. Виділіть елементарні ячейки в кожному типі.
5. Назвіть дев'ять типів симетрії I роду. Виділіть елементарні ячейки в кожному типі.
6. Який мінімум інформації необхідно для формування в ЕОМ образу симетричного тіла?
7. Наявністю яких елементів симетрії характеризується циклічна з двічі симетричною гранню симетрія  $D_{NH}$ ?
8. Наявністю яких елементів симетрії характеризується циклічна з двічі симетричною гранню симетрія  $C_{2V}$ ?
9. Наявністю яких елементів симетрії характеризується циклічна з двічі симетричною гранню симетрія  $C_N$ ?
10. Наявністю яких елементів симетрії характеризується циклічна з двічі симетричною гранню симетрія  $C_{NV}$ ?
11. Що таке система розв'язуючих рівнянь симетрії? Наведіть приклади.
12. Як вибирається система координат і як вона співвідноситься з положенням нульової ячейки?
13. Які ви знаєте особливі вузли та елементи симетрії?
14. Що таке елементарна підсистема для тієї або іншої симетрії та як вираховується їхня кількість?
15. Що таке принцип суперпозиції та яким чином він служить чинникам методології розв'язання задач проектування?
16. Принципи елементарної та складної суперпозиції. Чим відрізняються засади застосування цих принципів?
17. В якому випадку не можна застосовувати принцип елементарної суперпозиції?
18. Як використовується принцип суперпозиції при симетричному розташуванні джерел зовнішнього впливу на об'єкт моделювання?
19. У чому полягає суть принципу еквівалентності при моделюванні явищ переносу крізь об'єкти моделювання?
20. Який математичний апарат використовується при просторовому перетворенні моделей?

Матриця системи

Стовпчик вільних членів

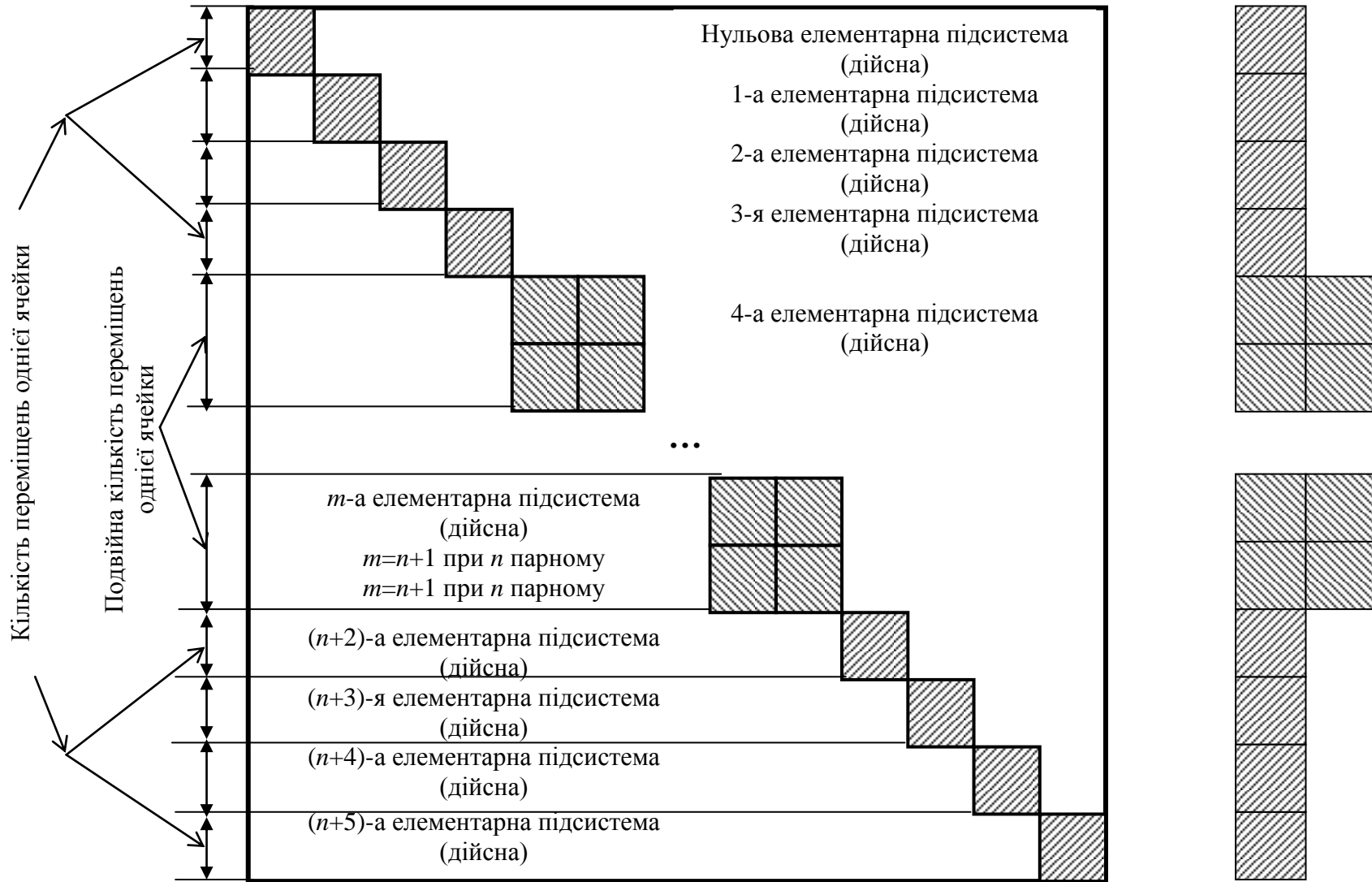


Рис. 5.30. Структура системи розв'язуючих рівнянь симетрії  $DNH$



## Розділ 6

### ЗАСТОСУВАННЯ СКІНЧЕННОЕЛЕМЕНТНИХ МОДЕЛЕЙ

#### 6.1. Аналіз напружено-деформованого стану

**Р**озділивши об'єкт дослідження на окремі фрагменти, проектувальник створює собі нову проблему: постійно стежити, щоб останні не розсипалися, як кубики «ЛЕГО», а зберігали основні ознаки єдності, властиві об'єкту в цілому. У механічних системах для цього іноді досить зажадати загальних координат для елементів, що мали єдину, а тепер – суміжну форму фрагментів – точок, ребер, граней і т.п. У теплових системах потрібно враховувати вже співпадіння температур, що, однак, дуже важко уявити без єдності форми. В електричних системах простіше, – там єдність напруг можна забезпечити навіть для фрагментів, які знаходяться в різних місцях, тому проблема зводиться не до підтримки геометричної форми об'єкта, а до збереження схемних зв'язків між выводами його елементів, тобто до чисто структурних характеристик. Розгляд методів аналізу дискретизованих об'єктів почнемо з механічних систем, де, як вже було сказано, найбільше значення має геометричний зв'язок фрагментів і де легше всього застосувати принципи перетворень, описані у попередніх розділах.

##### 6.1.1. Напружено-деформований стан тіла

У декартовій системі координат  $Oxyz$ , яка співпадає із системою координат  $Ox_1x_2x_3$  ( $x = x_1, y = x_2, z = x_3$ ), розглянемо трьохмірне тіло, обмежене поверхнею  $S$ . Під дією зовнішніх навантажень у тілі виникають внутрішні сили, мірою яких є напруження, що визначаються як сили, які діють на одиницю площі в тілі. Якщо усередині тіла виділити малий кубик із співнаправленими з осями  $x, y$  і  $z$  сторонами, то напруження на будь-якій грані кубика, наприклад на грані, перпендикулярній до осі  $x$ , можна розкласти на три складові – нормальну  $\sigma_{xx} = \sigma_x$ , діючу по нормалі до грані, і дві дотичні  $\tau_{xy}$  і  $\tau_{xz}$ , що діють у площині грані. Перший індекс вказує орієнтацію грані, другий – напрямок дії сили. Оскільки кубик має три пари граней, для нього можна ввести дев'ять складових напружень:  $\tau_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_y, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_z, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ . У класичній теорії пружності вважається справедливим закон парності дотичних напружень, відповідно до якого  $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{xz} = \tau_{zx}$ .

Напруження в точці тіла визначаються як межа зазначених напружень при

прагненні розмірів кубика до нуля. Таким чином, напружений стан тіла визначається шістьма компонентами напружень, які вважаються функціями координат і, можливо, часу. Введемо вектор-стовпець напружень:

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}\}^T = \{\sigma_{11} \sigma_{22} \sigma_{33} \sigma_{12} \sigma_{23} \sigma_{31}\}. \quad (6.1)$$

З метою зручності разом з буквеними індексами будемо використовувати цифрові.

Напруження в тілі завжди можна представити у вигляді суми так званих гідростатичних напружень  $\bar{\sigma}$ , зв'язаних з дією всебічного розтягання – стиску, і девіаторних напружень  $S$ , які відповідають за зміну форми тіла без об'ємного розширення

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \bar{\sigma} + s; \quad \bar{\sigma} = \{\sigma_0 \sigma_0 \sigma_0 000\}^T; \\ s &= \{\sigma_x - \sigma_0 \quad \sigma_y - \sigma_0 \quad \sigma_z - \sigma_0 \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}\}^T, \end{aligned} \quad (6.2)$$

де  $\sigma_0$  є середнє нормальне напруження:

$$\sigma_0 = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) / 3. \quad (6.3)$$

Помітимо, що величина  $\sigma_0$  є інваріантом напруженого стану (тобто не залежить від вибору системи координат), так само, як і величина інтенсивності напружень:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}. \quad (6.4)$$

Якщо відомі напруження  $\boldsymbol{\sigma}$  у системі координат  $x_1, x_2, x_3$  то за допомогою формули

$$\boldsymbol{\sigma}' = P\boldsymbol{\sigma} \quad (6.5)$$

можна знайти напруження  $\boldsymbol{\sigma}'$  в деякій новій декартовій системі координат  $x'_1 x'_2 x'_3$ , орієнтація якої задається направляючими косинусами  $l_{ij} = \cos(x'_i, x_j)$ . Елемент  $P_{ijkl}$  матриці переходу  $\mathbf{P}$  (6х6), що зв'яже напруження  $\sigma'_{ij}$  з напруженням  $\sigma_{kl}$ , визначається як:

$$P_{ijkl} = l_{ik} l_{jl} \quad (6.6)$$

Якщо усередині тіла розглянути малий кубик зі сторонами  $dx, dy, dz$ , то

умови його рівноваги зводяться до відомих диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}\partial\sigma_x/\partial x + \partial\tau_{xy}/\partial y + \partial\tau_{xz}/\partial z + F_x &= 0, \\ \partial\tau_{yx}/\partial x + \partial\sigma_y/\partial y + \partial\tau_{yz}/\partial z + F_y &= 0, \\ \partial\tau_{zx}/\partial x + \partial\tau_{zy}/\partial y + \partial\sigma_z/\partial z + F_z &= 0,\end{aligned}\quad (6.7)$$

які після введення матричного диференціального оператора

$$\mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial z \\ 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial x & \partial/\partial z & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix}\quad (6.8)$$

можуть бути записані у вигляді:

$$\mathbf{R}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F} = 0,\quad (6.9)$$

де  $\mathbf{F}$  – вектор відомих об'ємних сил, викликаних, наприклад, дією сили ваги або сил інерції.

Напружений стан тіла залежить від того, які зовнішні навантаження прикладені до його границі. Тому крім умов рівноваги усередині тіла, напруження повинні задовольняти умовам рівноваги на його поверхні. Для їхнього формулювання уведемо вектор поверхневих зусиль  $\mathbf{p} = \{p_x, p_y, p_z\}^T$ , що діє на площадці з нормаллю  $\vec{n}$ , орієнтація якої задається направляючими косинусами  $n_x = \cos(\vec{n}, x)$ ,  $n_y = \cos(\vec{n}, y)$ ,  $n_z = \cos(\vec{n}, z)$ . Цей вектор зв'язаний з напруженнями таким чином:

$$\begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z \\ \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z \\ \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z \end{Bmatrix}\quad (6.10)$$

або в матричному вигляді:

$$\mathbf{p} = \mathbf{C} \boldsymbol{\sigma},\quad (6.11)$$

де  $\mathbf{C}$  (3×6) – є матриця направляючих косинусів:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 & n_y & 0 & n_z \\ 0 & n_y & 0 & n_x & n_z & 0 \\ 0 & 0 & n_z & 0 & n_y & n_x \end{bmatrix}.\quad (6.12)$$

Якщо  $\mathbf{p}^* = \{p_x^* p_y^* p_z^*\}$  – є відомий вектор поверхневих зусиль, які діють на частину границі тіла  $S_2$ , то з умов рівноваги випливає:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}^* \text{ на } S_2. \quad (6.13)$$

Отже, напружений стан тіла визначається шістьма функціями напружень (6.1), які при відомих об'ємних і поверхневих силах повинні задовольняти диференціальним (6.7) і функціональним (6.13) рівнянням рівноваги.

Породжувані зовнішніми навантаженнями напруження призводять до того, що кожна точка тіла з координатами  $(x, y, z)$  зміщується в деяку сусідню точку  $(x', y', z')$ . При цьому компоненти вектора переміщень  $\mathbf{u} = \{u_x u_y u_z\}^T$  визначаються як різниця координат точки до і після додавання навантаження:

$$u_x = x' - x, \quad u_y = y' - y, \quad u_z = z' - z. \quad (6.14)$$

Переміщення призводять до зміни геометричної форми тіла. Мірою зміни форми є деформації. Якщо в тілі розглянути деякий малий кубик зі сторонами  $dx, dy, dz$ , то в загальному випадку переміщення він перетворюється в непрямокутний паралелепіпед.

Відносно подовження кубика в напрямку осі  $x$  називають подовжньою деформацією в напрямку осі  $x$  і позначають  $\varepsilon_x$ . Прямий кут між сторонами кубика в площині  $xy$  в процесі деформування змінюється на величину  $\gamma_{xy}$ , що вимірюється в радіанах і яку називають зсувною або кутовою деформацією в площині  $xy$ .

Аналогічно визначаються подовжні деформації  $\varepsilon_y$  та  $\varepsilon_z$  і зсувні деформації  $\gamma_{yx}, \gamma_{xz}, \gamma_{zx}, \gamma_{yz}, \gamma_{zy}$ , причому з геометричних розумінь приймають  $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \gamma_{xz} = \gamma_{zx}, \gamma_{yz} = \gamma_{zy}$ .

З високим ступенем точності деформації можна визначити через переміщення за відомими формулами Коші:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 \right]; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right]; \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} + \left[ \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial y} \right]; \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} + \left[ \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right]; \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} + \left[ \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right].\end{aligned}\quad (6.15)$$

Якщо ввести вектор-стовпець деформацій:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx}\}^T = \{\varepsilon_{11} \varepsilon_{22} \varepsilon_{33} 2\varepsilon_{12} 2\varepsilon_{23} 2\varepsilon_{31}\} \quad (6.16)$$

і записати їх у вигляді суми, лінійної відносно похідних від переміщень і нелінійних складових

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (6.17)$$

то для лінійних деформацій будемо мати

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{R}\mathbf{u}, \quad (6.18)$$

а для нелінійних

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j}, \quad (6.19)$$

де  $\mathbf{R}$  – матричний диференціальний оператор (6.8),  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$ . За певних умов навантаження твердих тіл, які розглядаються в лінійній теорії пружності, похідні від переміщень є малими величинами, тому нелінійними складовими деформацій, як правило, зневажають.

З (6.15) випливає, що три переміщення однозначно визначають шість деформацій. Отже, різні компоненти деформацій не можуть бути незалежними. Умови їхнього зв'язку, які називають рівняннями спільності деформацій, можуть бути отримані перехресним диференціюванням (6.15) і для лінійних деформацій мають вигляд:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_j}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -\frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x_i} + \frac{\partial \gamma_{ki}}{\partial x_j} + \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x_k} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_i}{\partial x_i \partial x_k}, \quad (6.20)$$

$(i, j, k = 1, 2, 3, i \neq j \neq k).$

Для деформованого стану тіла можна визначити середні подовжні деформації:

$$\varepsilon_0 = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) / 3, \quad (6.21)$$

інтенсивність деформацій:

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}, \quad (6.22)$$

кульову і девіаторну складові деформацій:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \boldsymbol{\varepsilon}_s + e, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_s = \{\varepsilon_0 \ \varepsilon_0 \ \varepsilon_0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T, \\ e &= \{\varepsilon_x - \varepsilon_0 \ \varepsilon_y - \varepsilon_0 \ \varepsilon_z - \varepsilon_0 \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}\}^T \end{aligned} \quad (6.23)$$

причому  $\boldsymbol{\varepsilon}_s$  визначає зміну питомого об'єму в точці, а девіатор деформацій – зміну форми без зміни об'єму. Таким чином, деформований стан тіла визначається шістьма функціями деформацій (6.16), які зв'язані між собою рівняннями спільності (6.20) і виражаються через переміщення за формулами (6.15).

### 6.1.2. Зв'язок між напруженнями і деформаціями

Оскільки напруження призводять до появи деформацій, природно вважати їх зв'язаними між собою. Для багатьох твердих тіл (наприклад, пружних), при не занадто великих рівнях напружень виникаючі деформації можна вважати прямо пропорційними напруженням. Для них лінійні рівняння зв'язку записуються в одній з еквівалентних форм узагальненого закону Гука:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \dots \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{26} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{61} & d_{62} & \dots & d_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \dots \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (6.24)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \dots \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{16} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{26} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{61} & g_{62} & \dots & g_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \dots \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\sigma}, \quad (6.25)$$

де  $d_{ij} = d_{ji}$  експериментально обумовлені пружні постійні (константи);  $g_{ij} = g_{ji}$  — коефіцієнти піддатливості.

У загальному випадку так названого анізотропного матеріалу постійні  $d_{ij}$  не залежать один від іншого, що зв'язане з нееквівалентністю характеристик матеріалу в різних напрямках. Однак для багатьох матеріалів існує визначена симетрія пружних властивостей, коли можна виділити так звані головні осі анізотропії щодо перпендикулярних площин, до яких будь-які два напрямки є пружноеквівалентними. Для матеріалу з однією головною віссю анізотропії  $d_{15} = \dots = d_{45} = 0$ ,  $d_{16} = \dots = d_{46}$ . Якщо ж у тілі існують три перпендикулярні головні осі анізотропії (ортотроп-матеріал), тоді додатково  $d_{14} = d_{24} = d_{34} = d_{45} = d_{46} = d_{56} = 0$ . Інші незалежні постійні і коефіцієнти піддатливості можуть бути виражені через так звані технічні постійні – подовжні модулі пружності  $E_1, E_2, E_3$ , модулі зрушення  $G_{12}, G_{23}, G_{31}$  і коефіцієнти поперечної деформації (Пуассона)  $\nu_{ij}$  – за формулами:

$$\begin{aligned} d_{ii} &= E_i(1 - \nu_{ik}\nu_{ki})/\Delta, & d_{ij} &= E_j(\nu_{ij} + \nu_{ik}\nu_{kj})/\Delta, \\ d_{44} &= G_{12}, & d_{55} &= G_{23}, & d_{66} &= G_{31}, & \Delta &= 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31}, \\ g_{ii} &= 1/E_i, & g_{ij} &= -\nu_{ji}/E_i, & g_{44} &= 1/G_{12}, & g_{55} &= 1/G_{23}, & g_{66} &= 1/G_{31}, \\ E_i\nu_{ji} &= E_j\nu_{ij} & (i, j, k &= 1, 2, 3, i \neq j \neq k). \end{aligned} \quad (6.26)$$

Для трансверсально-ізотропного (транстропного) матеріалу дві з трьох головних осей анізотропії (наприклад,  $x$  та  $y$ ) вважаються пружноеквівалентними. У цьому випадку незалежними будуть п'ять постійних:  $E, E', \nu, \nu', G'$ , причому:

$$\begin{aligned} E_x = E_y = E, & \quad E_z = E', & \nu_{xy} = \nu_{yx} = \nu, & \nu_{xz} = \nu_{zx} = \nu_{yz} = \nu_{zy} = \nu', \\ G_{xz} = G_{yz} = G', & \quad G_{xy} = 0,5E/(1 + \nu). \end{aligned}$$

Для ізотропного матеріалу, у якому всі напрямки вважаються пружноеквівалентними, усі пружні постійні можуть бути виражені через модуль пружності  $E$  і коефіцієнт Пуассона  $\nu$  за формулами (6.26) при  $E_i = E$ ,  $\nu_{ij} = \nu$ ,  $G_{ij} = G = 0,5E/(1 + \nu)$ .

Відзначимо, що якщо відома матриця пружних констант  $\mathbf{D}'$  у деякій системі координат  $x'_1 x'_2 x'_3$ , то за допомогою формули

$$\mathbf{D} = \mathbf{P}^T \mathbf{D}' \mathbf{P} \quad (6.27)$$

вона може бути перетворена до іншої декартової системи, де  $\mathbf{P}$  є матриця переходу з (6.5) з елементами (6.6).

Після підстановки виразу для деформацій (6.18) до формули закону Гука (6.24) і звідти до (6.9) для переміщень одержуємо систему диференціальних рівнянь у частинних похідних другого порядку, яка записується у вигляді:

$$[\mathbf{R}^T \mathbf{D} \mathbf{R}] \mathbf{u} + \mathbf{F} = 0. \quad (6.28)$$

З нескінченної множини її рішень необхідно визначити ті переміщення, які на частині границі тіла  $S_1$  збігаються з заданими переміщеннями  $\mathbf{u}^*$ :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^* \text{ на } S_1, \quad (6.29)$$

а відповідні їм зусилля (6.11) на частині границі, яка залишилася, задовольняють силовим граничним умовам:

$$\mathbf{p} = \mathbf{C} \mathbf{D} \mathbf{R} \mathbf{u} = \mathbf{p}^* \text{ на } S_2. \quad (6.30)$$

Якщо розглянуте тіло є неоднорідним з декількома однорідними підобластями, то для кожної з них рівняння (6.28) має свій вигляд. У цьому випадку на границі  $S_{ik}$  сполучення  $i$ -ї і  $k$ -ї підобласті необхідно забезпечити виконання умов неперервності переміщень і зусиль:

$$\mathbf{u}^{(i)} = \mathbf{u}^{(k)}, \quad \mathbf{C}^{(i)} \mathbf{D}^{(i)} \mathbf{R} \mathbf{u}^{(i)} = \mathbf{C}^{(k)} \mathbf{D}^{(k)} \mathbf{R} \mathbf{u}^{(k)}. \quad (6.31)$$

Якщо з рішення крайової задачі (6.28) – (6.31) знайдені переміщення, то за формулами (6.18), (6.24), (6.11) можна визначити деформації, напруження і зусилля в будь-якій точці тіла.

Розглянемо тіло, яке знаходиться під дією заданих об'ємних і поверхневих зусиль у стані рівноваги з відомими переміщеннями (6.29) на частині границі  $S_1$ . Далі припустимо, що тіло зазнало довільні нескінченно малі переміщення  $\delta \mathbf{u}$ , які будемо називати віртуальними, причому

$$\delta \mathbf{u} = 0 \text{ на } S_1. \quad (6.32)$$

Тоді робота, яка здійснюється об'ємними і поверхневими силами на цих переміщеннях, відповідно до закону збереження енергії, призведе до зміни внутрішньої енергії деформацій на величину

$$\int_V \boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{F} dV + \int_{S_2} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p}^* dS, \quad (6.33)$$

де  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$  є віртуальні деформації

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{R} \delta \mathbf{u} + \delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (6.34)$$

нелінійну частину яких для простоти опустимо. Співвідношення (6.33) виражає так званий принцип віртуальних робіт. З нього, зокрема, випливає, що напру-



ження повинні задовольняти рівнянням рівноваги (6.9) і силовим граничним умовам (6.13). Дійсно, якщо проінтегрувати перший доданок вроздріб, то будемо мати

$$-\int_V \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{R}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F}) dV + \int_{S_2} \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{p} - \mathbf{p}^*) dS = 0, \quad (6.35)$$

звідки в силу довільності віртуальних переміщень виходять рівняння (6.9) та (6.13). Таким чином, принцип віртуальних робіт еквівалентний рівнянням рівноваги і силових граничних умов. Це дає можливість застосовувати його для висновку рівнянь для різних окремих випадків напруженого стану.

Помітимо, що принцип віртуальних робіт справедливий при будь-яких співвідношеннях між деформаціями і напруженнями і навіть тоді, коли вони незалежні.

### 6.1.3. Чисельний метод розрахунку напружено-деформованого стану

Повернемося до пакета прикладних програм, який використовує метод скінченних елементів, що має яскраво виражену залежність об'єму підготовчих операцій від симетричності конструкцій. Особливо яскрава економія за рахунок використання симетрії відбувається при кодуванні елементів, які містять 20 вузлів. Схема такого елемента наведена на рис. 6.1.

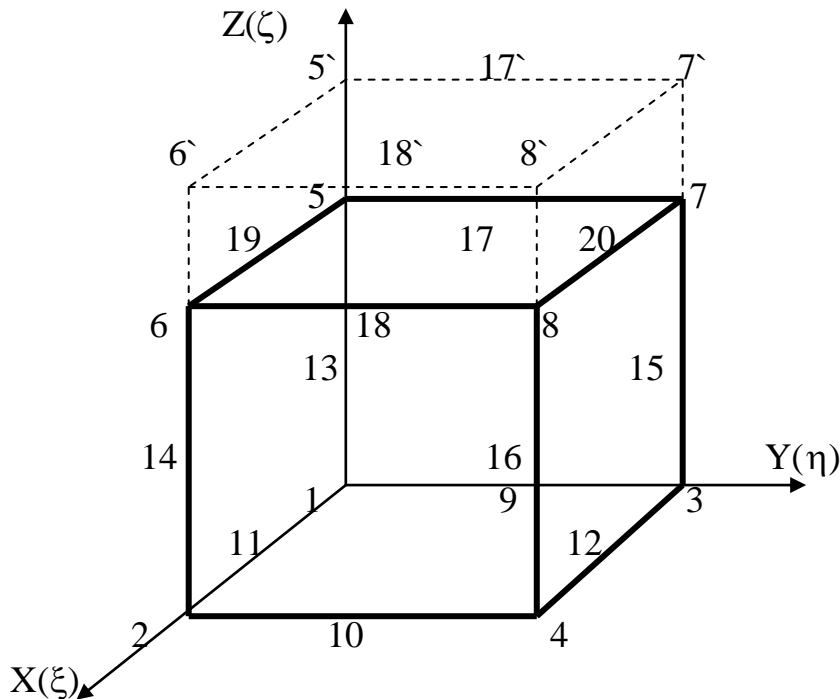


Рис. 6.1. Схема зміни ізопараметричного скінченного елемента

На схемі наведена тільки топологія вузлів елементів, тобто їхнє взаємне розташування в просторі. Реальний елемент може відрізнятись від цієї схеми,

тобто мати будь-яку кривизну граней і відстань між вузлами, але при збереженні початкової топології.

Наведений елемент – тривимірний. Якщо зафіксувати два його розміри, то НДС елемента за інших рівних умов буде функцією третього, наприклад, уздовж осі  $Z$  (рис. 6.1).

Таким чином, при кодуванні скінченного елемента одна з координат кожного з його вузлів може умовно вважатися змінною. Якщо такий елемент є частиною тіла обертання (наприклад, товстостінної труби), то в якості змінної зручно вибирати одну з циліндричних координат – радіус.

В САПР форма такого елемента задається у вигляді двадцяти функцій форми  $N_i$  ( $i = 1, \dots, 20$ ), що в безрозмірному вигляді мають такий вигляд.

Для кутових вузлів  
( $i = 1, 2, \dots, 8$ ):

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0)(\xi_0 + \eta_0 + \zeta_0 - 2). \quad (6.36)$$

Вузол на ребрі  
( $i=11, 12, 19, 20$ ;  $\xi_i = 0$ ;  $\eta_i = \pm 1$ ;  $\zeta_i = \pm 1$ ):

$$N_i = \frac{1}{4}(1 - \xi^2)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0). \quad (6.37)$$

Вузол на ребрі  
( $i=9, 10, 17, 18$ ;  $\xi_i = \pm 1$ ;  $\eta_i = 0$ ;  $\zeta_i = \pm 1$ ):

$$N_i = \frac{1}{4}(1 - \eta^2)(1 + \xi_0)(1 + \zeta_0). \quad (6.38)$$

Вузол на ребрі  
( $i=13, 14, 15, 16$ ;  $\xi_i = \pm 1$ ;  $\eta_i = \pm 1$ ;  $\zeta_i = 0$ ):

$$N_i = \frac{1}{4}(1 - \zeta^2)(1 + \xi_0)(1 + \eta_0), \quad (6.39)$$

де  $\xi_0 = \xi_i \cdot \xi$ ,  $\eta_0 = \eta_i \cdot \eta$ ,  $\zeta_0 = \zeta_i \cdot \zeta$ , при цьому  $\xi_i$ ,  $\eta_i$ ,  $\zeta_i$  – локальні координати вузлів, а величини  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , що відбивають топологію вузлів в елементі, задаються таблицю (табл. 6.1).

Для переходу від циліндричних координат до декартових скористаємося співвідношеннями:

$$\xi = r \cdot \cos \alpha; \quad \eta = r \cdot \sin \alpha. \quad (6.40)$$

Топологічні координати вузлів

№ вузла	Топологічні координати		
	$\xi$	$\eta$	$\zeta$
1	-1	-1	-1
2	1	-1	-1
3	-1	1	-1
4	1	1	-1
5	-1	-1	1
6	1	-1	1
7	-1	1	1
8	1	1	1
9	-1	0	-1
10	1	0	-1
11	0	-1	-1
12	0	1	-1
13	-1	-1	0
14	1	-1	0
15	-1	1	0
16	1	1	0
17	-1	0	1
18	1	0	1
19	0	-1	1
20	0	1	1

Диференціюючи функції форми по локальних координатах, знайдемо:

– для кутових вузлів  
( $i = 1, 2, \dots, 8$ ):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \frac{1}{8} \xi_i (1 + \eta_0)(1 + \zeta_0)(2\xi_0 + \eta_0 + \zeta_0 - 1); \\
 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{1}{8} \eta_i (1 + \xi_0)(1 + \zeta_0)(2\eta_0 + \xi_0 + \zeta_0 - 1); \\
 \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} &= \frac{1}{8} \zeta_i (1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(2\zeta_0 + \xi_0 + \eta_0 - 1);
 \end{aligned}
 \tag{6.41}$$

– для вузлів на ребрах  
( $\eta_i = 0$ ;  $i = 9, 10, 17, 18$ ):

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{1}{4} (1 - \eta^2) \xi_i (1 + \zeta_0);$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= -\frac{1}{2} \eta (1 + \xi_0) (1 + \zeta_0); \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} &= \frac{1}{4} \zeta_i (1 - \eta^2) (1 + \xi_0);\end{aligned}\quad (6.42)$$

– для вузлів на ребрах  
( $\xi_i = 0$ ;  $i = 11, 12, 19, 20$ ):

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= -\frac{1}{2} \xi (1 + \eta_0) (1 + \zeta_0); \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{1}{4} \eta_i (1 - \xi^2) (1 + \zeta_0); \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} &= \frac{1}{4} \zeta_i (1 - \xi^2) (1 + \eta_0);\end{aligned}\quad (6.43)$$

– для вузлів на ребрах  
( $\zeta_i = 0$ ;  $i = 13, 14, 15, 16$ ):

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \frac{1}{4} \xi_i (1 - \zeta^2) (1 + \eta_0); \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{1}{4} \eta_i (1 - \zeta^2) (1 + \xi_0); \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} &= -\frac{1}{2} \zeta (1 + \xi_0) (1 + \eta_0).\end{aligned}\quad (6.44)$$

Нехай  $r_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $Z_i$  – координати вузлів у глобальній системі координат, тоді

$$\begin{aligned}x &= \sum_{i=1}^{20} N_i (\xi, \eta, \zeta) r_i \cos \alpha_i; \\ y &= \sum_{i=1}^{20} N_i (\xi, \eta, \zeta) r_i \sin \alpha_i; \\ z &= \sum_{i=1}^{20} N_i (\xi, \eta, \zeta) z_i;\end{aligned}\quad (6.45)$$

де  $x$ ,  $y$ ,  $z$  – узагальнені координати вузлів елемента.

Аналогічно, якщо  $u_i$ ,  $v_i$ ,  $\omega_i$  – переміщення вузлів у глобальній системі координат, узагальнені переміщення  $u$ ,  $v$ ,  $\omega$  матимуть вигляд:

$$\begin{aligned}u &= \sum_{i=1}^{20} N_i (\xi, \eta, \zeta) u_i; \\ v &= \sum_{i=1}^{20} N_i (\xi, \eta, \zeta) v_i;\end{aligned}\quad (6.46)$$

$$\omega = \sum_{i=1}^{20} N_i(\xi, \eta, \zeta) \omega_i.$$

Таке перетворення дозволяє виразити похідні функції форми через узагальнені координати:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{pmatrix} = \mathbf{I} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (6.47)$$

Для того, щоб знайти похідні від функцій форми по глобальних координатах у деякій точці  $(\xi, \eta, \zeta)$  потрібно вирішити систему рівнянь з матрицею  $\mathbf{I}$  і двадцятьма правими частинами.

Підставляючи (6.46) у (6.47), знайдемо вираз для матриці  $\mathbf{I}$ .

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i & \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} z_i \\ \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i & \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} z_i \\ \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} x_i & \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} y_i & \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_{20}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_{20}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_{20}}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_{20} & y_{20} & z_{20} \end{bmatrix} \quad (6.48)$$

Маючи похідні функцій форми, можна побудувати матриці  $\mathbf{B}_i$ :

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (6.49)$$

які поєднуються в матрицю  $\mathbf{B}$  за формулою:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_{20}. \quad (6.50)$$

Матриця  $\mathbf{B}$  дозволяє зв'язати між собою деформації  $\varepsilon$  і переміщення  $u$  в елементі:

$$\varepsilon = \mathbf{Y} \cdot u \quad (6.51)$$

Для розрахунку напружень  $\sigma$  необхідно ввести в розгляд характеристики твердості матеріалу, що складає елемент, – модуль пружності  $E$  і коефіцієнт Пуассона  $\nu$ , об'єднавши їх у матрицю  $\mathbf{D}$  вигляду:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (6.52)$$

Тепер з'являється можливість зв'язати з переміщеннями  $u$  напруження  $\sigma$  :

$$\sigma = \mathbf{D} \cdot \mathbf{Y} \cdot u \quad (6.53)$$

і побудувати матрицю твердості елемента  $\mathbf{K}$ :

$$\mathbf{K} = \int_v \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv, \quad (6.54)$$

де  $dv = dx dy dz = |\det \mathbf{J}| d\xi d\eta d\zeta$ .

Підматриця матриці твердості розміром  $(3 \times 3)$   $\mathbf{K}_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, 20$ ) визначається з виразу:

$$\mathbf{K}_{ij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j |\det \mathbf{J}| d\xi d\eta d\zeta. \quad (6.55)$$

Для кожного  $i$ -го елемента добуток  $\mathbf{B}_i^T \mathbf{D}$ , що входить у (6.55), визначається множенням (6.49) на (6.52):

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_i^T \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} (1-\nu) \frac{\partial N_i}{\partial x} & \nu \frac{\partial N_i}{\partial x} & \nu \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{1-2\nu}{2} \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \nu \frac{\partial N_i}{\partial y} & (1-\nu) \frac{\partial N_i}{\partial y} & \nu \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{1-2\nu}{2} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{1-2\nu}{2} \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 \\ \nu \frac{\partial N_i}{\partial z} & \nu \frac{\partial N_i}{\partial z} & (1-\nu) \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{1-2\nu}{2} \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \times \\
&\times \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \begin{bmatrix} (1-\nu) \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{1-2\nu}{2} \left( \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) \\ \nu \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{1-2\nu}{2} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} \\ \nu \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{1-2\nu}{2} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial z} \end{bmatrix} \\
&(1-\nu) \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{1-2\nu}{2} \left( \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) \\
&\quad \nu \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{1-2\nu}{2} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} \\
&\quad \nu \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{1-2\nu}{2} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial z} \\
&\left. \begin{aligned} &\nu \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{1-2\nu}{2} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} \\ &(1-\nu) \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{1-2\nu}{2} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) \\ &\nu \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{1-2\nu}{2} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial z} \end{aligned} \right] \times \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}.
\end{aligned} \tag{6.56}$$

Напруження в елементі можуть бути визначені за формулою:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \mathbf{DB}\boldsymbol{\delta}, \tag{6.57}$$

де  $\delta$  – вектор переміщень вузлів скінченного елемента, який зв'язаний з вектором навантажень  $Q$  через матрицю твердості:

$$\delta = \frac{Q}{K}. \quad (6.58)$$

Оскільки

$$B\delta = \sum_{i=1}^{20} B_i \delta_i; \quad \delta_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}, \quad (6.59)$$

маємо остаточно:

$$\begin{aligned} \sigma = DB\delta &= \sum_{i=1}^{20} DB_i \delta_i = \\ &= \sum_{i=1}^{20} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial N_i}{\partial x} u_i + \nu \left( -\frac{\partial N_i}{\partial x} u_i + \frac{\partial N_i}{\partial y} v_i + \frac{\partial N_i}{\partial z} w_i \right) \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} v_i + \nu \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} u_i - \frac{\partial N_i}{\partial y} v_i + \frac{\partial N_i}{\partial z} w_i \right) \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} w_i + \nu \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} u_i + \frac{\partial N_i}{\partial y} v_i - \frac{\partial N_i}{\partial z} w_i \right) \\ \frac{1-2\nu}{2} \left( \frac{\partial N_i}{\partial y} u_i + \frac{\partial N_i}{\partial x} v_i \right) \\ \frac{1-2\nu}{2} \left( \frac{\partial N_i}{\partial z} v_i + \frac{\partial N_i}{\partial y} w_i \right) \\ \frac{1-2\nu}{2} \left( \frac{\partial N_i}{\partial z} u_i + \frac{\partial N_i}{\partial x} w_i \right) \end{array} \right\} \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \end{aligned} \quad (6.60)$$

## 6.2. Аналіз термічного і концентраційного станів

### 6.2.1. Чисельні методи рішення прямих задач тепломасопереносу

В останні роки в зв'язку з прогресом обчислювальної техніки усе більш широко для дослідження процесів переносу застосовуються чисельні методи, зокрема метод сіток, скінченних елементів, прямих, Монте-Карло. З чисельних методів найбільш універсальним є метод сіток або метод різниць, який дозволяє



вирішувати як лінійні, так і нелінійні диференціальні і інтегродиференціальні рівняння. Його використання дає можливість відмовитися від спрощень математичної моделі процесів переносу, причому рішення може бути отримане з наперед заданим ступенем точності. Істотне достоїнство методу сіток – багаторазова повторюваність однакових математичних операцій, що є, з одного боку, сприятливим чинником для застосування сучасної обчислювальної техніки, а з іншого, – накладає суттєві обмеження на часову складність кожної окремої операції.

Метод сіток полягає в тому, що вихідне диференціальне рівняння з його крайовими умовами замінюється системою алгебраїчних рівнянь, які приблизно описують дану крайову задачу. Цю систему алгебраїчних рівнянь називають різницевою схемою.

Для чисельного рішення одомірної задачі теплопровідності, що полягає у відшуванні функції  $t(x, \tau)$ , яка задовольняє в області  $G$  ( $0 \leq x \leq l$ ;  $\tau \geq 0$ ) рівнянню

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} - a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = 0 \quad (6.61)$$

і крайовим умовам

$$t(0, \tau) = t(L, \tau) = \psi(\tau), \quad t(x, 0) = \varphi(x), \quad (6.62)$$

необхідно замінити область неперервної зміни аргументів  $x$  і  $\tau$  областю дискретної їх зміни. Так, відрізок  $(0, L)$  зміни аргументу  $x$  розділяється на  $M$  однакових частин із кроком  $h = L/M$ . У результаті одержимо сімейство прямих  $x_m = mh$  ( $m = 0, 1, \dots, M$ ).

Таким же чином може бути розділений інтервал зміни аргументу  $\tau$  і отримане сімейство прямих  $\tau_n = nl$  ( $n = 0, 1, \dots$ ). Множина точок, які утворюються в результаті перетинання прямих  $x_m$  ( $m = 0, 1, \dots, M$ ) і  $\tau_n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ), називається сіткою, окремі точки – вузлами сітки, а функція, обумовлена у вузлах сітки, – сітковою функцією.

На отриманій сітці необхідно замінити диференціальне рівняння системою скінченно-різницевого рівнянь. Для цього існує декілька різних способів. Найбільш простий спосіб ґрунтується на наближеній заміні кожної з часток похідних різницевою відносинами, які при наближенні кроку сітки до нуля прагнуть до відповідної похідної.

Наприклад,

$$\frac{\partial t(x_m, \tau_n)}{\partial \tau} = \frac{t(x_m, \tau_{n+1}) - t(x_m, \tau_n)}{l} + O(l), \quad (6.63)$$

$$\frac{\partial^2 t(x_m, \tau_n)}{\partial x^2} = \frac{t(x_{m+1}, \tau_n) + t(x_{m-1}, \tau_n) - 2t(x_m, \tau_n)}{h^2} + O(h^2). \quad (6.64)$$

Величини  $O(l)$  і  $O(h^2)$  – це різниця між похідною та її різницевою апроксимацією. Вона називається погрішністю апроксимації. Прийнято говорити, що порядок апроксимації функції дорівнює  $k$ , якщо погрішність апроксимації цієї функції  $O(z^k)$ .

Останній вираз – величина, для якої  $\lim_{z \rightarrow 0} O(z^k)/z^k = \text{const}$ . Величина  $O(z^k)$  може бути знайдена, наприклад, за допомогою формули Тейлора представлення значень  $t$  для вузлів  $(\tau_{n+1}, x_m)$ ,  $(\tau_n, x_{m-1})$ ,  $(\tau_n, x_{m+1})$  через значення  $t$  та її похідних в точці  $(\tau_n, x_m)$ :

$$t(\tau_{n+1}, x_m) = t(\tau_n, x_m) + l \frac{\partial t(\tau_n, x_m)}{\partial \tau} + \frac{l^2}{2!} \frac{\partial^2 t(\tau_n, x_m)}{\partial \tau^2} + \dots, \quad (6.65)$$

$$t(\tau_n, x_{m-1}) = t(\tau_n, x_m) - h \frac{\partial t(\tau_n, x_m)}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 t(\tau_n, x_m)}{\partial x^2} + \dots. \quad (6.66)$$

Легко показати, що в (6.63) і (6.64)

$$O(l) = \frac{l}{2} \frac{\partial^2 t(\tau_n + \theta_1 l, x_m)}{\partial \tau^2}, \quad 0 < \theta_1 < 1; \quad (6.67)$$

$$O(h^2) = \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 t(\tau_n, x_m + \theta_2 h)}{\partial x^4}, \quad |\theta_2| < 1. \quad (6.68)$$

Використовуючи співвідношення (6.63) і (6.64), представимо рівняння (6.61) у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{t(\tau_{n+1}, x_m) - t(\tau_n, x_m)}{l} = a \left[ \theta \frac{t(\tau_n, x_{m+1}) + t(\tau_n, x_{m-1}) - 2t(\tau_n, x_m)}{h^2} + \right. \\ \left. + (1 - \theta) \frac{t(\tau_{n+1}, x_{m+1}) + t(\tau_{n+1}, x_{m-1}) - 2t(\tau_n, x_m)}{h^2} \right] + O(l + h^2). \end{aligned} \quad (6.69)$$

Зневажаючи величиною погрішності апроксимації  $O(l+h^2)$  і позначаючи наближені значення сіткової функції  $t$  у точці  $(x_m, \tau_n)$  через  $t_m^n$  з урахуванням крайових умов (6.62), приходимо до наступної крайовій задачі:

$$\frac{t_m^{n+1} - t_m^n}{l} = a \left[ \theta \frac{t_{m+1}^n + t_{m-1}^n - 2t_m^n}{h^2} + (1 - \theta) \frac{t_{m+1}^{n+1} + t_{m-1}^{n+1} - 2t_m^{n+1}}{h^2} \right], \quad (6.70)$$

$$m = 1, 2, \dots, M - 1; \quad n = 0, 1, \dots;$$

$$t_0^{n+1} = t_M^{n+1} = \psi^{n+1}, \quad t_M^0 = \varphi(x_m), \quad m = 0, 1, \dots, M. \quad (6.71)$$

При  $\theta = 1$  значення невідомої функції  $t_m^{n+1}$  в момент часу  $\tau_{n+1}$  визначаються безпосередньо з різницевих рівнянь схеми (6.70), (6.71) через значення цієї функції у вузлових точках на попередньому часовому шарі  $\tau_n$ . Оскільки значення  $t_m^0$  на шарі  $n = 0$  задані, то «по кроках» уздовж осі часу можна знайти значення  $t_m^n$  на будь-якому шарі  $n$ . Такі схеми називають явними. При  $\theta \neq 1$  для знаходження  $t_m^{n+1}$  доводиться вирішувати систему «зачеплених» алгебраїчних рівнянь. Такого роду схеми називаються неявними.

У деяких випадках для побудови сіткових рівнянь зручно користуватися методом невизначених коефіцієнтів. При цьому диференціальне рівняння замінюється алгебраїчним, куди входять з невизначеними коефіцієнтами значення  $t$  у деякій сукупності вузлів. Ці значення розкладаються в ряд Тейлора щодо однієї і тієї ж точки. Потім вибираються такі невизначені коефіцієнти, щоб різниця між лівими частинами алгебраїчного рівняння і рівняння (6.61) мала потрібний порядок апроксимації.

Кількість вузлових точок, використовуваних при такому способі апроксимації диференціального рівняння, визначається як максимум з числа вузлових точок, необхідних для апроксимації з заданою погрішністю похідних, що входять у розглянуте диференціальне рівняння.

Для побудови сіткових рівнянь може бути використана методика, яка застосовується при виведенні диференціальних рівнянь переносу: спочатку записуються закони збереження для елементів кінцевого об'єму, а потім цей об'єм спрямовується до нуля. При побудові сіткових рівнянь устремління до нуля об'єму елементів не здійснюється.

Досить ефективним способом для побудови різницевих рівнянь є метод комбінування різницевих схем, наприклад, звичайних двошарових явних і неявних схем. Різницеві рівняння переносу в явній формі для часового шару  $\tau_n$  і неявній для шарів  $\tau_{n-1}, \tau_{n-2}$  збільшуються на відповідні вагові множники, а потім додаються. В результаті виходить явне рівняння, яке має більшу стійкість, ніж вихідне явне різницеве рівняння.

Найпростіше різницеве рівняння теплопровідності, отримане методом комбінування явного (для обчислення  $t_m^{n+1}$ ) і неявного (для обчислення  $t_m^n$ ) двошарових різницевих рівнянь, має вигляд:

$$(1 + \theta) \frac{t_m^{n+1} - t_m^n}{l} - \theta \frac{t_m^n - t_m^{n-1}}{l} = a \frac{t_{m+1}^n + t_{m-1}^n - 2t_m^n}{h^2}, \quad (6.72)$$

де  $\theta$  – ваговий множник,  $\theta > 0$ . Хоча ця схема є тришаровою, для її реалізації на ЕОМ потрібно, так само, як і для звичайних двошарових різницевих схем, тільки два числових масиви.

Для початкового моменту часу ( $n=0$ ) величини  $t_m^{n-1}$  знаходяться з умови

$$\frac{t_m^n - t_m^{n-1}}{l} = \beta \frac{t_m^{n+1} - t_m^n}{l}, \text{ де } 0 \leq \beta \leq 1.$$

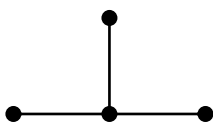
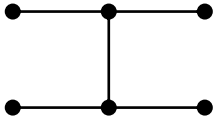
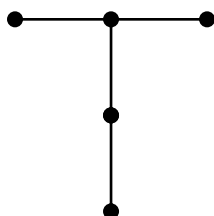
Відзначимо, що величина  $\beta$  впливає на результат рішення лише протягом декількох перших часових кроків. Істотною перевагою схеми (6.68) є те, що при її використанні кроки сітки  $h$  і  $l$  можуть вибиратися практично без обмежень.

Різні різницьеві схеми, застосовувані для рішення рівняння теплопровідності (6.61), представлені в табл. 6.2.

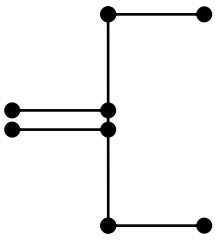
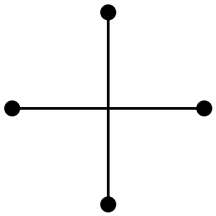
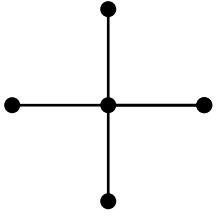
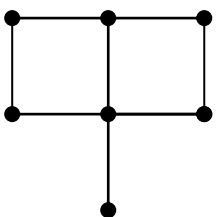
В таблиці прийняті такі позначення:  $\Pi$  – погрішність апроксимації;  $\delta_\tau t_m^n = \frac{t_m^{n+1} - t_m^n}{l}$ ;  $\delta_x u_m^n = \frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2h}$ ;  $\delta_{xx} t_m^n = \frac{t_{m+1}^n + t_{m-1}^n - 2t_m^n}{h^2}$ .

Таблиця 6.2

Різницьеві схеми для рішення рівнянь типу  $\frac{\partial t}{\partial \tau} = -a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$

№ № п/п	Шаблон різницевої схеми	Різницьеві рівняння, погрішність апроксимації $\Pi$ , умови стійкості
1		Явна схема: $\delta_\tau t_m^n = a \delta_{xx} t_m^n,$ $\Pi = O(l + h^2).$ Стійка при $l \leq h^2 / 2a$ . При $\frac{al}{h^2} = \frac{1}{6}$ погрішність $\Pi = O(l^2 + h^2)$ .
2		Неявна схема з ваговими множниками: $\delta_\tau t_m^n = a[(1 - \theta)\delta_{xx} t_m^n + \theta\delta_{xx} t_m^{n+1}],$ $0 \leq \theta \leq 1,$ $\Pi = O(l + h^2).$ При $\theta = 0,5$ – схема Кранка-Ніколсона, для якої $\Pi = O(l^2 + h^2)$ . При $\theta \geq 0,5$ абсолютно стійка; при $\theta < 0,5$ стійка, якщо $\frac{h^2}{2a(1 - 2\theta)}$ .
3		Абсолютно стійка неявна тришарова схема: $(1 + \theta)\delta_\tau t_m^n - \theta\delta_\tau t_m^{n-1} = a\delta_{xx} t_m^{n+1},$ $\theta = const > 0,$ $\Pi = O(l + h^2).$ При $\theta = 1/2$ погрішність $\Pi = O(l^2 + h^2)$ . При $\theta = \frac{1}{2} + \frac{h^2}{12al}$ погрішність $\Pi = O(l^2 + h^4)$ .

Таблиця 6.2 (продовження)

4		<p>Абсолютно стійка схема Саульєва:</p> $t_m^{n+1} = t_m^n + \beta(t_{m+1}^n + t_{m-1}^{n+1} - t_m^n - t_m^{n+1});$ $t_m^{n+2} = t_m^{n+1} + \beta(t_{m+1}^{n+2} + t_{m-1}^{n+1} - t_m^{n+1} - t_m^{n+2});$ $\beta = al/h^2;$ $\Pi = O[l + h^2 + (l/h)^2].$ <p>Недолік: <math>\Pi = O(l + h^2)</math> при <math>l/h^2 = O(1)</math>.</p>
5		<p>Абсолютно стійка явна схема Дюфорта і Франкеля:</p> $\frac{t_m^{n+1} - t_m^{n-1}}{2l} = a \frac{t_{m+1}^n + t_{m-1}^n - t_m^{n+1} - t_m^{n-1}}{h^2};$ $\Pi = O[l + h^2 + (l/h)^2].$ <p>Недолік: <math>\Pi = O(l + h^2)</math> при <math>l/h^2 = O(1)</math>.</p>
6		<p>Явна схема Нікітенко:</p> $(1 + \theta)\delta_\tau t_m^n - \theta\delta_\tau t_m^{n-1} = a\delta_{xx} t_m^n,$ $\theta > 0.$ <p>Стійка при <math>\theta \geq \frac{al}{h^2} - 0,5 &gt; 0</math>. При <math>\frac{al}{h^2} - 0,5 \leq 0</math> для стійкості досить покласти <math>\theta = 0</math>. При <math>\theta = 3\frac{al}{h^2} - 0,5 &gt; 0</math> погрішність</p> $\Pi = O(l^2 + h^4).$
7		<p>Узагальнена неявна тришарова схема з ваговими множниками:</p> $(1 + \theta)\delta_\tau t_m^n - \theta\delta_\tau t_m^{n-1} = a[(1 - \theta_1)\delta_{xx} t_m^{n+1} + \theta_1\delta_{xx} t_m^n]$ $\theta = const > 0, \quad 0 \leq \theta_1 \leq 1,$ $\Pi = O(l + h^2).$ <p>Включає як окремі випадки схеми 1,2,3 і 6.</p>

Досить часто при числовому рішенні задач переносу приходиться користуватися нерівномірними сітками. Нехай потрібно знайти різницевий вираз для похідної в деякій вузловій точці  $v$  з координатами  $x_{1v}, x_{2v}, \dots, x_{Jv}$ . Позначимо через  $\mathbf{h}_{vp}$  радіус-вектор, спрямований із точки  $v$  у точку  $p$  з компонентами  $h_{1vp}, h_{2vp}, \dots, h_{Jvp}$ , на осі координат відповідно  $x_1, x_2, \dots, x_J$ .

Вираз для похідної порядку  $A$  від функції  $t$  по координатах  $x_1, x_2, \dots, x_J$  з погрішністю порядку  $B$  може бути представлений у вигляді:

$$\frac{\partial^A t}{\partial x_1^{A_1} \partial x_2^{A_2} \dots \partial x_J^{A_J}} = \sum_{p=1}^{M_J} a_p t_p - t_v \sum_{p=1}^{M_J} a_p, \quad (6.73)$$

де  $A_1 + A_2 + \dots + A_p = A$ .

Для одномірної задачі  $J = 1$  і  $\frac{\partial^A t}{\partial x_1^{A_1} \partial x_2^{A_2} \dots \partial x_J^{A_J}} = \frac{\partial^A t}{\partial x^A}$ .

Число вузлових точок  $M_J$ , використовуваних при обчисленні даної похідної, визначається за формулою:

$$M_J = \sum_{r=1}^{A+B-1} \Gamma_J^r, \quad (6.74)$$

причому

$$\Gamma_1^r = 1; \quad \Gamma_J^r = r + 1 + \sum_{j=1}^r (\Gamma_{J-1}^j - 1); \quad J = 2, 3, \dots \quad (6.75)$$

Для одномірної ( $J = 1$ ), двомірної ( $J = 2$ ) і тримірної ( $J = 3$ ) задач

$$M_1 = A + B - 1; \quad M_2 = \frac{(A+B)^2}{2} + \frac{A+B}{2} - 1; \quad (6.76)$$

$$M_3 = \sum_{r=1}^{A+B-1} \left( \frac{r^2}{2} + \frac{3}{2}r + 1 \right). \quad (6.77)$$

Коефіцієнти  $a_p$  ( $p = 1, 2, \dots, M_J$ ) обчислюються із системи алгебраїчних рівнянь

$$\frac{1}{A_1! A_2! \dots A_J!} \sum_{p=1}^{M_J} a_p h_{1\nu p}^{A_1} h_{2\nu p}^{A_2} \dots h_{J\nu p}^{A_J} = 1; \quad (6.78)$$

$$\sum_{p=1}^{M_J} a_p h_{1\nu p}^{\gamma_1} h_{2\nu p}^{\gamma_2} \dots h_{J\nu p}^{\gamma_J} = 0 \quad (6.79)$$

при  $\sum_{j=1}^J \gamma_j = 1, 2, \dots, A+B-1$ ;  $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_J) \neq (A_1, A_2, \dots, A_J)$ , причому  $\gamma_j$  може приймати значення  $0, 1, \dots, A+B-1$ .

Нехай, наприклад, потрібно знайти різницевий вираз першої ( $A = 1$ ) похідної  $\partial t / \partial x$  через значення функції  $t$  у точках осі  $x$  ( $J = 1$ ) із другим порядком апроксимації ( $Y = 2$ ). Для цього випадку  $A + B - 1 = 2$ , згідно (6.74), (6.75)  $M_J = M_1 = \sum_{r=1}^2 \Gamma_1^r = \Gamma_1^1 = \Gamma_1^2 = 1 + 1 = 2$  і система рівнянь (6.79) приймає вигляд:

$$a_1 h_1 + a_2 h_2 = 1; \quad a_1 h_1^2 + a_2 h_2^2 = 0. \quad (6.80)$$

Підставляючи знайдені з цієї системи значення коефіцієнтів  $a_1$  і  $a_2$  у (6.75), знаходимо

$$\frac{\partial t_v}{\partial x} = \frac{(t_2 - t_0)h_1^2 - (t_0 - t_1)h_2^2}{h_1 h_2 (h_2 - h_1)} + O(h^2) = \delta_x t + O(h^2). \quad (6.81)$$

При  $h_2 = -h_1 = h$  приходимо до симетричного різницевого відношення, що апроксимує похідну на рівномірній сітці  $\delta_x t = (t_2 - t_1)/2h$ . Для випадку визначення похідної  $\partial^2 t / \partial x^2$  через значення функції  $t$ , які лежать на осі  $x$ , з погрішністю апроксимації  $O(h^2)$  зі співвідношень (6.74), (6.75) одержуємо, що  $M_J = M_I = 3$ , і система рівнянь (6.79) приймає вигляд:

$$\sum_{p=1}^3 a_p \mathbf{h}_{vp} = 0 ; \quad \sum_{p=1}^3 a_p \mathbf{h}_{vp}^3 = 0 ; \quad \frac{1}{2!} \sum_{p=1}^3 a_p \mathbf{h}_{vp}^2 = 1 . \quad (6.82)$$

З цієї системи випливає, що

$$a_1 = \frac{h_3^2 - h_2^2}{h_1 \Phi} ; \quad a_2 = \frac{h_1^2 - h_3^2}{h_2 \Phi} ; \quad a_3 = \frac{h_2^2 - h_1^2}{h_3 \Phi} ;$$

$$\Phi = \frac{1}{2} [h_1(h_3^2 - h_2^2) + h_2(h_1^2 - h_3^2) + h_3(h_2^2 - h_1^2)]. \quad (6.83)$$

Вище передбачалося, що при визначенні на різницевій сітці похідної від функції  $t$  у точці  $(x_{1v}, x_{2v}, \dots, x_{Jv})$  значення функції  $t(x_{1v}, x_{2v}, \dots, x_{Jv})$  відомо. Якщо значення  $t(x_{1v}, x_{2v}, \dots, x_{Jv})$  невідомо, тоді при обчисленні похідної в точці  $(x_{1v}, x_{2v}, \dots, x_{Jv})$  до системи рівнянь (6.79) необхідно приєднати додатково умову  $\sum_{p=1}^{M_J} a_p = 0$  і число  $M_J$  повинне бути збільшене на одиницю.

Вище розглянуті різні способи побудови різницевого рівняння, які апроксимують диференціальні рівняння. Однак далеко не всі апроксимуючі різницеві рівняння придатні для чисельного рішення задач.

Позначимо через  $\varepsilon_m^n$  різницю між рішенням  $t(x_m, \tau_n)$  задачі (6.61), (6.62) і рішенням  $t_m^n$  задачі (6.70), (6.71) у точці  $(x_m, \tau_n)$ . Погрішність рішення  $\varepsilon_m^n$  виникає внаслідок заміни диференціального рівняння різницевою апроксимацією. Питання про те, зростає чи убиває ця погрішність при зменшенні кроків розбивки, зв'язаний із проблемою збіжності чисельного рішення. В залежності від того, убиває чи зростає помилка  $\varepsilon_m^n$  при зменшенні за деяким законом кроків

розбивки, різницева схема називається такою, що сходиться або розходиться. Остання, природно, не має практичного сенсу.

Якщо точне рішення є досить гладким, а рішення різницевої задачі сходиться, то помилка  $\varepsilon_m^n$  має той же порядок малості, що і погрішність апроксимації диференціального рівняння сітковим рівнянням (для рівняння (6.62) вона дорівнює  $O(l + h^2)$ ).

Як приклад розглянемо збіжність рішення різницевої задачі (6.70), (6.71) до рішення задачі (6.61), (6.62) при  $\theta = 1$ . Віднімемо з рівнянь системи (6.61), (6.62) рівняння (6.70), (6.71). В результаті одержимо:

$$\begin{aligned} \varepsilon_m^{n+1} &= \varepsilon_m^n \left(1 - \frac{2al}{h^2}\right) + (\varepsilon_{m+1}^n + \varepsilon_{m-1}^n) \frac{al}{h^2} + l\beta_m^n, \\ m &= 1, 2, \dots, M-1; \quad n = 0, 1, \dots, \beta_m^n = O(l + h^2); \\ \varepsilon_0^{n+1} &= \varepsilon_M^{n+1} = 0; \quad \varepsilon_m^0 = 0, m = 0, 1, \dots, M. \end{aligned} \quad (6.84)$$

Покажемо, що при

$$2al/h^2 = C \leq 1, \quad C = \text{const} \quad (6.85)$$

ця схема сходиться. Нехай  $E^n = \max_{0 < m < M} |\varepsilon_m^n|$ ;  $B = \max_{m,n} |\beta_m^n| = O(l + h^2)$ . Тоді з (6.83) з урахуванням (6.85) або  $\varepsilon_m^{n+1} \leq E^n(1 - C) + E^n C + lB$  знаходимо

$$E^{n+1} \leq E^n + lB, n = 0, 1, \dots \quad (6.86)$$

Підсумовуючи нерівності (6.86) по  $n$  від 0 до  $N$ , де  $Nl < T = \text{const}$ , одержуємо  $E_N \leq TB = O(l + h^2)$ .

При чисельному рішенні поряд з погрішностями апроксимації неминуче виникають погрішності, обумовлені округленням результатів. Остання обставина пов'язана з тим, що всі обчислювальні пристрої можуть оперувати числами з кінцевим числом розрядів.

Таким чином, якщо  $t_m^n$  є точне рішення системи рівнянь (6.70), (6.71), то фактично одержуване рішення  $t_m^n$  буде відрізнятись від  $t_m^n$  на величину  $\xi_m^n$ , яку називають числовою помилкою. При розгляді помилок округлення необхідно досліджувати умови, при яких амплітуда помилок або згладжується, або необмежено зростає згодом.

Для дослідження стійкості за початкових умов широкого поширення одержали методи поділу змінних, інтеграла Фур'є, енергетичних нерівностей.

Перший метод зв'язаний з аналізом рішення лінійних різницевих рівнянь з постійними коефіцієнтами. При цьому рішення засноване на розподілі змінних



і наступній суперпозиції власних рішень, тобто аналогічно рішенню методом поділу змінних диференціальних рівнянь у частинних похідних.

Метод інтеграла Фур'є зручний для дослідження стійкості різницевого рівнянь, коефіцієнти яких не залежать від просторових координат. Цей метод звичайно застосовується для знаходження необхідних умов стійкості рішення різницевої задачі, коли як початкова функція використовується експонента  $t_m^0 = \exp(i\mu x_m) = \exp(i\mu mh)$ , де  $i$  – мнима одиниця;  $\mu$  – деяке речовинне число. Цю функцію називають гармонікою. Відповідне рішення різницевої задачі відшукується у вигляді добутку

$$t_m^n = T \exp(i\mu mh), \quad (6.87)$$

де  $T = T(n)$ . Якщо функція  $T$  рівномірно обмежена на всіх часових шарах, то рішення різницевої задачі є рівномірно стійким по всіх гармоніках. Визначення необхідних умов стійкості по всіх гармоніках для лінійних різницевого рівнянь звичайно не викликає утруднень. На основі інтеграла Фур'є можна представити будь-які початкові дані у вигляді гармонійного ряду  $\varphi(x_m) = \sum_s T_s \exp(i\mu mh)$ , де

$\mu_s = \pi s / Mh, s = 1, 2, \dots, M - 1$ . Таким чином можна одержати достатні умови стійкості.

Для знаходження необхідних умов стійкості різницевої задачі (6.70), (6.71) по початкових умовах підставимо (6.87) у (6.70). З урахуванням співвідношення  $\exp(-i\mu h) + \exp(i\mu h) - 2 = -4 \sin^2 \frac{\mu h}{2}$  в результаті підстановки приходимо до рівняння

$$\frac{1 - 4\beta(1 - \theta) \sin^2 \frac{\mu h}{2}}{1 - 4\beta\theta \sin^2 \frac{\mu h}{2}} = \frac{T(n+1)}{T(n)} = \lambda_s, \quad (6.88)$$

де  $\beta = al / h^2$ ;  $\lambda_s$  – величина, що не залежить від  $n$  і  $m$ .

З рівняння (6.88) випливає, що  $T = A\lambda_s^n$ ,  $A = \text{const}$ . Для того, щоб функція (6.87) залишалася обмеженою при будь-яких  $n$ , варто задовольнити умову  $|\lambda_s| \leq 1$ . Легко помітити, що нерівність  $\lambda_s < 1$  задовольняється при будь-яких значеннях  $\mu$  і  $h$ . Для того, щоб виконувалася умова  $\lambda_s > -1$ , потрібно відповідно до (6.88) прийняти  $\theta \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2\beta \sin^2 \frac{\mu h}{2}}$ .

Оскільки  $\sin^2 \frac{\mu h}{2} < 1$ , необхідною умовою стійкості є задоволення

$$\theta \geq \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4al}. \quad (6.89)$$

З (6.89) випливає, що при  $\theta \geq 1/2$  різницеве рівняння (6.62) абсолютно стійко по початкових умовах. Умова стійкості явної схеми ( $\theta = 0$ ) –  $al/h^2 \leq 1/2$  збігається з умовою збіжності (6.85). Такий збіг не випадковий: з апроксимації і стійкості звичайно випливає збіжність. Ця обставина дозволяє при побудові різницевої схем обмежуватися дослідженням або збіжності, або стійкості. Знайдемо необхідні умови стійкості рішення тришарового явного різницевого рівняння (6.72) при крайових умовах (6.71). Після підстановки (6.87) у (6.72) приходимо до рівняння

$$\frac{(1+\theta)T(n+1) + \theta T(n-1)}{(1+2\theta)T(n)} = 1 - \frac{4al}{h^2(1+2\theta)} \sin^2 \frac{\mu h}{2} = \lambda. \quad (6.90)$$

Розкладаючи функції  $T(n+1)$  й  $T(n-1)$  у ряд Тейлора, можна ліву частину цього рівняння представити у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{(1+\theta)T(n+1) + \theta T(n-1)}{(1+2\theta)T(n)} &= 1 + \frac{l}{(1+2\theta)T(n)} \frac{\partial T}{\partial \tau} + O(l^2) = \\ &= 1 + \frac{1}{1+2\theta} \left( \frac{T(n+1)}{T(n)} - 1 \right) + O_1(l^2) = \lambda \end{aligned} \quad (6.91)$$

або

$$\frac{T(n+1)}{T(n)} = 1 + (1+2\theta)(\lambda - 1 + O(l^2)) = \gamma. \quad (6.92)$$

Звідси випливає, що  $T(n) = A\gamma^n$  ( $A = const$ ) і  $t_m^n = t_m^0 \gamma^n$ .

Для стійкості рішення задачі (6.70), (6.71) потрібно, щоб  $\lambda \leq 1$ . Оскільки  $0 \leq \sin^2 \frac{\mu h}{2} \leq 1$ , відповідно до необхідної умови стійкості різницевої схеми (6.72) є задоволення нерівності

$$2al / [h^2(1+2\theta)] \leq 1. \quad (6.93)$$

З (6.93) випливає, що вибір відповідного значення параметра  $\theta$  дозволяє приймати кроки  $l$  і  $h$  практично довільно. Однак у силу того, що погрішність апроксимації схеми (6.72)  $O(l+h^2)$ , значення параметра  $\theta$  повинне бути обмежено.

Ефективні достатні умови збіжності і стійкості вдається одержати лише

для відносно простих лінійних рівнянь у частинних похідних. Велике значення мають прості і разом з тим близькі до достатніх необхідні умови збіжності і стійкості. Однак відомі методи одержання необхідних умов стійкості не вичерпують усе різноманіття схем, що зустрічаються. Тому широке поширення одержали практичні прийоми дослідження стійкості різницевої схем, наприклад заморожування коефіцієнтів для різницевої рівнянь зі змінними коефіцієнтами.

По цьому методу лінійні різницеві рівняння зі змінними коефіцієнтами замінюються такими ж рівняннями з постійними коефіцієнтами, рівними значенням відповідних змінних коефіцієнтів у будь-якій точці розглянутої області. Якщо при виборі будь-якої точки схема, що складається з рівнянь з постійними коефіцієнтами, виявляється стійкою, то і початкові схеми (зі змінними коефіцієнтами) вважають стійкими. Теоретично ці прийоми не обґрунтовані або обґрунтовані тільки для окремих випадків, але досить добре перевірені на практиці.

Алгоритми розрахунку процесів переносу, засновані на явних різницевої схем, дуже прості. При цьому перехід до багатомірних задач і нерівномірних сіток не приводить до істотного ускладнення алгоритмів. Однак для більшості явних схем умови стійкості накладають значні обмеження на крок різницевої сітки. Для задач теплопровідності і дифузії відомі явні схеми, при реалізації яких кроки  $h$  і  $l$  можуть вибиратися практично будь-якими (див. схеми 4 – 6 табл. 6.2). Однак для схем Саульєва і Дюфорта-Франкеля обмеження на крок  $l$  зв'язано з погрішністю апроксимації. Крім того, ці схеми незручні при побудові консервативних різницевої рівнянь для нелінійних задач переносу. У цьому відношенні визначені переваги має схема (6.72), що з погляду простоти реалізації і ефективності не має конкуренції серед інших різницевої рівнянь теплопровідності, які мають другий порядок апроксимації по просторовій координаті.

Реалізація неявних різницевої схем являє собою істотно більш складну задачу і зв'язана з розв'язанням системи зчеплених алгебраїчних рівнянь. Для цього звичайно використовується метод послідовного виключення невідомих, названий методом прогону і зручний для рішення одномірних задач. У випадку застосування цього методу для багатомірних задач здійснюються різного роду розщеплення операторів у вихідних диференціальних рівняннях переносу, що дозволяє звести рішення багатомірної задачі до ланцюжка одномірних задач. На нерівномірних просторових сітках використання методу прогону сполучено зі значними труднощами. До його недоліків відносяться складність алгоритму і труднощі в оцінці погрішності рішення.

### 6.2.2. Чисельні методи рішення зворотних задач тепломасопереносу

Основа математичного забезпечення теплових експериментів у ряді випадків складають методи рішення зворотних задач тепломасопереносу (ЗЗТ). Під останніми розуміються задачі, у яких шукана величина недоступна або важкодоступна для прямого вивчення. Тому для її знаходження використовуються результати непрямих вимірів інших величин. До зворотних задач теплопровідності можуть бути віднесені задачі визначення крайових температурних чи теп-

лових режимів і задачі визначення теплофізичних характеристик матеріалів.

Якщо прямі задачі теплопровідності є коректно поставленими (рішення задачі існує, є єдиним при будь-яких вхідних даних і стійко щодо малих збурювань вхідних даних), то зворотні задачі відносяться до числа некоректно поставлених.

У теплотехнічних дослідженнях досить широко використовуються рішення зворотних задач теплопровідності, засновані на моделях процесів, що характеризуються невеликою кількістю параметрів. Так, наприклад, для експериментального визначення граничних умов теплообміну по температурах, обмірюваних у деяких точках тіла, застосовуються залежності, знайдені рішенням рівняння теплопровідності для відносно простих теплових режимів (стаціонарного, регулярного, нестаціонарного) при деякому визначеному характері зміни крайових умов. Практичне використання зазначених рішень у ряді випадків виявляється важким, а іноді і неможливим. У зв'язку з цим великого значення набувають чисельні методи рішення некоректно поставлених зворотних задач теплопровідності.

Серед існуючих методів рішення граничних ЗЗТ значне місце займають варіаційні методи рішення. Вони засновані на мінімізації функціонала, який представляє узятий по деякій нормі відхил. Для рішення задачі ЗЗТ у варіаційній постановці застосовуються метод найменших квадратів, пошукові методи градієнтного типу, метод підбору.

Як приклад наведемо різницевий метод рішення граничних ЗЗТ, заснований на пошуку температурної функції, яка задовольняє рівнянню теплопровідності і одній з граничних умов у всій розглянутій області, а іншим – тільки в деякій рахунковій множині точок.

Розглянемо для пластини  $0 \leq x \leq L$  ЗЗТ, що описується системою рівнянь:

$$c_p \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right), \quad 0 < x < L; \quad \tau > 0; \quad (6.94)$$

$$t(x, 0) = \varphi(x); \quad (6.95)$$

$$t(0, \tau) = \psi(\tau); \quad (6.96)$$

$$\frac{\partial t(0, \tau)}{\partial x} = \psi_1(\tau). \quad (6.97)$$

З цих рівнянь потрібно знайти температурну функцію  $t(x, \tau)$  в області  $0 \leq x \leq L, \tau > 0$ , а також тепловий потік на границі  $x = L$ .

Слід зазначити, що на пряму і на зворотну задачі аналогічного виду розпадається задача теплопровідності в пластині, для якої замість однієї з граничних умов (6.96) чи (6.97) задана зміна температури в деякій внутрішній точці  $0 < x < L$ .

Щоб некоректно поставлена ЗЗТ (6.94) – (6.97) стала прямою задачею теплопровідності, досить замість однієї з умов на границі  $x = 0$ , скажімо (6.97), за-

дати температуру

$$t(L, \tau) = z(\tau). \quad (6.98)$$

Рішення рівнянь (6.94) – (6.96), (6.98) буде шуканим рішенням задачі (6.94) – (6.97), якщо функція  $z$  буде підбрана таким чином, що умова (6.97) виявиться задоволеною. Нижче розглядається різницева схема визначення такої функції  $z$ , яка забезпечує задоволення умови (6.97) у деякій заданій множині точок.

Ця ж схема може бути використана для знаходження замість температури  $t(L, \tau)$  теплового потоку  $Q$  на границі  $x = L$ . Однак, як показали чисельні експерименти, за інших рівних умов відновлення температури границі тіла забезпечує більш високу точність у порівнянні з відновленням теплового потоку. Тому визначення  $Q$  доцільно проводити після обчислення  $t(L, \tau)$ .

Якщо в деякому наближенні функція  $z(\tau)$  відома, то функція  $t(x, \tau)$  може бути знайдена, наприклад, по явній різницевій схемі, яка на сітці  $x_i = ih$ ;  $i = 0, 1, \dots, I$ ;  $I = L/h$ ;  $h = \text{const}$ ;  $\tau_n = nl$ ;  $n = 0, 1, \dots$  може бути представлена у вигляді

$$u_i^{n+1} = u_i^n \left( 1 - 2 \frac{l\lambda}{c\rho h^2} \right) + \frac{\lambda l}{c\rho h^2} (u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) + \frac{l}{c\rho} \frac{\partial \lambda}{\partial t} \left( \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} \right); \quad (6.99)$$

$$i = 1, 2, \dots, I - 1 ;$$

$$u_i^0 = \varphi(x_i); u_0^{n+1} = \psi(\tau_{n+1}); u_I^{n+1} = z(\tau_{n+1}). \quad (6.100)$$

Рішення задачі (6.99), (6.100) дозволяє знайти наближені значення функції теплового потоку  $\psi_I^n$  на різних змінних шарах  $\tau_m$ , які відповідають функції  $z(\tau)$ .

Різниця  $\psi_I(\tau_n) - \psi_I^n$  може бути використана як сигнал неузгодженості для наступного уточнення функції  $z(\tau)$ .

У випадку проведення послідовних наближень для визначення функції  $u_I^n$  зручніше обчислювати замість різниці  $\psi_I(\tau_n) - \psi_I^n$  різницю температур  $t(h, \tau_n) - u_I^n$  у внутрішній вузловій точці  $x = h$ , найближчої до границі  $x = 0$ . Для знаходження  $t(h, \tau_n)$  можна скористатися одним з різницевих рівнянь

$$\begin{aligned} t(h, \tau_n) &= t(0, \tau_n) + h \frac{\partial t(0, \tau_n)}{\partial x} + O(h^2) = \\ &= \psi(\tau_n) + h\psi_1(\tau_n) + O(h^2); \end{aligned}$$

$$t(h, \tau_n) = \psi(0, \tau_n) + h\psi_1(\tau_n) + \quad (6.101)$$

$$+ \frac{h^2}{2} \left[ \frac{c\rho}{\lambda} \frac{\partial \psi(\tau_n)}{\partial \tau} - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial t} \psi^2(\tau_n) \right] + O(h^3).$$

Функція  $z(\tau)$  знаходиться шляхом ітерацій по кроках уздовж осі  $\tau$ . Крок  $\Delta\tau$ , у межах якого визначається функція  $z(\tau)$ , повинний вибиратися з умови, щоб теплові збурювання, які виникли в період  $\Delta\tau$  на границі  $x = L$ , у той же період часу встигли досить чітко проявитися на границі  $x = 0$ .

Якщо, наприклад, на границях рівномірно нагрітої пластини відбулася миттєва зміна температури на величину  $\Delta t$ , то в середині пластини температура зміниться на  $0,01 \Delta t$  при  $Fo = 0,06$ , на  $0,05 \Delta t$  при  $Fo = 0,1$  і на  $0,22 \Delta t$  при  $Fo = 0,6$ . Зазначена умова накладає обмеження на мінімальне значення  $\Delta t$ . Ця обставина приводить до того, що лінійна апроксимація функції  $z(\tau)$  в інтервалі  $\Delta\tau$  виявляється незадовільною.

Припустимо, що температурна функція  $z(\tau) = t(L, \tau)$  в інтервалі  $\tau_j < \tau < \tau_j + \Delta\tau$  є досить гладкою. Розкладемо функцію  $z(\tau)$  в ряд по ступенях  $\tau$  і перетворимо до вигляду:

$$z(\tau) = z(\tau_j) + a_0^j(\tau - \tau_j) + a_1^j(\tau - \tau_j) \left( 1 - \frac{\tau - \tau_j}{\Delta\tau} \right) + \quad (6.102)$$

$$+ a_2^j(\tau - \tau_j) \left( 1 - \frac{\tau - \tau_j}{\Delta\tau} \right) \left( 1 - \frac{\tau - \tau_j}{\tau^{(1)} - \tau_j} \right) +$$

$$+ a_3^j(\tau - \tau_j) \left( 1 - \frac{\tau - \tau_j}{\Delta\tau} \right) \left( 1 - \frac{\tau - \tau_j}{\tau^{(1)} - \tau_j} \right) \left( 1 - \frac{\tau - \tau_j}{\tau^{(2)} - \tau_j} \right).$$

Використання розкладання (6.102) зручно в тому відношенні, що члени з коефіцієнтами  $a_s$ , не впливають на значення функції  $z(\tau)$  в точках  $\tau = \tau_j, \tau_j + \Delta\tau, \tau^{(2)}, \dots, \tau^{(S-1)}$ , які визначаються попередніми членами ряду. Інтервал  $\Delta\tau$  доцільно вибирати кратним добутку  $l(S+1)$ , де  $S$  – індекс коефіцієнта  $a_S^j$  при останньому члені, утримуваному в ряді (6.102). При обчисленні коефіцієнтів  $a_s^j, s = 0, 1, \dots, S$  ряду (6.102) кожному з них ставиться у відповідність визначена точка  $\tau = \tau_j + P\delta\tau$ ;  $P = 1, 2, \dots, S+1$ ;  $\delta\tau = \frac{\Delta\tau}{S+1}$  інтервалу  $[\tau_j, \tau_j + \Delta\tau]$ .

Так, коефіцієнту  $a_0^j$ , що значною мірою визначає поведінку функції  $z(\tau)$  в інтервалі  $[\tau_j, \tau_j + \Delta\tau]$ , зіставляється точка  $\tau^{(0)} = \tau_j + \Delta\tau$ . Кожен коефіцієнт  $a_s^j$  відповідальний за те, щоб у відповідній йому точці  $\tau^{(s)}$  значення  $t(h, \tau^{(s)})$  і  $u_I^S$  практично збігалися, тобто

$$|t(h, \tau^{(s)}) - u_1^s| < \varepsilon, \quad (6.103)$$

де  $\varepsilon$  – мале число, яке у експериментах приймається звичайно рівним  $10^{-9}$ .

Припустимо, що для деякого інтервалу часу  $[\tau_{j-1}, \tau_{j-1} + \Delta\tau]$  функція  $z(\tau)$  і коефіцієнти  $a_s^{j-1}, s = 0, 1, \dots, S$ , уже визначені і потрібно знайти функцію  $z(\tau)$  в інтервалі  $[\tau_j, \tau_j + \Delta\tau]$ . Різниця  $\tau_j - \tau_{j-1}$  вибирається рівною або кратною  $\delta\tau$ , що забезпечує задоволення умови (6.103) на лівому кінці інтервалу  $\tau_j$ .

Коефіцієнти  $a_s^j, s = 0, 1, \dots, S$ , визначаються послідовними наближеннями по циклах. Кожен цикл починається першим наближенням  $a_{S(1)}^j$  і закінчується наближенням  $a_{S(K)}^j$ , коли для точки, що відповідає цьому коефіцієнту, задовольняється умова (6.103). Останнє значення  $a_{S(K)}^j$  попереднього циклу є першим наближенням  $a_{S(1)}^j$  для наступного циклу. Кожне наступне наближення для коефіцієнта  $a_s^j$  проводиться після того, як у точках інтервалу  $[\tau_j, \tau_j + \Delta\tau]$ , що відповідають коефіцієнтам  $a_0^j, a_1^j, \dots, a_{S-1}^j$ , задовольняється умова (6.103). Таким чином, кожне послідовне наближення для коефіцієнта  $a_s^j$  означає початок нового циклу обчислення коефіцієнтів  $a_0^j, a_1^j, \dots, a_{S-1}^j$ . Якщо  $a_{S(k)}^j$  – значення коефіцієнта  $a_s^j$  в  $k$ -му наближенні, то

$$a_{S(k+1)}^j = a_{S(k)}^j + [t(h, \tau^{(s)}) - u_{1(k)}^s] \frac{1}{W_{S(k)}^j}, \quad (6.104)$$

де  $\tau^{(s)}$  – точка інтервалу  $[\tau_j, \tau_j + \Delta\tau]$ , якій відповідає коефіцієнт  $a_s^j$ ;  $u_{1(k)}^s$  – значення сіткової функції  $u_1^s$  на шарі  $\tau^{(s)}$ , обчислене безпосередньо перед проведенням  $(k + 1)$ -го наближення для коефіцієнта  $a_s^j$ ;  $W_{S(k)}^j$  – абсолютна величина швидкості зміни сіткової функції  $u_1^s$  по параметру  $a_s^j$  для даного циклу, що визначається після другого наближення і у наступних наближеннях залишалася незмінною:

$$W_{S(2)}^j = \left| \frac{u_{1(2)}^s - u_{1(1)}^s}{a_{S(2)}^j - a_{S(1)}^j} \right|. \quad (6.105)$$

Для другого наближення швидкість  $W_{S(1)}^j$  приймається рівною швидкості в попередньому циклі. Маючи функцію  $u_1^n$ , можна по співвідношеннях, аналогічних (6.101), знайти тепловий потік на границі  $x = L$ .

Як показали чисельні експерименти, утримання в ряді (6.102) тільки трьох перших членів забезпечує при не занадто різкій зміні температури на границі  $x = L$  досить високу точність рішення задачі (6.94) – (6.97). При цьому коефіцієнтам  $a_0^j$  і  $a_1^j$  ставилися у відповідність точки  $\tau_j + \Delta\tau$  і  $\tau_j + \frac{\Delta\tau}{2}$  – інтервалу  $[\tau_j, \tau_j + \Delta\tau]$ . Коли для вузлових точок  $\tau_j + \Delta\tau$  і  $\tau_j + \frac{\Delta\tau}{2}$  умова (6.88) задовольняється, здійснюється перехід до інтервалу  $[\tau_{j+1}, \tau_{j+1} + \Delta\tau]$ , причому  $\tau_{j+1} = \tau_j + \frac{\Delta\tau}{2}$ . Результати розрахунків показали, що на кожному інтервалі часу для визначення коефіцієнтів  $a_0^j$  і  $a_1^j$  потрібно звичайно 4 – 5 ітерацій. Для ілюстрації розглянутого методу нижче наводяться результати чисельного експерименту, що містив у собі наступні етапи.

1. Рішення прямої задачі (6.94) – (6.96), (6.98) з метою визначення функцій  $\psi_1(\tau)$  і  $t(h, \tau)$  при таких початкових даних:

$$t(x, 0) = 1; t(0, \tau) = 1 + b_1\tau; t(L, \tau) \exp(-b_2\tau) \sin b_3\tau;$$

$$h = \frac{L}{10} = 0, 1; \quad c\rho = 1; \quad \lambda = 1 + b_4t + b_5t^2; \quad b_m = \text{const};$$

$$m = 1, 2, \dots, 8; \quad b_3 = 1 \dots 15.$$

2. Збурювання функцій  $\psi(\tau), \psi_1(\tau)$  і  $\varphi(x)$ , що характеризують умови теплообміну на границях  $x = 0$  і температурне поле в початковий момент часу. Для збурювання функції  $\psi_1(\tau)$  використовувався генератор випадкових чисел, розподілених по нормальному закону при середній відносній помилці  $\xi = \frac{\Delta\psi_1}{\psi_1} = 0 \dots 0,5$ . Збурювання температури  $\psi(\tau)$  здійснювалося додаванням до функції  $\psi$  знакозмінної функції  $\Delta t = \psi b \sin b_6\tau$ , де  $b = 0 \dots 0,5; b_6 = 0 \dots 15$ . Функція  $\varphi(x)$  збурювалася додаванням до функції  $\varphi(x)$  функції  $\Delta\varphi = \varphi(x) b_7 \sin b_8x$ , де  $b_7 = 0 \dots 0,15; b_8 = 0 \dots 100$ .

3. Рішення ЗЗТ на збурених даних. При рішенні зворотної задачі на незбурених вхідних даних погрішність практично не відрізняється від погрішності рішення на тій же сітці прямої задачі.

У табл. 6.3 наведені результати чисельного експерименту на точних і збурених вхідних даних при  $b = 0; \frac{1}{b_2} = b_3 = 3; b_4 = b_5 = 0,1; b_6 = 4; \Delta\tau = 0,3; b_7 = b_8 = 0$ .

З таблиці видно, що при точному завданні вхідних даних розходження між точними значеннями температури і значеннями, знайденими в результаті рішення ЗЗТ, не перевищує 1%.



Неточне завдання вхідних даних приводить до збільшення погрішності визначення сіткової функції  $u_I^n$ . Однак це збільшення не зв'язане зі зростанням погрішності обчислень, що побічно підтверджується розрахунками, проведеними для різних законів зміни функцій  $t(L, \tau)$  і  $\lambda = \lambda(t)$ . При зміні погрішності у вхідних даних середня погрішність визначення функції  $t(L, \tau)$  на основі рішення ЗЗТ змінюється приблизно пропорційно.

Якщо середня відносна погрішність знаходження  $t(L, \tau)$ , віднесена до початкової температури  $t(0, 0)$ , є  $\xi$ , то відносини погрішностей  $\xi_L/\xi$  і  $\xi_L/b$  при рішенні ЗЗТ з інтервалом часу  $\Delta\tau = 0,3$  приблизно склали 1,3 і 0,86. При  $\Delta\tau = 0,6$  відносини  $\xi_L/\xi \approx 0,8$  і  $\xi_L/b \approx 0,9$ .

Погрішність завдання початкових вихідних даних  $\varphi(x)$  впливає на температурну функцію лише при відносно невеликих значеннях  $Fo < 0,5$ , причому погрішність убуває із зростанням  $b_8$ . Зміна  $b_8$  від 1 до 100, коли  $b_7 = 0,1; \xi = 0; b = 0$ , приводить до убування максимальної погрішності визначенні температури  $t(L, \tau)$  при  $\tau = \Delta\tau/2$  від 11 до 6%.

Таблиця 6.3

Порівняння значень температури на правій границі пластини, знайдених у результаті рішення ЗЗТ на збурених початкових даних, з точним рішенням

$\tau$	$t(L, \tau)$	Значення $t(L, \tau)$ , отримані при рішенні ЗЗТ			
		$\xi = 0; b = 0$	$\xi = 0,05; b = 0$	$\xi = 0,1; b = 0$	$\xi = b = 0,05$
0,15	1,4130	1,4140	1,4250	1,4364	1,5190
0,45	1,8390	1,8490	1,8790	1,9080	1,9730
0,60	1,7970	1,8070	1,7200	1,6320	1,7450
0,90	1,3160	1,3190	1,1730	1,0270	1,1810
1,20	0,7033	1,7070	1,5855	1,4637	0,5628
1,50	0,4071	0,4111	0,3107	0,2856	0,2560
1,80	0,5759	0,5761	0,3986	0,2987	0,3254
2,10	1,0080	1,0070	0,9296	0,8516	0,8579
2,40	1,3560	1,3580	1,2710	1,1830	1,2210
2,70	1,3940	1,3960	1,3590	1,3220	1,3440
3,00	1,1510	1,1520	1,1080	1,0650	1,1300
3,30	0,8476	0,8487	0,8160	0,7843	0,8642

Наведені дані свідчать про те, що описана різницева схема рішення ЗЗТ дозволяє знаходити невідомі граничні умови з погрішністю, близькою до погрішності у початкових даних.

## 6.2.3. Чисельний метод визначення теплофізичних характеристик

Більшість експериментальних методів визначення теплофізичних характеристик твердих матеріалів засновано на рішенні лінійних або нелінійних рівнянь теплопровідності при деяких специфічних крайових умовах. Використання цих рішень зв'язано з необхідністю забезпечення стаціонарного теплового режиму, монотонного або миттєвого нагрівання до заданої температури, що пов'язано зі значними труднощами. Для знаходження теплофізичних характеристик усе частіше звертаються до методів, заснованих на чисельному рішенні коефіцієнтних зворотних задач теплопровідності. Ці методи, як правило, не накладають обмежень на характер зміни крайових умов. Фізичний параметр, що входить у рівняння теплопровідності, знаходиться в цьому випадку по відомих крайових умовах і температурах в окремих внутрішніх точках.

Нижче наводиться чисельне визначення коефіцієнта теплопровідності (чи будь-якої іншої характеристики, яка входить у рівняння теплопровідності) на основі рішення ЗЗТ розкладанням зазначеної характеристики в ряд по ступенях температури і знаходженням його коефіцієнтів на основі методу прямого пошуку. Передбачається, що досліджуване тіло являє собою пластину, у якій перенос тепла описується рівнянням теплопровідності

$$c_p \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right), \quad 0 < x < L; \quad 0 < \tau < \tau_k. \quad (6.106)$$

Для початкового моменту часу  $\tau=0$  задається розподіл температури  $t(0, x) = \varphi(x)$ , а на кожній із границь області – по одній граничній умові, причому для розглянутого методу рішення не істотно, якого вони роду. Крім цього задається температура  $t_b = t(\tau, x_b)$  в одній із внутрішніх точок  $x = x_b$ , або в граничній точці області, якщо гранична умова для останньої точки не є умовою першого роду. Функція  $t_b(\tau)$  використовується в процесі пошуку значення фізичної характеристики для порівняння з розрахунковою температурою  $u_b(\tau) = u(\tau, x_b)$ .

Процес рішення задачі починається з апіорного завдання шуканої фізичної характеристики. Надалі для визначеності шуканою характеристикою будемо вважати коефіцієнт теплопровідності  $\lambda = \lambda(t)$ . Маючи функцію  $\lambda_{(r)}(t)$  в наближенні  $r$ , можна рішенням рівняння (6.106) при заданих крайових умовах знайти значення температурної функції  $u_{(r)}$  в  $r$ -м наближенні. Ця задача є коректно поставленою прямою задачею, і її рішення може бути проведено, наприклад, по явній різницевій схемі, що на сітці

$$x_m = mh; \quad m = 0, 1, \dots, M; \quad M = L/h; \quad \tau_n = nl, n = 0, 1, \dots, N; \\ l = \tau_k / N$$

має вигляд

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \frac{l}{2h^2} [(\lambda_m^n + \lambda_{m+1}^n)(u_{m+1}^n - u_m^n) - (\lambda_m^n + \lambda_{m-1}^n)(u_m^n - u_{m-1}^n)]; \quad (6.107)$$

$$u_0^{n+1} = \psi(\tau_{n+1}), \quad u_M^{n+1} = \psi_1(\tau_{n+1}), \quad u_m^0 = \varphi(x_m), \quad (6.108)$$

де  $\psi(\tau), \psi_1(\tau), \varphi(x)$  – задані функції.

Для визначення варіацій функції  $\lambda$ , що зменшують різницю між заданою температурою  $t_b(\tau_n)$  й обчисленої в результаті рішення задачі (6.107) – (6.108) температурою  $u_b^n$  в точках інтервалу  $0 \leq \tau \leq \tau_k$ , розкладемо функцію  $\lambda$  у ряд по ступенях  $\vartheta$  і перетворимо його до вигляду:

$$\begin{aligned} \lambda(u) = & a_0 + a_1 \left(1 - \frac{\vartheta}{\Delta t}\right) + a_2 \vartheta \left(1 - \frac{\vartheta}{\Delta t}\right) + a_3 \vartheta \left(1 - \frac{\vartheta}{\Delta t}\right) \left(1 - \frac{\vartheta}{\Delta t^{(2)}}\right) + \\ & + a_4 \vartheta \left(1 - \frac{\vartheta}{\Delta t}\right) \left(1 - \frac{\vartheta}{\Delta t^{(2)}}\right) \left(1 - \frac{\vartheta}{\Delta t^{(3)}}\right) + \dots, \end{aligned} \quad (6.109)$$

де  $\vartheta = u - t_b(0); \Delta t = t_b(\tau_k) - t_b(0); \Delta t^{(j)} = t_b(\tau^j) - t_b(0)$ .

Розкладання (6.109) зручно в тім відношенні, що значення функції  $\lambda$  на правому кінці інтервалу  $[0, \tau_k]$  при  $\vartheta = \Delta t$  виявляється залежним тільки від параметра  $a_0$ . Розкладання теплофізичних характеристик у ряд по ступенях температури є природним, оскільки, як показує обробка дослідних даних, температурна залежність теплофізичних характеристик різних матеріалів цілком задовільно описується поліномами не вище третього ступеня.

Коефіцієнти ряду  $a_j, j = 0, 1, \dots, I$ , визначаються з умови, що в  $I + 1$  точках інтервалу  $0 \leq \tau \leq \tau_k$  функції  $t(\tau^j, x_b)$  і  $u_b^j$  практично збігаються. Реалізація останньої умови здійснюється задоволенням нерівності

$$\left| \frac{t(\tau^j, x_b) - u_b^j}{t(\tau^j, x_b)} \right| < \delta, \quad (6.110)$$

де  $\delta$  звичайно приймається рівним  $10^{-9}$ .

При знаходженні коефіцієнтів  $a_j, j = 0, 1, \dots, I$ , кожному з них ставиться у відповідність визначена точка  $\tau^j$  інтервалу  $[0, \tau_k]$ : коефіцієнту  $a_0$  – точка  $\tau^0 = \tau_k$ , коефіцієнту  $a_1$  – точка  $\tau^1 = 0$ , коефіцієнтам  $a_j, j = 2, 3, \dots$ , – точки у середині інтервалу  $[0, \tau_k]$ .

Коефіцієнти  $a_j$  обчислюються послідовними наближеннями але циклічно,

починаючи з першого наближення  $a_{j(1)}$  і закінчуючи наближенням  $a_{j(R)}$ , коли для точки, поставленої у відповідність цьому коефіцієнту, задовольняється умова (6.110). Значення коефіцієнта  $a_{j(R)}$  попереднього циклу є першим наближенням  $a_{j(1)}$  для наступного циклу. Кожне наступне наближення для коефіцієнта  $a_j$  проводиться після того, як у точках, яким поставлені у відповідність коефіцієнти  $a_0, a_1, \dots, a_{j-1}$ , задовольняється умова (6.110). Отже, кожне наближення для коефіцієнта  $a_j$  означає початок нового циклу послідовних наближень для коефіцієнтів  $a_0, a_1, \dots, a_{j-1}$ . Якщо  $a_{j(r)}$  — значення коефіцієнта  $a$  в  $r$ -му наближенні, то

$$a_{j(r+1)} = a_{j(r)} + \left[ t(\tau^j, x_b) - u_{b(r)}^j \right] \frac{1}{W_{jr}}, \quad (6.111)$$

де  $u_{b(r)}^j$  — значення сіткової функції, визначене безпосередньо перед проведенням  $(r + 1)$ -го наближення для коефіцієнта  $a_j$ ;  $W_{jr}$  — абсолютна величина швидкості зміни функції  $u_b^j$  по параметру  $a_j$  для даного циклу. Вона визначається після другого наближення  $a_{j(2)}$  й у наступних наближеннях циклу може залишатися незмінною:

$$W_{jr} = \left| \frac{u_{b(r)}^j - u_{b(r-1)}^j}{a_{j(r)} - a_{j(r-1)}} \right|, \quad r \geq 2. \quad (6.112)$$

Для знаходження  $a_{j(2)}$  швидкість береться з попереднього циклу.

Для оцінки цього методу проведений такий чисельний експеримент. Для обраного коефіцієнта теплопровідності  $\lambda(t) = 1 + b_1 t + b_2 t^2$  (де  $b_1 = 0 \dots 1$ ;  $b_2 = 0 \dots 1$ ) проведено рішення прямої задачі теплопровідності при наступних початкових даних:

$$\begin{aligned} t(0, \tau) &= b_3; & t(L, \tau) &= b_4 + b_5 \tau + b_6 \tau^2; \\ t(x, 0) &= b_7; & c\rho &= b_8, & b_i &= \text{const}, & i &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6.113)$$

У результаті цього рішення визначаються значення температури  $t\left(\frac{L}{2}, \tau\right)$  для  $\tau$ , рівних  $\Delta\tau$ ,  $\frac{2}{3}\Delta\tau$ ,  $\frac{1}{3}\Delta\tau$ , які використовуються в якості початкових даних для відновлення функції  $\lambda$  на основі рішення ЗЗТ з умовами однозначності

(6.113). При цьому функція  $\lambda$  знаходилася у вигляді ряду (6.109), де утримувалося два або три перших члени.

Зі зменшенням інтервалу часу  $\Delta\tau$  погрішність знаходження  $\lambda$  трохи знижується. Доцільно  $\Delta\tau$  вибирати з умови  $\Delta Fo = \frac{\lambda\Delta\tau}{c\rho L^2} = 0,005\dots 0,1$ .

Утримання третього члена ряду (6.109), якому ставиться у відповідність точка  $\left(\frac{2}{3}\Delta\tau, \frac{L}{2}\right)$ , збільшує точність обчислень лише в тому випадку, якщо початкові дані задані з погрішністю, яка не перевищує деяку задану величину  $\Pi^*$ . Остання залежить від відносних величин  $b_1$  і  $b_2$ . Так, коли  $b_1 = b_2 = b$ ,  $\Pi^* = 0,05\%$  при  $b = 0,05$ ,  $\Pi^* = 0,25\%$  при  $b = 0,1$ ,  $\Pi^* = 0,5\%$  при  $b = 0,2$ ,  $\Pi^* = 1\%$  при  $b = 0,3$  і  $\Pi^* = 2,5\%$  при  $b = 0,6$ . У випадку рішення прямої і зворотної задач на одній і тій же сітці без збурювання початкових даних погрішність визначення коефіцієнта теплопровідності не перевищує  $0,01\%$ . Якщо  $t\left(\frac{\Delta\tau}{3}, \frac{L}{2}\right)$  чи значення  $t\left(\Delta\tau, \frac{L}{2}\right)$  задані з погрішністю  $\Pi_t$ , то погрішність  $\Pi_\lambda$  знаходження коефіцієнта теплопровідності при інших незбурених вихідних даних складає  $\Pi_\lambda \approx 0,6 \Pi_t$ . Якщо значення  $t\left(\tau, \frac{L}{2}\right)$  задані з однієї і тією же погрішністю (має місце систематична помилка), то  $\Pi_\lambda \approx 0,3 \Pi_t$ . Збурювання температури  $t_\Gamma$  на границі області додаванням знакозмінної функції  $\Delta t = t_\Gamma b_9 \sin b_{10}\tau$  (де  $b_{10} = 1\dots 100$ ) призводить до погрішності визначення коефіцієнта теплопровідності  $\Pi_\lambda \approx b_9$ . При завданні усіх початкових даних з погрішністю  $\Pi$ , погрішність  $\Pi_\lambda$  звичайно незначно відрізнялася від  $\Pi$ .

### 6.3. Питання до самоконтролю

1. З якою метою та на якому етапі здійснюється аналіз об'єкту моделювання?
2. Основні засади аналізу напружено-деформованого стану механічних систем.
3. Використання методу скінченних елементів при аналізі напружено-деформованого стану.
4. Що таке функція форми та який вигляд вони мають для різних вузлів скінченного елемента?
5. Що таке топологічні координати вузлів та з якою метою вони використовуються?
6. Як знаходяться похідні від функцій форми по глобальних координатах точки?
7. За допомогою якого математичного прийому для моделі напружено-деформованого стану вводяться механічні характеристики конкретного матеріалу, з якого складається елемент?
8. Що таке матриця твердості елемента та її підматриці? Як вона створюється?
9. Як визначаються напруження в скінченному елементі через вектор переміщення його вузлів, вектор навантажень та матрицю твердості?
10. Чому для розв'язання задач тепломасопереносу вигідніше застосовувати чисельні методи?
11. Накресліть сім шаблонів різницевих схем для чисельного розв'язання диференціальних рівнянь переносу у часткових похідних другого степеню.
12. Наведіть недоліки та переваги, які приймаються до уваги при виборі відповідної різницевої схеми.
13. Які погрішності апроксимації диференціальних рівнянь різницевиими рівнянь неминуче виникають при чисельному моделюванні?
14. Які методи використовуються для дослідження стійкості апроксимації за початковими умовами?
15. Що таке стійкість різницевого рівняння? Що таке збіжність різницевого рівняння? Як вони визначаються?
16. Які зворотні задачі тепломасопереносу розв'язуються за допомогою різницевих моделей для стаціонарного, регулярного та нестаціонарного режимів?
17. Наведіть теоретичні засади та приклад використання варіаційних методів для розв'язання зворотних задач.
18. З яких етапів складається метод розв'язання задач тепломасопереносу за допомогою збурювання функцій?
19. Які переваги мають чисельні методи при знаходженні теплофізичних характеристик матеріалів? Наведіть приклади такого знаходження.
20. Який математичний апарат використовується при аналізі об'єкта моделювання?

## ЧАСТИНА III СТРУКТУРНІ МОДЕЛІ

### Розділ 7 ВІРТУАЛЬНІ МОДЕЛІ

#### 7.1. Віртуальні об'єкти

##### 7.1.1. Двовимірні віртуальні об'єкти

**В**іртуальним об'єктом називають такий уявний (проміжний) стан об'єкта, який не може бути відтворений в реальній практиці, але на рівні моделі може бути використаний для потреб оптимізації при проектуванні та управлінні.

Віртуальні об'єкти в машинознавстві використовуються на всіх етапах життєвого циклу. З метою оптимізації конструкцій та умов експлуатації об'єктів машинобудування віртуальні об'єкти використовуються при проектуванні деталей оптимальної форми, проектуванні та експлуатації регенеруючих вузлів і деталей машин, а також з метою зниження часової складності управління швидкоплинними процесами в машинах (рис. 7.1).



Рис. 7.1. Приклади застосування віртуальних об'єктів в машинознавстві

Покажемо, як за допомогою віртуального об'єкта на інформаційному рівні можна вирішувати задачі підвищення якості і зниження термінів проектування і керування, а отже, і підвищення якості і працездатності проєктованих і керованих машин.

В усіх випадках взаємодії з навколишнім світом реакція машини або її частини на зовнішні впливи є функцією конструктивних ознак (форми і розмірів), властивостей матеріалів, що складають машину, зовнішнього навантаження (механічного, термічного і т.п.) і часу.

Обчислювальна складність і точність розрахунку реакції  $\mathbf{r}$  визначається конкретними математичними моделями об'єктів і прийнятими методами моделювання, тобто розв'язуючими алгоритмами.

Як указувалося вище, такий розрахунок відноситься до прямих рішень, коли з параметрів-причин –  $(\mathbf{x}; \boldsymbol{\lambda}; \mathbf{q})$  шукають параметр-наслідок –  $\mathbf{r}$ , і результат яких завжди однозначний.

У прямої задачі є три зворотні:

- по відомій реакції  $\mathbf{r}$ , властивостям  $\boldsymbol{\lambda}$  і впливу  $\mathbf{q}$  розрахувати конфігурацію  $\mathbf{X}$ ;
- по відомій реакції  $\mathbf{r}$ , конфігурації  $\mathbf{X}$  і впливу  $\mathbf{q}$  розрахувати властивості  $\boldsymbol{\lambda}$ ;
- по відомій реакції  $\mathbf{r}$ , властивостям  $\boldsymbol{\lambda}$  і конфігурації  $\mathbf{X}$  розрахувати вплив  $\mathbf{q}$ .

Зворотні задачі відносяться до класу некоректно поставлених. Для даного випадку їхнє формулювання виглядає таким чином. Нехай проєктована система характеризується елементом  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ , недоступним для прямого визначення, тому вивчається деякий його прояв  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r} \in \mathbf{f}(\mathbf{X})$ . Тут  $\mathbf{f}(\mathbf{X})$  – образ множини  $\mathbf{X}$  при відображенні  $\mathbf{f}$ . Рівняння  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}$  має рішення тільки для таких елементів  $\mathbf{r}$ , що належать множині  $\mathbf{f}(\mathbf{X})$ . Оператор  $\mathbf{f}$  у багатьох випадках є таким, що зворотний йому оператор  $\mathbf{f}^{-1}$  не є безперервним.

У цьому випадку в якості наближеного рішення  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}$  не можна брати елемент  $\mathbf{x} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{r})$ , оскільки такого рішення може не бути, тому що  $\mathbf{x}$  може не належати множині  $\mathbf{f}(\mathbf{X})$ , тобто не виконується перша вимога коректності за Адамаром. Більш того, навіть якщо рішення  $\mathbf{x}$  існує, воно не буде мати властивість стійкості, якщо оператор  $\mathbf{f}^{-1}$  не є безперервним.

Вимоги коректності у даному випадку зводяться до такого формулювання. Необхідно знайти рішення по початкових даних  $\mathbf{r}_{i0}$ ,  $\mathbf{x} = \mathbf{G}(\mathbf{r})$ , де  $\mathbf{G}$  – деякий оператор. Якщо  $\mathbf{r}$  та  $\mathbf{x}$  належать множинам  $\mathbf{X}$  та  $\mathbf{R}$ , для елементів яких визначене поняття відстані (метрики)  $\mathbf{g}_X(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  і  $\mathbf{g}_R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ , де  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$ ,  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in \mathbf{R}$ , тобто  $\mathbf{X}$  і  $\mathbf{R}$  – метричні простори, то повинні задовольнятися наступні три вимоги:

- існування: для всякого  $\mathbf{r} \in \mathbf{R}$  існує рішення  $\mathbf{x}$  з  $\mathbf{X}$ ;



- однозначності: рішення визначається однозначно;
- стійкості: рішення повинне безперервно залежати від початкових даних, тобто щоб для всякого  $\varepsilon > 0$  можна було вказати таке  $\delta(\varepsilon)$ , що коли  $\mathbf{g}_R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \leq \delta$  і  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{G}(\mathbf{r}_1)$ ,  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{G}(\mathbf{r}_2)$ , то  $\mathbf{g}_X(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \leq \varepsilon$ .

Головні умови, що ставляться до системи та які впливають з теорії оптимального управління, у нашому випадку мають таке пояснення. Керованість – можливість приведення системи в заданий стан за рахунок зміни доступних проектувальнику параметрів. Спостерігаємість – можливість визначення змінних станів по реакціях системи, що задаються. Саме зворотні задачі найчастіше доводиться ставити в інженерній практиці машинознавства при пошуку оптимальних рішень. Однак обчислювальна складність зворотних задач набагато вище, ніж прямих, що ставить під сумнів саму можливість використання для оптимізації в проектуванні і керуванні навіть найшвидкодійної обчислювальної техніки. Хай, наприклад, для оптимізації певного об'єкта треба «рухатися» вздовж параметра А, але розв'язуючий алгоритм такий рух забороняє (заборона А, рис. 7.2). Хай рухом вздовж параметру Б також можна оптимізувати об'єкт (назвемо цей процес *квазіоптимізацією*), але такий рух забороняє фізична або інша природа самого об'єкта (заборона Б).

В практиці реального моделювання заборона Б нездоланна: неможливо створити об'єкт, який складається *одночасно* з *різних* матеріалів або на який в одній точці *одночасно* діють сили *різної* величини. Інформаційна технологія «метод віртуального об'єкта» (МВО) такі ситуації дозволяє, роблячи заборону Б не абсолютною, а такою, яка має деяку скінченну «жорсткість». Тоді, якщо заборона Б менш жорстка, ніж заборона А, то рухаючись у напрямку Б, знайдемо квазіоптимальний (віртуальний) об'єкт. Далі залишається фінішний перехід від квазіоптимального до оптимального об'єкта. Задача розв'язана й жорстка заборона А обійдена. Результат – значне зниження часової складності оптимізації. Таким чином, МВО складається з двох етапів: квазіоптимізації і фінішного переходу (рис. 7.3). Різноманітність підходів дозволяє використовувати МВО як на етапі проектування, так і на етапі управління об'єктом.

У практиці *проектування* машинобудівних об'єктів найчастіше доводиться вирішувати першу зворотну задачу, тобто оптимізувати конфігурацію деталей, оскільки властивості їх матеріалу та зовнішні впливи набагато менше залежать від бажання конструктора. Пряма задача використовується, в основному, при аналізі варіантів проекту. При проектуванні складних об'єктів результат розрахунку не завжди очевидний, і оптимальне рішення виходить тільки після генерування й відкидання декількох проміжних варіантів.

МВО в проектуванні використовується в сукупності з чисельними методами (наприклад МСЕ) і забезпечує прискорений розрахунок оптимальних векторів конфігурації деталей механічного вузла  $\mathbf{x}^*$  і (або) їхніх властивостей  $\lambda^*$  по відомих векторах зовнішнього впливу на вузол  $\mathbf{q}$  і припустимій реакції на цей вплив  $\mathbf{r}^*$ .

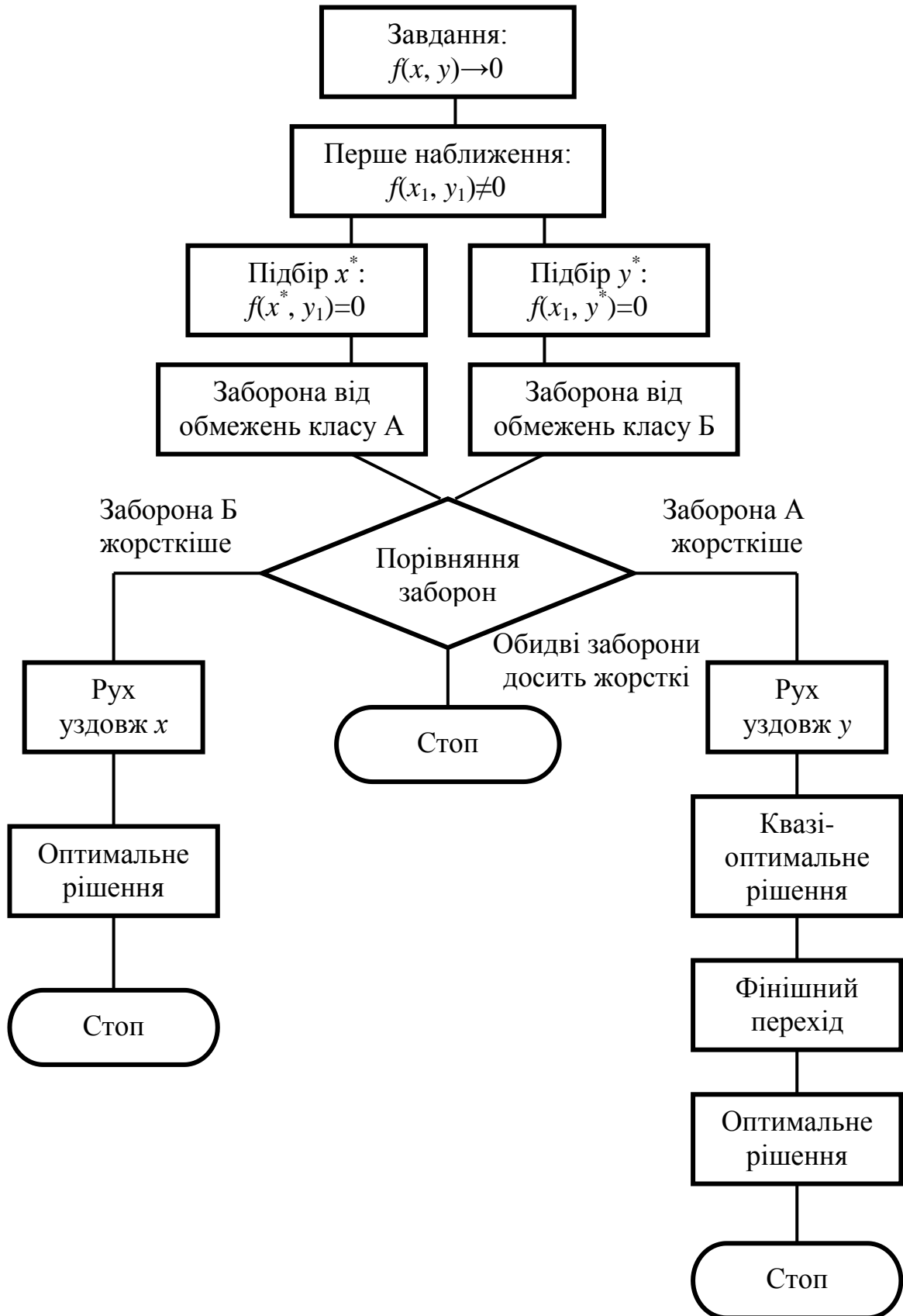


Рис. 7.2. Схема до визначення сфери застосування МВО

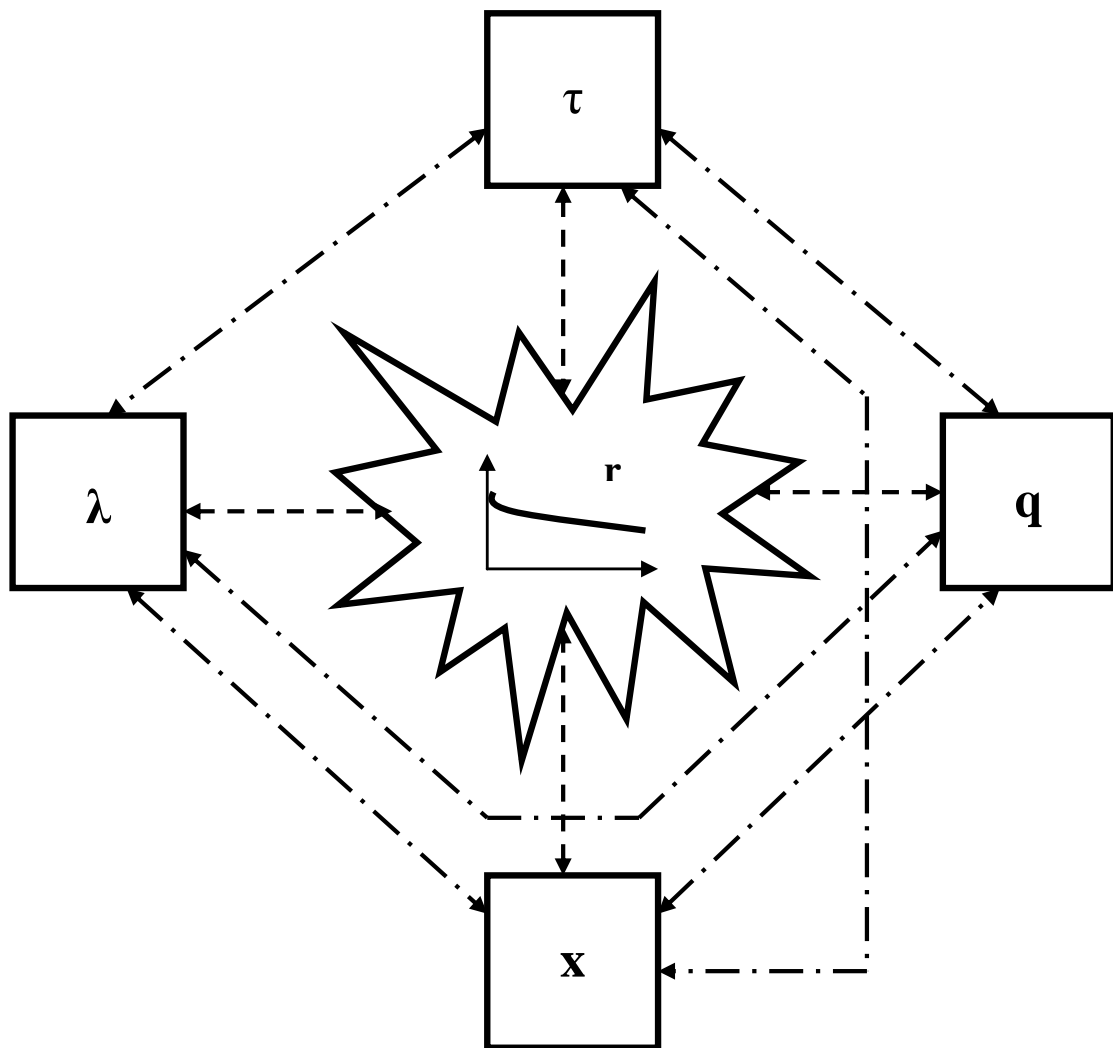


Рис. 7.3. Схема потоків інформації в МВО:

- - - - - – квазіоптимізація;  
 - . - . - . – фінішний перехід.

Наприклад, при проектуванні конфігурації об'єктів у *статичі* такий процес складається з перетворень:

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{r}(\mathbf{x}; \lambda; \mathbf{q}) \xrightarrow{\text{Квазіоптимізація}} \mathbf{r}^*(\mathbf{x}; \lambda^*; \mathbf{q}) \xrightarrow{\text{Фінішний перехід}} \mathbf{r}^*(\mathbf{x}^*; \lambda; \mathbf{q}); \\
 \mathbf{r}(\mathbf{x}; \lambda; \mathbf{q}) \xrightarrow{\text{Квазіоптимізація}} \mathbf{r}^*(\mathbf{x}; \lambda; \mathbf{q}^*) \xrightarrow{\text{Фінішний перехід}} \mathbf{r}^*(\mathbf{x}^*; \lambda; \mathbf{q}); \\
 \mathbf{r}(\mathbf{x}; \lambda; \mathbf{q}) \xrightarrow{\text{Квазіоптимізація}} \mathbf{r}^*(\mathbf{x}; \lambda^*; \mathbf{q}^*) \xrightarrow{\text{Фінішний перехід}} \mathbf{r}^*(\mathbf{x}^*; \lambda; \mathbf{q}).
 \end{array}$$

Як бачимо, початкові і кінцеві стани моделей об'єктів для усіх видів перет-

ворень однакові, – вони відрізняються тільки проміжним (віртуальним) станом, вибір типу якого належить проектувальнику.

Перехід до проектування об'єктів у динаміці необхідний, наприклад, коли процеси, що враховуються в об'єкті, відносяться до перехідних (несталіх у часі). З одного боку, у цьому випадку моделювання ускладнюється, а з іншого, – з'являється додаткова можливість включити до числа віртуальних станів час.

Процес управління можливий тільки при значеннях керуючого впливу  $\mathbf{q}(\tau)$  і поточного значення керованої реакції  $\mathbf{r}(\tau)$ , що змінюються в часі. Крім того, управління об'єктом припускає вузли механізму (машини) вже існуючими, а отже параметри конструкції  $\mathbf{x}$  і  $\boldsymbol{\lambda}$  незмінними, і пов'язані з цим розрахунки зводяться до зворотної процедури: знаходженню оптимальної функції керуючого впливу  $\mathbf{q}^*(\tau)$  по відомих  $\mathbf{x}$ ,  $\boldsymbol{\lambda}$ ,  $\mathbf{r}(\tau)$  і  $\mathbf{r}^*$ .

Зважаючи на перелічені параметри проектування та управління, можна запропонувати різні частинні методики МВО, які відрізняються оптимізуємими і, відповідно, віртуальними параметрами, а також змістом фінішних переходів.

Загальна кількість частинних методик МВО, у зв'язку з цим, досить велика – 47. Вони належать до трьох головних процесів, заради яких ведеться оптимізація об'єкта, – проектування в статичі (7 методик), проектування в динаміці (17 методик) та управління (17 методик). Опис частинних методик МВО зведений до табл. 7.1, 7.2.

Таблиця 7.1

Класифікація частинних методик МВО (проектування)

№ методики	Процес	Оптимізуємий параметр		Віртуальний параметр	Фінішні переходи
		Найменування	Позначення		
1 2 3	Проектування (статика)	Форма, розміри	$\mathbf{x}$	$\boldsymbol{\lambda}$ , $\mathbf{q}$	$\boldsymbol{\lambda}^* \rightarrow \mathbf{x}^*$ $\mathbf{q}^* \rightarrow \mathbf{x}^*$ $\boldsymbol{\lambda}^*, \mathbf{q}^* \rightarrow \mathbf{x}^*$
4 5 6		Властивості переносу	$\boldsymbol{\lambda}$	$\mathbf{x}$ , $\mathbf{q}$	$\mathbf{x}^* \rightarrow \boldsymbol{\lambda}^*$ $\mathbf{q}^* \rightarrow \boldsymbol{\lambda}^*$ $\mathbf{x}^*, \mathbf{q}^* \rightarrow \boldsymbol{\lambda}^*$
7		Форма, розміри та властивості переносу	$\mathbf{x}$ , $\boldsymbol{\lambda}$	$\mathbf{q}$	$\mathbf{q}^* \rightarrow \mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*$

Продовження таблиці 7.1

8	Проектування (динаміка)	Форма, розміри	x	$\lambda, q, \tau$	$\lambda^* \rightarrow x^*$	
9					$q^* \rightarrow x^*$	
10					$\tau^* \rightarrow x^*$	
11		$\lambda^*, q^* \rightarrow x^*$				
12		$\lambda^*, \tau^* \rightarrow x^*$				
13		$q^*, \tau^* \rightarrow x^*$				
14		$\lambda^*, q^*, \tau^* \rightarrow x^*$				
15			Властивості переносу	$\lambda$	$x, q, \tau$	$x^* \rightarrow \lambda^*$
16						$q^* \rightarrow \lambda^*$
17	$\tau^* \rightarrow \lambda^*$					
18	$x^*, q^* \rightarrow \lambda^*$					
19	$x^*, \tau^* \rightarrow \lambda^*$					
20	$\tau^*, q^* \rightarrow \lambda^*$					
21	$x^*, q^*, \tau^* \rightarrow \lambda^*$					
22		Форма, розміри та властивості переносу	$x, \lambda$	$q, \tau$	$q^* \rightarrow x^*, \lambda^*$	
23					$\tau^* \rightarrow x^*, \lambda^*$	
24					$q^*, \tau^* \rightarrow x^*, \lambda^*$	

Таблиця 7.2

Класифікація частинних методик МВО (управління)

25	Управління	Зовнішній вплив	q	$x, \lambda, \tau$	$x^* \rightarrow q^*$
26					$\lambda^* \rightarrow q^*$
27					$\tau^* \rightarrow q^*$
28					$x^*, \lambda^* \rightarrow q^*$
29					$x^*, \tau^* \rightarrow q^*$
30					$\lambda^*, \tau^* \rightarrow q^*$
31	$x^*, \lambda^*, \tau^* \rightarrow q^*$				
32	Управління	Час	$\tau$	$x, \lambda, q$	$x^* \rightarrow \tau^*$
33					$\lambda^* \rightarrow \tau^*$
34					$q^* \rightarrow \tau^*$
35					$x^*, \lambda^* \rightarrow \tau^*$
36					$x^*, q^* \rightarrow \tau^*$
37					$q^*, \lambda^* \rightarrow \tau^*$
38					$x^*, \lambda^*, q^* \rightarrow \tau^*$
39		Зовнішній вплив та час	$q, \tau$	$x, \lambda$	$x^* \rightarrow q^*, \tau^*$
40					$\lambda^* \rightarrow q^*, \tau^*$
41					$x^*, \lambda^* \rightarrow q^*, \tau^*$

Дані таблиці були покладені в основу розробки математичного забезпечення МВО в проектуванні та управлінні.

Розглянемо задачу, що зводиться до МВО в двомірній постановці.

**Задача 7.1.** Дано гладку функцію двох змінних  $r(x, q)$ , два з частинних значень якої  $r(x_{\text{поч}1}, q_{\text{ном}})$  і  $r(x_{\text{поч}2}, q_{\text{ном}})$  входять до початкових умов. Відомо також, що обидва ці значення менше деякого обмеження  $r_0$  (рис. 7.4). Змінюючи тільки  $x$ , знайти одне зі значень аргументу  $x^*$  з діапазону  $x_1 \dots x_2$ , при якому виконується нерівність  $r(x^*, q_{\text{ном}}) \geq r_0$ .

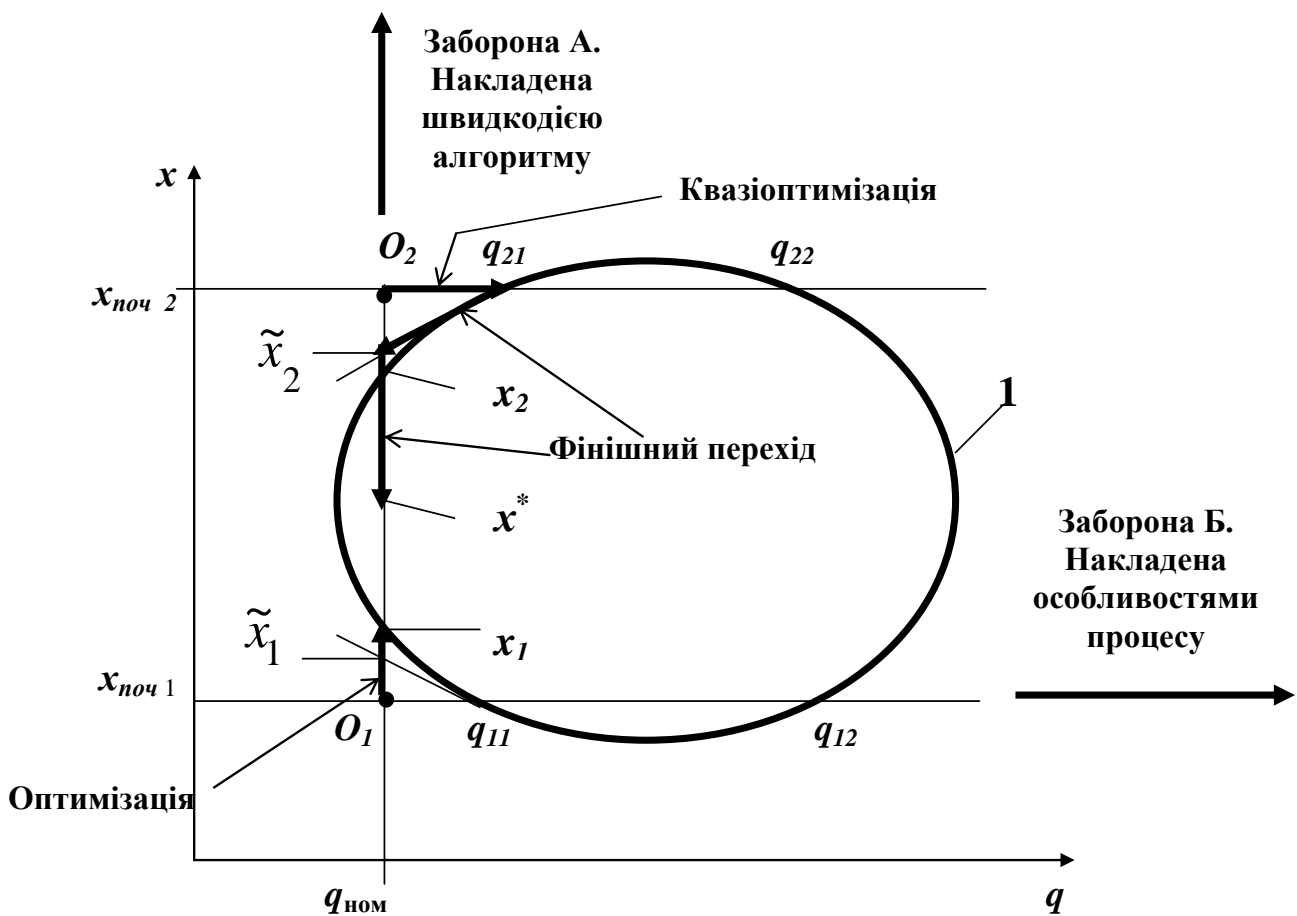


Рис. 7.4. Схема до Задачі 7.1

На рисунку наведене двомірне поле аргументів  $x$  та  $q$ , яке є перетином поверхні  $r(x, q)$  площиною  $r = r_0$ . Крива 1 – суть лінія перетину поверхні  $r(x, q)$  із площиною  $r = r_0$ . Крива обмежує область, усередині якої  $r(x, q) > r_0$ , тобто виконується основна вимога задачі. Точки  $O_1$  і  $O_2$  на рисунку відповідають початковим частинним аргументам заданої функції, які лежать, за умовою задачі, за межами області, всередині кривої 1, тобто в зоні, де вимога  $r(x, q) > r_0$  не виконується. Задача зводиться до фіксації початкового значення  $q_{\text{ном}}$  і переміщення уздовж прямої  $q = q_{\text{ном}}$  доти, поки точка  $(x, q_{\text{ном}})$  не опиниться на лінії

$r(x, q) = r_0$ . Таке переміщення може бути здійснене двома шляхами: вгору (за рисунком) від точки  $O_1$  або вниз (за рисунком) від точки  $O_7$ .

Як було зазначено вище, головною областю застосування МВО є випадки, коли обидва ці переміщення заборонені обмеженнями, які впливають, наприклад, із часової складності розв'язуючого алгоритму.

Таким чином, у наявності протиріччя: рух уздовж осі  $q$  заборонений умовами задачі, а уздовж осі  $x$  – розв'язуючими правилами. Якщо розглядається випадок, коли остання заборона жорсткіше, МВО зводиться до «тимчасового» руху уздовж осі  $q$  зі створенням «тимчасового» (віртуального) об'єкта, у якого  $q \neq q_{ном}$ .

При русі від точки  $O_1$  уздовж лінії  $x = x_{поч1}$  праворуч (за рисунком) буде знайдена точка  $q_{11}$ , а при русі від точки  $O_2$  уздовж лінії  $x = x_{поч2}$  праворуч (за рисунком) буде знайдена точка  $q_{27}$ . Тепер необхідно, знаючи координати точки  $q_{11}$ , знайти точку  $\tilde{x}_1$ , близьку до  $x_1$ , і, знаючи координати точки  $q_{21}$ , знайти точку  $\tilde{x}_2$ , близьку до  $x_7$ . Тоді шукане  $x^*$  буде лежати в інтервалі  $\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2$ , причому, з урахуванням неточності визначення границь інтервалу, бажано – у його середині.

**Теорема 7.1.** *Якщо для гладкої функції  $r(x, q)$  мають місце нерівності  $r(x_{поч1}, q_{ном}) < r_0$  і  $r(x_{поч2}, q_{ном}) < r_0$  та існують перетини  $r(x_{поч1}, q)$ ,  $r(x_{поч2}, q)$  і  $r(x, q_{ном})$ , такі що на деяких їхніх ділянках, обмежених значеннями аргументу  $q_{11} \dots q_{12}$ ;  $q_{21} \dots q_{22}$  і  $x_1 \dots x_2$ , відповідно, мають місце нерівності  $r(x_{поч1}, q) \geq r_0$ ,  $r(x_{поч2}, q) \geq r_0$  і  $r(x, q_{ном}) \geq r_0$ , то існує і таке значення  $x^*$ , яке належить перетину  $r(x, q_{ном})$ , при якому  $r(x^*, q_{ном}) \geq r_0$  ( $r(x, q) = r_0 \Rightarrow x = x(q)$ ); при цьому, якщо похідні  $\left. \frac{dx}{dq} \right|_{q=q_{11}}$  і  $\left. \frac{dx}{dq} \right|_{q=q_{21}}$  мають протилежні знаки, то  $x^*$  може бути приблизно визначений методом лінійної інтерполяції за допомогою виразу:*

$$x^* = \frac{\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2}{2}, \quad (7.1)$$

де

$$\tilde{x}_i = x_{почi} + \left. \frac{dx}{dq} \right|_{q_{i1}} (q_{ном} - q_{i1}); \quad i = (1, 2). \quad (7.2)$$

**Доведення.** За умовою *Теорема 7.1* значення  $x^*$  належить перетину  $r(x, q_{ном})$ , тому воно лежить на прямій  $O_1O_7$ . За тих же умов воно лежить точно всередині відрізка  $\tilde{x}_1\tilde{x}_2$ , причому

$$\tilde{x}_1 = x_1 \pm \delta_1; \quad \tilde{x}_2 = x_2 \pm \delta_2, \quad (7.3)$$

де  $\delta_1, \delta_2$  – погрішності визначення точок  $x_1$  і  $x_2$  перетину  $r(x, q) = r_0 \Rightarrow x = x(q)$  і  $r(x, q_{ном})$  за допомогою лінійної інтерполяції. Розглянемо точку  $\bar{x}$ , що лежить точно всередині між точками  $x_1$  і  $x_2$ :

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}. \quad (7.4)$$

Відстань між точками  $x^*$  і  $\bar{x}$  визначиться з виразу:

$$x^* - \bar{x} = \frac{\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2}{2} - \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{(\tilde{x}_1 - x_1) + (\tilde{x}_2 - x_2)}{2} = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}. \quad (7.5)$$

Величина  $\frac{\delta_1 + \delta_2}{2}$  більш високого порядку малості, ніж  $x_1 - x_2$ , тому нею можна знехтувати і вважати, що у припустимих межах  $x^* \approx \bar{x}$ , що і було потрібно було довести.

Приклад 7.1. У декартовій системі координат задана функція

$$r = 10 - (8 - q)^2 - (4 - x)^2, \quad (7.6)$$

перетин якої площиною  $r=1$  (рис. 7.5) має вигляд кола і описується аналітичним виразом:

$$F = (8 - q)^2 + (4 - x)^2 = 3^2. \quad (7.7)$$

На поверхні  $r$  задані чотири точки –  $O_1\{5,5; 2,0\}$ ,  $O_2\{5,5; 6,5\}$ ,  $O_3\{5,5; 8,0\}$  і  $O_4\{5,5; 1,5\}$ , значення  $r$  в яких:  $(-0,25)$ ,  $(-3,0)$ ,  $(-12,25)$  і  $(-3,0)$ , відповідно, не задовольняють вимозі  $r \geq 1$ .

*Завдання.* Не розв'язуючи рівняння (7.6) відносно  $x$ , знайти за допомогою МВО точку  $\{5,5; x^*\}$ , у якій задовольняється нерівність  $r \geq 1$ , і оцінити погрішність рішення.

*Рішення.* Оскільки рух уздовж  $q = 5,5$  заборонений, будемо рухатися уздовж  $x = 2,0$ ,  $x = 6,5$ ,  $x = 8,0$  і  $x = 1,5$ , у результаті чого знайдемо точки  $q_1\{5,76;$





$$\left. \frac{dx}{dq} \right|_{q_2} = \frac{2 \cdot 5,5 - 16}{13 - 8} = -1; \quad (7.10)$$

$$\left. \frac{dx}{dq} \right|_{q_4} = \frac{2 \cdot 5,5 - 16}{3 - 8} = 1. \quad (7.11)$$

За Теоремою 7.1 знаки в похідних повинні бути протилежними, тому точку  $O_4$  також відкидаємо, залишаючи для розв'язання задачі точки  $O_1$  і  $O_7$ .

Тепер, використовуючи рівняння (7.2), можна «повертатися» від віртуальних  $q = 5,76$  і  $q = 6,34$  до реального (номінального, заданого і т. ін.)  $q = 5,5$ :

$$\tilde{x}_1 = x_{\text{ноч1}} + \left. \frac{dx}{dq} \right|_{q_1} (q_{\text{ном}} - q_1) = 2,2912; \quad (7.12)$$

$$\tilde{x}_2 = x_{\text{ноч2}} + \left. \frac{dx}{dq} \right|_{q_2} (q_{\text{ном}} - q_2) = 5,9422. \quad (7.13)$$

Далі, насамкінець, за (7.1) знайдемо  $x^*$ :

$$x^* = \frac{\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2}{2} = 4,1167. \quad (7.14)$$

Для оцінки погрішності визначимо координати точок  $x_1\{5,5; 2,34\}$  та  $x_2\{5,5; 5,66\}$  і скористаємося рівнянням (7.4):

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} = 4. \quad (7.15)$$

Погрішність визначення  $x^*$  можна оцінити як

$$\frac{4,1167 - 4}{4} 100 = 2,92 \%. \quad (7.16)$$

**Приклад 7.2.** У напівобмеженому тілі із матеріалу з коефіцієнтом температуропровідності  $a = 10 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ , початкова температура однакова і дорівнює  $T_0 = 300 \text{ К}$ ; температура поверхні, починаючи з початкового моменту, постійна і дорівнює  $T_{\text{п}} = 1500 \text{ К}$ ; на нескінченному віддаленні від поверхні тепловий потік дорівнює нулю, а температура постійна і дорівнює  $300 \text{ К}$ .

**Завдання.** На яку відстань  $x^*$  від поверхні треба пересунути точку  $O$ , щоб температура в цій точці  $T_{O,10}$  через  $10 \text{ с}$  після початкового моменту не переви-

щувала  $T_{кр} = 1000$  К, якщо відомо, що в початковому положенні точки  $O_1$  ( $x_{поч} = 0,007$  м), при тих же початкових умовах температура на 10 с складала 1045 К.

*Рішення.* Застосуємо частинну методику № 9 (табл. 7.1). Шукане  $T_{O, 10}$  знайдеться з:

$$T_{O,10} = T_n + (T_0 - T_n) \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{a\tau}}, \quad (7.17)$$

де

$$\operatorname{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-u^2} du, \quad (7.18)$$

або після підстановки до (7.17) даних задачі при змінних  $T_n$  і  $x$ :

$$T_{O,10} = T_n + (300 - T_n) \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{10 \cdot 10^{-6} \cdot 10}} = T_n - (T_n - 300) \left( \int_0^{50x} e^{-(50x)^2} dx \right). \quad (7.19)$$

Підставляючи в (4.19) значення  $T_{O, 10} = T_{кр} = 1000$  К, знайдемо:

$$F_1(T_n, x) = T_n - (T_n - 300) \left( \int_0^{50x} e^{-(50x)^2} dx \right) - 1000 = 0. \quad (7.20)$$

Оскільки величина  $T_n$  нам відома, з (7.20) можна легко обчислити шукане  $x$ . Припустивши однак, що користатися для розрахунку  $x$  цією формулою не можна (заборона від певного розв'язуючого алгоритму), вирішимо задачу за допомогою МВО.

Для цього за формулою (7.20) визначимо таке (віртуальне) значення  $T_n$ , яке призводить до бажаного значення  $T_{O, 10}$  на глибині точки  $O_1$  за той же час – 10 с. Графік функції (7.20) має вигляд, наведений на рис. 7.6.

Як видно з рисунку, початкова точка  $O_1$  лежить нижче кривої  $T_{O, 10}(T_n, x) = 1000$ , тому умова задачі в ній не виконується і координата  $x = 0,007$  цим умовам не задовольняє.

Точне значення  $x_1 = 0,00765$  м. Знайдемо тепер значення  $\tilde{x}_{11}$  за допомогою МВО. Для цього, рухаючись ліворуч (за рисунком) від точки  $O_1$ , знайдемо точку  $T_{n1}\{1430; 0,007\}$ .

Знайдемо похідну  $\frac{dx}{dT_n}$  для залежності (7.20):

$$\frac{dx}{dT_n} = -\frac{\frac{\partial F_1}{\partial T_n}}{\frac{\partial F_1}{\partial x}} = -\frac{1 - \operatorname{erf}(50x)}{50(T_n - 300) \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-(50x)^2}}. \quad (7.21)$$

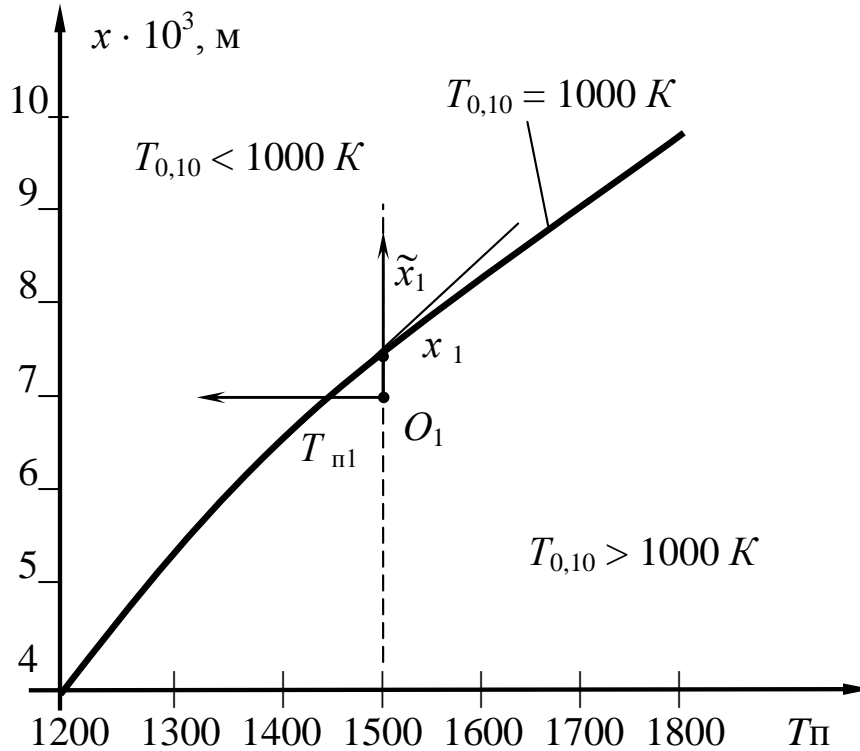


Рис.7.6. Графік функції  $F_1(T_n, x) = 0$ .

Користуючись цією формулою, підрахуємо її значення для точки  $T_{П1}\{1430; 0,007\}$ :

$$\left. \frac{dx}{dT_n} \right|_{T_{П1}} = -\frac{1 - \operatorname{erf} 0,35}{50(1430 - 300) \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-0,35^2}} = 1,1012 \cdot 10^{-5}. \quad (7.22)$$

Тепер знайдемо  $\tilde{x}_{11}$  за формулою (7.2):

$$\tilde{x}_1 = x_{нач1} + \left. \frac{dx}{dT_n} \right|_{T_{П1}} (T_n - T_{П1}) = 0,007 + 1,1012 \cdot 10^{-5} (1500 - 1430) = 0,007777 \text{ м}. \quad (7.23)$$

Таким чином, рішення задачі знаходиться в області  $x_1^* \geq \tilde{x}_{11}$ :

$$x_1^* \geq 7,77 \cdot 10^{-3} \text{ м.} \quad (7.24)$$

Застосуємо частинну методику № 8 (табл. 7.1). Підставимо в (7.17) дані задачі, але тепер вже при змінних  $a$  і  $x$ :

$$T_{O,10} = 1500 - 1200 \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{10a}}. \quad (7.25)$$

Підставляючи в (7.25) значення  $T_{O,10} = T_{\text{кр}} = 1000 \text{ К}$ , знайдемо:

$$F_2(a, x) = 1500 - 1200 \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{10a}} - 1000 = 0. \quad (7.26)$$

Відповідно до МВО за формулою (7.26) визначимо віртуальне значення  $a$ , яке призводить до бажаного значення  $T_{O,10}$  на глибині точки  $O_1$  за 10 с.

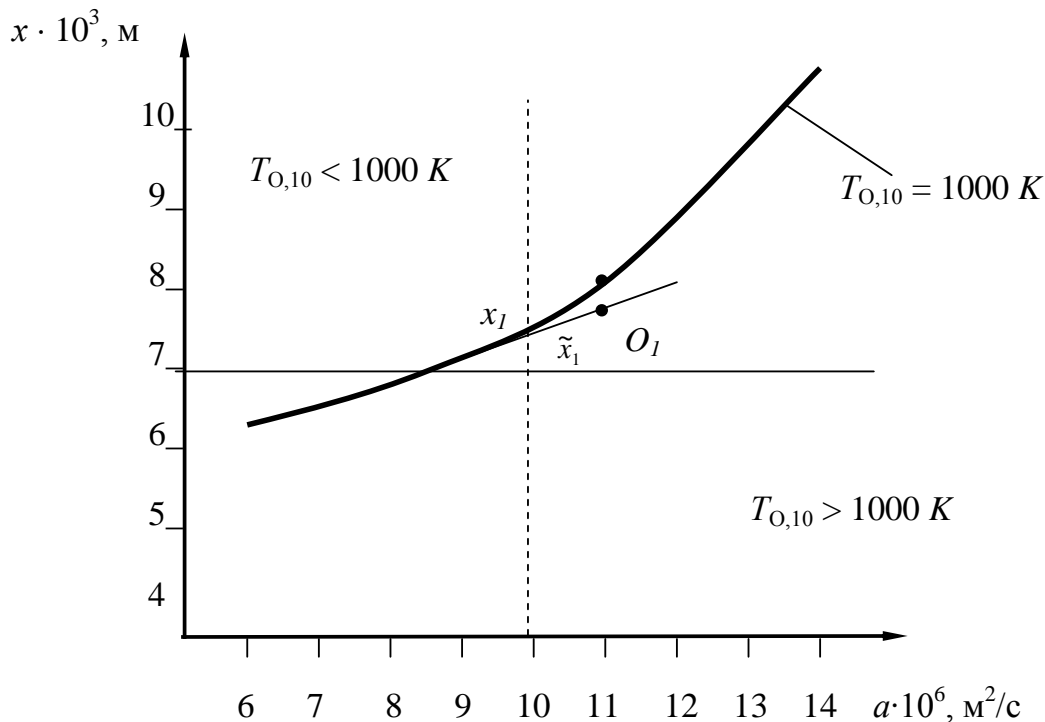


Рис. 7.7. Графік функції  $F_2(a, x) = 0$ .

Як видно із рис. 7.7, початкова точка  $O_1$  лежить нижче кривої  $F_2(a, x) = 0$ , тому умова задачі в ній не виконується, і координата  $x = 0,007$  цим умовам не задовольняє. Знайдемо значення  $\tilde{x}_{12}$  за допомогою МВО. Для цього, рухаючись

вліво (за рисунком) від точки  $O_1$ , знайдемо точку  $a_1\{8,028 \cdot 10^{-6}; 0,007\}$ .

Знайдемо похідну  $\frac{dx}{da}$  для залежності (7.26):

$$\frac{dx}{da} = -\frac{\frac{\partial F_2}{\partial a}}{\frac{\partial F_2}{\partial x}} = \frac{x}{2a}. \quad (7.27)$$

Підрахуємо її значення для точки  $a_1\{8,028 \cdot 10^{-6}; 0,007\}$ :

$$\left. \frac{dx}{da} \right|_{a_1} = \frac{x}{2a_1} = \frac{0,007}{2 \cdot 8,028 \cdot 10^{-6}} = 435,97. \quad (7.28)$$

Тепер знайдемо  $\tilde{x}_{12}$  за формулою (7.2):

$$\tilde{x}_{12} = x_{нач1} + \left. \frac{dx}{da} \right|_{a_1} (a - a_1) = 0,007 + 435,97(10 \cdot 10^{-6} - 8,028 \cdot 10^{-6}) = 7,86 \cdot 10^{-3} \text{ м}. \quad (7.29)$$

Таким чином, рішення задачі знаходиться в області  $x_2^* \geq \tilde{x}_{12}$ :

$$x_2^* \geq 7,86 \cdot 10^{-3} \text{ м}. \quad (7.30)$$

Застосуємо частинну методику № 10 (табл. 7.1). Підставимо в (7.17) дані задачі при змінних  $a$  і  $\tau$ :

$$T_{O,10} = 1500 - 1200 \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{10 \cdot 10^{-6} \tau}}. \quad (7.31)$$

Підставляючи в (7.31) значення  $T_{O,10} = T_{кр} = 1000 \text{ К}$ , знайдемо:

$$F_3(\tau, x) = 1500 - 1200 \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{10 \cdot 10^{-6} \tau}} - 1000 = 0. \quad (7.32)$$

Відповідно до МВО за формулою (7.32) визначимо віртуальне значення  $\tau$ , що призводить до бажаного значення  $T_{O,10}$  на глибині точки  $O_1$  за 10 с.

Як видно з рис. 7.8, початкова точка  $O_1$  лежить нижче кривої  $F_3(\tau, x) = 0$ , тому умова задачі в ній не виконується, і координата  $x = 0,007$  цим умовам не задовольняє. Знайдемо значення  $\tilde{x}_{13}$  за допомогою МВО. Для цього, рухаючись

вліво (по рисунку) від точки  $O_1$ , знайдемо точку  $\tau_1\{7,936; 0,007\}$ .

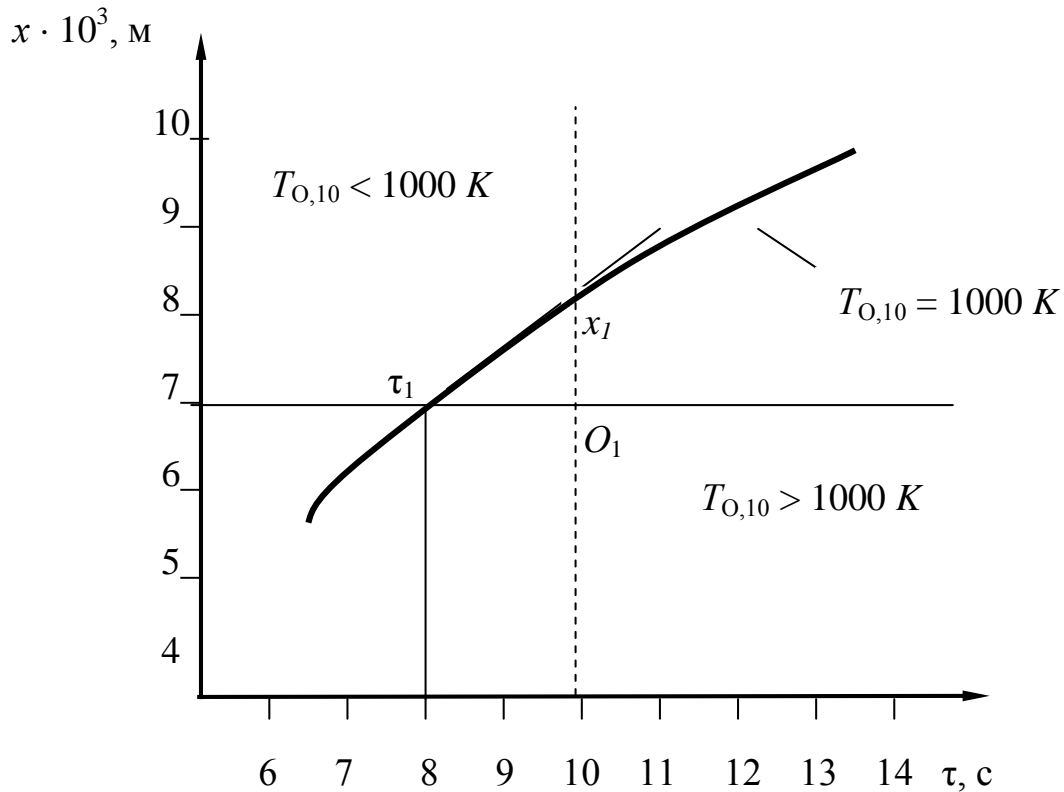


Рис. 7.8. Графік функції  $F_3(\tau, x) = 0$

Знайдемо похідну  $\frac{dx}{d\tau}$  для залежності (7.32):

$$\frac{dx}{d\tau} = -\frac{\frac{\partial F_3}{\partial \tau}}{\frac{\partial F_3}{\partial x}} = \frac{x}{2\tau}. \quad (7.33)$$

Підрахуємо її чисельне значення для точки, яка належить шкалі часу,  $\tau_1\{7,936; 0,007\}$ :

$$\left. \frac{dx}{d\tau} \right|_{\tau_1} = \frac{x}{2\tau_1} = \frac{0,007}{2 \cdot 7,936} = 0,00041. \quad (7.34)$$

Тепер знайдемо  $\tilde{x}_{13}$  за формулою (7.2):

$$\tilde{x}_{13} = x_{нач1} + \left. \frac{dx}{d\tau} \right|_{\tau_1} (\tau - \tau_1) = 0,007 + 0,00041(10 - 7,936) = 7,91 \cdot 10^{-3} \text{ м}. \quad (7.35)$$

Таким чином, рішення задачі, знайдене за допомогою віртуального часу, знаходиться в області  $x_3^* \geq \tilde{x}_{13}$ :

$$x_3^* \geq 7,91 \cdot 10^{-3} \text{ і} . \quad (7.36)$$

Порівняємо одержані рішення з даними, обчисленими “прямим” методом, та визначимо погрішність трьох частинних методик МВО (табл. 7.3).

Таблиця 7.3

Результати рішень Задачі 7.2 за допомогою різних частинних методик МВО

Методика	$\tilde{x}_1$ , м	$x_1$ , м	$\tilde{x}_1 - x_1$ , м	Погрішність, %
$T_{п}; x$	0,00777	0,00765	0,00012	1,57
$a; x$	0,00786		0,00021	2,74
$\tau; x$	0,00791		0,00026	3,40

Як видно з таблиці, погрішності рішень цілком припустимі для технічних застосувань. У наведених прикладах підтверджується принципова можливість отримання достовірних рішень “обхідним” шляхом. Переваги цього методу будуть також доведені нижче на більш складних прикладах.

### 7.1.2. Багатовимірні віртуальні об’єкти

Перейдемо тепер до оптимізації багатовимірних об’єктів, кількість параметрів яких може досягати декількох тисяч. Прикладом такого об’єкта може слугувати скінченноелементне уявлення деталі чи вузла, яке містить сотні скінченних елементів, що мають, у свою чергу, десятки вузлів, кожний з яких описується декількома координатами. Крім того, окремі скінченні елементи можуть належати деталям вузла із матеріалів з різними властивостями і піддаватися різним зовнішнім діям, наприклад, тепловим.

Важливим критерієм створення оптимального об’єкта є допустимість його реакції на плановані і (або) випадкові зовнішні дії. Як впливає з розділу 7.1, при оцінці проміжних і кінцевих результатів процесу проектування система «об’єкт – дія» може розглядатися в статистиці, тобто як система  $(\mathbf{x}; \boldsymbol{\lambda}; \mathbf{q})$ , що має вектори параметрів конфігурації (розмірів)  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  і властивостей  $\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\Lambda}$ . На зовнішній вплив  $\mathbf{q} \in \mathbf{Q}$  така система відповідає реакцією  $\mathbf{r}$ :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\lambda}; \mathbf{q}) , \quad (7.37)$$

де  $\mathbf{X}, \boldsymbol{\Lambda}$  і  $\mathbf{Q}$  – множини, у межах яких при оптимізації системи допускаються зміни, відповідно,  $\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}$  і  $\mathbf{q}$ .



Переходячи до скінченних елементів у вигляді дискретизованого простору, одержимо для  $\mathbf{x}$ :

$$\mathbf{x} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \dots \\ \mathbf{x}_N \end{array} \right\}, \quad (7.38)$$

де  $\mathbf{x}_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) – геометричні параметри  $N$  скінченних елементів, наприклад, координати  $x$ ,  $y$  і  $z$  кожного з  $K$  вузлів усіх елементів:

$$\mathbf{x}_i = \left\{ \begin{array}{ccc} x_1 & y_1 & z_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_K & y_K & z_K \end{array} \right\}; \quad (7.39)$$

для  $\boldsymbol{\lambda}$ :

$$\boldsymbol{\lambda} = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\lambda}_1 \\ \boldsymbol{\lambda}_2 \\ \dots \\ \boldsymbol{\lambda}_N \end{array} \right\}, \quad (7.40)$$

де  $\boldsymbol{\lambda}_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) – усереднені по кожному з  $N$  скінченних елементів властивості переносу, наприклад, модуль пружності  $E$ , коефіцієнт теплопровідності  $\lambda$ , коефіцієнт теплоємності  $c$ , тощо:

$$\boldsymbol{\lambda}_i = \{E_i \quad \lambda_i \quad c_i \quad \dots\}; \quad (7.41)$$

для  $\mathbf{q}$ :

$$\mathbf{q} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \dots \\ \mathbf{q}_M \end{array} \right\}, \quad (7.42)$$

де  $\mathbf{q}_i$  ( $i = 1, \dots, M$ ) –  $M$  зовнішніх впливів на проєктований об'єкт, наприклад, сила  $F$ , тепловий потік  $q$  і т.ін.:

$$\mathbf{q}_i = \{F_i \quad q_i \quad \dots\}. \quad (7.43)$$

для  $\mathbf{r}$  :

$$\mathbf{r} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \dots \\ \mathbf{r}_N \end{array} \right\}, \quad (7.44)$$

де  $\mathbf{r}_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) – реакції в кожному з  $N$  скінченних елементів, наприклад, механічне напруження  $\sigma$ , переміщення  $\delta$ , температура  $T$ , тощо:

$$\mathbf{r}_i = \{\sigma_i \quad \delta_i \quad T_i \quad \dots\}. \quad (7.45)$$

Нехай реакція  $\mathbf{r}$  чергового варіанта, розрахована за (7.37), визнана проєктувальником неприпустимо далекою від ідеальної мети  $\mathbf{r}_{ud}$ , і було прийнято рішення шляхом першої зворотної задачі змінити вектор конфігурації  $\mathbf{x}$  на  $\mathbf{x}^*$ , так щоб вектор параметрів реакції набув значення  $\mathbf{r}^*$  :

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\lambda}; \mathbf{q}) \rightarrow \mathbf{r}^*(\mathbf{x}^*; \boldsymbol{\lambda}; \mathbf{q}) \in \mathbf{r}_{ud} \pm \frac{\delta}{2}, \quad (7.46)$$

де  $\delta$  – наперед заданий максимально припустимий «коридор», не обов'язково із скінченними границями в просторі параметрів, що складають  $\mathbf{r}$ .

Як і у випадку, описаному вище, рішення будь-якої задачі можна виконати двома методами, перший, *безпосередній* метод застосуємо, коли перетворення  $\mathbf{X}$ , що задовольняє умові (7.46), дозволено. Тоді вектор  $\mathbf{x}^*$ , якщо він взагалі існує, шукають, вирішуючи першу зворотну задачу:

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}(\mathbf{r}^*; \boldsymbol{\lambda}; \mathbf{q}). \quad (7.47)$$

При розв'язанні будь-яких зворотних задач по групі параметрів, що складають наслідок  $(\mathbf{r}^*; \boldsymbol{\lambda}; \mathbf{q})$ , шукають одну з причин, у даному випадку – вектор параметрів конфігурації  $\mathbf{x}^*$ . У класичній постановці під наслідком розуміють деякі параметри, обмірювані експериментально, у даному випадку наслідок є прийняте на даному етапі проєктування уявлення про «добрий» об'єкт. Обчислювальна складність такого пошуку дуже велика.

Розглянемо для даного випадку оптимізацію при обмеженнях в області розв'язуючих алгоритмів.

Якщо безпосереднє перетворення (7.46) заборонено будь-яким з перерахованих умов чи іншими причинами, то досягти  $\mathbf{r}^*$  можна за допомогою МВО за рахунок введення додаткової проміжної операції – попереднього перетворення  $\lambda$  і (або)  $\mathbf{q}$ :

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}; \lambda; \mathbf{q}) \rightarrow \mathbf{r}^*(\mathbf{x}; \lambda^*; \mathbf{q}) \in \mathbf{r}_{уд} \pm \frac{\delta}{2}; \quad (7.48)$$

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}; \lambda; \mathbf{q}) \rightarrow \mathbf{r}^*(\mathbf{x}; \lambda; \mathbf{q}^*) \in \mathbf{r}_{уд} \pm \frac{\delta}{2}; \quad (7.49)$$

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}; \lambda; \mathbf{q}) \rightarrow \mathbf{r}^*(\mathbf{x}; \lambda^*; \mathbf{q}^*) \in \mathbf{r}_{уд} \pm \frac{\delta}{2}. \quad (7.50)$$

З (7.48) – (7.50) розв'язуються друга і третя зворотні вирази (7.37) задачі. У результаті цього рішення, обчислювальна складність яких також дуже велика, створюється проміжний додатковий стан системи –  $(\mathbf{x}; \lambda^*; \mathbf{q})$ ,  $(\mathbf{x}; \lambda; \mathbf{q}^*)$  чи  $(\mathbf{x}; \lambda^*; \mathbf{q}^*)$ , називаний, як вказувалося вище, віртуальним об'єктом. Реальна реалізація цього стану «у металі» не передбачається, і тому значення складових його параметрів можуть приймати будь-які, іноді чисто гіпотетичні величини. Оскільки задачі (7.48) – (7.50) також є зворотними, до них необхідно віднести всі перераховані вимоги коректності.

Нехай  $\lambda^*$  і (або)  $\mathbf{q}^*$  існують і на *першому* етапі методу віртуального об'єкта вони знайдені.

Це означає, що вдалося досягти бажаного  $\mathbf{r}^*$ , але не за рахунок необхідної оптимізації форми, а шляхом віртуальної зміни властивостей  $\lambda^*$  і (або) зовнішніх впливів  $\mathbf{q}^*$ .

Перейдемо тепер до *другого* етапу, на якому  $\mathbf{x}^*$  шукається як функція від розрахованих на першому етапі  $\lambda^*$  і (або)  $\mathbf{q}^*$ :

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{f}(\lambda^*; \mathbf{q}); \quad \mathbf{x}^* = \mathbf{f}(\lambda; \mathbf{q}^*); \quad \mathbf{x}^* = \mathbf{f}(\lambda^*; \mathbf{q}^*). \quad (7.51)$$

Формули (7.51) у явному вигляді чи інші методи розрахунку за цими рівняннями визначаються в кожному конкретному випадку в залежності від об'єкта проектування, його фізичних моделей і прийнятих методів перетворень у його структурі та параметрах. Їхня обчислювальна складність на порядок менше складності рішення відповідних зворотних задач.

**Теорема 7.2.** Якщо для гладкої системи  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\lambda}; \mathbf{q})$ , яка має можливість приведення в заданий стан за рахунок зміни досяжних проектувальнику параметрів і можливість визначення змінних станів  $\mathbf{x}; \boldsymbol{\lambda}; \mathbf{q}$  по реакціях системи, що задаються,  $\mathbf{r}$ , мають місце  $J$  станів, у яких виконуються нерівності  $\mathbf{r}(\mathbf{x}_{\text{поч}j}; \boldsymbol{\lambda}_{\text{ном}}; \mathbf{q}_{\text{ном}}) < \mathbf{r}_0$ ;  $j = (1, \dots, J)$  та існують перетини  $\mathbf{r}(\mathbf{x}_{\text{поч}j}; \boldsymbol{\lambda}_{\text{ном}}; \mathbf{q})$ ,  $\mathbf{r}(\mathbf{x}_{\text{поч}j}; \boldsymbol{\lambda}; \mathbf{q}_{\text{ном}})$ ,  $\mathbf{r}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\lambda}_{\text{ном}}; \mathbf{q}_{\text{ном}})$ , такі, що на деяких їхніх ділянках, обмежених значеннями аргументів  $\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_2$ ,  $\boldsymbol{\lambda}_{1j} \dots \boldsymbol{\lambda}_{2j}$  та  $\mathbf{q}_{1j} \dots \mathbf{q}_{2j}$ , відповідно, мають місце нерівності  $\mathbf{r}(\mathbf{x}_{\text{поч}j}; \boldsymbol{\lambda}_{\text{ном}}; \mathbf{q}) \geq \mathbf{r}_0$ ,  $\mathbf{r}(\mathbf{x}_{\text{поч}j}; \boldsymbol{\lambda}; \mathbf{q}_{\text{ном}}) \geq \mathbf{r}_0$ ,  $\mathbf{r}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\lambda}_{\text{ном}}; \mathbf{q}_{\text{ном}}) \geq \mathbf{r}_0$ , то існує і таке  $\mathbf{x}^*$ , що належить перетину  $\mathbf{r}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\lambda}_{\text{ном}}; \mathbf{q}_{\text{ном}})$ , при якому  $\mathbf{r}(\mathbf{x}^*; \boldsymbol{\lambda}_{\text{ном}}; \mathbf{q}_{\text{ном}}) \geq \mathbf{r}_0$ .

**Доведення.** Перетин  $N$ -вимірної функції  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\lambda}; \mathbf{q})$  кожної  $(N-2)$ -вимірною поверхнею буде функцією двох змінних. У Теоремі 1 доведено існування  $\mathbf{x}^*$  і можливість його визначення з припустимою погрішністю для функцій двох змінних. Отже, для усіх  $(N-2)$ -вимірних перетинів функції  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\lambda}; \mathbf{q})$  задача має рішення.

Тепер припустимо, що  $N$ -вимірна задача, викладена в Теоремі 2, не має рішення, тобто  $\mathbf{x}^*$  не існує. Тоді повинен бути хоча б один  $(N-2)$ -вимірний перетин, у якому задача не має рішення, що суперечить попередній Теоремі 7.

Таким чином, теорема доведена методом «від протилежного».

Як бачимо, у результаті одного з перетворень (7.51) виходить шуканий вектор  $\mathbf{x}^*$ . Сумарна обчислювальна складність обох етапів – (7.48) – (7.50) і (7.51) мало чим відрізняється від складності одного етапу (7.48) – (7.50). Саме на останньому і вигідно застосовувати швидкодіючі методи обчислень, що накладають заборону на зміну  $\mathbf{x}$ .

Наведемо приклад застосування методу. Нехай у процесі проектування був створений варіант машинобудівної деталі, у якої  $\mathbf{x}$  – вектор розмірів;  $\boldsymbol{\lambda}$  – вектор теплофізичних характеристик матеріалу деталі;  $\mathbf{q}$  – вектор параметрів зовнішніх джерел (стоків) тепла і  $\mathbf{r}$  – температурне поле деталі. Якщо  $\mathbf{r}$  не задовольняє проектувальника з причин недостатньої жаростійкості, варіант проекту за допомогою МВО може бути дороблений з метою одержання температурного поля, що відповідає  $\mathbf{r}^*$ , тобто близького до заданого (чи ідеального –  $\mathbf{r}_{\text{ид}}$ ). При цьому можна застосовувати сучасні обчислювальні методи, для яких існує готове швидкодіюче програмне забезпечення, але які з причин, що знаходяться в самому методі, не дозволяють проводити оптимізацію саме тих параметрів, які проектувальник вибрав для доробки об'єкта. Таким же чином може здійснюватися і доробка (оптимізація) конструкцій вже існуючих деталей.

## 7.2. Застосування методу віртуального об'єкта

Сучасні методи автоматизованого проектування використовують багато «хитрощів», які суттєво полегшують розв'язання багатьох конструкторських задач. До однієї з таких хитрощів відноситься врахування симетрії об'єкта, що проектується, при використанні метода скінченних елементів (МСЕ). В цьому випадку користувачеві пропонується ввести до ЕОМ тільки координати тільки одного скінченного елемента (або відносно невеликої групи скінченних елементів – так званої «нульової елементарної ячейки»), – інші обчислюються автоматично, враховуючи симетрію. Але, як вже було згадано вище, конструювати треба саме несиметричні об'єкти. Виникає протиріччя – або проектувати «погані» об'єкти, або не використовувати «добрі» САПР.

Розглянемо, як за допомогою інформаційної технології «метод віртуального об'єкта» це протиріччя можна обійти. Згадаємо, насамперед, що перетини елементів несучих металоконструкцій традиційно вибирають у залежності від наявного в розпорядженні сортаменту прокату або виготовляють, як правило, близькими до симетричних фігур: коло, кільце, квадрат, прямокутник, шестигранник тощо. Такі перетини, незважаючи на свою технологічність, найчастіше не забезпечують рівномірний розподіл напружень від діючих навантажень.

Так, наприклад, при навантаженні круглої труби за схемою, представленою на рис. 7.9 а, епюра напружень уздовж осі труби має вигляд, показаний на рис. 7.9 б. Зміна конструкції труби рівного перетину (рис. 7.9) «підгоном» під діючі навантаження з метою рівномірного розподілу напружень у трубі рівного опору (рис. 7.10) дозволяє знизити металоємність конструкції без істотної втрати її надійності. Аналогічне явище спостерігається при розгляді епюри еквівалентних напружень у перетині круглої труби (рис. 7.11). І тут зміна перетину труби з метою рівномірного розподілу напружень дозволяє оптимізувати конструкцію (рис. 7.12). Задача оптимального в зазначеному вище сенсі проектування зводиться до розрахунку такої конструкції деталі, яка після навантаження заздалегідь заданими силами, забезпечила б рівномірний розподіл напружень по всьому об'ємі, – у випадку наведеного вище прикладу, як по довжині труби, так і по будь-якому її поперечному перерізі.

Такий розрахунок аналітичними методами пов'язаний з великими труднощами навіть при використанні сучасних ЕОМ. Рішення ж задачі методом скінченних елементів ускладнюється тим, що перетин рівного опору, на відміну від симетричного, не може бути розбитий на велику кількість однакових елементів.

Якщо виконана розбивка деякої конструкції на скінченні елементи і визначені схема і параметри зовнішнього навантаження, то напружено-деформований стан кожного скінченного елемента визначається параметрами жорсткості матеріалу, з якого він виготовлений, його формою і розмірами, а також зовнішнім (зосередженим чи розподіленим) навантаженням. Якщо ці параметри пофакторно рівні для двох скінченних елементів, то і їх НДС також еквівалентний (рис. 7.13).

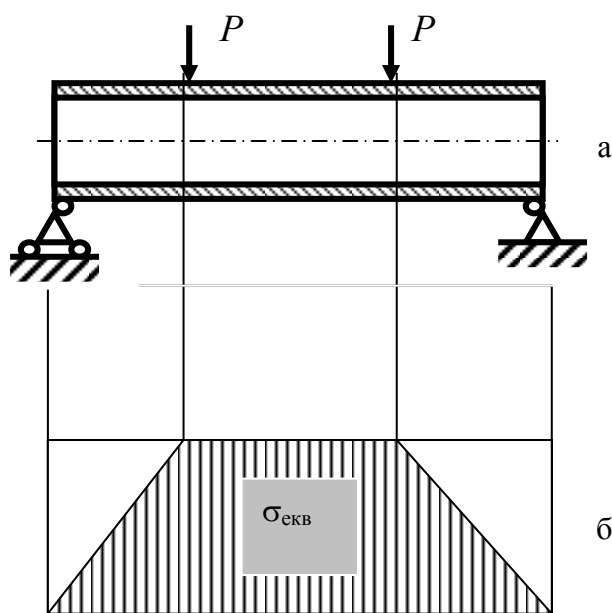


Рис. 7.9. Навантаження труби  
рівного перетину:  
а – схема навантаження; б – епюра еквіва-  
лентних напружень у нульовій елементарній  
ячейці

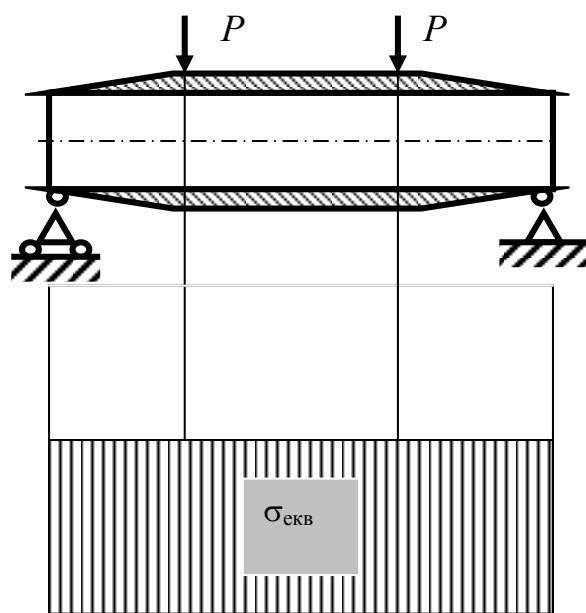


Рис. 7.10. Навантаження труби  
рівного опору:  
а – схема навантаження; б – епюра еквіва-  
лентних напружень у нульовій елементарній  
ячейці

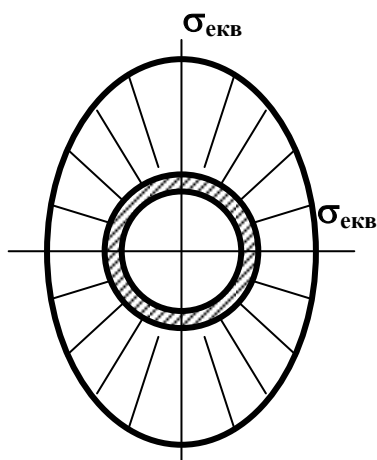


Рис. 7.11. Епюра еквівалентних напружень у  
перетині труби круглого перетину

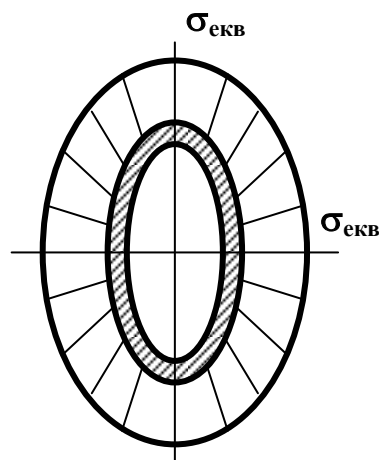


Рис. 7.12. Епюра еквівалентних напружень у  
перетині труби рівного опору

При нерівності параметрів хоча б одного з перерахованих чинників природно припустити і нееквівалентність НДС (рис. 7.14 а).

Така нееквівалентність теоретично може бути ліквідована порушенням рівності іншого чинника (рис. 7.14 б), що діє на НДС у «протилежному» напрямку.

Як видно з рисунка, у тричинниковому випадку компенсація неузгодженості одного чинника може бути здійснена за рахунок неузгодженості другого чи третього чинників окремо або їх спільною дією.

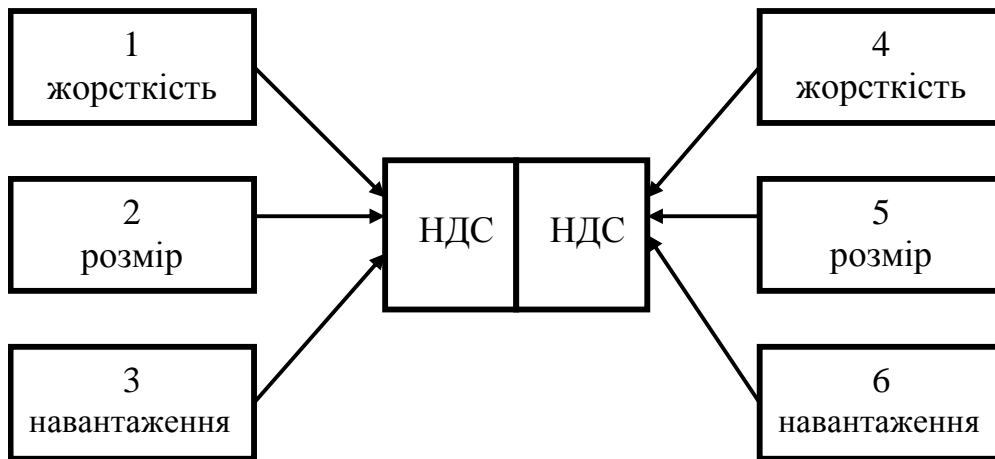


Рис. 7.13. Схема формування НДС двоелементної конструкції

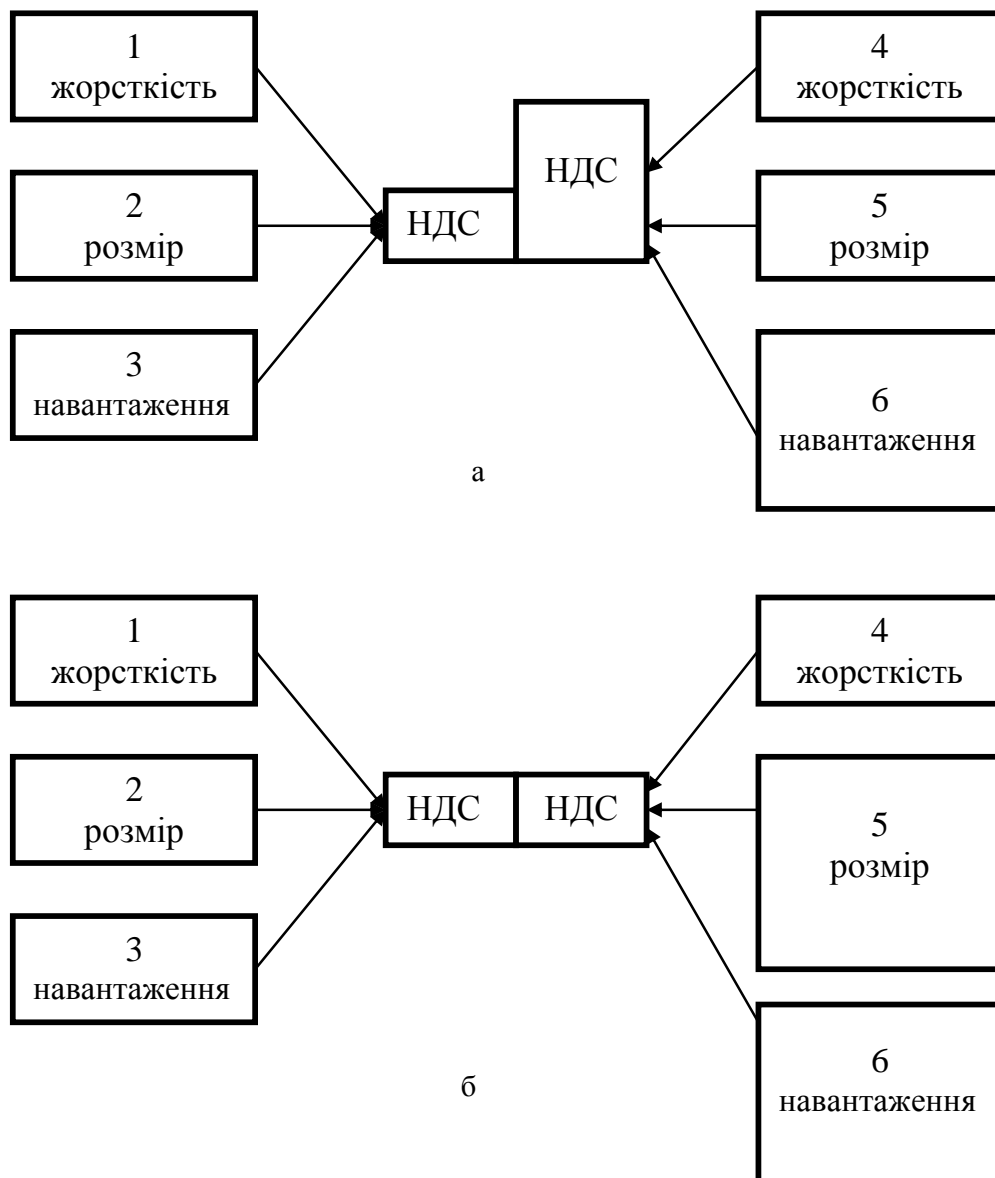


Рис. 7.14. Схема до оцінки ролі факторів, що впливають на НДС

Розглянемо приклад рішення такої задачі в одномірній постановці. Нехай круглий вертикальний стрижень довжиною  $L$  з затисненим верхнім кінцем навантажений власною вагою і діючою уздовж його осі силою  $P$ . При цьому розтягуючі напруження  $\sigma(x)$ , які виникають уздовж цієї осі, що збігається з віссю, можуть бути розраховані за формулою:

$$\sigma(x) = \frac{P}{F} + \gamma x, \quad (7.52)$$

де  $F$  – площа перетину стрижня,  $\gamma$  – питома вага матеріалу стрижня, а деформації в стрижні  $\lambda(x)$  – за формулою:

$$\lambda(x) = \frac{P(L-x)}{EF} + \frac{\gamma}{2E}(L^2 - x^2), \quad (7.53)$$

де  $E$  – модуль пружності матеріалу стрижня.

Вирази (7.52) і (7.53) цілком описують напружено-деформований стан стрижня. Як випливає з (7.52) і (7.53), напруження залежать від координати, а деформації – від квадрата координати, що говорить про нерівномірний розподіл НДС по довжині стрижня. З цих же виразів видно, що при заданих довжині  $L$  і матеріалі стрижня, нерівномірність розподілу напружень і деформацій в ньому може бути компенсована віртуальною нерівномірністю площі перетину  $F$ , жорсткості  $E$  або зовнішнього навантаження  $P$ .

Відповідно до цього, а також до схеми, наведеної на рис. 7.6, існують три види *віртуальних стрижнів*: з компенсуючим розміром, з компенсуючою жорсткістю і компенсуючим зовнішнім навантаженням.

*Віртуальний об'єкт з компенсуючим розміром.* Розіб'ємо стрижень на  $n$  ділянок однакової довжини  $l$  і «дозволимо» цим ділянкам мати різний (але постійний у межах ділянки) діаметр  $D_i$  ( $i = 1, \dots, n$ )... Підберемо співвідношення цих діаметрів таким чином, щоб епюра напружень у стрижні була близькою до рівномірної. При цьому вона буде тим ближча до рівномірної, чим на більшу кількість частин розбитий стрижень. Таким чином, задача може бути вирішена з будь-якою наперед заданою точністю.

*Віртуальний об'єкт з компенсуючою жорсткістю.* Введемо методологічне ускладнення в умову задачі. Нехай, за аналогією з чутливістю до асиметрії скінченноелементних САПР, існуючий алгоритм МСЕ не дозволяє моделювати стрижні з елементів різного діаметра. Оскільки в статично визначних системах напруження не залежать від жорсткості матеріалу стрижня, будемо говорити про вирівнювання не напружень, а деформацій. Скористаємося в цьому випадку схемою, наведеною на рис. 7.6, і спробуємо компенсувати нерівномірний розподіл деформацій не розмірами деталі, а її жорсткістю. Тобто, замінимо стрижень рівних опору і жорсткості, але різного діаметра, на стрижень рівних опору і діаметра, але нерівної жорсткості:  $E_1 \neq \dots \neq E_i \neq \dots \neq E_n$ .



У результаті одержуємо *віртуальний стрижень*, який складається з ділянок різної жорсткості. Практично такий стрижень (у строго обмежених властивостями реальних речовин межах) можна виготовити з різних матеріалів, але нас цікавить саме деякий віртуальний об'єкт, значення  $E_i$  у ділянках якого можуть приймати *будь-які* значення.

Таким чином, задовольнивши вимогу введеного обмеження, тобто *зберігши в недоторканності рівний діаметр елементів стрижня*, можна за допомогою пакета МСЕ, чутливого до мінливості розмірів елементів, підібрати значення  $E_1, \dots, E_i, \dots, E_n$ , які забезпечують приблизно (з будь-якою заздалегідь заданою точністю) рівні деформації по довжині стрижня. Помітимо, що ця, найтрудомісткіша частина розрахунків виконується за допомогою ЕОМ, що і потрібно проектувальнику. Примхливий пакет удалося «обійти», підклавши йому віртуальний стрижень. Тепер залишилося за рамками пакета, користуючись співвідношенням  $D_i = f(E_i)$ , виведеним для  $\sigma = const$ , за відомим значенням  $E_i$  визначити величини  $D_i$  для кожного елемента стрижня, які відновлюють рівну жорсткість для всіх його елементів. Проект реального стрижня оптимальної конструкції готовий.

*Віртуальний об'єкт із компенсуючим зовнішнім навантаженням.* Зафіксуємо середнє значення еквівалентного напруження  $\bar{\sigma}_{екв\ i}$  в  $i$ -ому елементі при розрахунковому навантаженні: силі  $P$  і прискоренні сили ваги  $g$ . Будемо далі мислено змінювати навантаження, підбираючи такі його значення  $P_1, \dots, P_{i-1}, P_{i+1}, \dots, P_n$  і  $g_1, \dots, g_{i-1}, g_{i+1}, \dots, g_n$ , які забезпечують близьке до  $\bar{\sigma}_{екв\ i}$  значення напружень для всіх інших елементів. Різні навантаження прикладаються до об'єкта одночасно (у віртуальній ситуації це не є неможливим!), але при цьому, кожне навантаження забезпечує задане значення  $\bar{\sigma}_{екв\ i}$  тільки «своєму» елементу; у інших елементів в момент дії «чужого» навантаження напруження будуть відрізнятися від  $\bar{\sigma}_{екв\ i}$ , що в рамках даного методу не має значення.

При цьому розміри стрижня так само, як і в попередньому випадку, залишаються на цьому етапі незмінними, що дає можливість використовувати для підбора навантаження чуттєвий до розмірного параметра пакет прикладних програм.

У результаті одержуємо ряди віртуальних зовнішніх сил  $P_1, \dots, P_{i-1}, P, P_{i+1}, \dots, P_n$  і віртуальних прискорень  $g_1, \dots, g_{i-1}, g, g_{i+1}, \dots, g_n$ , які вже за межами роботи з пакетом можуть бути перераховані в ряд діаметрів стрижня рівної напруженості, що відновлюють єдині вихідні значення зовнішньої сили і прискорення сили ваги, тобто які роблять стрижень цілком реальним.

### 7.2.1. Розрахунок статично невизначених систем

Як вказувалося вище, залежність розподілу напружень від жорсткості елементів конструкції існує тільки в статично невизначених системах. Тому приклад застосування методу віртуальних об'єктів у частині використання об'єкта з

віртуальною твердістю розглянемо на прикладі навантаження стрижня, схема якого наведена на рис. 7.15.

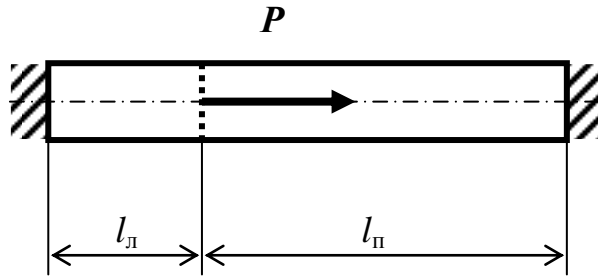


Рис. 7.15. Приклад навантаження горизонтального стрижня

Горизонтальний стрижень, жорстко затиснений на кінцях, навантажений діючою уздовж його осі силою  $P$ , прикладеною на відстані  $l_l$  від його лівого краю і  $l_n$  – від правого і розділений площиною свого перетину на дві частини – ліву і праву. Дією сили ваги зневажаємо. Відомо, що в такому випадку існують три функції:  $\sigma_l$ ,  $\sigma_n$ ,  $\Delta\sigma$  двох змінних:  $F_l$ ,  $F_n$ , задані співвідношеннями:

$$\sigma_l = P \frac{l_n E_l}{l_l E_n F_n + l_n E_l F_l}; \quad (7.54)$$

$$\sigma_n = P \frac{l_l E_n}{l_l E_n F_n + l_n E_l F_l}; \quad (7.55)$$

$$\Delta\sigma = \sigma_l - \sigma_n = P \frac{l_n E_l - l_l E_n}{l_l E_n F_n + l_n E_l F_l}, \quad (7.56)$$

де  $\sigma_l, \sigma_n$  – відповідно, напруження в лівій і правій частинах стрижня,  $F_l, F_n$  – перетини лівої і правої частин;  $E_l, E_n$  – жорсткості частин стрижня.

Аналіз рівнянь (7.54) – (7.56) показує, що, на жаль, умова  $\Delta\sigma = 0$  нездійсненна при скінченних  $F_l, F_n$ . Це відповідає твердженню про те, що в статиці невизначених конструкцій у загальному випадку у всіх елементах одночасно не можна одержати рівні напруження. Тому мова може йти тільки про мінімізацію  $\Delta\sigma$ , а вся задача зводиться до оптимізаційної при трьох критеріях оптимізації –  $\sigma_l$ ,  $\sigma_n$ ,  $\Delta\sigma$ , двох змінних –  $F_l, F_n$  і з обмеженнями. Її формулювання для нашого прикладу виглядає таким чином.

Знайти оптимальні значення  $F_l^*$  і  $F_n^*$ , при яких  $|\Delta\sigma| \rightarrow \min$ ,  $\sigma_l \rightarrow \max$ ,  $\sigma_n \rightarrow \max$ , і виконуються такі обмеження:

$$\sigma_l \leq [\sigma]; \quad (7.57)$$

$$\sigma_n \leq [\sigma]; \quad (7.58)$$

$$F_{l \min} \leq F_l \leq F_{l \max}; \quad (7.59)$$

$$F_{n \min} \leq F_n \leq F_{n \max}. \quad (7.60)$$

Рішення оптимізаційної задачі при трьох критеріях оптимізації представляє істотні труднощі і не дає однозначного кінцевого результату. Тому в якості єдиного критерію оптимізації була обрана сумарна маса  $m$  проєктованої деталі (вузла).

У нашому прикладі сумарна маса стрижня  $m$  (металоемність) може бути визначена за виразом:

$$m = m_l + m_n = \rho(l_l F_l + l_n F_n), \quad (7.61)$$

а її оптимальне (найменше) значення, відповідно, дорівнює:

$$m^* = \rho(l_l F_l^* + l_n F_n^*). \quad (7.62)$$

Проаналізуємо вираз (7.62). Як вказувалося вище, значення  $\Delta\sigma = 0$  недосяжне. Це добре видно на рис. 7.16, де показаний окремий випадок залежності  $\sigma_l$  і  $\sigma_n$  від  $F_n$  при  $l_l = 0,4$  м;  $l_n = 0,6$  м;  $E_l = E_n = 2 \cdot 10^5$  МПа;  $P = 10$  кН;  $F_l = 10^{-4}$  м<sup>2</sup>. Як видно з рисунка, криві напружень у межах реально існуючих розмірів не перетинаються. Розрахунок же показує, що це перетинання має місце лише при  $F_n = \infty$ .

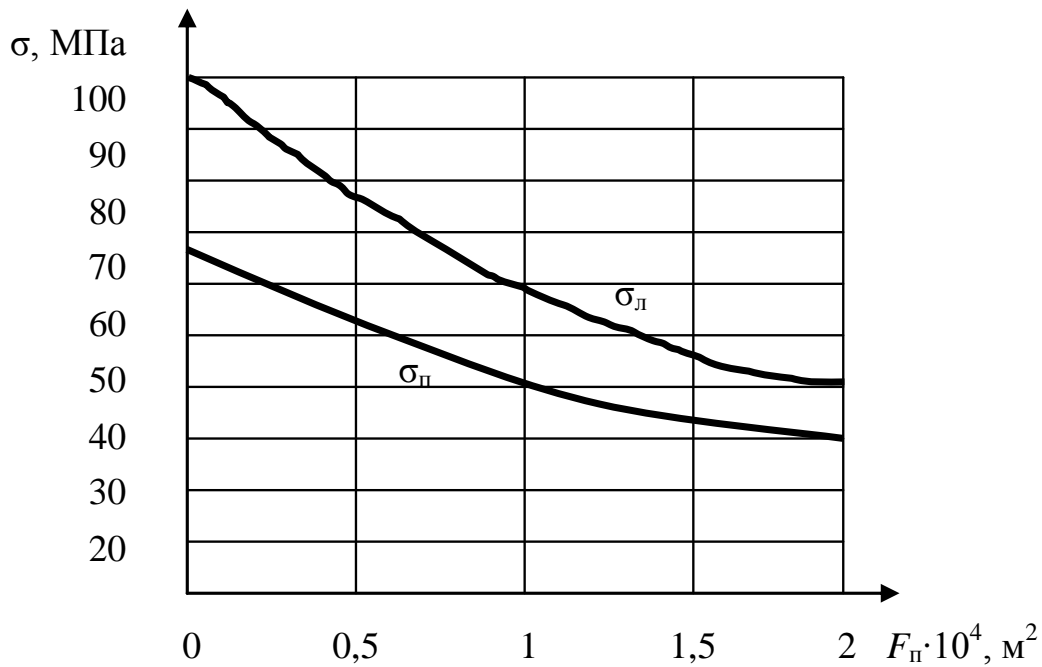


Рис. 7.16. Залежність напружень у стрижні від площі перетину його правої частини

Вирішимо спочатку описану вище оптимізаційну задачу традиційним методом, – підбираючи площі перетинів його частин з урахуванням обмежень (7.57) – (7.60).

На рис. 7.17 наведена геометрична інтерпретація таких обмежень. Насамперед, у координатах  $F_{\text{л}}$ ,  $F_{\text{п}}$  побудований прямокутник, що відповідає обмеженням (7.59) і (7.60).

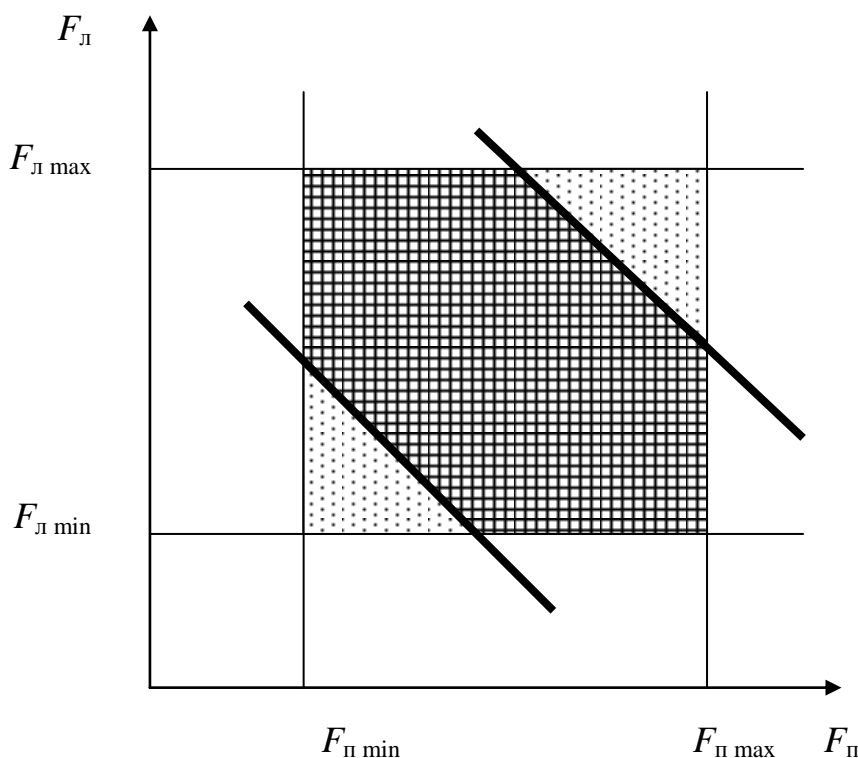


Рис. 7.17. Схема до розв'язання задачі оптимізації

Кожна точка цього прямокутника – суть аргументи у виразі (7.61), що моделює стрижень обраної конструкції. Геометричний зміст обмежень (7.57) і (7.58) полягає в тому, що вони відтинають від прямокутника аргументів (рис. 7.9) області, у яких не виконується умова міцності. Для кожної пари аргументів по (7.61) може бути розраховане значення маси стрижня. Пари значень  $F_{\text{л}}^*$  і  $F_{\text{п}}^*$ , які забезпечують мінімальні значення маси  $m^*$ , і будуть рішенням задачі, тобто площами перетинів частин стрижня найменшої маси, що задовольняє вимогам (7.57) – (7.60).

Задачу вирішували методом сіток, для чого прямокутник на рис. 7.9 покривали сіткою, у вузлах якої знаходилися розрахункові пари значень  $F_{\text{л}}$ ,  $F_{\text{п}}$ . Для кожного вузла розраховували також значення напружень в обох частинах стрижня. Якщо ці значення не перевищували допустиме, то отримане для цього вузла значення  $m$  порівнювали зі значеннями  $m$  в інших вузлах і вибирали мінімальне.

Результати розрахунків зведені в табл. 7.4.

Таблиця 7.4

Результати попередньої оптимізації розмірів стрижня

№ п/п	$E_n$ МПа	$E_n$ МПа	$P$ Н	$F_{л\ min}$ м <sup>2</sup>	$F_{п\ min}$ м <sup>2</sup>	$F_{л\ max}$ м <sup>2</sup>	$F_{п\ max}$ м <sup>2</sup>	$[\sigma]$ МПа	$m^*$ кг	$F_{л}^*$ м <sup>2</sup> ·10 <sup>4</sup>	$F_{п}^*$ м <sup>2</sup> ·10 <sup>4</sup>	$\sigma_{л}$ МПа	$\sigma_{п}$ МПа
1	200000	200000	10000	0,00005	0,00005	0,0002	0,0002	100	0,446	0,66	0,51	100	66,6
2	200000	200000	5000	0,00005	0,00005	0,0002	0,0002	100	0,3978	0,51	0,51	58,82	39,21
3	200000	200000	15000	0,00005	0,00005	0,0002	0,0002	100	0,606	1,16	0,51	100	66,6
4	200000	200000	20000	0,00005	0,00005	0,0002	0,0002	100	0,7566	1,66	0,51	100	66,6
5	200000	200000	10000	0,00005	0,00005	0,0002	0,0002	200	0,3978	0,51	0,51	117,6	78,4
6	200000	200000	10000	0,00005	0,00005	0,0002	0,0002	150	0,3978	0,51	0,51	117,6	78,4
7	200000	200000	10000	0,00005	0,00005	0,0002	0,0002	250	0,3978	0,51	0,51	117,6	78,4
8	200000	200000	10000	0,00005	0,00005	0,0002	0,0002	80	0,5226	0,91	0,51	80	53,3
9	200000	200000	10000	0,00005	0,00005	0,0002	0,0002	60	0,6536	1,33	0,51	59,88	39,92
10	200000	200000	10000	0,00005	0,00005	0,0002	0,0002	40	0,9812	1,99	0,77	39,94	26,6
11	100000	100000	10000	0,00005	0,00005	0,0002	0,0002	100	0,4446	0,66	0,51	100	66,66
12	150000	150000	10000	0,00005	0,00005	0,0002	0,0002	100	0,4446	0,66	0,51	100	66,66
13	200000	200000	10000	0,00002	0,00002	0,0003	0,0003	100	0,3666	0,86	0,21	100	66,66
14	200000	200000	10000	0,00002	0,00002	0,0003	0,0003	200	0,2137	0,37	0,21	196	130,07

При переході до методу віртуальної жорсткості значення площі перетину всього стрижня фіксували на початковому рівні, а перебору у вузлах сітки піддавали значення модулів пружності, – тепер уже різних у лівій і правій частинах.

У цьому алгоритмі мінімізації піддавалася абсолютна величина різниці між напруженнями в різних частинах стрижня:

$$\Delta E = |E_l - E_n|. \quad (7.63)$$

Задача розрахунку – знайти мінімальний перетин, при якому підбором  $E_l$  і  $E_n$  ще вдається забезпечити виконання нерівностей (7.57) і (7.58). Результати розрахунків за цим алгоритмом наведені в табл. 7.5.

Приведемо конкретний приклад застосування методу віртуальної жорсткості для розрахунку стрижня оптимальної конструкції, навантаженого за схемою (рис. 7.15).

*Початкові дані до розрахунку:*

- довжина лівої частини стрижня –  $l_l = 0,4$  м;
- довжина правої частини стрижня –  $l_n = 0,6$  м;
- зовнішня сила –  $P = 10.000$  Н;
- допустиме напруження –  $120$  МПа;
- номінальне значення модуля пружності реального матеріалу стрижня –  $E_{ном} = 200000$  МПа;
- густина матеріалу стрижня –  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>.

**Крок 0.** Приймаємо  $\sigma_l = [\sigma]$  і за формулою (7.54) визначаємо значення  $F_l$ , яке забезпечує напруження в лівій частині, яке дорівнює  $[\sigma]$ :

$$F_l = \frac{P}{[\sigma]} \cdot \frac{l_l}{l_l + l_n} = 0,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2. \quad (7.64)$$

Оскільки на кроці 0 стрижень має єдину площу перетину  $F_n = F_l = F_0^*$ , то напруження в правій частині:

$$\sigma_n = \frac{P}{F_n} \cdot \frac{l_n}{l_l + l_n} = 80 \text{ МПа}. \quad (7.65)$$

Таким чином, із усіх стрижнів рівного перетину даний має найменшу масу  $m_0^*$ :

$$m_0^* = \rho \cdot F_0^* (l_l + l_n) = 0,39 \text{ кг}. \quad (7.66)$$

Таблиця 7.5

Результати оптимізації напружень в стрижні

№ п/п	$E_{л\ min}$	$E_{п\ min}$	$E_{л\ max}$	$E_{п\ max}$	$F_{л}$	$F_{п}$	$P$	$[\sigma]$	$m^*$	$E_{л}^*$	$E_{п}^*$	$\sigma_{л}$	$\sigma_{п}$
	МПа	МПа	МПа	МПа	м <sup>2</sup>	м <sup>2</sup>	Н	МПа	кг	МПа	МПа	МПа	МПа
1	100000	100000	250000	250000	0,00005	0,00005	10000	120	0,3276	166000	249000	119	119
2	100000	100000	250000	250000	0,00005	0,00005	11000	120	0,3588	166000	249000	120	120
3	100000	100000	250000	250000	0,00005	0,00005	11500	120	0,3744	166000	249000	120	120
4	100000	100000	250000	250000	0,00005	0,00005	8000	100	0,3198	166000	249000	97,6	97,6
5	100000	100000	200000	200000	0,00005	0,00005	10000	120	0,3276	132000	198000	119	119
6	100000	100000	225000	225000	0,00005	0,00005	10000	120	0,3276	148000	222000	119	119
7	200000	200000	300000	300000	0,00005	0,00005	10000	120	0,0078	200000	298000	102	102
8	150000	150000	250000	250000	0,00005	0,00005	10000	120	0,3276	164000	246000	119	119
9	150000	150000	250000	250000	0,00005	0,00005	9000	120	0,2964	164000	246000	118	118
10	150000	150000	250000	250000	0,00005	0,00005	8000	120	0,2652	164000	246000	117	117
11	150000	150000	250000	250000	0,00005	0,00005	10000	115	0,3432	164000	246000	111	111
12	150000	150000	250000	250000	0,00005	0,00005	10000	110	0,3588	164000	246000	109	109
13	150000	150000	250000	250000	0,00005	0,00005	10000	105	0,3744	164000	246000	104	104
14	150000	150000	250000	250000	0,00005	0,00005	10000	100	-	-	-	-	-

**Крок 1.** З конструктивних суджень вибираємо границі варіювання:  $F_{л\ min} = 0,000035\ м^2$ ;  $F_{л\ max} = 0,0002\ м^2$ ;  $F_{п\ min} = 0,000035\ м^2$ ;  $F_{п\ max} = 0,0002\ м^2$ . Визначаємо площі перетинів  $F_{л1}^*$  і  $F_{п1}^*$ , які забезпечують  $m_1^*$ :

$$\begin{aligned} F_{л1}^* &= 0,60 \cdot 10^{-4}\ м^2; \\ F_{п1}^* &= 0,36 \cdot 10^{-4}\ м^2; \\ m_1^* &= 0,3559\ кг \end{aligned} \quad (7.67)$$

при напруженнях, рівних 119,0476 МПа в лівій і 79,36507 МПа в правій частинах.

Розраховуємо відносну зміну площі перетину при переході від кроку 0 до кроку 1:

$$\Delta F_{л} = \frac{F_{л1}^*}{F_0^*} = 1,54 ; \quad (7.68)$$

$$\Delta F_{п} = \frac{F_{п1}^*}{F_0^*} = 0,22 . \quad (7.69)$$

**Крок 2.** Вибираємо границі варіювання жорсткості:  $E_{л\ min} = 100000\ МПа$ ;  $E_{л\ max} = 250000\ МПа$ ;  $E_{п\ min} = 100000\ МПа$ ;  $E_{п\ max} = 250000\ МПа$ .

Визначаємо віртуальні значення модулів пружності  $E_{л2}^*$  і  $E_{п2}^*$ , які забезпечують  $m_2^*$ :

$$\begin{aligned} E_{л2}^* &= 1,66 \cdot 10^{11}\ МПа; \\ E_{п2}^* &= 2,49 \cdot 10^{11}\ МПа; \\ m_2^* &= 0,3276\ кг . \end{aligned} \quad (7.70)$$

Розраховуємо відносну зміну модуля пружності при переході від кроку 1 до кроку 2:

$$\Delta E_{л} = \frac{E_{л2}^*}{E_{ном}} = 0,83 ; \quad (7.71)$$

$$\Delta E_{п} = \frac{E_{п2}^*}{E_{ном}} = 1,245 . \quad (7.72)$$

**Крок 3.** Розраховуємо площі перетинів стрижня методом віртуальної жорсткості, виходячи зі співвідношень:



$$\frac{F_{л3}^*}{F_0^*} = \frac{E_{н.о.м}}{E_{л2}^*}; \quad (7.73)$$

$$\frac{F_{н3}^*}{F_0^*} = \frac{E_{н.о.м}}{E_{н2}^*}. \quad (7.74)$$

Користуючись (7.73) і (7.74), одержуємо:

$$F_{л3}^* = \frac{F_0^* \cdot E_{н.о.м}}{E_{л2}^*} = 0,602 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2; \quad (7.75)$$

$$F_{н3}^* = \frac{F_0^* \cdot E_{н.о.м}}{E_{н2}^*} = 0,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2, \quad (7.76)$$

що забезпечує напруження в лівій частині 115,119 МПа і у правій – 76,746 МПа при масі  $m_3^* = 0,375$  кг, тобто в межах норми. Порівнюючи  $F_{л1}^*$  і  $F_{л3}^*$ , а також  $F_{н1}^*$  і  $F_{н3}^*$ ,  $m_1^*$  і  $m_3^*$ , знайдемо, що ці пари значень дуже близькі.

Особливо слід зазначити, що остаточний результат (7.75) і (7.76) був отриманий без використання даних кроку 1, єдиного, де стрижень складався з двох частин нерівних перетинів.

### 7.2.2. Розрахунок оптимальних перетинів

Розглянемо застосування методу для розрахунку оптимальних перетинів на прикладі. Нехай потрібно спроектувати балку у виді товстостінної труби рівної напруженості, умови навантаження якої наведені на рис. 7.9.

Розглянемо перетин у вигляді кільця з внутрішнім діаметром  $D_{вн}$  і зовнішнім  $D_{нач}$ . Створимо скінченноелементну модель балки таким чином, що зовнішня поверхня ізопараметричних скінченних елементів, розташованих перпендикулярно геометричній осі балки, буде збігатися з перетином, представленим на рис. 7.18.

Результати розрахунків еквівалентних напружень у вузлах скінченних елементів, які потрапили в перетин, будуть мати вигляд, наведений на рис. 7.19.

Рисунок ілюструє залежності номінального навантаження  $P_{н.о.м}$ , початкового діаметра перетину  $D_{поч}$  і напружень у вузлах скінченних елементів від кутової координати  $\varphi$  розташування цих елементів. При цьому нульовий елемент має грань, розташовану під кутом  $\varphi = 0^0$  до напрямку осі  $X_1$  у глобальній системі координат. Оскільки центральний кут для кожного скінченного елемента дорівнює  $360/20 = 18^0$ , а еквівалентні напруження розраховували в їхніх вузлах і центрах, кутові координати цих центрів складуть  $[9+18(i-1)]^0$ , де  $i$  – номер кінцевого елемента. Як видно з рис. 7.19, при постійних значеннях  $P_{н.о.м}$  і  $D_{поч}$  значення  $\sigma_{екв}$  значно відрізняються.

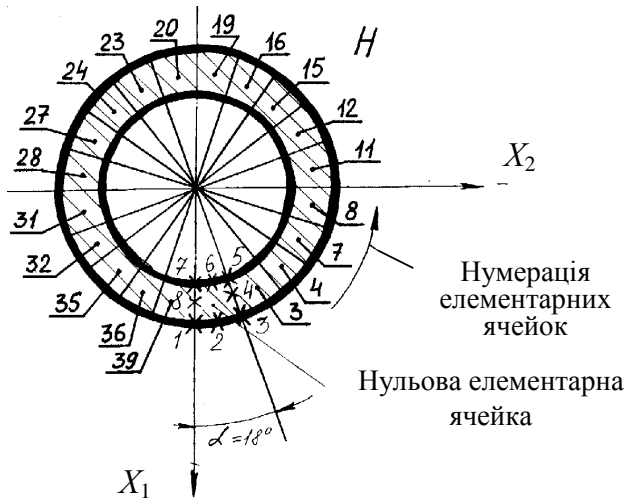


Рис. 7.18. Схема розбиття перетину балки

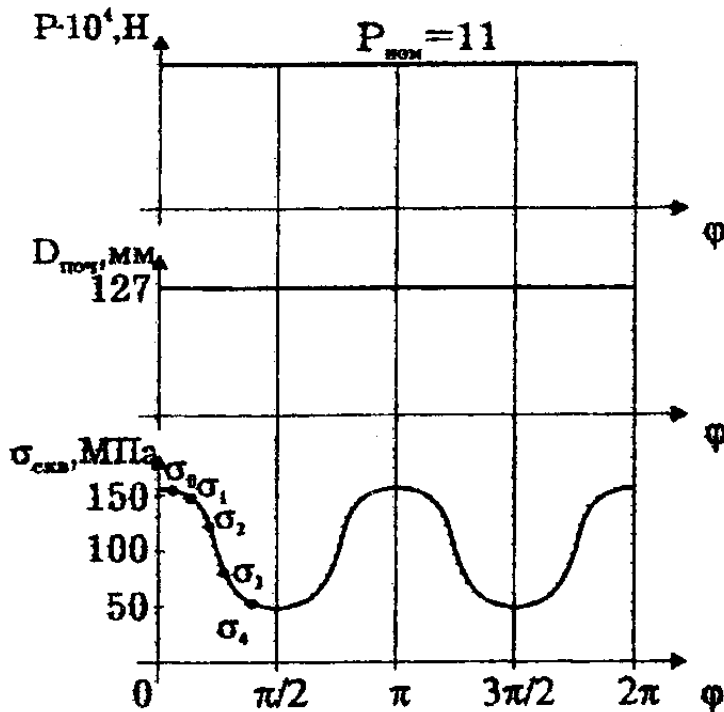


Рис. 7.19. Розвертання значень напружень в перерізі порожнистої круглої деталі

Залежність еквівалентних напружень у скінченних елементах від величини навантаження  $P$  на трубу має вигляд, наведений на рис. 7.20.

Кожна з прямих ліній, що відповідають різним скінченим елементам, проведена крізь дві точки з координатами  $(0; 0)$  і  $(P_{\text{ном}}; \sigma_{\text{екв}})$ . Проводячи горизонтальну лінію, яка відповідає  $\sigma_{\text{екв}} = [\sigma]_{\text{п}}$ , де  $[\sigma]_{\text{п}}$  – допустиме напруження з урахуванням запасу міцності, одержимо масив значень зовнішніх сил, які забезпечують допустиме граничне напруження у кожному елементі. Відклавши в координатах  $(\varphi; P)$  ці значення, одержимо криві (рис. 7.21).

Особливістю рис. 7.21 є те, що точки на кривих відносяться до різних режимів навантаження однієї і тієї ж труби із зовнішнім діаметром  $D_{\text{поч}}$ . Крива  $P(\varphi)$  згладжує значення зовнішніх сил, які забезпечують гранично припустиме напруження для кожного скінченного елемента в перетині.

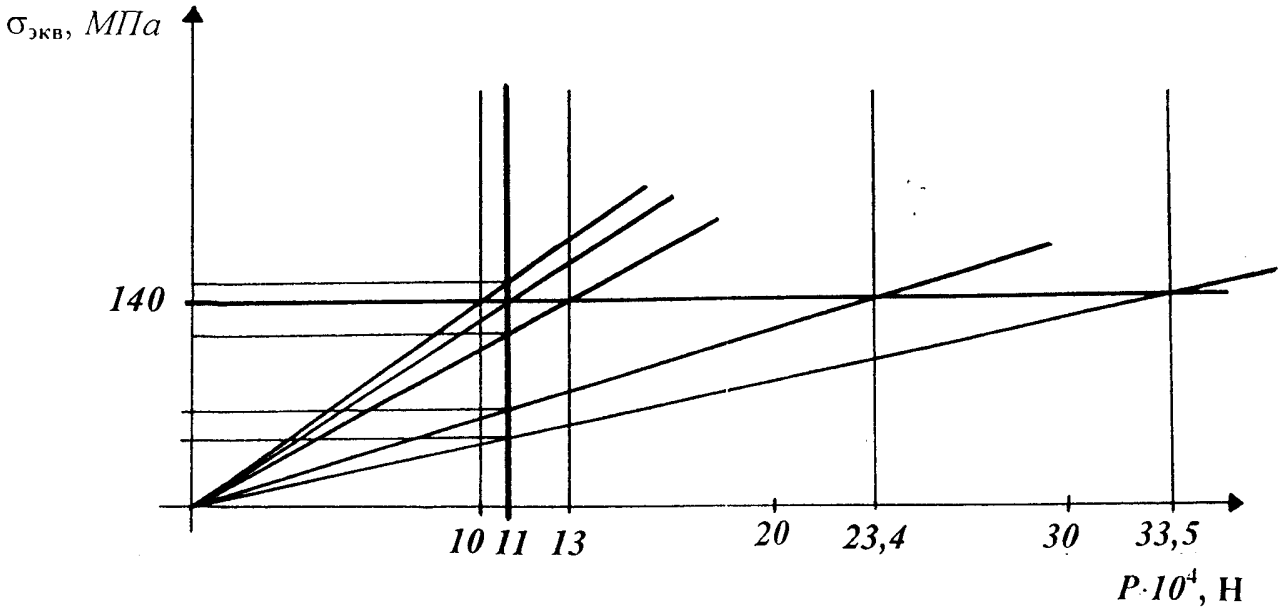


Рис. 7.20. До розрахунку навантажень, які створюють рівні напруження у скінченних елементах

Як видно з рисунка, частина кривої навантаження  $P(\varphi)$  знаходиться нижче значення  $P_{\text{ном}}$ , що приведе до виходу напружень  $\sigma_1$  за припустиму межу  $[\sigma]_n$  при збереженні значення  $D_{\text{поч}}$  (рис. 7.20).

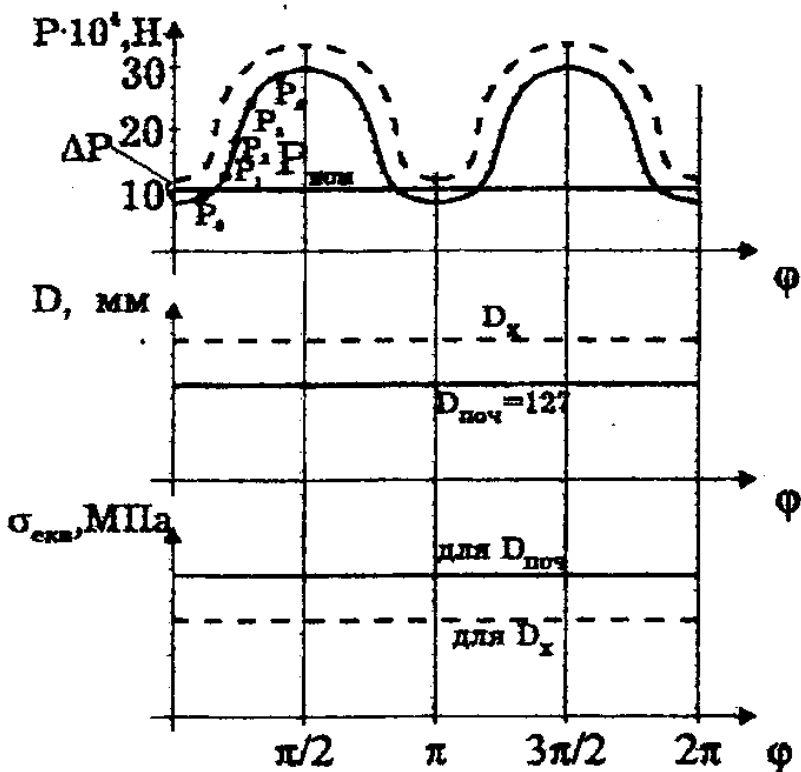


Рис. 7.21. Забезпечення рівних напружень в скінченних елементах

Для усунення цього небажаного явища змінимо значення  $D_{\text{поч}}$  на  $D_x$  таким чином, щоб уся крива  $P(\varphi)$  (рис. 7.21) цілком виявилася по одну сторону від

прямої  $P_{\text{ном}}$  з деяким запасом  $\Delta P$ , необхідним для компенсації втрат опірності балки осі при стискуванні в поперечному перерізі по осі  $X_7$ . Розрахунок значення  $D_x$ , що здійснювався методом підбору за допомогою ППП ПАРСЕК, полегшується тим, що до даного етапу проектування зберігається початковий круглий перетин балки.

Визначивши значення  $D_x$ , розрахуємо для нього за допомогою ППП ПАРСЕК напруження в усіх елементах перетину при  $P = P_{\text{ном}}$  (крива 1, рис. 7.22). Розрахуємо також залежності для інших значень  $D$  (криві 2 – 5, рис. 7.22).

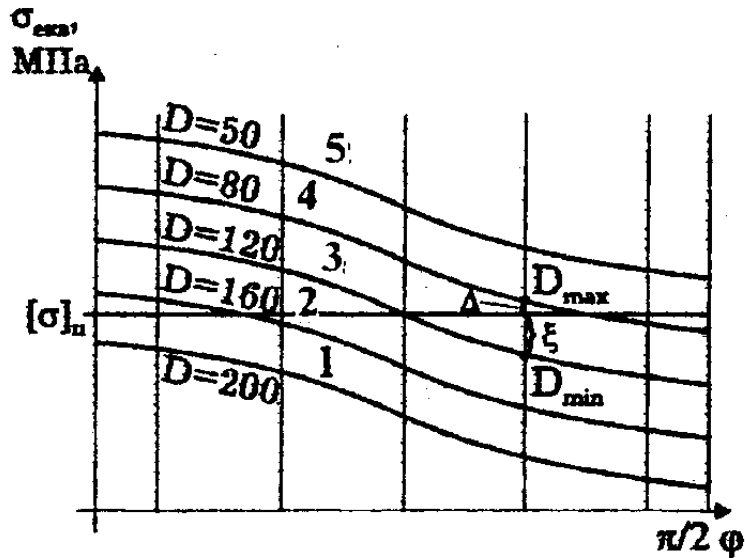


Рис. 7.22. Напруження в скінченних елементах

За допомогою цього рисунка, як по номограмі, визначимо для кожного перетину значення зовнішнього діаметра, який забезпечує  $\sigma_{\text{екв}} = [\sigma]_n$  для кожного елемента (рис. 7.23).

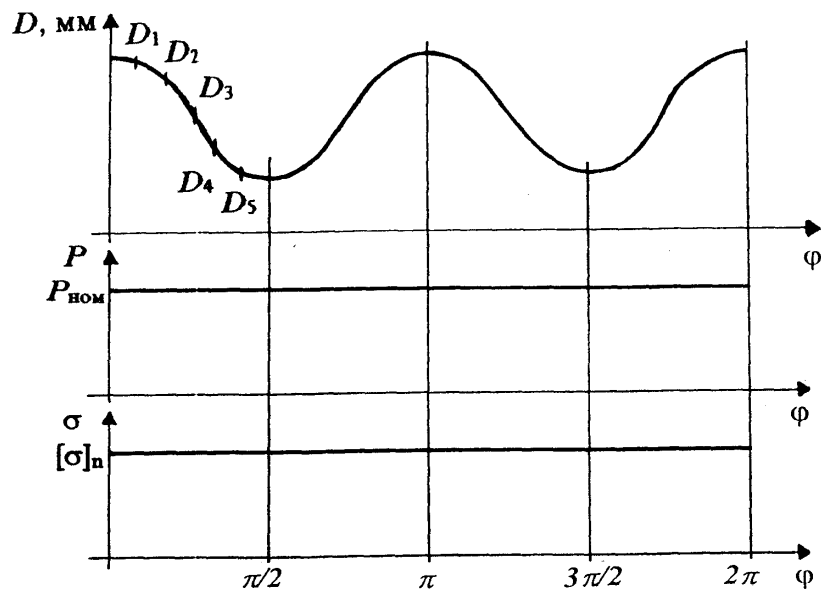


Рис. 7.23. Вирівнювання навантаження труби

Формула інтерполяції при цьому має такий вигляд:

$$D_i = D_{\min} + (D_{\max} - D_{\min}) \frac{\xi_i}{\Delta_i} . \quad (7.77)$$

Позначення у формулі (7.77) впливають з рис. 7.22. Особливістю рис. 7.23 є те, що точки на кривих відносяться до однакових режимів зовнішнього навантаження різних за діаметром труб. Маючи такі дані, ми можемо побудувати залежність напруження в довільно взятому  $i$ -му елементі  $\sigma_i$  від зовнішнього діаметра труби  $D$  при  $P = P_{\text{ном}}$  (крива 1, рис. 7.24). Такий хід кривої відповідає повній зміні розмірів всіх елементів труби.

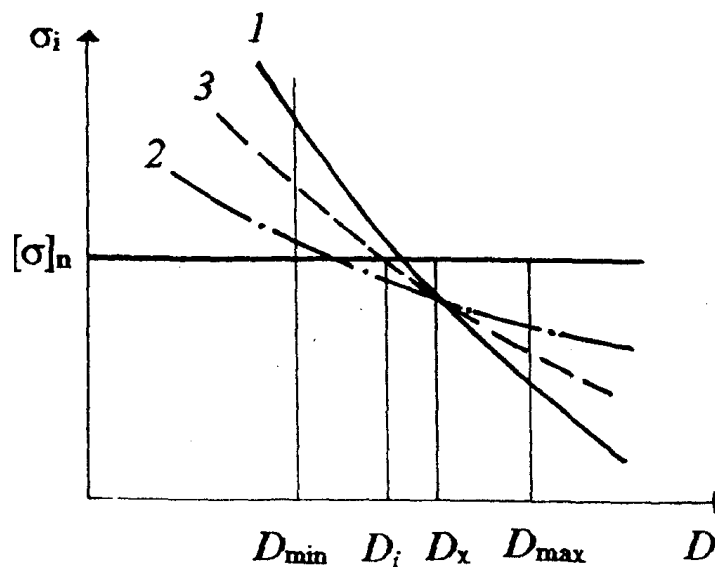


Рис. 7.24. Розрахунок «діаметра» елемента труби

Природно припустити, що зміна розміру  $d$  тільки в  $i$ -го елемента буде відповідати кривій 2 (рис. 7.24). При реальному стискуванні спочатку круглої труби уздовж осі  $X_2$ , тобто частковій зміні розмірів всіх елементів, крива 3, що відповідає цьому випадку, пройде між кривими 1 і 2.

Кількісна оцінка величини  $d$  для кожного елемента полягає у визначенні координати  $d_i$  точки  $A(d_i; [\sigma]_n)$  кривої 3. Однак, розрахувати хід кривих 2 і 3 за допомогою МСЕ важко через порушення симетрії перетину.

### 7.2.3. Віртуальний скінченний елемент

При моделюванні ушкоджень типу тріщин і руйнувань у рамних конструкціях можна вводити спеціальні додаткові скінченні елементи, що імітують порушення суцільності конструкції – релейні елементи. Основні вимоги, які висуваються до такого елемента:

- релейний елемент може знаходитися в двох станах: «ввімкненому» –

ушкоджень немає, у результаті моделювання НДС конструкції елемент не вносить змін; «вимкненому» – ушкодження є, у результаті моделювання вносяться зміни з урахуванням характеру ушкодження (рис. 7.25);

– перемикання релейного елемента здійснюється в автоматичному режимі після чергової ітерації моделювання в процесі перерахування матриці жорсткості.

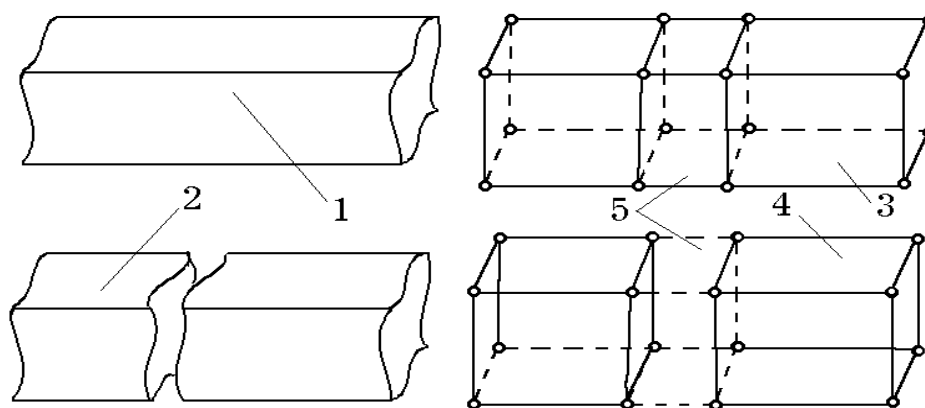


Рис. 7.25. Схема моделювання пошкоджень в елементах конструкції рами:

- 1 – непошкоджена ділянка; 2 – ділянка з пошкодженнями (тріщиною);  
 3 – скінченноелементна модель непошкодженої ділянки; 4 – скінченноелементна модель пошкодженої ділянки;  
 5 – релейний елемент

Сигнал про перемикання надходить від підсистеми, яка моделює стохастичний механізм ушкоджень в конструкції.

Релейний елемент, власне кажучи, є різновидом нелінійного елемента моделі. Відмінність його від інших полягає в тому, що зміна параметрів жорсткості основних елементів моделі здійснюється після кожної часової ітерації на порівняно невелику величину, а зміна в релейний елемент вноситься тільки один раз, причому стрибок параметра жорсткості максимальний (від  $E$  до 0, де  $E$  – модуль пружності матеріалу) (рис. 7.26).

Однак, поява втомленостної тріщини ще не означає негайного руйнування конструкції. На розвиток тріщини і на досягнення нею небезпечного розміру потрібен час, іноді значний.

Відомо, що відношення наробітку після появи тріщини до наробітку при повному завершенні випробувань для зварних металоконструкцій рам автомобілів і тракторів складає 0,23 – 0,70. Допуск до роботи конструкцій із тріщинами часто викликаний виробничою необхідністю. І майже завжди (при відповідній оцінці надійності) економічно доцільний. Уже нові вироби можуть мати тріщини, тому визначення часу роботи деталей із тріщинами є актуальною науково-технічною задачею.

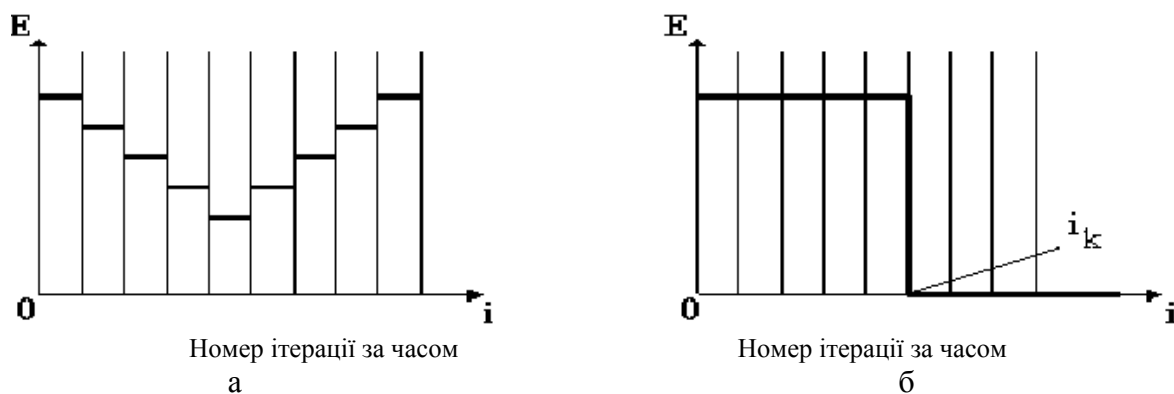


Рис. 7.26. Часова діаграма жорсткості звичайного нелінійного (а) і релейного (б) елементів:  $i_k$  – момент «вимикання» релейного елемента

Якщо модель повинна враховувати розвиток тріщини (багато деталей і зварних з'єднань руйнуються не миттєво, а протягом тривалого часу, що перекриває кілька ітерацій моделювання), то в перетин деталі або зварного шва «вставляються» кілька релейних елементів, як це показано на рис. 7.27.

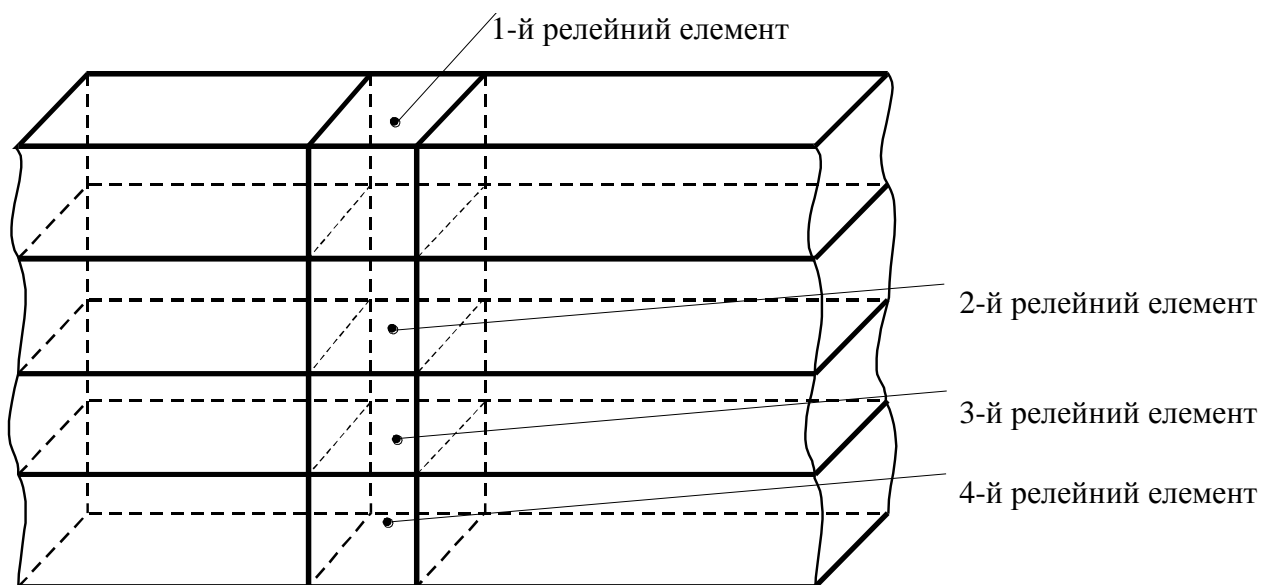


Рис. 7.27. Схема моделювання поетапного руйнування фрагмента металоконструкції

При цьому з'являється можливість моделювати розвиток ушкодження «небезпечного» місця.

Елементи «відключаються» послідовно, починаючи з того краю, де напруження вище.

## 7.2.4. Моделювання нагромадження ушкоджень

Принципи моделювання нагромадження ушкоджень у складній регенеруючій технічній системі за допомогою віртуальних релейних елементів розглянемо на прикладі зварної рами автомобільного напівпричепа.

При моделюванні дотримувалися таких умов.

1. Перетин деталей рами (швелери, двотаври та листи) при розбивці конструкції моделювалися декількома скінченними елементами (від 4-х до 8-и, в залежності від розміру профілю).

7. Відповідно кількості елементів на перетин вводилися релейні елементи в «небезпечних» зонах конструкції.

3. Перше «попадання» генератора випадкових ушкоджень у «небезпечну» зону призводить до вимкнення тільки одного, «крайнього», релейного елемента. При цьому в модель конструкції, з погляду її опору навантаженню, вноситься істотна зміна, що не призводить, однак, до припинення процесу моделювання.

4. При наступному «випадковому» влученні в ту ж зону відключається наступний релейний елемент (цим моделюється розвиток тріщини).

5. Визнання деякого набору ушкоджень у тій чи іншій точці порушення працездатності (відмовою) відбувається при виконанні умов, що є для системи початковими даними, які вводяться ззовні.

Період експлуатації  $T_0 - T_\theta$  зручно розбити на скінченну кількість інтервалів (не обов'язково однакової тривалості):  $T_0 - T_1$ ;  $T_1 - T_2$ ; ... ;  $T_{(\theta-1)} - T_\theta$ . Така дискретизація дозволяє розглядати неперервний процес нагромадження експлуатаційних ушкоджень як стрибкоподібну зміну станів системи на границях часових інтервалів.

Розглянемо стан реального об'єкта. У період  $0 - T_\theta$  при виготовленні та експлуатації (полігонних випробуваннях) у конструкції рами відбуваються  $Z_{T_\theta}^*$  подій, які розглядаються системою як ушкодження одного з наступних видів:

- дефекти складання;
- утворення тріщини;
- ріст тріщини;
- повне руйнування.

У межах кожного виду розглянемо різні типи ушкоджень. До окремого типу віднесемо ушкодження (непровар) зварного з'єднання між деталями з постійними для всіх ушкоджень даного типу назвами або тріщини в окремих елементах конструкції однієї назви.

Наприклад, до одного типу відносяться всі  $n_i$  ушкодження зварного шва між лівою обв'язкою і будь-якою поперечкою, будь-які ушкодження правого лонжерона.

Як вказувалося вище, основою для прийняття рішення про визнання того чи іншого стану об'єкта на даній часовій ітерації працездатним є техніко-



економічні розуміння. Для практичної реалізації такого рішення особі, яка несе відповідальність за його прийняття, повинна бути надана інформація про технічний стан об'єкта на даній часовій ітерації, тобто про наявність ушкоджень не тільки визначеного типу і виду, але і про конкретні місця їхньої локалізації і ступінь ушкодження кожного місця.

Крім того, остання інформація необхідна для продовження процесу моделювання виникнення ушкоджень, оскільки кожна зміна в останніх впливає на НДС конструкції, а отже і на схильність окремих її елементів до наступних ушкоджень.

Для підготовки такої інформації введемо поняття: «місце ушкодження». Відносно до конкретного типу, це поняття однозначно визначає місце розташування на кресленні рами деталей, між якими виникає ушкодження (наприклад, тип ушкодження: «поперечка – права обв'язка», місце ушкодження: «4-а поперечка – права обв'язка».

Нехай кожному  $i$ -му типу ушкоджень відповідає  $M_i$  місць ушкоджень. Таким чином, загальна кількість місць, що враховується системою, можливих ушкоджень  $\Pi$  дорівнює:

$$\Pi = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} \Pi_{ij}, \quad (7.78)$$

де  $\Pi_{ij}$  – ушкодження  $i$ -го типу в  $j$ -ому місці.

З урахуванням описаної вище методики моделювання розвитку тріщини (ступеня ушкодження) кожне місце ушкодження розглядається в моделі як декілька (більше 1) релейних елементів. Нехай для кожного  $\Pi_{ij}$  з  $\Pi$  місць ушкодження кількість релейних елементів дорівнює  $K_{ij}$ .

Тоді загальна кількість релейних елементів у моделі рами дорівнює:

$$R = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} \sum_{k=1}^{K_{ij}} r_{ijk}, \quad (7.79)$$

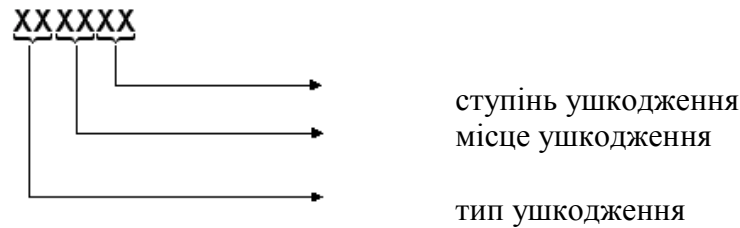
де  $r_{ijk}$  – релейний елемент, що моделює  $k$ -у ступінь ушкодження  $i$ -го типу в  $j$ -му місці. Очевидно, що максимально можлива кількість модельованих ушкоджень  $Z_{\infty} = R$ . Для рами розглянемо ймовірнісно-автоматну модель. Вхідний алфавіт – матриці ушкоджень на початку чергової ітерації  $\mathbf{A}_{\Pi}^T$ . Вихідний алфавіт – матриця ушкоджень наприкінці чергової ітерації  $\mathbf{A}_{\Pi}^{T+1}$ . В якості функції внутрішнього стану приймаємо матрицю імовірностей виникнення ушкоджень того чи іншого типу в тому чи іншому місці  $\mathbf{A}_{\Pi}$  на часовій ітерації  $T - (T+1)$ . Функція виходу при цьому буде мати вигляд:

$$\mathbf{A}_{\Pi}^{T+1} = \mathbf{A}_{\Pi}^T + \mathbf{A}_{\Delta}. \quad (7.80)$$

Матриці в (7.80) мають такий фізичний і математичний сенс. Повна інформація про місце розташування і кількість релейних елементів моделі – це деякий двомірний числовий масив з числом рядків, рівним  $N$ , числом елементів масиву в кожному рядку, рівному  $M_i$  і значенням кожного елемента масиву, рівному  $K_{ij}$  ( $i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, M_i$ ). Вибираючи з чисел елементів масиву в кожному рядку  $M_i$  максимальне  $M_{max}\{M_{max} \subset M\}$  і доповнюючи в кожному рядку праворуч стільки нульових елементів, щоб їхня загальна кількість стала рівною  $M_{max}$ , одержимо прямокутну  $N \times M_{max}$  матрицю, яка має, наприклад, вигляд:

$$\mathbf{A}_R = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & 0 & 0 \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} & K_{37} \\ K_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.81)$$

Таким чином, остаточно, машинний код релейного елемента має специфікацію: «тип ушкодження – місце ушкодження – ступінь ушкодження», і включає такі розряди:



Якщо елементами матриці  $\mathbf{A}_R$  вважати не кількість релейних елементів (тобто, потенційних можливостей до ушкодження), а самі ушкодження, то одержимо деяку аналогічну за розміром ( $M \times N$ ) матрицю:

$$\mathbf{A}_\Pi^t = f(t). \quad (7.82)$$

Така матриця для проекту рами, який не передбачає ушкоджень буде нульовою:

$$\mathbf{A}_\Pi^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.83)$$

а для деякого порогового випадку, коли всі «заплановані» ушкодження відбулися – збігатися з матрицею релейних елементів:

$$\mathbf{A}_{\Pi}^{\infty} = \mathbf{A}_R. \quad (7.84)$$

Оскільки величина  $t$  – дискретна з вузлами в  $0; T_0; T_1; \dots, T_{\theta}$ , то процес моделювання експлуатації рами буде складатися з послідовного перетворення матриць:

$$\mathbf{A}_{\dot{I}}^{\dot{0}} = f(\mathbf{A}_{\dot{I}}^0; \dot{O}_0); \quad \dot{\mathbf{A}}_{\dot{I}}^{\dot{1}} = f(\mathbf{A}_{\dot{I}}^{\dot{0}}; \dot{O}_1); \quad \dots; \quad \dot{\mathbf{A}}_{\dot{I}}^{\theta} = f(\mathbf{A}_{\dot{I}}^{\dot{\theta-1}}; \dot{O}_{\theta}),$$

де  $T_{\theta}$  – часова границя випробувань (моделювання).

Перетворення

$$\mathbf{A}_{\Pi}^{T_1} = f_t(\mathbf{A}_{\Pi}^{T_{t-1}}; T_t) \quad (7.85)$$

здійснюється на підставі додавань до елементів вихідної матриці  $\mathbf{A}_{\Delta}^{T_t}$  елементів такої ж за розміром модернізованої  $\Delta$ -матриці, тобто підсумовуванням (див. формулу (7.80)):

$$\mathbf{A}_{\Pi}^{T_t} = \mathbf{A}_{\Pi}^{T_{t-1}} + \mathbf{A}_{\Delta}^{T_t}. \quad (7.86)$$

Модернізована  $\Delta$ -матриця  $\mathbf{A}_{\Delta}^{T_t}$ , у свою чергу, отримується послідовним множенням кожного елемента немодернізованої  $\Pi$ -матриці  $\mathbf{A}_{\Pi}^{T_{\Delta}}$  на відповідні елементи матриці-сита (С-матриці)  $\mathbf{AC}$ , що мають можливість приймати значення «0» або «1» (рис. 7.28).

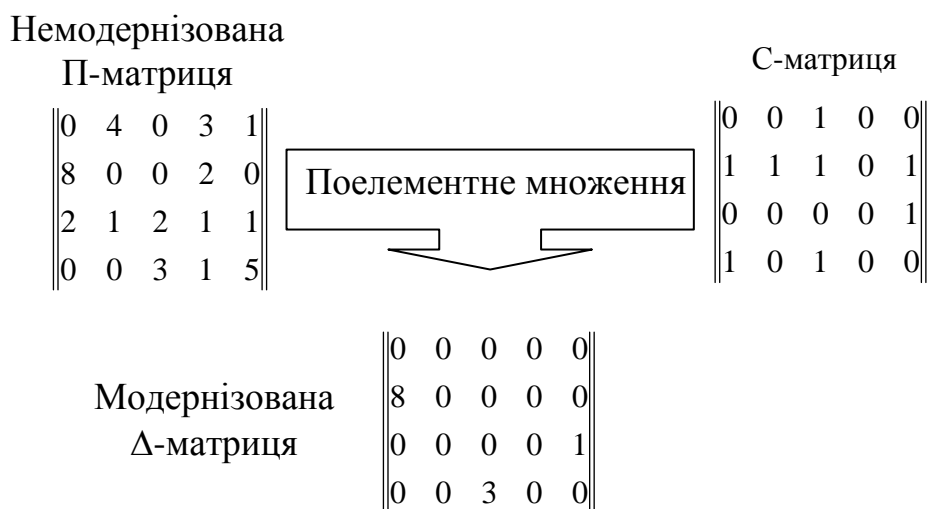


Рис. 7.28. Схема обчислення модернізованої  $\Delta$ -матриці

Джерелами немодернізованої П-матриці і С-матриці після кожної часової ітерації моделювання є відповідні підсистеми загальної системи експрес-оцінки питомих витрат на експлуатацію металоконструкцій типу рам (рис. 7.29). Розглянемо докладно роботу відповідних підсистем.

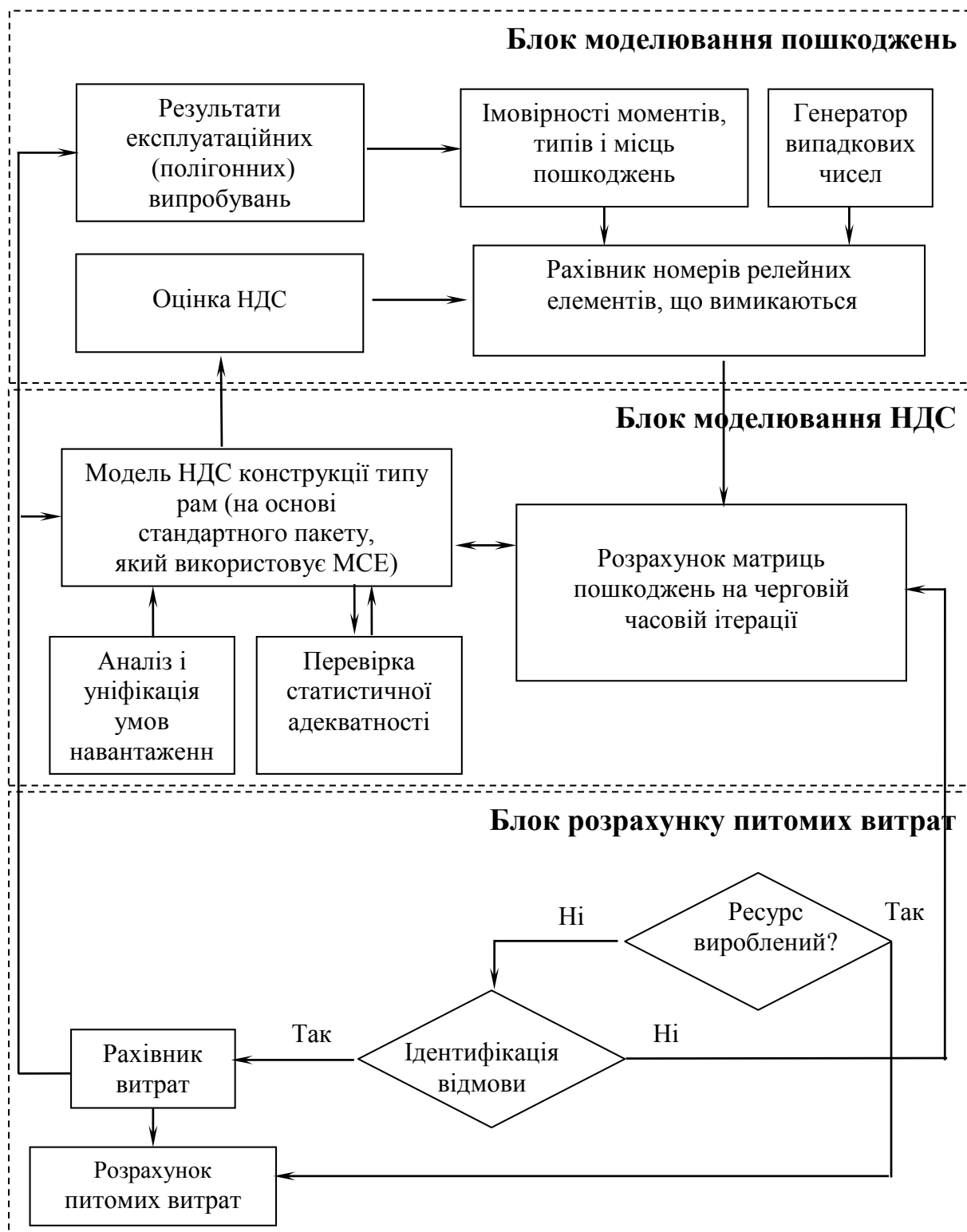


Рис. 7.29. Структура системи експрес-оцінки питомих витрат на експлуатацію металоконструкцій типу рам

*Підсистема прогнозування ушкоджень.* Призначена для формування  $\Delta$ -матриці на кожній часовій ітерації. Як було сказано вище, для несучих систем мобільної техніки, виконаних у вигляді зварних рам, найбільш характерними ушкодженнями є тріщини елементів конструкції і зварних швів між ними. Місце і час появи подібних ушкоджень носять, з одного боку, стохастичний характер через невизначеність умов виготовлення та експлуатації об'єкта (старанність зборки, стан доріг, характеристики перевезеного вантажу, навички водіння тощо), а з іншого, – цілком детермінований, пов'язаний, наприклад, з розподілом внутрішніх напружень, обумовлених конструкцією рами.

Звідси випливає, що при прогнозуванні на моделі процесу нагромадження експлуатаційних ушкоджень, яке полягає в «призначенні» ушкодження (тріщини) у те чи інше місце конструкції в заданий час, не підходять ні метод випадкового перебору з раніше складеного списку «небезпечних» місць, ні метод переносу на об'єкт, що моделюється, результатів полігонних і експлуатаційних випробувань інших об'єктів аналогічного класу або навіть інших таких же об'єктів. Тому найбільш ефективним здається комбінований метод одержання потоку псевдовипадкових чисел, тобто потоку випадкових чисел «модульованих» інформацією про реальні ушкодження рам, отриманою в результаті полігонних випробувань або в процесі експлуатації, а також інформацією про НДС рами, отриманою на моделі. Схема організації інформаційних потоків у рамках описаного методу наведена на рис. 7.30.

Результати виробничих випробувань зводять у матрицю реальних подій ( $Z$ -матрицю) розміром  $M \times N$ , де  $N$  – кількість типів можливих ушкоджень,  $M$  – кількість місць можливих ушкоджень того чи іншого типу.

Позначимо через  $Z_{ijt}$  кількість ушкоджень  $i$ -го типу в  $j$ -ому місці, що відбулися в результаті таких випробувань на часовій ітерації  $T_{t-1} - T_t$  (помітимо, що під «часовою» ітерацією не обов'язково розуміється крок по шкалі часу, – це може бути, наприклад, шкала довжини пробігу або інший ресурсний параметр). Тоді імовірність виникнення того чи іншого ушкодження на цій ітерації, отримана експериментальним шляхом, може бути розрахована за формулою:

$$P_{ijt} = \frac{Z_{ijt}}{Z_{\infty}}. \quad (7.87)$$

Для повторного ушкодження того самого місця (розвиток тріщини) імовірність може бути збільшена на заздалегідь погоджену величину  $K_{новм}$ :

$$P_{ijt}^{новм} = K_{новм} \cdot P_{ijt}. \quad (7.88)$$

Розраховуючи по (7.87) імовірності всіх ушкоджень, отриманих на тій же ітерації, одержимо (після доповнення неповних рядків нулями) матрицю імовірностей ( $P$ -матрицю) виду (приклад за аналогією з (7.81)):



$P$ -матриця, як і всі інші матриці, наведені на рис. 7.22, також має розмірність  $M \times N$ .

Перейдемо далі до формування  $I$ -матриці, що разом з генератором випадкових чисел дозволяє побудувати немодернізовану матрицю ушкоджень (П-матрицю). Налагодимо генератор випадкових чисел для ітерації  $T_{t-1} - T_t$  на роботу в діапазоні  $\{1 \dots LZ_\infty\}$ . Чим більша величина  $L$ , тим точніше модуляція (у нашому прикладі  $L = 100$ ). У немодульованій послідовності випадкових чисел усім можливим ушкодженням  $\Pi_{ijt}$  ставляться у відповідність рівні за величиною частини відрізка числової осі  $\{1 \dots LZ_\infty\}$ :

$$L_{\text{немод}} = \frac{L \cdot Z_\infty}{\Pi_t}. \quad (7.90)$$

Якщо в результаті розрахунку за (7.90) виходить дробове значення  $L_{\text{немод}}$ , що суперечить змісту описуваного методу модуляції, (кожному ушкодженню  $\Pi_{ijt}$  повинна відповідати ціла кількість елементів відрізка натурального ряду чисел), його доводиться округляти до найближчого цілого числа. У результаті можна говорити лише про приблизну рівність відрізків  $L_{\text{немод}}$  для кожного  $\Pi_{ijt}$ , причому точність цього наближення зростає зі збільшенням  $L$ .

Модулювання потоку рівноімовірнісних чисел діапазону  $\{1 - LZ_\infty\}$  полягає в множенні їхньої кількості  $LZ_\infty$  на вагові коефіцієнти, які дорівнюють ймовірностям  $P_{ijt}$  виникнення відповідних ушкоджень  $\Pi_{ijt}$ :

$$L_{\text{модijt}} = L \cdot Z_\infty \cdot P_{ijt} \quad (7.91)$$

На рис. 7.31 наведені приклади немодульованого і модульованого відрізків числового ряду.

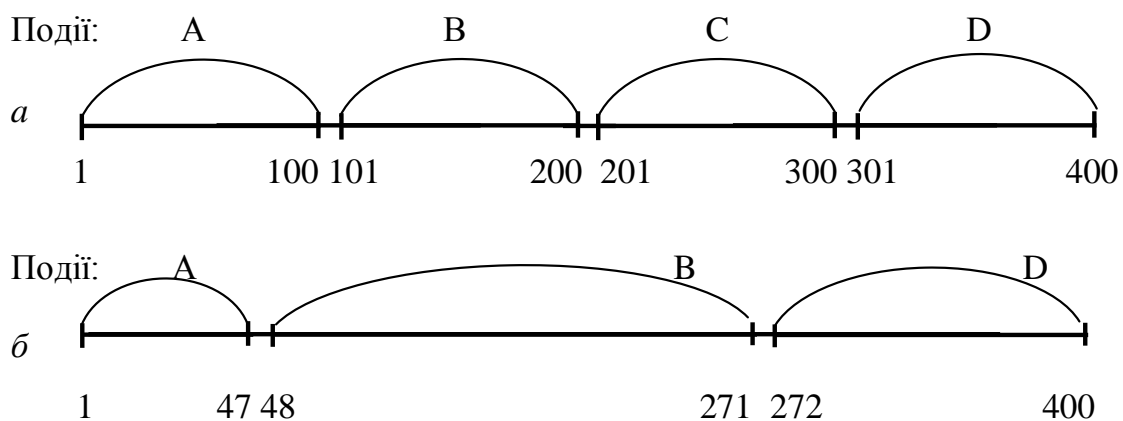


Рис. 7.31. Немодульований (*a*) і модульований (*б*) імовірностями настання чотирьох подій відрізків натурального ряду (1 ... 400)

Немодульований відрізок можна вважати таким, що моделює рівноімовірнісні події. Як видно з рисунка, випадання, наприклад, числа 98 у першому випадку відповідає події «*A*», а в другому – події «*B*». Подія «*C*» у другому випадку взагалі не моделюється, тому що імовірність її настання була рівна нулю (або була настільки малою, що при округленні відповідного  $L_{modijt}$  до найближчого цілого числа вийшов нуль). Інформація про інтервали для кожного місця можливого ушкодження групується в *I*-матрицю, що для простого випадку, наведеного на рис. 7.31 має вигляд:

$$\mathbf{A}_I = |47 \ 271 \ 400|. \quad (7.92)$$

Попадання чисел від ГВЧ у відповідний інтервал фіксується як одиниця, яка додається до відповідного елементу *P*-матриці. Алгоритм процедури такий.

1. Вибирається  $Z_t$  перших чисел з потоку випадкових чисел у діапазоні  $\{1 \dots LZ_\infty\}$ .

7. Визначаються модульовані числові інтервали  $L_{modijt}$  для всіх ушкоджень  $P_{ijt}$  і округляються до найближчих цілих чисел.

3. Визначається, скільки обраних у п. 1 чисел «дісталось» кожному з обчислених у п. 2 інтервалів.

4. Формується матриця, розміром  $M \times N$  з нульовими елементами.

5. До кожного з нульових елементів, об'єднаних у матрицю (п. 4), додається стільки одиниць, скільки чисел, обраних у п. 1 «дісталось» відповідному інтервалу. На цьому формування *P*-матриці на ітерації  $(T_{t-1} - T_t)$  завершується.

Пункт 1 описаного алгоритму реалізується за допомогою генератора випадкових чисел; пункт 2 – обробкою результатів експериментів і досліджень реального об'єкта подібного класу (рис. 7.21).

На ітерації  $(0 - T_0)$ , тобто при моделюванні виготовлення рами, кількість одиниць, що додаються до нульової матриці, визначається елементами матриці імовірностей дефектів збірки.

*Підсистема моделювання НДС рами.* Призначена для формування *S*-матриці, що, як і  $\Delta$ -матриця, формується після кожної часової ітерації. Алгоритм її розрахунку такий.

1. Формується матриця розміром  $M \times N$  з нульовими елементами.

2. У початкову скінченноелементну модель, що відповідає за структурою і параметрами елементів кресленню об'єкта, вносяться зміни (обнуляються параметри жорсткості) у тих релейних елементів, відключення яких передбачене дефектами виготовлення рами.

3. Виконується розрахунок на моделі напружень  $\sigma_{ijt}$  в статичному режимі у місцях можливих ушкоджень  $P_{ijt}$ .

4. Для тих місць можливих ушкоджень  $P_{ijt}$ , де виконується нерівність:



$$\sigma_{ijt} < \frac{1}{K_3} \sigma_{\max}, \quad (7.93)$$

де  $\sigma_{\max}$  – гранично припустимі напруження для відповідного місцеві матеріалу конструкції;  $K_3$  – коефіцієнт запасу, призначуваний окремо для нового виробу і після кожного чергового ремонту, відповідні нулі в матриці (п. 1) замінюються одиницями.

C-матриця готова.

5. Далі до кінця моделювання пп. 1 – 4 повторюються з єдиною відмінністю: у п. 2 додатково обнуляються параметри жорсткості тих релейних елементів, які «вимкнулися» наприкінці попередньої ітерації.

Поелементним множенням П-матриці і С-матриці (рис. 7.20) на кожній часовій ітерації одержуємо  $\Delta$ -матрицю для розрахунку чергового стану імовірнісного автомату за (7.86).

Кількість «ушкоджень» моделі на кожній часовій ітерації  $\Delta_t$  повинна відповідати кількості реальних ушкоджень  $Z_t$  на цій же ітерації:

$$\Delta_t = Z_t. \quad (7.94)$$

Однак добір  $Z_t$  випадкових чисел може в підсумку привести до невиконання рівності (7.94), тому що не усі вони пройдуть при поелементному множенні через сито С-матриці. Оскільки після множення має місце співвідношення:

$$\Delta_t < Z_t, \quad (7.95)$$

програма повертається до алгоритму формування П-матриці й у його першому пункті додає до  $Z_t$  одиницю. Створюється нова П-матриця, потім необхідно провести поелементне множення і перевірку нової  $\Delta$ -матриці на дотримання співвідношення (7.94). Якщо й у цьому випадку має місце (7.95), то до  $Z_t$  додають 2 і т.д., поки не буде досягнуто (7.94).

Для роботи алгоритму в підсистемі моделювання НДС рами, крім власне скінченноелементної моделі рами, включені блоки перевірки її статичної адекватності і призначення відповідного умовам експлуатації зовнішнього навантаження.

Система дозволяє або враховувати тільки статичне навантаження, або здійснювати її корекцію з урахуванням середніх статичних характеристик експлуатації.

Оскільки порівняння альтернативних конструкцій рам здійснюється на підставі питомих витрат на їхню експлуатацію в межах деякого встановленого ресурсу  $T_0$ , у систему вводиться лічильник ресурсу, а також лічильник витрат, що здійснює підсумовування вартості нового об'єкта з вартістю всіх ремонтів, яким піддавалася його рама (чисельник формули 7.52).

Алгоритм роботи системи може виглядати таким чином (рис. 7.32).

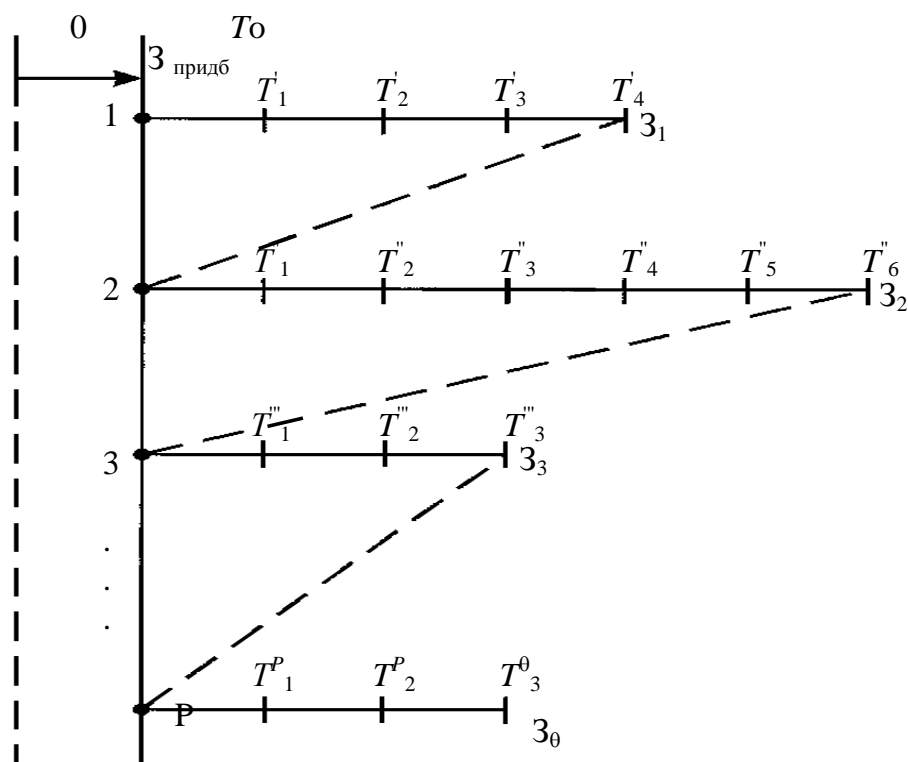


Рис. 7.32. Схема до розрахунку питомих витрат на експлуатацію металоконструкцій типу рам

На першому етапі моделювання (від моменту  $T_0$ ) у лічильнику витрат міститься інформація про вартість придбання нового об'єкта  $Z_{\text{придб}}$ . Наприкінці цього етапу (на схемі це відповідає четвертій ітерації моделювання) матриця ушкоджень кваліфікується особою, що приймає рішення, як відмова. Рішення про направлення у ремонт може прийматися і після закінчення заданого періоду експлуатації.

Після цього в лічильник витрат додається вартість ремонту, необхідна для усунення цієї відмови і модель (її структура) повертається у початкове положення, відповідне моменту часу  $T_0$  (оскільки ремонт може виконуватися з таким же браком, як і виготовлення).

Після цього моделювання продовжується уздовж другого етапу (до  $T_6''$  за схемою на рис. 7.32) і так далі.

Наприкінці моделювання (коли  $T_i = T_0$ ), величина  $\Sigma Z_{\text{нідм}}$  отримує значення:

$$\Sigma Z_{\text{нідм}} = \sum_{g=1}^G Z_g \quad (7.96)$$

де  $Z_g$  – вартість  $g$ -го ремонту;

$G$  – кількість відмов плюс одиниця. Остаточний розрахунок питомих витрат на експлуатацію аналізованої конструкції виконується за виразом:

$$Z_{\text{nut}} = \frac{Z_{\text{придб}} + \sum_{g=1}^G Z_g}{T_0} \quad (7.97)$$

На рис. 7.33 наведені приклади можливих графіків нагромадження витрат для двох об'єктів. Як видно з рисунка, при порівнянні двох об'єктів з рамами різних конструкцій може виявитися, що швидкості наростання експлуатаційних витрат у них різні.

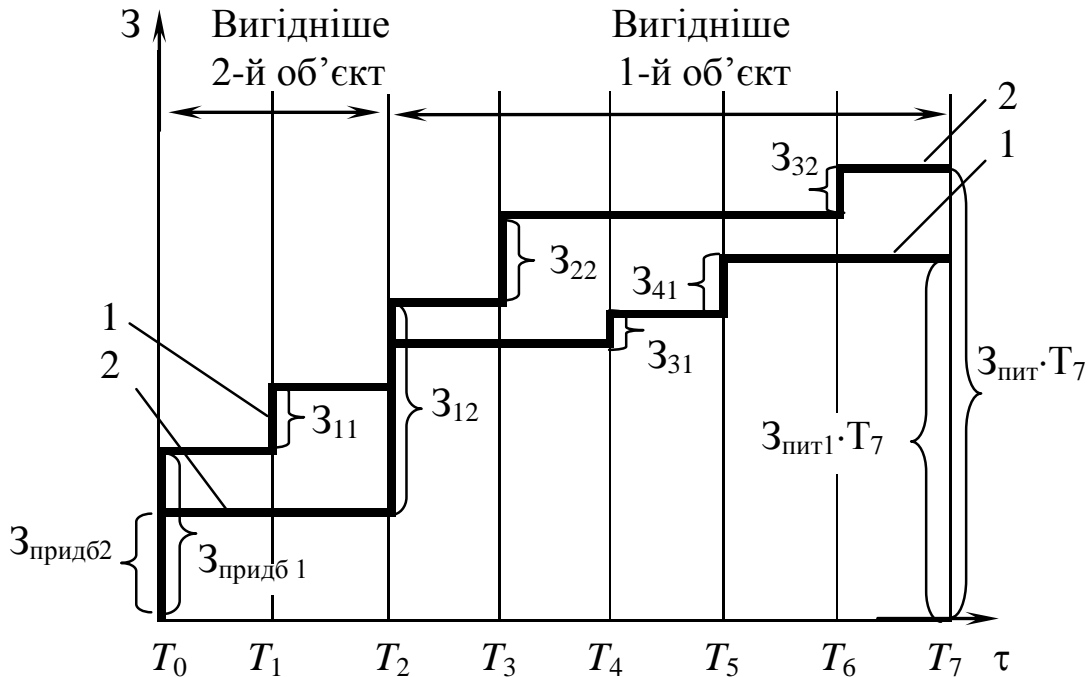


Рис. 7.33. Порівняння графіків нагромадження витрат двох об'єктів різних конструкцій:  
1 – перший об'єкт; 2 – другий об'єкт

Порівняння двох графіків на цьому рисунку показує, що для замовника, який припускає тривалу експлуатацію рами, вигідніше придбати перший об'єкт, а для споживача, що не розраховує на великий ресурс – другий.

Якщо за даними, наведеними на рис. 7.33 вирахувати за (7.97) питомі витрати на кожному з фіксованих моментів часу  $T_0 - T_7$ , то можна одержати залежність  $Z_{\text{пит}}(t)$  (рис. 7.34), яка має характерну для кривих такого типу форму.

На протязі експлуатації рами питомі витрати спочатку падають, а потім, коли знос об'єкта моделювання досягає значної величини, – зростають. Експлуатація рами за точкою мінімуму економічно невиправдана, але технічно припустима, наприклад, якщо немає можливості придбати новий об'єкт. Таким чином, запропонована система дозволяє прогнозувати оптимальний, з погляду економіки, ресурс експлуатації машин, які містять зварені рами, тобто визначати момент, коли вигідніше придбати новий об'єкт, ніж продовжувати експлуатувати старий.

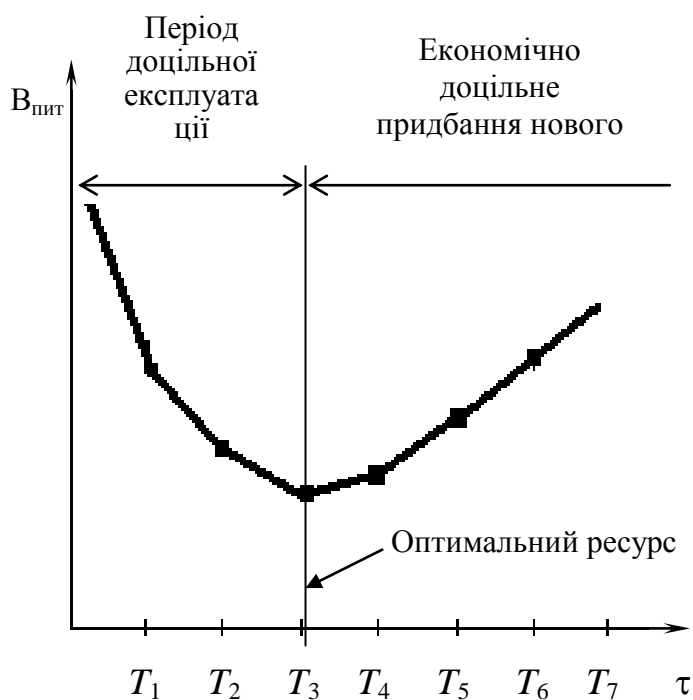


Рис. 7.34. Схема до визначення оптимального ресурсу експлуатації рами

Як випливає з викладеного вище, моделювання розвитку ушкоджень повинне максимально враховувати як конструкцію складної технічної системи, так і умови її експлуатації, і базуватися на досвіді використання подібних і близьких за конструкцією систем (рис. 7.35). Іншим способом реалізації такої моделі є використання порогової логіки.

Один логічний елемент, створений для реалізації такої функції, «призначає» ушкодження тільки в одне місце з множини  $U$ , отже загальна модель життєвого циклу АТЗ повинна містити  $n$  таких елементів.

Оскільки факт «призначення» ушкодження є пороговою функцією декількох змінних, — детермінованих і стохастичних, а також з урахуванням особливостей впливу різних чинників на ці процеси, зміни ступеня такого впливу під час нагромадження ушкоджень і виконання ремонтів АТЗ, для моделювання їхнього життєвого циклу можна застосовувати математичний апарат порогової логіки.

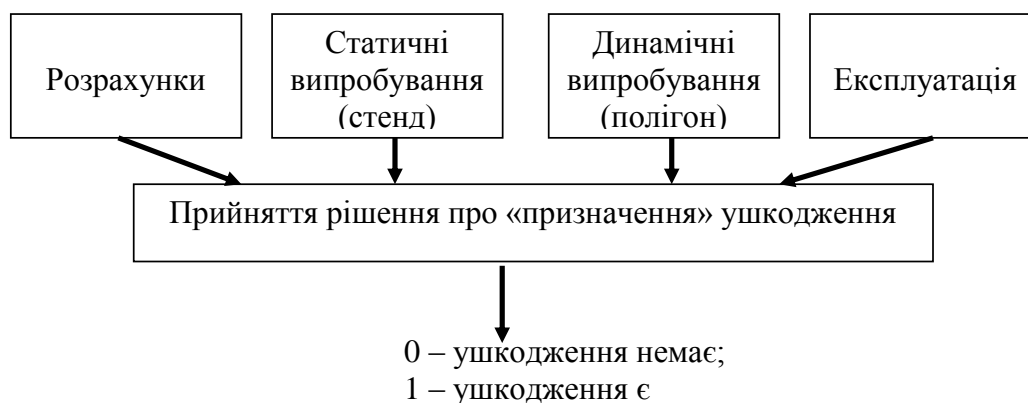


Рис. 7.35. Схема інформаційних джерел врахування зовнішніх впливів і чинників ризику при моделюванні ушкодження

Порогова логіка дозволяє будувати порогові елементи (рис. 7.36 а) з  $n$  входами  $x_1, \dots, x_n$  і одним виходом  $y$ , функціонування яких описується співвідношеннями:

$$y = 1 \quad \text{при} \quad \sum_{i=1}^n \xi_i x_i \geq \eta ; \quad y = 0 \quad \text{при} \quad \sum_{i=1}^n \xi_i x_i < \eta, \quad (7.98)$$

де ваги будь-якого  $i$ -го входу  $\xi_i$  і поріг  $\eta$  є скінченними дійсними числами.

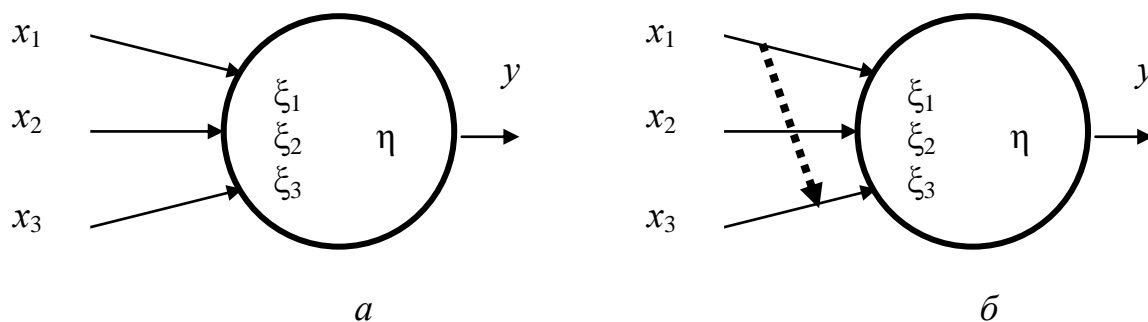


Рис. 7.36. Елементи порогової логіки:  
а – пороговий елемент; б – пороговий елемент із заборною

Довільному набору ваг  $\xi_i$  і порогу  $\eta$ , як і будь-якому пороговому елементу, завжди можна зіставити деяку логічну чи *порогову* функцію. Однак не всяка логічна функція може бути реалізована одним пороговим елементом. Тому важливою задачею порогової логіки є виділення множини порогових функцій і визначення структури порогового елемента, що реалізує порогову функцію (синтез порогового елемента). Якщо така реалізація на одному пороговому елементі неможлива чи недоцільна, то виникає інша задача – синтез структури, що складається з порогових елементів. Така структура, як правило, гранично формалізована і тому легко піддається програмуванню на ЕОМ.

Важливим елементом порогової логіки є також пороговий елемент із заборною (рис. 7.36 б). У ньому додатково допускаються зв'язки, які за певних умов забороняють (блокують) деякі входи. Такі зв'язки закінчуються на вході, що забороняється, чим запобігається надходження сигналу навіть при збудженому забороненому вході. Як і будь-який пороговий елемент, пороговий елемент із заборною характеризується порогом збудження  $\eta$ . Так, при дискретних двійкових входах і  $\eta = 1$  зображений на рис. 7.36 б пороговий елемент із заборною буде збуджений тільки на таких наборах  $(x_1, x_2, x_3)$ :  $(0, 1, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 1)$ ,  $(1, 1, 0)$  і  $(1, 1, 1)$ .

Побудуємо модель системи прогнозування експлуатації АТЗ, яка базується на обробці поточної інформації, що надходить з підсистем всебічного вивчення стану об'єкта на різних етапах його життєвого циклу – від проектування до списання, за допомогою порогової логіки. Схема ділянки такої моделі наведена на рис. 7.37. Вона складається з одного логічного елемента порівняння і трьох

порогових елементів (один з них – пороговий елемент із заборною) і реалізує такі функції.

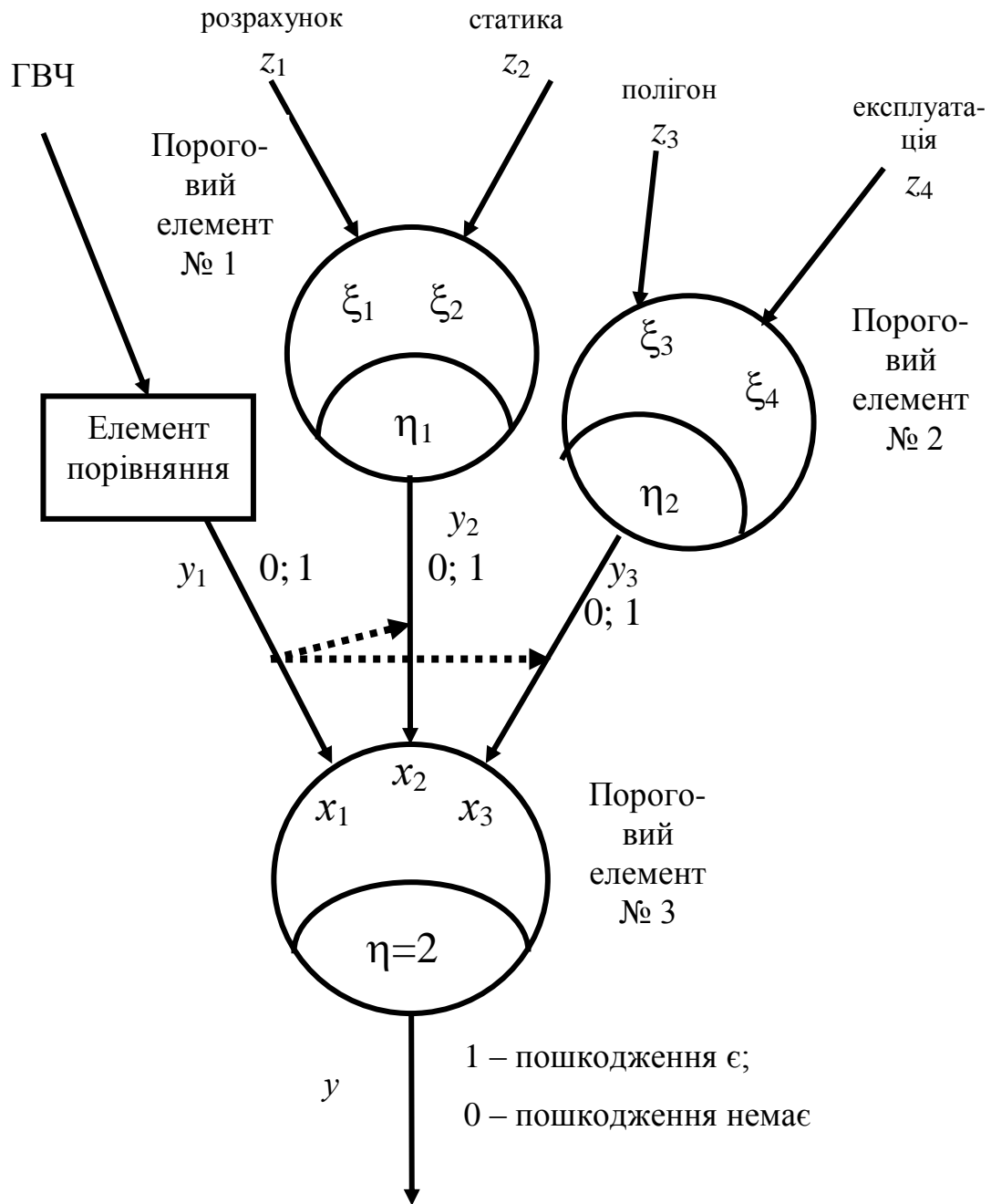


Рис. 7.37. Схема ділянки моделі

Елемент порівняння з двійковим виходом:

$$y_1 = \begin{cases} 0, & \text{якщо випадкове число збігається з номером ділянки;} \\ 1, & \text{якщо випадкове число не збігається з номером ділянки.} \end{cases}; \quad (7.99)$$

$$y_2 = f(z_1, z_2, \xi_1, \xi_2); \quad y_3 = f(z_3, z_4, \xi_3, \xi_4); \quad y = f(x_1, x_2, x_3);$$

$$x_1 = y_1; \quad x_2 = y_2; \quad x_3 = y_3.$$

Елемент порівняння на кожній часовій ітерації визначає місце, де можна призначити ушкодження, якщо інші фактори цьому не перешкоджають.

Пороговий елемент № 1 будь-якої  $j$ -ї ділянки реалізує функцію:

$$y_2 = 0 \text{ при } z_1 \xi_1 + z_2 \xi_2 = \frac{2K_3}{\sigma_{\text{розр}} + \sigma_{\text{вим}}} < \eta_1; \quad (7.100)$$

$$y_2 = 1 \text{ при } z_1 \xi_1 + z_2 \xi_2 = \frac{2K_3}{\sigma_{\text{розр}} + \sigma_{\text{вим}}} \geq \eta_1, \quad (7.101)$$

де:  $\xi_1$  – вага параметра на вході  $z_1$ ;  $\xi_2$  – вага параметра на вході  $z_2$ ;  $K_3$  – коефіцієнт запасу по механічному напруженню.

Пороговий елемент № 2 будь-якої  $j$ -ї ділянки реалізує функцію:

$$y_3 = 0 \text{ при } z_3 \xi_3 + z_4 \xi_4 = P_{\text{пол}} C_{\text{пол}} + P_{\text{експ}} C_{\text{експ}} < \eta_2; \quad (7.102)$$

$$y_3 = 1 \text{ при } z_3 \xi_3 + z_4 \xi_4 = P_{\text{пол}} C_{\text{пол}} + P_{\text{експ}} C_{\text{експ}} \geq \eta_2, \quad (7.103)$$

де  $C_{\text{пол}}$  – ваговий коефіцієнт імовірності ушкодження, отриманий при полігонних випробуваннях;  $C_{\text{експ}}$  – ваговий коефіцієнт імовірності ушкодження, отриманий при статистичній обробці інформації, яка надходить від організацій, що здійснюють експлуатацію АТЗ.

Функція порогового елемента № 3 будь-якої  $j$ -ї ділянки задана таблично (табл. 7.6).

Таблиця 7.6

Функція порогового елемента № 3

Аргументи			Зважена сума	Функція
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\eta^*$	$y$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	2	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

Двійкові входи  $x_1$ ,  $x_2$  і  $x_3$  мають такі значення:

$x_1$  – (збудливий вхід) одержує двійковий сигнал від елемента порівняння випадкового числа з номером ділянки:

0 – якщо випадкове число збігається з номером ділянки;

1 – у протилежному випадку;

$x_2$  – (збудливий вхід із заборорою від входу  $x_1$ ) одержує двійковий сигнал від порогового елемента № 1:

0 – якщо середньозважена сума розрахункових і обмірюваних механічних напруг у місці можливого ушкодження менше припустимої напруги (з урахуванням коефіцієнта запасу  $K_3$ );

1 – у протилежному випадку;

$x_3$  – (збудливий вхід із заборорою від входу  $x_1$ ) одержує двійковий сигнал від порогового елемента № 2:

1 – якщо середньозважена сума імовірностей ушкодження даного місця більше або дорівнює заданому пороговому значенню;

0 – у протилежному випадку.

Збудження порогового елемента ( $y = 1$ ) настає, коли чинник випадковості ( $x_1$ ) «призначає» ушкодження в дане місце, якщо при цьому рівень механічного напруження та імовірність ушкодження цього місця ( $x_3$ ) досить високі.

Входами ділянки є:

$$z_1 = \sigma_{\text{розн}}; z_2 = \sigma_{\text{вим}}; z_3 = P_{\text{пол}}; z_4 = P_{\text{експ}}, \quad (7.104)$$

де  $\sigma_{\text{розн}}$  – розрахункове напруження у відповідному місці ушкодження;  $\sigma_{\text{вим}}$  – виміряне напруження у відповідному місці ушкодження;  $P_{\text{пол}}$  – імовірність ушкодження, розрахована за даними полігонних випробувань;  $P_{\text{експ}}$  – імовірність ушкодження, розрахована за даними, що надійшли від організацій, де здійснюють експлуатацію АТЗ.

Загальна модель нагромадження ушкоджень на основі порогової логіки будується на основі  $n$  ділянок, наведених на рис. 7.29. Вона складається з таких рівнів:

- рівень «чистої» стохастики (генератор випадкових чисел);
- рівень поточного стану об'єкта;
- розрахунковий рівень (моделі процесів, які відбуваються в об'єкті);
- емпіричний рівень (процеси, що відбуваються в реальному об'єкті);
- логічний рівень (порогова мережа).

Модель працює таким чином.

Генератор випадкових чисел на поточній часовій ітерації моделювання виробляє чергове ціле число  $W_j$  для членів ряду  $(u_1, u_2, \dots, u_m)$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ )..... Відповідно до цього, на вхід  $x_1$  відповідної  $j$ -ї ділянки надходить сигнал –  $y_j = 0$ , якщо  $W_j = j$ ;  $y_j = 1$ , якщо  $W_j \neq j$ .

Розрахунковий рівень визначається співвідношенням:

$$\eta_1^* = z_1 \xi_1 + z_2 \xi_2 = \frac{2K_3}{\sigma_{\text{расч}} + \sigma_{\text{изм}}}, \quad (7.105)$$



де  $\eta_1^*$  – зважена сума, порівнювана з граничним значенням  $\eta_1$ :

$$\eta_1 = \frac{1}{[\sigma]}. \quad (7.106)$$

Найчастіше приймають:

$$\xi_1 = \xi_2 = \frac{0,5}{K_3}, \quad (7.107)$$

тобто вважають вплив розрахункового і стендового визначення внутрішніх механічних напружень у конструкції рами рівновагим. У принципі, користувач може підібрати інше співвідношення вагових коефіцієнтів  $\xi_1$  і  $\xi_2$ , яке відповідає власному рівню довіри розрахункам і стендовим випробуванням. Якщо стендові випробування взагалі не проводяться,  $\xi_2$  приймається рівним нулю.

Рівень поточного стану об'єкта відповідає реальній динаміці експлуатації і визначається співвідношенням:

$$\eta_2^* = z_3 \xi_3 + z_4 \xi_4 = P_{пол} C_3 + P_{кл} C_4, \quad (7.108)$$

де  $\eta_2^*$  – зважена сума, порівнювана з граничним значенням  $\eta_2$ , і значеннями коефіцієнтів  $C_3$  і  $C_4$ .

Оскільки  $\xi_3 = C_3$ ;  $\xi_4 = C_4$ , ці коефіцієнти є вагами, з якими значення імовірностей ушкодження того чи іншого з місць, що враховуються, отриманих у результаті полігонних випробувань ( $P_{пол}$ ), та імовірностей ушкодження тих же місць, отриманих у результаті обробки інформації, одержаної від організацій, що здійснюють експлуатацію АТЗ ( $P_{експ}$ ), порівнюються з граничним значенням імовірності  $\eta_2$ .

### 7.2.5. Розрахунок параметрів управління

Як впливає з попередніх міркувань, МВО можна застосовувати в управлінні, а саме в тих його схемах, у яких розрахунок управляючого впливу здійснюється чисельними методами з дискретизацією простору і часу. Особливостями такого застосування є обставини:

– параметрами, які оптимізуються, є управляючі впливи  $\mathbf{q}$ , що залежить від часу їх прикладення:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(\tau); \quad (7.109)$$

– застосування МВО в управлінні швидкоплинними процесами (до яких

відноситься, наприклад, гальмування АТЗ) вимагає особливої уваги до часової складності обчислень.

Остання обставина пов'язана з тим, що управляючий вплив необхідно здійснювати в реальному, дуже обмеженому часі, а обчислювальна складність чисельних багатомірних методів велика. У цьому випадку МВО може зіграти вирішальну роль не тільки в підвищенні ефективності управління, але й у забезпеченні самої можливості керувати реальним процесом.

Як зазначено вище, при використанні МВО в управлінні в якості віртуальних параметрів можуть виступати властивості керованого  $\lambda$  об'єкта або його конфігурація  $x$ . Так, наприклад, алгоритм МВО при віртуальному  $\lambda$  може виглядати таким чином.

Приймається деяке значення  $q_0$ , яке відповідає початковому стану об'єкта. Протягом 1-ої ітерації розрахунку значення  $q_0$  зберігається, а оптимізація полягає в перетворенні  $\lambda_0 \rightarrow \lambda_1^*$ . Наприкінці 1-ої ітерації виконується перерахування  $\lambda_1^* \rightarrow q_1^*$  і здійснюється перехід до наступної, 2-ї ітерації. Далі, протягом кожної  $i$ -ої ітерації розрахунку зберігається постійним значення  $q_{i-1}^*$ , отримане на попередній ітерації, а оптимізація полягає в перетворенні  $\lambda_{i-1}^* \rightarrow \lambda_i^*$ . Наприкінці кожної  $i$ -ої ітерації виконується фінішний перехід  $\lambda_i^* \rightarrow q_i^*$  і здійснюється перехід до наступного,  $(i+1)$ -ої ітерації і т.д. Отримана в такий спосіб послідовність  $\{q_0^*; q_1^*; q_2^*; \dots; q_i^*; \dots; q_N^*\}$ , де  $N$  — кількість часових ітерацій, і є рішенням задачі управління.

Приклад 7.3. Розглянемо конкретну задачу управління. Нехай необхідно передати тепло крізь стрижень з теплоізовованою бічною поверхнею (рис. 7.38).

Цільовою функцією управління є забезпечення передачі максимальної кількості теплової енергії  $E$  крізь стрижень за період часу  $0 \dots \tau_N$ :

$$E = qS\tau_N \Rightarrow \max, \quad (7.110)$$

де  $S$  — площа нормального перетину стрижня.

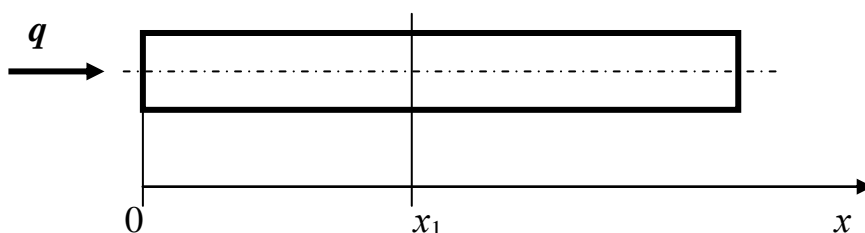


Рис. 7.38. Схема до прикладу рішення задачі управління за допомогою МВО

Обмеження, що враховується системою управління, полягає в тому, що температура  $T_1$  у перетині стрижня на відстані  $x_1$  від його торця, що сприймає тепловий потік  $q$ , не повинна перевищувати  $T_{кр}$ .

Управляючий параметр  $q$  може приймати значення 0 і  $Q$ , при цьому залежність  $q$  від часу має вигляд періодичної східчастої функції (рис. 7.39).

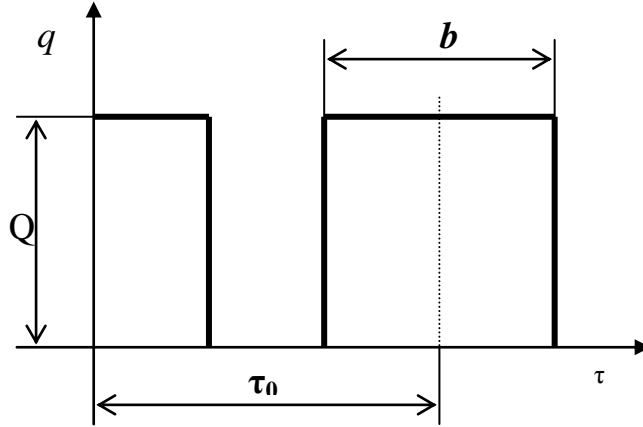


Рис. 7.39. Залежність теплового потоку від часу при періодичному східчастому нагріванні

*Початкові дані до задачі:* коефіцієнт теплопровідності матеріалу стрижня  $\lambda = 0,05$  Вт/(м·град); коефіцієнт температуропровідності матеріалу стрижня  $a = 0,1 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с; температура навколишнього середовища і початкова температура стрижня  $T_0 = 300$  К; координата критичного перетину  $x_1 = 0,1$  м; площа поперечного перерізу стрижня  $S = 0,001$  м<sup>2</sup>; довжина періоду зміни функції  $q - \tau_0 = 10$  с; максимум функції  $q - Q = 20000$  Дж/с.

Оптимізацію необхідно здійснити за рахунок пошуку оптимального значення ширини імпульсу нагрівання  $b$  за інших рівних умов.

*Рішення 1.* З урахуванням парності функції  $q(\tau)$  розкладемо її в ряд Фур'є:

$$q = Q \frac{b}{\tau_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Q}{\pi n} \sin n\pi b \cos \frac{2n\pi\tau}{\tau_0}. \quad (7.111)$$

Обмежуючись в (7.111)  $N$  першими членами ряду, замінимо дію на стрижень теплового потоку  $q(\tau)$  на сумарну дію теплових потоків з ГУ:

$$\begin{aligned} -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x=0} &= Q \frac{b}{\tau_0}; & \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x=\infty} &= 0; & T \Big|_{x=\infty} &= T_0; \\ -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \frac{2Q}{\pi} \sin 2\pi b \cos 2\pi \frac{\tau}{\tau_0}; & \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x=\infty} &= 0; & T \Big|_{x=\infty} &= T_0; \\ -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \frac{2Q}{\pi} 0,5 \sin 2\pi b \cos 4\pi \frac{\tau}{\tau_0}; & \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x=\infty} &= 0; & T \Big|_{x=\infty} &= T_0; \end{aligned}$$

$$\dots$$

$$-\lambda \left. \frac{\partial t}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{2Q}{\pi} \frac{1}{N-1} \sin(N-1)\pi b \cos 2\pi n \frac{\tau}{\tau_0}; \quad \left. \frac{\partial t}{\partial x} \right|_{x=\infty} = 0; \quad T|_{x=\infty} = T_0.$$

З цих джерел – перший з постійним тепловим потоком на границі. Рішення для нього має вигляд:

$$\Delta T_1 = T - T_0 = \frac{Qxb}{\lambda \tau_0} \left[ 2\sqrt{\frac{Fo_x}{\pi}} \exp\left(-\frac{1}{4Fo_x}\right) - \operatorname{erfc} \frac{1}{2\sqrt{Fo_x}} \right]; \quad Fo_x = \frac{a\tau}{x_1^2}. \quad (7.112)$$

Інші джерела відповідають квазісталому тепловому режимові, при якому тепловий потік на поверхні змінюється гармонічно:

$$-\lambda \left. \frac{\partial t}{\partial x} \right|_{x=0} = K \cos 2\pi \frac{\tau}{\tau_0}; \quad \left. \frac{\partial t}{\partial x} \right|_{x=\infty} = 0; \quad T|_{x=\infty} = T_0, \quad (7.113)$$

де з урахуванням (7.111)  $K = \frac{2Q}{\pi n} \sin n\pi b$  – граничний тепловий потік  $n$ -го члена розкладання Фур'є;  $\tau_n = n\tau$  – «внутрішній» час  $n$ -го члена розкладання Фур'є.

Загальне рішення для однобічного нагрівання з такими граничними умовами має вигляд:

$$T = T_0 + \Theta \frac{Kx_1}{\lambda}; \quad \Theta = \sqrt{\frac{F\tilde{\theta}_x}{2\pi}} \cos\left(2\pi \frac{n\tau}{\tau_0} - \sqrt{\frac{\pi}{F\tilde{\theta}_x}} - \frac{\pi}{4}\right); \quad F\tilde{\theta}_x = \frac{a\tau_0}{x_1^2}. \quad (7.114)$$

Відповідно до принципу елементарної суперпозиції збільшення температури в площині  $x_1$  стрижня від джерела  $q(\tau)$  буде дорівнювати сумі збільшень від  $N$  джерел:

$$T_{x_1} = T_0 + \sum_{i=1}^N \Delta T_i. \quad (7.115)$$

Підставляючи (7.114) у (7.115), знайдемо:

$$T_{x_1} = T_0 + \Delta T_1 + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{2\Theta x Q}{\lambda \pi n} \sin n\pi b. \quad (7.116)$$

В квазісталому режимі  $\Delta T_1 = 0$ , тому перепишемо (7.116) у вигляді:

$$T_{x_1} = T_0 + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{2\Theta x Q}{\lambda \pi n} \sin \pi n b . \quad (7.117)$$

Графіки функції (7.117) з підстановками (7.114) для глибини  $x = 0,01$  м мають вигляд, наведений на рис. 7.40.

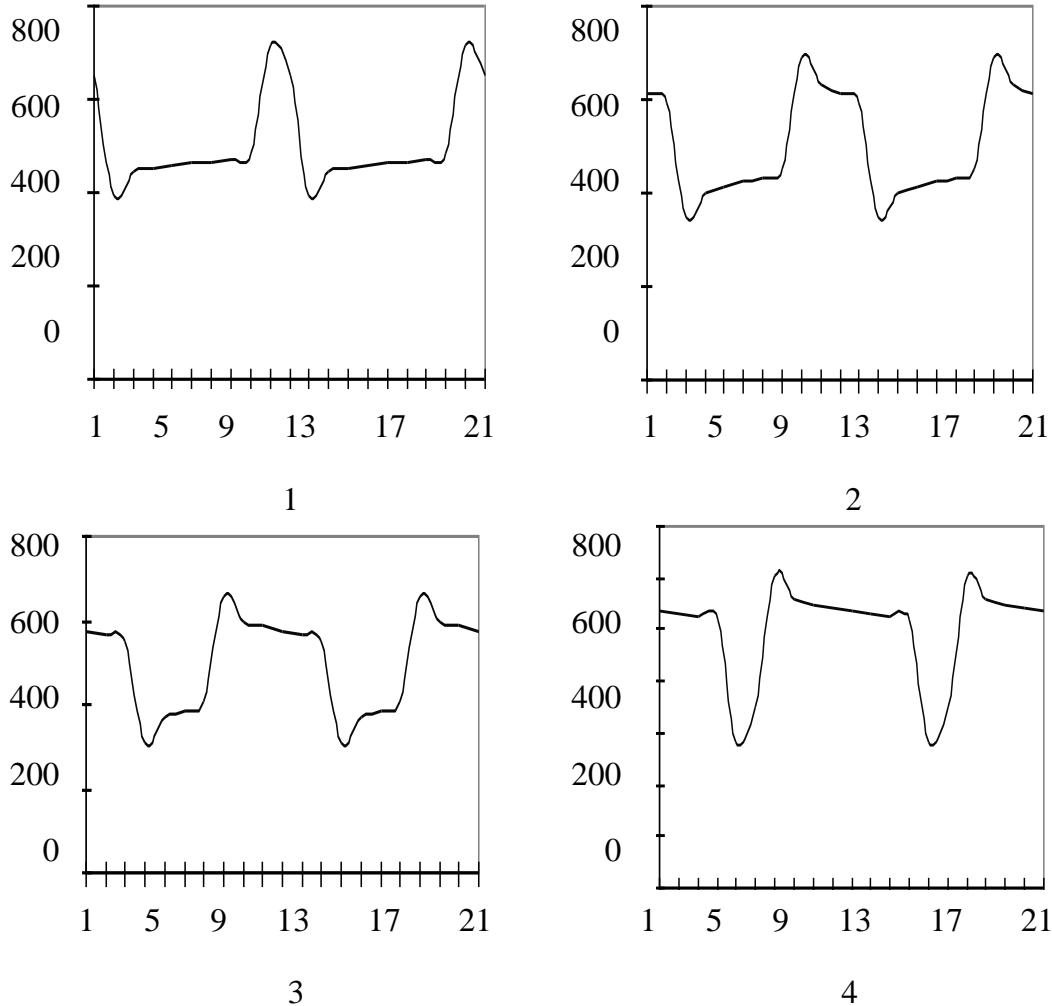


Рис. 7.40. Значення температури в перетинах на глибині  $x$  при:  
1 –  $b = 0,2$ ; 2 –  $b = 0,4$ ; 3 –  $b = 0,6$ ; 4 –  $b = 0,8$

Розглядаючи (7.117) як неявну функцію  $T(b, \lambda)$  і дорівнюючи її максимальне значення до  $T_{кр} = 400$  К, знаходимо неявну залежність  $b(T_{кр}, \lambda)$ :

$$100 - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{2x_1 Q}{\lambda \pi n} \sin(\pi n b) \left[ \sqrt{\frac{F\tilde{\theta}_x}{2\pi}} \cos\left(2\pi \frac{\tau n}{\tau_0} - \sqrt{\frac{\pi}{F\tilde{\theta}_x}} - \frac{\pi}{4}\right) \right] = 0, \quad (7.118)$$

графік якої має вигляд, наведений на рис. 7.41.

Величина  $\lambda$  входить також і в  $F\tilde{\theta}_x$ , однак у віртуальному об'єкті це можна не враховувати, вважаючи що  $\lambda$ , яка входить у  $F\tilde{\theta}_x$ , – величина постійна.

Порівняємо часову складність розрахунку  $b^*$  двома способами. Нехай початкова точка має координати  $\{0,7; 0,05\}$  (рис. 7.41). Значення максимальної температури в цій точці перевищує критичне і дорівнює 423,66 К.

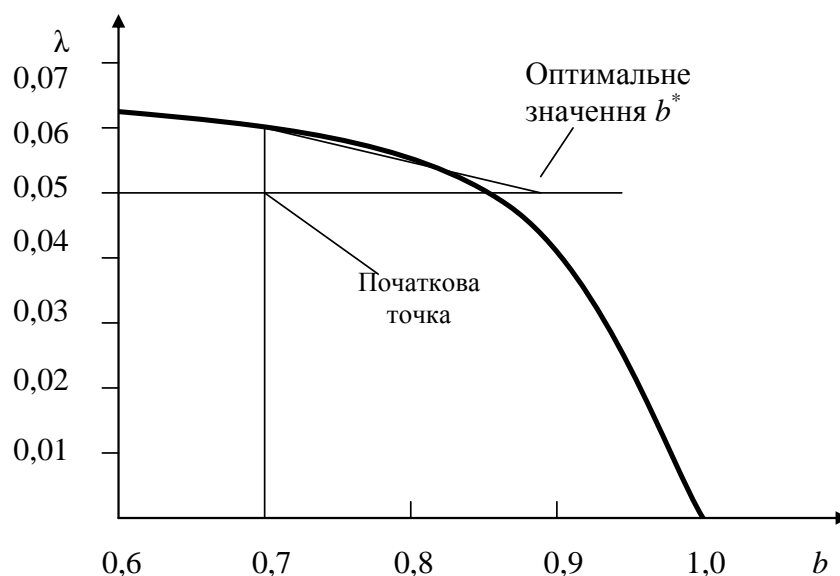


Рис. 7.41. Залежність ширини імпульсу нагрівання  $b$  від віртуального значення  $\lambda$

Знайдемо спочатку оптимальне  $b^*$  «прямим» способом. Значення  $b^* = 0,857$  знайдене за 18 мс. Тепер скористаємося МВО. Знайдемо квазіоптимальне  $\lambda^*$  при  $b = 0,7$ :  $\lambda^* = 0,061$  Вт/(м·град). Це значення знайдене за 1,2 мс, тобто в 15 разів швидше. Тепер виконаємо фінішний перехід. Диференціюючи (7.118) по параметру  $\lambda$ , знайдемо:

$$\frac{db}{d\lambda} = \frac{\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} \sin(\pi n b) \cos\left(2\pi \frac{\tau n}{\tau_0} - \sqrt{\frac{\pi}{F\tilde{\sigma}_x}} - \frac{\pi}{4}\right)}{\lambda \pi \sum_{n=1}^{N-1} \cos(\pi n b) \cos\left(2\pi \frac{\tau n}{\tau_0} - \sqrt{\frac{\pi}{F\tilde{\sigma}_x}} - \frac{\pi}{4}\right)}. \quad (7.119)$$

За (7.119) для початкових даних задачі і  $\lambda = 0,061$  знайдемо  $db/d\lambda = -16,45$ , і обчислимо

$$\tilde{b} = 0,7 + \frac{db}{d\lambda} (0,05 - 0,061) = 0,881. \quad (7.120)$$

Як бачимо, обчислювальна складність розрахунку за другим типом істотно менша за рахунок того, що в (7.118) величина  $b$  входить під знак синуса. Слід також зазначити, що крива  $b(T_{кр}, \lambda)$  на рис. 7.33 побудована для наочності пояснення приклада і у розрахунку  $b^*$  участі не бере.

*Рішення 2.* Тут запропонована задача також зводиться до розкладання на елементарні підзадачі. Таке розкладання може бути виконано різними способами. У першому з них (рис. 7.42) будь-яке «включення» гальмового пристрою розглядається як дія окремих постійних джерел тепла, що мають відповідні до часу початку своєї дії критерії Фур'є  $Fo$ . Рішення задачі для цих джерел має вигляд рівняння (7.112).

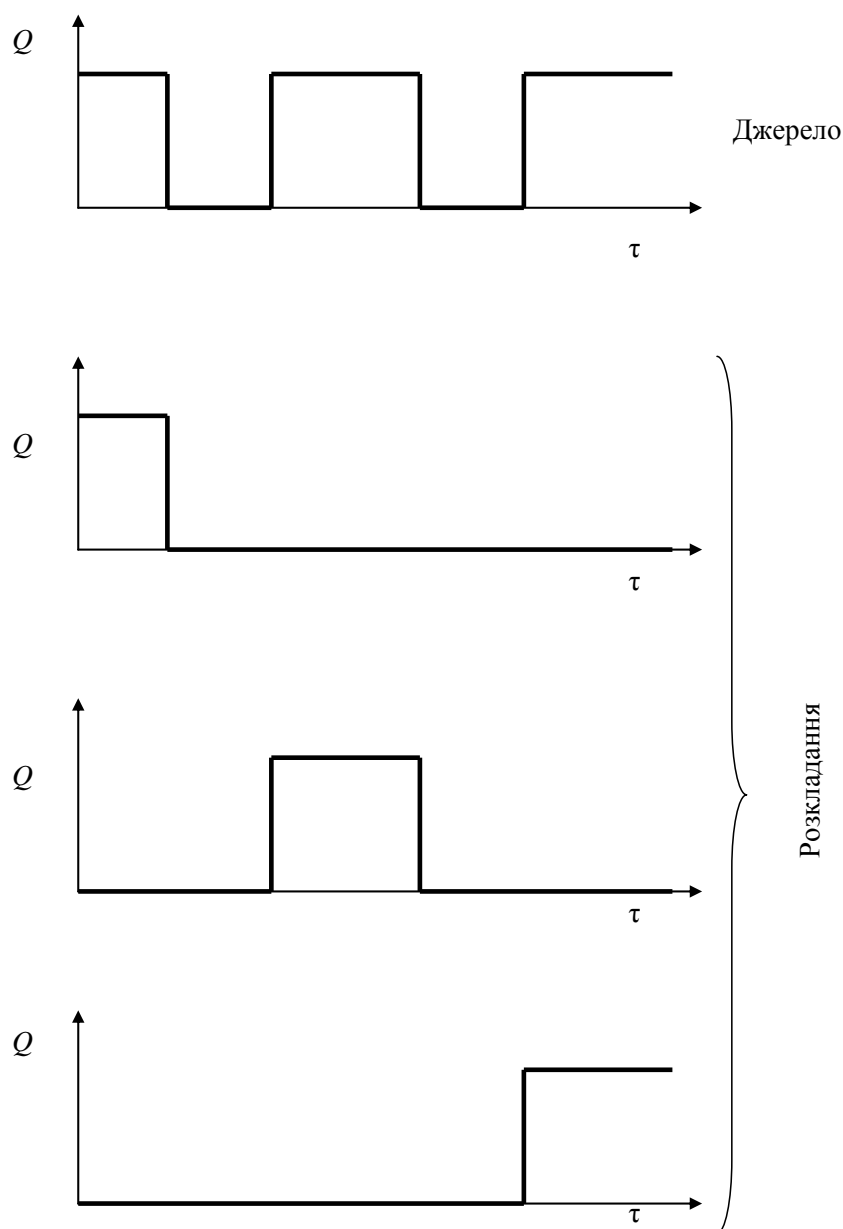


Рис. 7.42. Розкладання переривчастого джерела за першим типом

У другому розкладанні (рис. 7.43) головне джерело діє неперервно, а на періоди пауз у гальмуванні включаються додаткові джерела, що мають протилежний знак.

Обидва розкладання цілком відповідають основному правилу суперпозиції і приводять до однакового результату. При першому розкладанні легше врахувати зменшення інтенсивності джерела тепла під час уповільнення АТЗ.

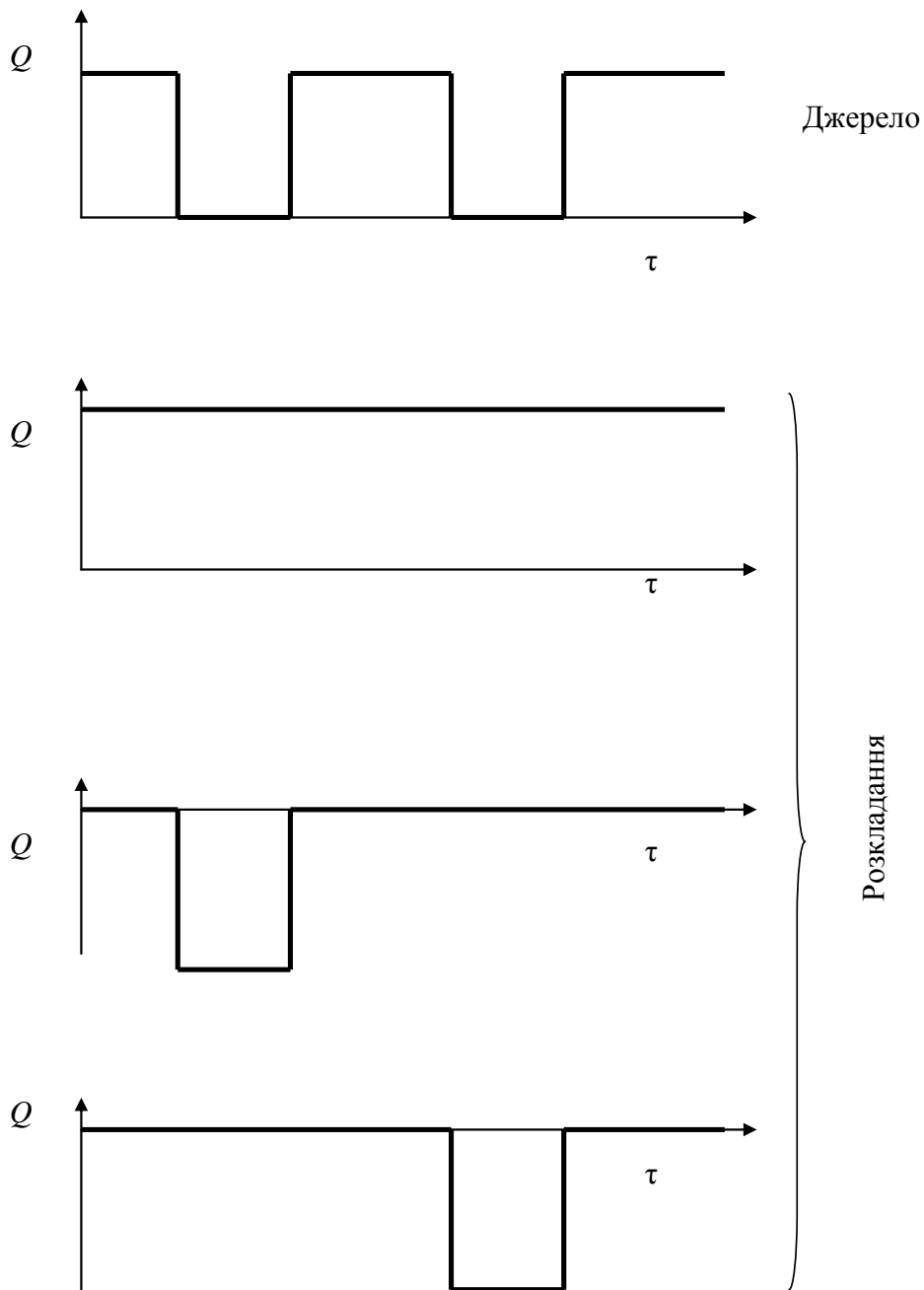


Рис. 7.43. Розкладання переривчастого джерела за другим типом



### 7.3. Питання до самоконтролю

1. З якою метою та на якому етапі здійснюється побудова віртуальних моделей?
2. Визначення віртуального об'єкта та його моделей.
3. Пряма та три зворотні задачі моделювання. Наведіть приклади з використанням засад методу віртуального об'єкта.
4. Наведіть класифікацію частинних методик методу віртуального об'єкта та приклади їх застосування в статиці (7 методик), динаміці (17 методик) та управлінні (17 методик).
5. Види заборон в методі прямого проектування та методи їх обходу за допомогою методу віртуального об'єкта.
6. Оптимізація, квазіоптимізація та фінішний перехід в методі віртуального об'єкта.
7. Головні теореми методу віртуального об'єкта – про умови існування альтернативних швидкодіючих методів розрахунку управляючої дії на швидкоплинний керований процес.
8. Застосування методу віртуального об'єкта для багатовимірних моделей.
9. Застосування методу віртуального об'єкта в одновимірній постановці для розрахунку статично невизначених систем.
10. Застосування методу віртуального об'єкта в двовимірній постановці для розрахунку статично невизначених систем.
11. Застосування методу віртуального об'єкта для розрахунку перетинів складнонавантажених деталей машин.
12. Застосування методу віртуального об'єкта для моделювання пошкоджень в елементах деталей машин в статиці.
13. Застосування методу віртуального об'єкта для моделювання пошкоджень в елементах деталей машин в динаміці.
14. Матричний метод нагромадження ушкоджень в конструкціях механізмів та машин.
15. Схема інформаційних джерел врахування зовнішніх впливів і чинників ризику при моделюванні ушкодження
16. За допомогою яких прийомів в моделі нагромадження ушкоджень під час життєвого циклу механізмів та машин в їхніх моделях враховуються елементи статички, динаміки та стохастички навантаження?
17. Які обставини є особливостями застосування методу віртуального об'єкта в управлінні.
18. Метод віртуального об'єкта при моделюванні переривчастих зовнішніх

впливів.

19. Використання методу віртуального об'єкта при розв'язанні задач оптимізації в проектуванні механічних конструкцій.

20. Використання методу віртуального об'єкта при розв'язанні задач оптимізації в проектуванні теплових процесів.

21. Який математичний апарат використовується при побудові віртуальних моделей?

22. Розкладання задачі моделювання процесів на елементарні підзадачі. Способи його виконання.

Таблиця 7.4

## Результати попередньої оптимізації розмірів стрижня

№ № п/п	$E_{л}$	$E_{п}$	$P$	$F_{л \min}$	$F_{п \min}$	$F_{л \max}$	$F_{п \max}$	$[\sigma]$	$m^*$	$F_{л}^*$	$F_{п}^*$	$\sigma_{л}$	$\sigma_{п}$
	МПа	МПа	Н	М <sup>2</sup>	М <sup>2</sup>	М <sup>2</sup>	М <sup>2</sup>	МПа	кг	М <sup>2</sup> ·10 <sup>4</sup>	М <sup>2</sup> ·10 <sup>4</sup>	МПа	Мпа
1	200000	200000	10000	0,00005	0,00005	0,0002	0,0002	100	0,446	0,66	0,51	100	66,6
2	200000	200000	5000	0,00005	0,00005	0,0002	0,0002	100	0,3978	0,51	0,51	58,82	39,21
3	200000	200000	15000	0,00005	0,00005	0,0002	0,0002	100	0,606	1,16	0,51	100	66,6
4	200000	200000	20000	0,00005	0,00005	0,0002	0,0002	100	0,7566	1,66	0,51	100	66,6
5	200000	200000	10000	0,00005	0,00005	0,0002	0,0002	200	0,3978	0,51	0,51	117,6	78,4
6	200000	200000	10000	0,00005	0,00005	0,0002	0,0002	150	0,3978	0,51	0,51	117,6	78,4
7	200000	200000	10000	0,00005	0,00005	0,0002	0,0002	250	0,3978	0,51	0,51	117,6	78,4
8	200000	200000	10000	0,00005	0,00005	0,0002	0,0002	80	0,5226	0,91	0,51	80	53,3
9	200000	200000	10000	0,00005	0,00005	0,0002	0,0002	60	0,6536	1,33	0,51	59,88	39,92
10	200000	200000	10000	0,00005	0,00005	0,0002	0,0002	40	0,9812	1,99	0,77	39,94	26,6
11	100000	100000	10000	0,00005	0,00005	0,0002	0,0002	100	0,4446	0,66	0,51	100	66,66
12	150000	150000	10000	0,00005	0,00005	0,0002	0,0002	100	0,4446	0,66	0,51	100	66,66
13	200000	200000	10000	0,00002	0,00002	0,0003	0,0003	100	0,3666	0,86	0,21	100	66,66
14	200000	200000	10000	0,00002	0,00002	0,0003	0,0003	200	0,2137	0,37	0,21	196	130,07

## Результати оптимізації напружень в стрижні

№ № П/П	$E_{л \min}$	$E_{п \min}$	$E_{л \max}$	$E_{п \max}$	$F_{л}$	$F_{п}$	$P$	$[\sigma]$	$m^*$	$E_{л}^*$	$E_{п}^*$	$\sigma_{л}$	$\sigma_{п}$
	МПа	МПа	МПа	МПа	м <sup>2</sup>	м <sup>2</sup>	Н	МПа	кг	МПа	МПа	МПа	МПа
1	100000	100000	250000	250000	0,00005	0,00005	10000	120	0,3276	166000	249000	119	119
2	100000	100000	250000	250000	0,00005	0,00005	11000	120	0,3588	166000	249000	120	120
3	100000	100000	250000	250000	0,00005	0,00005	11500	120	0,3744	166000	249000	120	120
4	100000	100000	250000	250000	0,00005	0,00005	8000	100	0,3198	166000	249000	97,6	97,6
5	100000	100000	200000	200000	0,00005	0,00005	10000	120	0,3276	132000	198000	119	119
6	100000	100000	225000	225000	0,00005	0,00005	10000	120	0,3276	148000	222000	119	119
7	200000	200000	300000	300000	0,00005	0,00005	10000	120	0,0078	200000	298000	102	102
8	150000	150000	250000	250000	0,00005	0,00005	10000	120	0,3276	164000	246000	119	119
9	150000	150000	250000	250000	0,00005	0,00005	9000	120	0,2964	164000	246000	118	118
10	150000	150000	250000	250000	0,00005	0,00005	8000	120	0,2652	164000	246000	117	117
11	150000	150000	250000	250000	0,00005	0,00005	10000	115	0,3432	164000	246000	111	111
12	150000	150000	250000	250000	0,00005	0,00005	10000	110	0,3588	164000	246000	109	109
13	150000	150000	250000	250000	0,00005	0,00005	10000	105	0,3744	164000	246000	104	104
14	150000	150000	250000	250000	0,00005	0,00005	10000	100	-	-	-	-	-

## Розділ 8 МОДЕЛІ У ВИГЛЯДІ ГРАФІВ

**О**сновна особливість моделей у вигляді графів – повне абстрагування від усіх властивостей об'єкта моделювання, окрім його структури. Досліджуючи окремих граф, неможна встановити, який об'єкт він моделює, – взаємодію галактик або конструкцію мініатюрної мікросхеми. Але таке, на перший погляд, суворе обмеження надає моделям у вигляді графів унікальну можливість – порівнювати об'єкти найрізноманітнішого призначення та на підставі знань про одні з них робити висновки про експлуатаційну «поведінку» інших.

### 8.1. Основні визначення

Визначення 8.1. Якщо на площині задати скінченну множину  $V$  точок і скінченний набір ліній  $X$ , що з'єднують деякі пари із точок  $V$ , то отримана сукупність точок і ліній буде називатися **графом**.

При цьому елементи множини  $V$  називаються **вершинами** графа, а елементи множини  $X$  – **ребрами**.

У множині  $V$  можуть зустрічатися однакові елементи, ребра, що з'єднують однакові елементи називаються **петлями**. Однакові пари в множині  $X$  називаються **кратними** (або паралельними) ребрами. Кількість однакових пар  $(v, w)$  у  $X$  називається **кратністю** ребра  $(v, w)$ .

Множина  $V$  і набір  $X$  визначають граф із кратними ребрами – **псевдограф**:

$$G = (V, X). \quad (8.1)$$

Псевдограф без петель називається **мультиграфом**.

Якщо в наборі  $X$  жодна пара не зустрічається більш одного разу, то мультиграф називається просто **графом**.

Якщо пари в наборі  $X$  є впорядкованими, то граф називається орієнтованим або **орграфом**.

Графу відповідає геометрична конфігурація. Вершини позначаються точками (кружечками), а ребра – лініями, що з'єднують відповідні вершини.

Визначення 8.2. Якщо  $x = \{v, w\}$  – ребро графа, то вершини  $v, w$  називаються кінцями ребра  $x$ .

Якщо  $x = (v, w)$  – дуга орграфа, то вершина  $v$  – початок, а вершина  $w$  – кінець дуги  $x$ .

Визначення 8.3. Вершини  $v, w$  графа  $G = (V, X)$  називаються **суміжними**, якщо  $\{v, w\} \in X$ . Два ребра називаються **суміжними**, якщо вони мають загальну вершину.

**Визначення 8.4.** Ступенем вершини графа називається кількість ребер, яким ця вершина належить. Вершина називається **ізолюваною**, якщо її ступінь дорівнює одиниці, і **висячою**, якщо її ступінь дорівнює нулю.

**Визначення 8.5.** Графи  $G_1(V_1, X_1)$  і  $G_2(V_2, X_2)$  називаються **ізоморфними**, якщо існує взаємно однозначне відображення  $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$ , що зберігає суміжність.

**Визначення 8.6.** **Маршрутом (шляхом)** для графа  $G(V, X)$  називається послідовність  $v_1 x_1 v_2 x_2 v_3 \dots x_k v_{k+1}$ . Маршрут називається **замкненим**, якщо його початкова і кінцева точки збігаються. Кількість ребер (дуг) маршруту (шляху) графа називається **довжиною** маршруту (шляху).

**Визначення 8.7.** Незамкнутий маршрут (шлях) називається **ланцюгом**. Ланцюг, у якому всі вершини попарно різні, називається **простим ланцюгом**.

**Визначення 8.8.** Замкнений маршрут (шлях) називається **циклом (контуром)**. Цикл, в якому усі вершини попарно різні, називається **простим циклом**.

## 8.2. Матриці графів

Нехай  $D = (V, X)$  – оргграф, де  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ ,  $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ .

**Визначення 8.9.** **Матрицею суміжності** оргграфа  $D$  називається квадратична матриця  $A(D) = [a_{ij}]$  порядку  $n$ , у якої

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (v_i, v_j) \in X; \\ 0, & \text{якщо } (v_i, v_j) \notin X. \end{cases} \quad (8.2)$$

**Визначення 8.10.** Якщо вершина  $v$  є кінцем ребра  $x$ , то говорять, що  $v$  і  $x$  – **інцидентні**.

**Визначення 8.11.** **Матрицею інцидентності** оргграфа  $D$  називається матриця розмірності  $n \times m$   $B(D) = [b_{ij}]$ , у якої

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо вершина } v_i \text{ є кінцем дуги } x_j \\ -1, & \text{якщо вершина } v_i \text{ є початком дуги } x_j \\ 0, & \text{якщо вершина } v_i \text{ не інцидентна дузі } x_j \end{cases} \quad (8.3)$$

**Приклад 8.1.** Записати матриці суміжності та інцидентності для графа, зображеного на рисунку 8.1.

Складемо таблицю суміжності:

	$v_1$	$v_2$	$v_3$
$v_1$	0	1	0
$v_2$	1	0	1
$v_3$	1	0	0

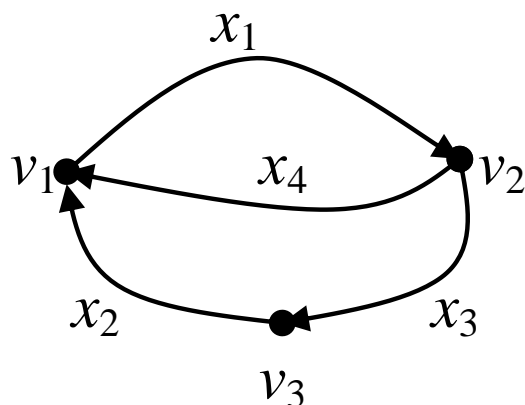


Рис.8.1. Граф, що складається з трьох вершин і трьох ребер

Тоді матриця суміжності буде мати вигляд

$$A(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.4)$$

Матриця інцидентності:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
$v_1$	-1	0	1	1
$v_2$	1	-1	0	-1
$v_3$	0	1	-1	0

або

$$B(D) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.5)$$

Якщо граф має кратні дуги (ребра), то в матриці суміжності приймається  $a_{ij}=k$ , де  $k$  – кратність дуги (ребра).

За допомогою матриць суміжності та інцидентності завжди можна повністю визначити граф і всі його компоненти. Такий метод завдання графів дуже зручний для обробки даних на ЕОМ.

Приклад 8.2. Задана симетрична матриця  $Q$ . Побудувати на площині граф  $G(V, X)$ , що має задану сукупність  $Q$  своєю матрицею суміжності. Знайти матрицю інцидентності  $R$  графа  $G$ . Побудувати також оргграф  $\vec{G}(N, A)$ , що має матрицю суміжності  $Q$ , визначити його матрицю інцидентності  $C$ .

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.6)$$

Складемо таблицю інцидентності:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	$x_{11}$
$v_1$	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
$v_2$	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0
$v_3$	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0
$v_4$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1

Разом:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.7)$$

Побудуємо тепер орієнтований граф із заданою матрицею суміжності (рис. 8.2).

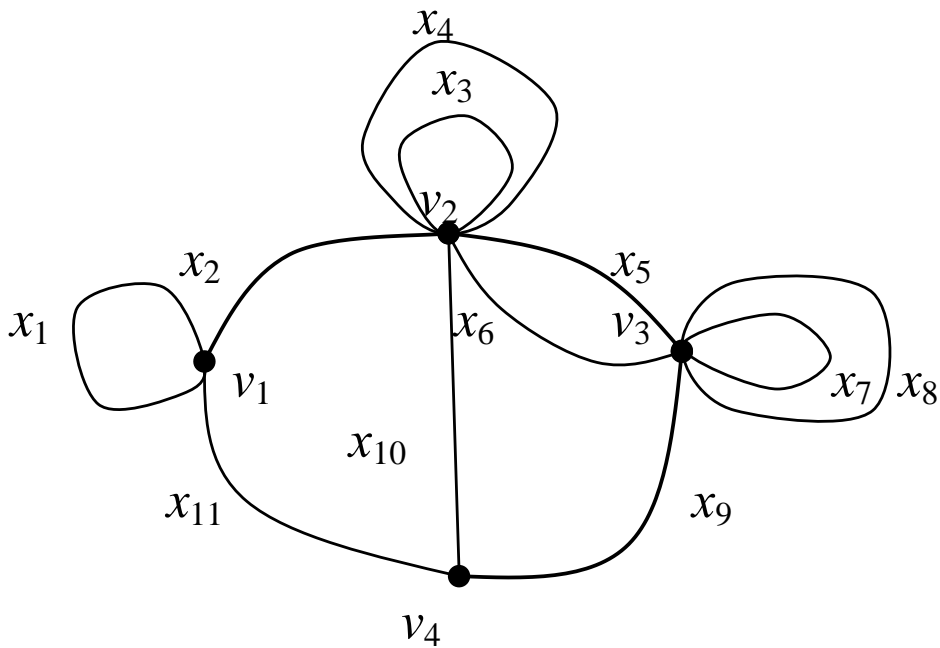


Рис.8.2. Схема графа до прикладу 8.2



Приклад 8.3. Скласти матрицю інцидентності для орієнтованого графа (рис. 8.3).

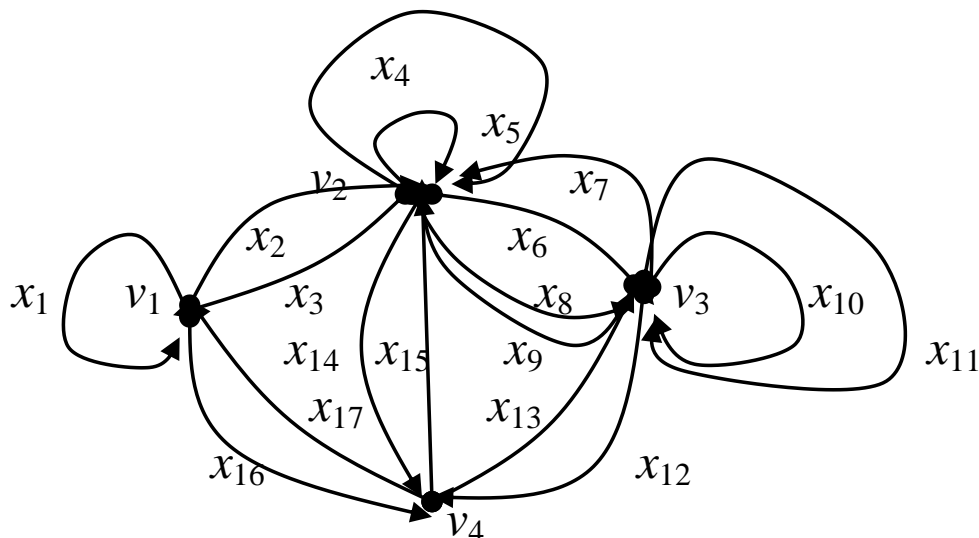


Рис. 8.3. Схема графа до прикладу 8.3

Елемент матриці дорівнює 1, якщо точка є кінцем дуги, та  $-1$ , якщо початком дуги. Якщо дуга є петлею, елемент матриці запишемо як  $\pm 1$ .

Таким чином, для даного графа матриця суміжності запишеться у вигляді:

$$C = \begin{pmatrix} \pm 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 & \pm 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & \pm 1 & \pm 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, операції із графами можна звести до операцій з їхніми матрицями.

### 8.3. Досяжність та зв'язність

Визначення 8.12. Вершина  $w$  графа  $D$  (або орграфа) називається **досяжною** з вершини  $v$ , якщо або  $w=v$ , або існує шлях з  $v$  до  $w$  (маршрут, що з'єднує  $v$  і  $w$ ).

Визначення 8.13. Граф (орграф) називається **зв'язаним**, якщо для будь-яких двох його вершин існує маршрут (шлях), який їх зв'яже. Орграф називається **односторонньо зв'язаним**, якщо для будь-яких двох його вершин принаймні одна досяжна з іншої.

Визначення 8.14. Псевдографом  $D(V, X)$ , **асоційованим** з орієнтованим псевдографом, називається псевдограф  $G(V, X_0)$ , в якому  $X_0$  виходить із  $X$  заміною всіх упорядкованих пар  $(v, w)$  на неупорядковані пари  $(v, w)$ .

Визначення 8.15. Орграф називається **слабкозв'язаним**, якщо зв'язаним є асоційований з ним псевдограф.

### 8.4. Ейлерові та гамільтонові графи

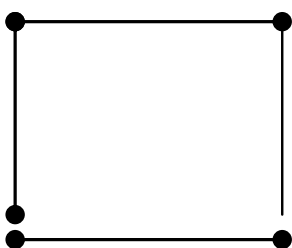
**Визначення 8.16.** Ланцюг (цикл) у псевдографі  $G$  називається **ейлеровим**, якщо він проходить по одному разу крізь кожне ребро псевдографа  $G$ .

**Теорема 8.1.** Для того, щоб зв'язний псевдограф  $G$  мав ейлеровий цикл, необхідно і достатньо, щоб ступені його вершин були парними.

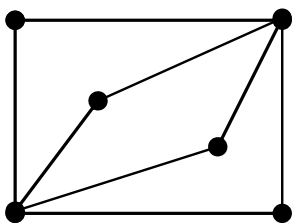
**Теорема 8.2.** Для того, щоб зв'язний псевдограф  $G$  мав ейлеровий ланцюг, необхідно і достатньо, щоб він мав рівно дві вершини непарного ступеня.

**Визначення 8.17.** Цикл (ланцюг) у псевдографі  $G$  називається **гамільтоновим**, якщо він проходить крізь кожну вершину псевдографа  $G$  рівно один раз.

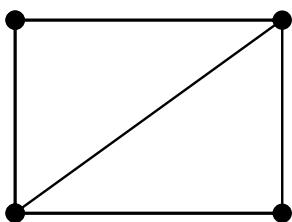
#### Приклад 8.4.



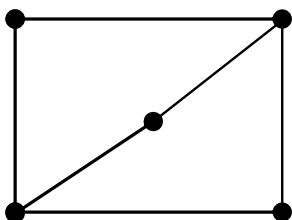
– у графі є і ейлерів, і гамільтонів цикли.



– у графі є ейлеровий цикл, але немає гамільтонового.



– у графі є гамільтонів, але немає ейлерового циклу.



– у графі немає ані ейлерового, ані гамільтонового циклу.

Граф  $G$  називається **повним**, якщо кожна його вершина суміжна з усіма іншими вершинами. У повному графі завжди існують гамільтонові цикли.

Також необхідною умовою існування гамільтонова циклу є зв'язність графа.

## 8.5. Дерева та цикли

**Визначення 8.18.** Граф  $G$  називається **деревом**, якщо він є зв'язаним і не має циклів. Граф  $G$ , всі компоненти зв'язності якого є деревами, називається **лісом**.

У графа, який є деревом, кількість ребер на одиницю менше кількості вершин. Дерево не містить циклів, якщо будь-які дві його вершини можна з'єднати простим ланцюгом (рис. 8.4).

Якщо в дерева  $G$  є, принаймні, одне ребро, то в нього обов'язково знайдеться висяча вершина, інакше в графі буде цикл.

Для графів, які самі по собі не є деревами, вводиться поняття **остовного дерева**.

**Визначення 8.19.** **Остовним деревом** зв'язного графа  $G$  називається будь-який його підграф, що містить усі вершини графа  $G$ , що і є деревом.

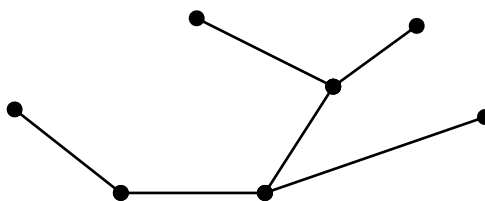


Рис. 8.4. Дерево

Нехай  $G$  – зв'язний граф. Тоді остовне дерево графа  $G$  (якщо воно існує) повинне містити  $n_{(G)} - 1$  ребер.

Таким чином, будь-яке остовне дерево графа  $G$  є результатом видалення із графа  $G$  рівно  $m_{(G)} - (n_{(G)} - 1) = m_{(G)} - n_{(G)} + 1$  ребер.

Число  $\nu_{(G)} = m_{(G)} - n_{(G)} + 1$  називається **циклوماتичним числом** зв'язного графа  $G$ .

Однією з найпоширеніших задач є задача побудови остовного дерева мінімальної довжини графа. Для розв'язку цієї задачі застосовується наступний алгоритм.

1. Виберемо в графі  $G$  ребро мінімальної довжини. Разом з інцидентними до нього вершинами воно утворює підграф  $G_2$ .

2. Будуємо граф  $G_3$ , додаючи до графа  $G_2$  нове ребро мінімальної довжини, обране серед ребер графа  $G$ , кожне з яких інцидентно деякій вершині графа  $G_2$ , і одночасно інцидентно деякій вершині графа  $G$ , що не міститься в графі  $G_2$ .

3. Будуємо графи  $G_4, G_5, \dots, G_n$ , повторюючи дії пункту 2 доти, доки не переберемо всі вершини графа  $G$ .

**Приклад 8.5.** Визначити мінімальне остовне дерево навантаженого графа (рис. 8.5).

Граф називається **навантаженим**, якщо на множині його дуг задана деяка функція, яка називається **ваговою функцією** і визначає довжину дуги.

У нашому прикладі – вагова функція визначає довжини дуг числами 1, 2, 3,

4, 5.

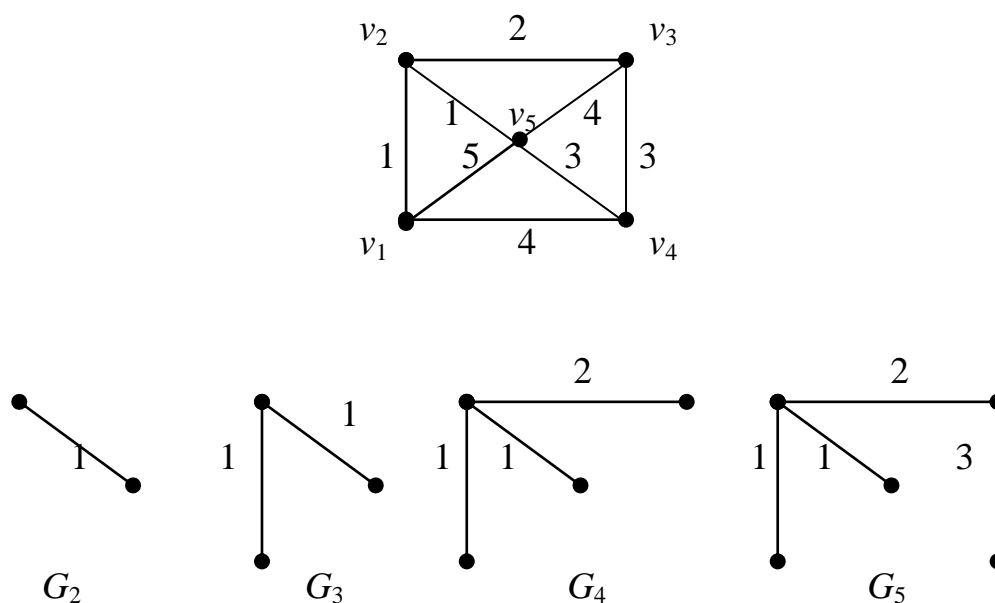


Рис. 8.5. Остовне дерево навантаженого графа

На четвертому кроці алгоритму одержали дерево  $G_5$ , яке з'єднує всі вершини вихідного графа. Таким чином, дерево  $G_5$  буде мінімальним остовним деревом графа  $G$ .

### 8.6. Ізоморфізм графів та проблеми аналітичних методів його виявлення

Як відомо, ізоморфізм – наявність структурної подібності у різних об'єктів. Ізоморфізм завжди задає відношення еквівалентності на класі множин зі структурою.

Об'єкти, між якими існує ізоморфізм, є в певному сенсі «однаково влаштованими», вони називаються *ізоморфними*. Це дуже загальне поняття, яке вживається в різних розділах математики. Загалом його можна описати так.

Функція  $f: X \rightarrow Y$  називається бієкцією, якщо вона:

– переводить різні елементи множини  $X$  у різні елементи множини  $Y$  (ін'єктивність):

$$\forall x_1 \in X, \forall x_2 \in X (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2); \quad (8.8)$$

– будь-який елемент із  $Y$  має свій прообраз (сюр'єктивність); іншими словами:

$$\forall y \in Y, \exists x \in X f(x) = y. \quad (8.9)$$

Бієкцію також називають взаємно однозначним відображенням. Множини, для яких існує бієкція, називаються рівнопотужними.

Нехай дані дві множини з певною структурою (групи, кільця, лінійні простори, тощо). Бієкція між ними називається ізоморфізмом, якщо вона зберігає цю структуру. Такі множини зі структурою називаються ізоморфними. В абстрактній алгебрі ізоморфізмом називається бієкція, яка є гомоморфізмом.

У теорії графів граф  $G$  називається ізоморфним графу  $H$ , якщо існує бієкція  $f$  із множини вершин графа  $G$  у множину вершин графа  $H$ , яка має таку властивість: якщо в графі  $G$  є ребро з вершини  $A$  у вершину  $B$ , то в графі  $H$  повинно бути ребро з вершини  $f(A)$  у вершину  $f(B)$  і навпаки, – якщо в графі  $H$  є ребро з вершини  $A$  у вершину  $B$ , то в графі  $G$  повинно бути ребро з вершини  $f^{-1}(A)$  у вершину  $f^{-1}(B)$ .

У випадку орієнтованого графа ця бієкція також повинна зберігати орієнтацію ребра. У випадку зваженого графа бієкція також повинна зберігати вагу ребра.

Нехай  $G$  і  $H$  – графи,  $f$  – взаємно однозначне відображення множини  $V(G)$  на множину  $V(H)$  і  $g$  – взаємно однозначне відображення  $E(G)$  на  $E(H)$ . Позначимо  $Q$  упорядковану пару  $(f, g)$ . Будемо говорити, що  $Q$  є ізоморфним відображенням (ізоморфізмом) графа  $G$  на граф  $H$ , якщо виконується наступна умова: вершина  $x$  інцидентна ребру  $A$  у графі  $G$  тоді й тільки тоді, коли вершина  $f_x$  інцидентна ребру  $g_a$  у графі  $H$ .

Якщо такий ізоморфізм  $Q$  існує, то будемо говорити, що графи  $G$  і  $H$  ізоморфні. Ясно, що в цьому випадку

$$|V(G)| = |V(H)| \text{ і } |E(G)| = |E(H)|. \quad (8.10)$$

Ми можемо розглядати  $Q$  як операцію, що перетворює граф  $G$  у граф  $H$ , і відповідно до цього писати  $QG = H$ . Зручно також писати  $Qv = fv$  і  $QA = ga$  (для кожної вершини  $v$  і кожного ребра  $A$  графа  $G$ ).

Можна показати, що відношення ізоморфізму між графами є відношенням еквівалентності, тобто воно симетрично, транзитивно та рефлексивно. Отже, воно розбиває клас усіх графів на непусті і попарно непересічні підкласи, названі класами ізоморфізму або класами ізоморфних графів. Два довільні графи належать одному й тому ж класу ізоморфізму тоді й тільки тоді, коли вони ізоморфні один одному.

Ізоморфні графи природно ототожнювати, тобто вважати співпадаючими (їх можна зобразити одним рисунком). Вони могли б різнитися конкретною природою своїх елементів, але це ігнорується при введенні поняття «граф».

Питання про те, чи ізоморфні два дані графа, у загальному випадку виявляється складним. У теорії обчислювальної складності дотепер є відкритим питання про складність задачі визначення ізоморфізму графів. Наразі не доведена ні її належність до класу  $P$ , ні її  $NP$ -повнота.

Для ізоморфізму двох  $n$ -вершинних графів саме визначення цього відношення дає аналітичний спосіб перевірки: *треба переглянути всі  $n!$  взаємно од-*

нозначних відповідностей між множинами вершин і встановити, чи сполучаються повністю ребра графа хоча б при одній відповідності. Однак навіть досить груба оцінка показує, що такий прямий розв'язок задачі практично непридатний: вже при  $n = 20$  перебір усіх  $n!$  варіантів зажадав би близько 40 років машинного часу!

Подібна ситуація, природно, підштовхнула багатьох математиків на класичний шлях: спробувати знайти такий *інваріант* (число або систему чисел), який би, з одного боку, легко обчислювався за заданим графом (і по можливості мав наочний сенс), а з іншого – мав властивість повноти, тобто визначав граф однозначно з точністю до ізоморфізму. Математично це виглядає так: нехай  $f$  – функція, що відносить кожному графу  $G$  деякий елемент  $f(G)$  із множини  $M$  довільної природи.

Цю функцію ми будемо називати інваріантом, якщо на ізоморфних графах її значення збігаються, тобто для будь-яких  $G$  і  $G'$  з ізоморфності графів  $G$  і  $G'$  випливає  $f(G) = f(G')$ . В цьому випадку порівняння графів на ізоморфізм замінюється порівнянням їхніх інваріантів. На жаль уявна простота такого підходу стикається з проблемами пошуку як таких інваріантів (пошук обов'язково повинен містити доказ адекватності), так і методів їх відносно швидкого обчислення.

Інваріант  $f$  називається *повним*, якщо для будь-яких графів  $G$  і  $G'$  з рівності  $f(G) = f(G')$  випливає ізоморфізм графів  $G$  і  $G'$ .

На жаль, існуючі інваріанти графів мають один головний недолік: неспівпадіння інваріантів однозначно свідчить про неінваріантність графів, але не навпаки, тобто *співпадіння відомих інваріантів є необхідною, але недостатньою умовою інваріантності відповідних графів*. Коротше кажучи, відомі інваріанти *неповні*:

- кількість вершин  $n(G)$ ;
- кількість ребер  $m(G)$ ;
- вектор ступенів  $s(G) = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ , який, зокрема, дає числові інваріанти:

$$\min_{i \text{ належить } \{1, 2, \dots, n\}} s_i \quad \text{і} \quad \max_{i \text{ належить } \{1, 2, \dots, n\}} s_i \quad (8.11)$$

- щільність  $f(G)$  – кількість вершин кліка графа  $G$  (клік графа є підмножиною його вершин, такою, що між кожною парою вершин цієї підмножини існує ребро і, крім того, ця підмножина не належить ніякій більшій підмножині з тією ж властивістю); інваріантність цієї характеристики впливає з того, що при ізоморфній відповідності двох графів кожній підмножині вершин одного графа породжувана кліка відповідає в іншому графі підмножині з тією ж кількістю вершин, що теж породжує кліку;

- нещільність  $e(G)$  – це найбільша кількість попарно несуміжних вершин графа;
- хроматичне число  $g(G)$ ;

- кількість компонентів зв'язності  $K(G)$ ;
- число Хадвігера  $h(G)$ ;
- будь-яка функція від елементів  $a_{ij}$  матриці суміжності, що не змінюється при будь-яких перестановках рядів матриці (сума всіх елементів, неупорядкований набір сум елементів кожного рядка або сум елементів кожного стовпця, визначник матриці, її характеристичний багаточлен і корінь останнього та ін.).

Помітимо, що сама матриця суміжностей не є інваріантом графа: при переході від однієї нумерації його вершин до іншої вона перетерплює перестановку, що складається з деякої перестановки рядків і такої ж перестановки стовпців.

З розглянутих інваріантів, які віднесені до «легко обчислювальних», навіть найбільш «багатий» – вектор ступенів  $s(G)$  – не є повним. У процесі розвитку теорії графів не було нестачі в гіпотезах повноти або іншого «важко визначуваного» інваріанта, але всі ці гіпотези рано або пізно спростовувалися конкретними прикладами.

## 8.7. Морфологічні моделі на основі ізоморфних структур

### 8.7.1. Експериментально-статистичний метод виявлення ізоморфізму графів

Введемо новий інваріант для виявлення ізоморфізму графів: деякий віртуальний об'єкт фізичного або інформаційного світів, відносно якого граф, який тестується, відіграє роль *морфологічної моделі*. Для цього будемо вимагати, щоб структура віртуального об'єкта була ізоморфна морфологічній моделі, тобто графу, а його властивості дозволяли піддавати об'єкт деяким випробуванням із обчисленням по результатах цього випробування деякого числа (групи чисел) – інваріанта об'єкта.

**Наукова гіпотеза 8.1.** *Якщо інваріанти двох об'єктів у вигляді чисел, отриманих на їхніх морфологічних моделях, мають близьке значення, то це свідчить про можливість інваріантності графів, за якими побудовані ці моделі.*

Моделюванню за допомогою морфологічних моделей може бути підданий будь-який об'єкт фізичного світу.

Для цього цей об'єкт необхідно розглянути у вигляді чорної скриньки або деякого перетворювача «вхід → вихід». Побудуємо математичну модель такого перетворення.

Для цього розглянемо об'єкт аналізу у вигляді операторного рівняння, яке перетворює вектор вхідних змінних  $\mathbf{X}$  у вектор вихідних  $\mathbf{Y}$  за допомогою деякого оператора  $\mathfrak{R}$ :

$$\mathbf{Y} \rightarrow \mathfrak{R}(\mathbf{X}). \quad (8.12)$$

Правила перетворення, які містяться в операторі  $\mathfrak{R}$ , залежать від «структури» останнього  $\mathfrak{R}_s$  та параметрів його елементів  $\mathfrak{R}_p$ :

$$\mathfrak{R} = \{\mathfrak{R}_s, \mathfrak{R}_p\}. \quad (8.13)$$

Наприклад, оператори «помножити на 5» та «поділити на 5» відрізняються структурою, а «помножити на 5» та «помножити на 10» – параметром.

Випробування, про яке йдеться при визначенні інваріантності морфологічної моделі, може бути різним. Якщо йдеться про об'єкти із надлишковою структурою, природно обрати в якості випробування дослідження працездатності таких об'єктів в умовах втрати частини своєї структури під час експлуатаційних руйнувань, тобто компонентів їхньої надійності.

Надійність – властивість об'єкта зберігати в часі у встановлених межах значення всіх параметрів, що характеризують здатність виконувати необхідні функції в заданих режимах і умовах застосування, технічного обслуговування, зберігання та транспортування.

**Наукова гіпотеза 8.2.** Адекватність морфологічних моделей з точки зору визначення їхньої ізоморфності досягається тоді, коли випробуванням на працездатність піддаються об'єкти із надлишковою структурою, життєвий цикл яких супроводжується руйнуванням їхньої структури.

Хай для початкового стану операторного рівняння (8.12) деяке значення  $X$  за допомогою початкового  $\mathfrak{R}$  переводиться у  $Y$ , що належить до множини  $M$  (рис. 8.6).

Хай тепер структуру  $\mathfrak{R}_s$  початкового оператора  $\mathfrak{R}$  буде змінено («зруйновано») шляхом вилучення окремих елементів або зв'язків так, що оператор  $\mathfrak{R}$  перетвориться на оператор  $\mathfrak{R}_{broken}$  (рис. 8.6). Цілком ймовірно, що в міру «руйнування» початкового оператора (дискретний процес) значення  $Y$  буде зрушене з початкового місця в множині  $M$  та за кілька ітерацій руйнування вийде за межі цієї множини.

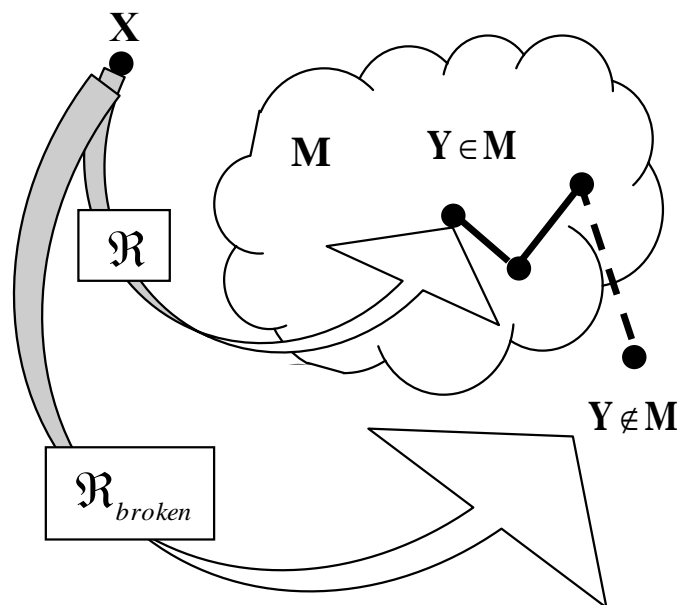


Рис. 8.6. Схема зміни значення вихідного вектора  $Y$  операторного перетворення



при «руйнуванні» оператора  $\mathfrak{R}$

Якщо множина  $\mathbf{M}$  містить лише елементи «об'єкт працездатний», а за межами  $\mathbf{M}$  розташовані, навпаки, тільки елементи «об'єкт непрацездатний», то вихід  $\mathbf{Y}$  за межі множини  $\mathbf{M}$  означає досягнення на останній ітерації такого ступеня руйнування  $\mathfrak{R}$ , при якому об'єкт надалі не може виконувати задану функцію, тобто відмову об'єкта.

Переходячи до розглядання виходів об'єктів як параметрів надійності, отримуємо дані, наведені в табл. 8.1.

Оскільки мова йде про об'єкти із надлишковою структурою (резервовані об'єкти), розглянемо, в чому полягає таке резервування.

Резервування – спосіб забезпечення надійності об'єкта за рахунок використання додаткових засобів і (або) можливостей, надлишкових стосовно мінімально необхідних для виконання необхідних функцій. Кратність резерву – відношення кількості резервних елементів до кількості елементів, що ними резервуються, виражене нескороченим дробом.

Навантажений резерв – резерв, який містить один або кілька резервних елементів, що знаходяться у режимі основного елемента.

### 8.7.2. Методи забезпечення ізоморфності структур

Побудова ефективних систем управління надійністю технічних систем неможлива без розробки адекватних моделей їх «поведінки» на всіх етапах життєвого циклу й, особливо, на етапі експлуатації, коли накопичуються ушкодження, що приводять у підсумку до відмови системи в цілому.

Як зазначено вище, в технічних системах відповідального призначення найчастіше застосовується резервування елементів, коли кожний наступний елемент має можливість виправити відмову попереднього, змінюючи своє «навантаження».

Як правило, таку ж надмірність мають штучні нейронні мережі (див. розділ 11), що продовжують справно функціонувати при втраті деякої частини нейронів і зв'язків між ними. Можлива структурна подібність технічних і інформаційних моделей дозволила запропонувати метод оцінки відмовостійкості складних систем за допомогою топологічно подібних їм (ізоморфних) нейронних мереж.

На жаль, у цього методу є один істотний недолік: якщо структура моделюемого об'єкта не відповідає структурі ні однієї з відомих нейронних мереж, то використання цього методу неможливо.

Ця обставина накладає серйозні обмеження на застосування методу, оскільки множина варіантів розбивки технічних об'єктів (навіть однієї деталі!) теоретично нескінченна, а кількість варіантів структур існуючих нейронних мереж невелика.

Особливі труднощі виникають при штучній дискретизації об'єкта моделювання, наприклад, на скінченні елементи, оскільки в цьому випадку структура, що виходить, найчастіше 3-х вимірна, а відомих 3-х вимірних нейронних мереж

не існує.

Приклади об'єктів морфологічного моделювання надійності

№ № з/п	Тип об'єкта	Приклад об'єкта заданого типу	Вхід, <b>X</b>	Оператор перетворюван- ня «вхід → вихід», <b>R</b>		Вихід, <b>Y</b>
				Структура (топологічна складова), <b>R<sub>s</sub></b>	Параметри (компонен- тна скла- дова), <b>R<sub>p</sub></b>	
1	Спосіб	Техноло- гічний процес виготов- лення деталей машин	Потік вхідних матеріа- лів та за- готовок	Верстати та маршрутні потоки, що залишилися непошко- дженими під час експлуа- тації	Продукти- вність вер- статів та транспорт- них пото- ків, що за- лишилися	Здатність реалізову- вати за- плановану програму
2	Пристрій	Конструк- ція у вигляді рами	Зовнішнє наванта- ження	Вузли та стрижні, що залишилися незруйнова- ними під час експлуатації	Розміри та матеріали вузлів та стрижнів, що зали- шилися	Працезд- тність
3	Речовина	Гетеро- генний матеріал	Зовніш- ній вплив	Компоненти та їхня взає- модія, що залишилися незмінними під час експ- луатації	Розміри та властивос- ті елемен- тів компо- нентів та зв'язків між ними в нових умо- вах	Належ- ність влас- тливостей до запла- нованих діапазонів
4	Інформа- ційна система	Інформа- ційна мережа	Значення змінних на вході	Перетворю- вачі інфор- мації та ка- нали зв'язку	Параметри елементів інформа- ційної ме- режі	Належ- ність ме- режі до множини «працезд- тна»

Наведемо метод ув'язування структури об'єкта, яка виходить в результаті дискретизації на елементи, що розташовуються уздовж ортогональних осей зі структурою багат шарових неповнозв'язних нейронних мереж прямого поширення.

На рис. 8.7, *a* для двовимірного випадку показаний приклад умовної розбивки деякого об'єкта на  $3 \times 3 = 9$  елементів, зв'язаних між собою по лініях, які збігаються з ортогональною двовимірною сіткою, що проходить крізь їхній центр.

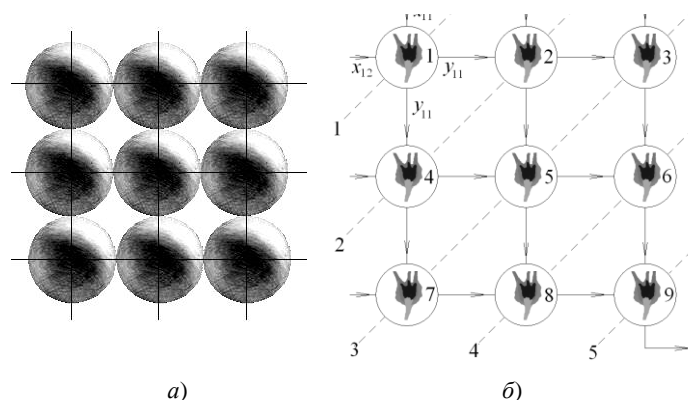


Рис. 8.7. Схема розбивки двовимірного об'єкта

Розташуємо нейрони у вузлах такої ж сітки (рис. 8.7, *б*) і позначимо зв'язки між ними, причому спрямованість зв'язків виберемо зліва праворуч і зверху вниз. Далі через центри вузлів сітки проведемо похилі лінії (пунктирні лінії на рис. 8.7, *б*).

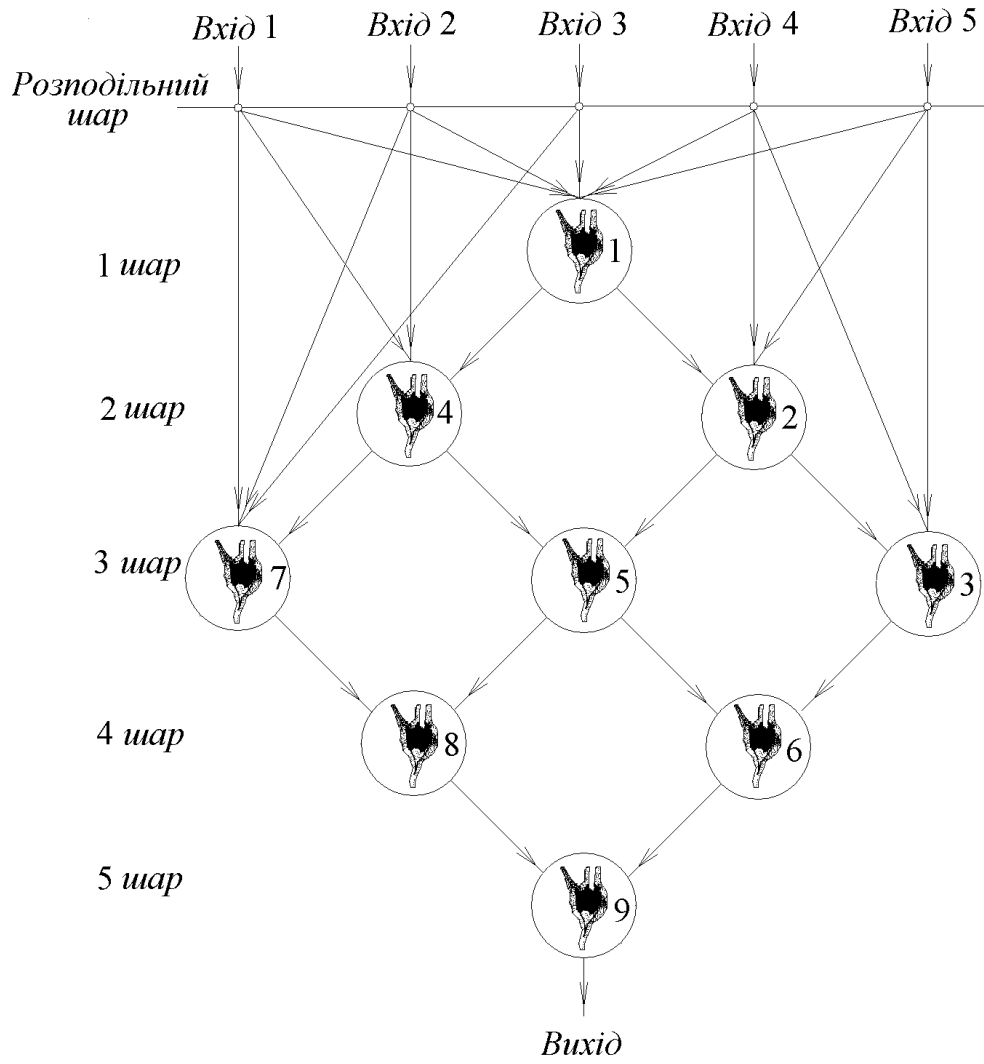
Якщо нейрон 1 вважати вхідним, а нейрон 9 – вихідним, то кожна така лінія представляє окремий шар нейронної мережі, що наочно видно на рис. 8.8.

Тут для наочності доданий розподільний шар, який збирає інформацію, що надходить на вхід нейронної мережі і перенаправляє її до першого нейрона. Таким чином «незручна» для дослідження нейронна мережа (рис. 8.7, *a*) перетворюється у звичайну шестишарову неповнозв'язну нейронну мережу прямого поширення, яка, як відомо, може бути використана для розв'язання завдань класифікації або прогнозування часових трендів.

Переходячи за аналогією з розглянутим прикладом до тривимірної дискретизації (рис. 8.9, *a*), одержимо тривимірну сітку нейронів (рис. 8.9, *б*). Напрямки зв'язків між ними в цьому випадку обрані зліва направо, зверху вниз і спереду назад.

«Повернемо» сітку так, щоб вертикальна вісь проходила крізь центри вузлів 1 і 27, і одержимо знову багат шарову неповнозв'язну нейронну мережу прямого поширення (рис. 8.10).

Кількість шарів топологічно подібної нейронної мережі, включаючи розподільний шар, можна визначити за формулою



$$S = (\delta_1 + \dots + \delta_N) - (N - 1), \quad (8.14)$$

Рис. 8.8. Шестишарова неповнозв'язна нейронна мережа прямого поширення

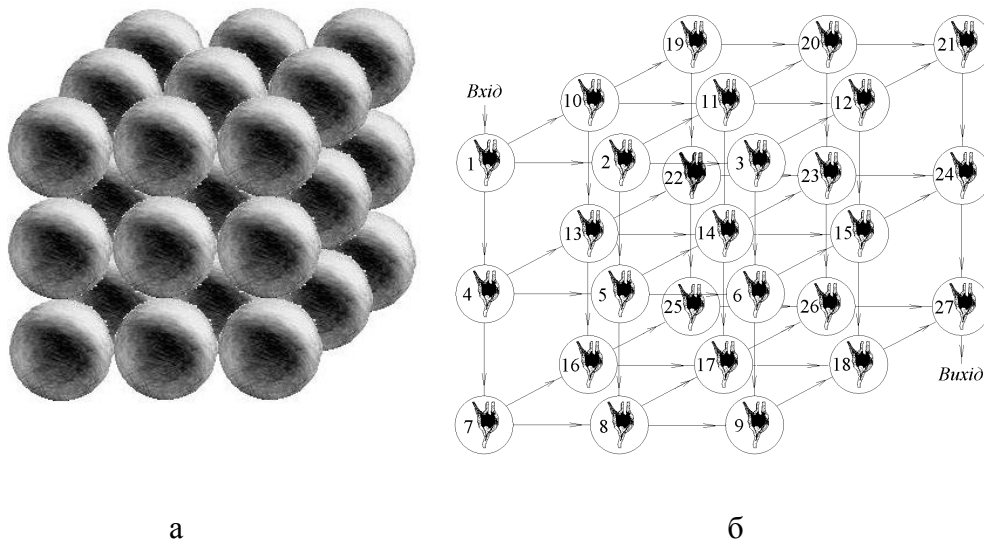


Рис. 8.9. Схема тривимірної моделі (а) та її дискретизація (б)

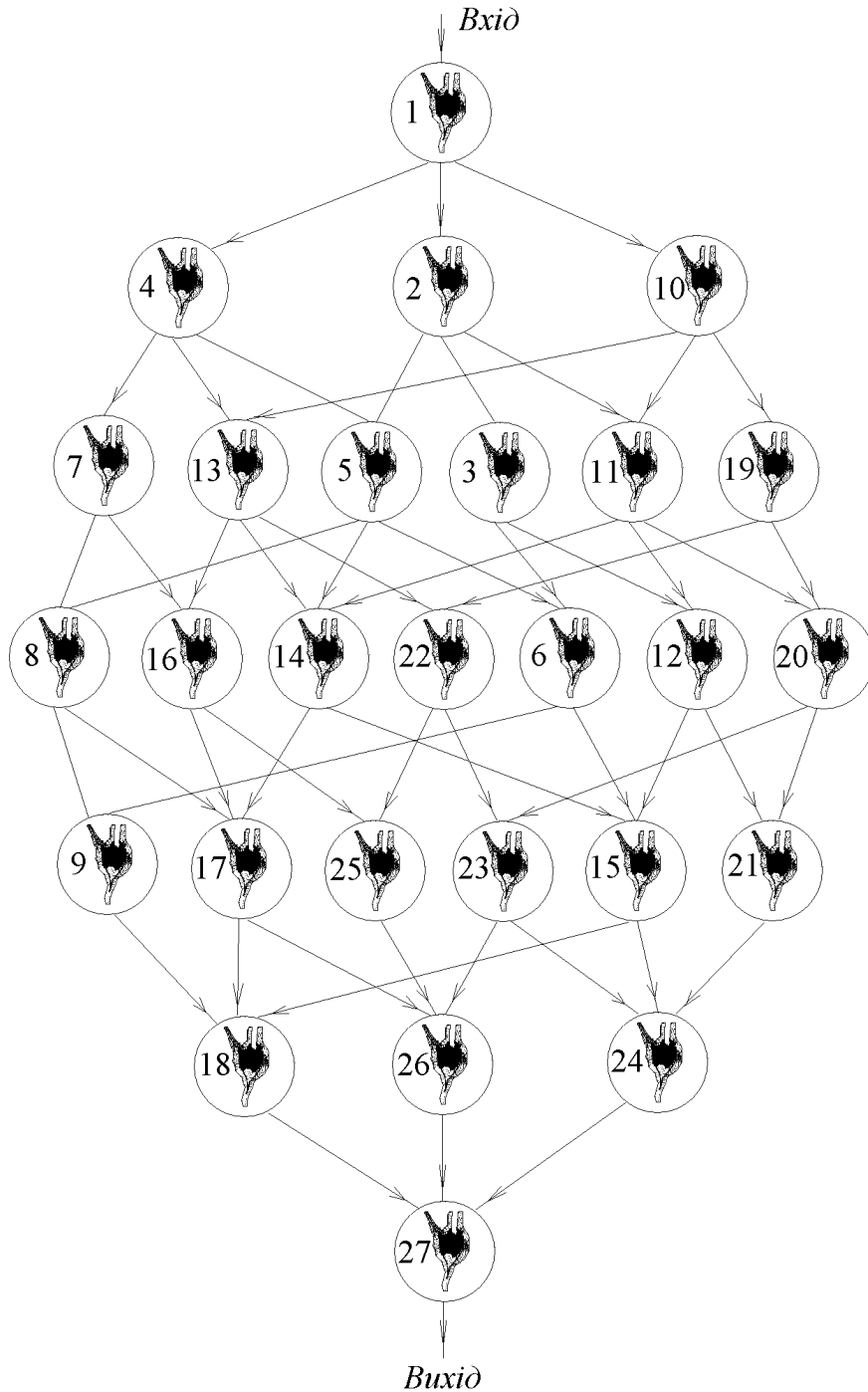


Рис. 8.10. Схема багатошарової неповнозв'язаної НМ

де  $N$  – розмірність простору;  $\delta_i$  – кількість шарів уздовж відповідної до осі ( $i = 1 \dots N$ ).

При  $\delta_1 = \delta = \dots = \delta_N$  маємо

$$S = N(\delta - 1) + 1. \quad (8.15)$$

Такий підхід дозволяє побудувати інформаційні морфологічні моделі деталей машин практично будь-якої конфігурації.

### 8.7.3. Приведення структури реального об'єкта до представлення у вигляді графа необхідної форми

Важливим етапом дослідження відмовостійкості складних технічних систем у вигляді мережних структур, що ґрунтується на топологічній подібності технічних та інформаційних мережних структур, є безпосереднє забезпечення цієї топологічної подібності в процесі побудови нейромережевої моделі.

Оскільки мова йде про оцінку складних технічних систем, конструкція яких визначається чим завгодно, але тільки не їхньою віртуальною нейроподібністю, задача моделювання зводиться до добору такої структури нейронної мережі, яка була б подібною до механічної системи.

Структура будь-якої складної технічної системи може бути приведена до нейроподібної шляхом скінченної кількості еквівалентних перетворень.

На жаль, вибір структур нейронних мереж досить обмежений, особливо якщо мати на увазі ту обставину, що нейронна мережа повинна бути не тільки топологічно подібною, але ще й виконувати деяку «свою» роботу: класифікація, прогнозування, тощо. З урахуванням перерахованих обставин задача добору нейронної мережі, топологічно подібною до механічної конструкції, перестає бути тривіальною.

Запропоновані наступні прийоми побудови подібних нейромережевих моделей, що дозволяють спростити задачу добору нейронної мережі:

- еквівалентне перетворення моделі механічної конструкції до нейроподібного виду;
- використання для топологічно подібного моделювання окремих фрагментів нейронної мережі, при цьому подібність встановлюється між *усією* технічною системою та *фрагментом* мережі.

### 8.7.4. Еквівалентні перетворення моделі механічної конструкції

За аналогією з електротехнікою, яка дозволяє еквівалентно заміщати фрагмент електричної схеми таким чином, що на границях цього фрагмента в точках розриву зберігаються значення основних фазових змінних (струмів, напруг), запропоновано замінювати фрагменти механічних конструкцій.

Приклад 8.6. Нехай деяка механічна конструкція (наприклад, арматура залізобетонної опори) має вигляд, представлений на рис. 8.11.

«Розріжемо» модель цієї арматури уздовж одного з вертикальних стрижнів (№ 1) і розгорнемо її на площині, як це показано на рис. 8.12.

Зверніть увагу на те, що для збереження топологічної подібності при такому перетворенні будемо вважати вертикальні стрижні 1' і 1'' такими, що моделюють той самий вертикальний стрижень 1.

Виділимо з розгорнення, що вийшло, одну горизонтальну секцію так, як це показано на рис. 8.13, і навантажимо її механічно вертикальною силою.



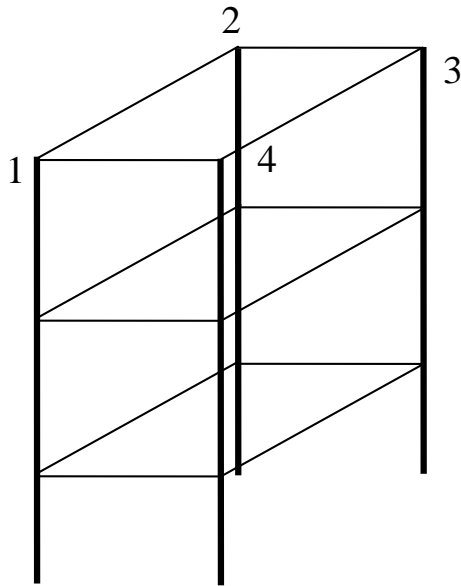


Рис. 8.11. Структурна схема металевої арматури залізобетонної опори

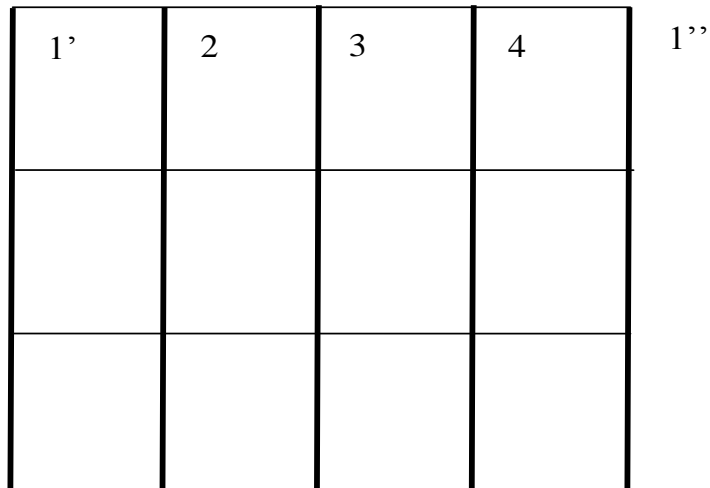


Рис. 8.12. Плоске розгорнення металевої арматур залізобетонної опори

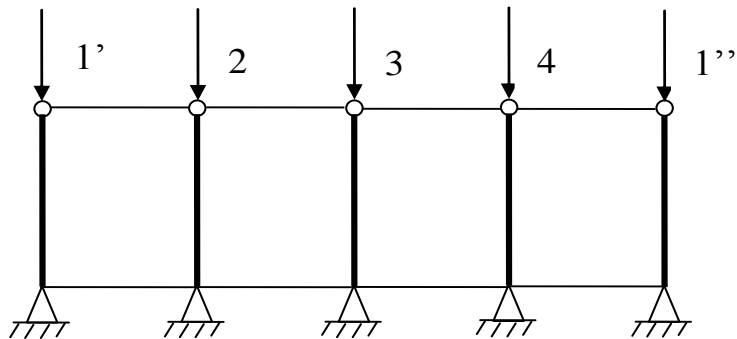


Рис. 8.13. Схема механічного навантаження секції плоского розгорнення

Застосуємо тепер еквівалентне перетворення, в основі якого наступна схема навантаження (рис. 8.14).

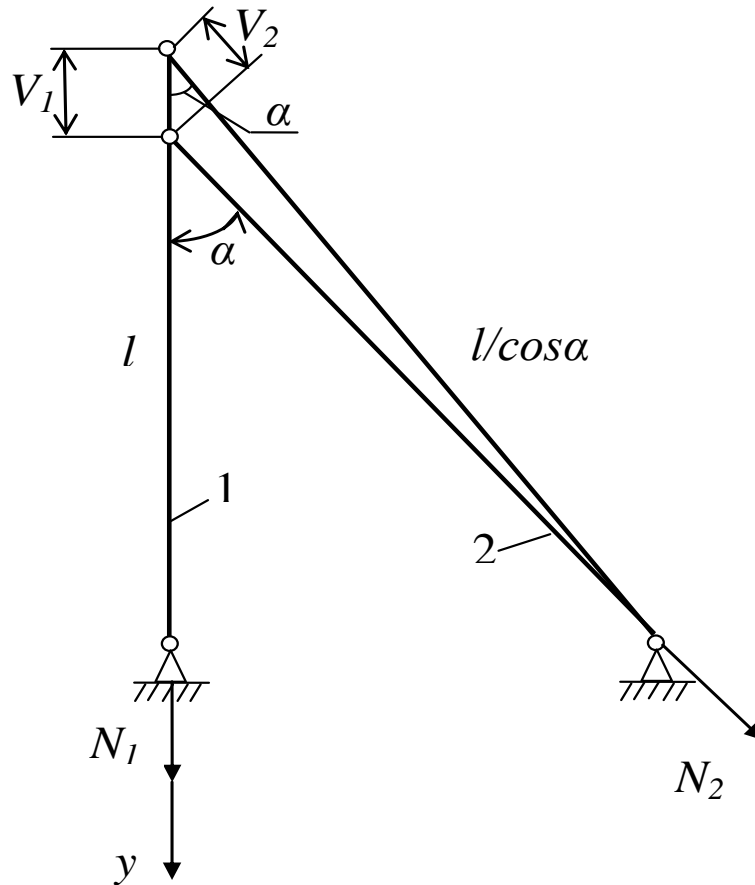


Рис. 8.14. Еквівалентна схема навантаження

Запишемо рівняння статички для цієї схеми:

$$\sum P_{iy} = 0; \quad (8.16)$$

$$-P + N_1 + N_2 \cos \alpha = 0; \quad (8.17)$$

$$N_1 + N_2 \cos \alpha = P, \quad (8.18)$$

а також рівняння переміщень її вузла:

$$V_1 = \frac{N_1 l}{EA_1}; \quad V_2 = V_1 \cos \alpha = \frac{N_2 l_2}{EA_2}; \quad (8.19)$$

$$\frac{N_2 \cdot \frac{l}{\cos \alpha}}{EA_2} = \frac{N_1 l}{EA_1} \cdot \cos \alpha; \quad (8.20)$$

$$N_1 = N_2 \frac{A_1}{A_2 \cos^2 \alpha}. \quad (8.21)$$

Вирішуючи спільно ці рівняння, одержимо:

$$N_2 \frac{A_1}{A_2 \cos^2 \alpha} + N_2 \cos \alpha = P; \quad (8.22)$$

$$N_2 = \frac{P}{\frac{A_1}{A_2 \cos^2 \alpha} + \cos \alpha} = \frac{P \cos^2 \alpha}{\frac{A_1}{A_2} + \cos^3 \alpha}; \quad (8.23)$$

$$N_1 = \frac{P \cos^2 \alpha}{\frac{A_1}{A_2} + \cos^3 \alpha} \cdot \frac{A_1}{A_2 \cos^2 \alpha} = \frac{P \cdot \frac{A_1}{A_2}}{\frac{A_1}{A_2} + \cos^3 \alpha}; \quad (8.24)$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{P}{A_1 + A_2 \cos^3 \alpha}; \quad (8.25)$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{P \cos^2 \alpha}{A_1 + A_2 \cos^3 \alpha}. \quad (8.26)$$

Цей розв'язок дозволяє еквівалентно замінити будь-який квадрат плоского розгорнення (рис. 8.15 *a*) на фігуру, представлену на рис. 8.15 *б*.

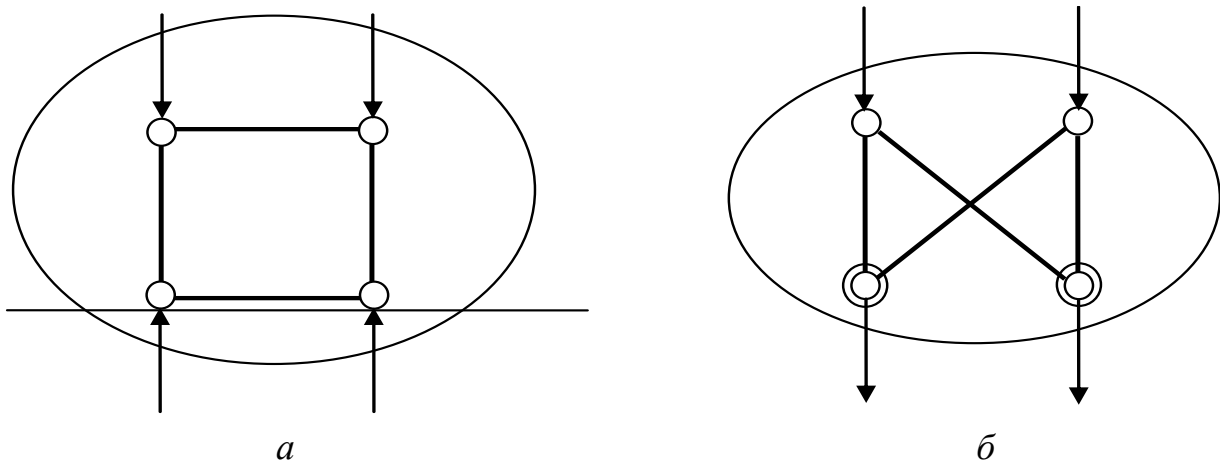


Рис. 8.15. Еквівалентна заміна елемента плоского розгорнення.

Еквівалентність заміни полягає в тому, що за допомогою рівнянь (8.22) – (8.26) можуть бути розраховані такі значення параметрів конструкції, відповідній до схеми на рис. 8.15 *б* (наприклад, перетин стрижнів), які дозволяють замінити будь-який квадрат на розгорненні (рис. 8.12) так, що по основних механічних характеристиках (напруження, переміщення) така заміна буде еквівалентною (рис. 8.16).

Застосувавши таку заміну до всіх елементів схеми, зображеної на рис. 8.13, одержимо наступну структуру (рис. 8.17), що має явну топологічну подібність із двошаровою нейронною мережею прямого поширення.

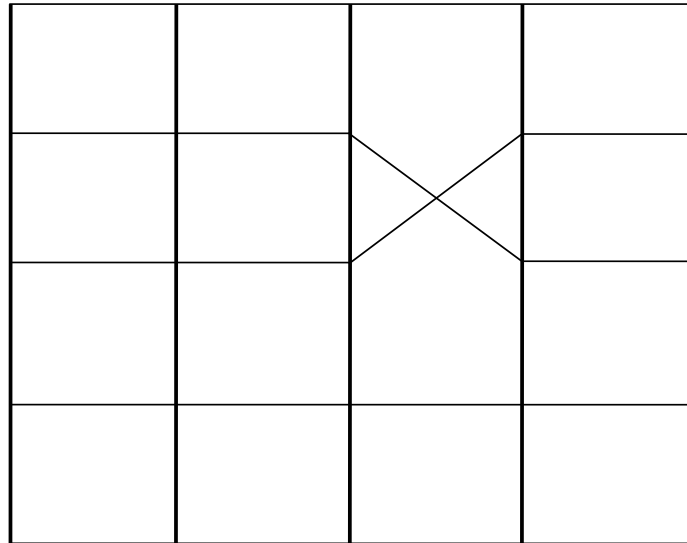


Рис. 8.16. Еквівалентна заміна одного з елементів механічної конструкції.

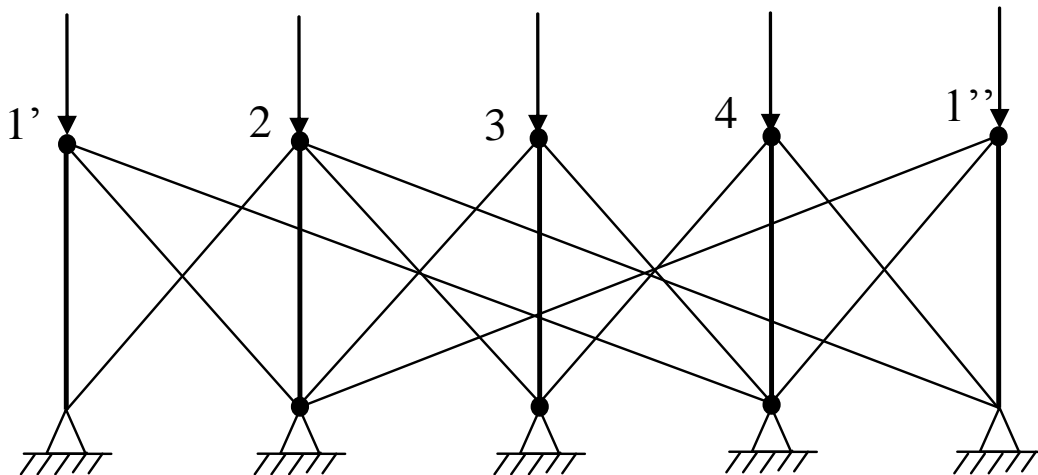


Рис. 8.17. Нейроподібна структура шару арматури після еквівалентної заміни

Іноді нейроподібність складної системи встановлюється тільки із частиною (фрагментом) будь-якої нейронної мережі, що різко розширює можливості методу. При цьому uszkodження «наносяться» тільки тим елементам мережі, які входять до фрагменту, – імовірність uszkodження елементів за межами фрагмента завжди дорівнює 0. У багатьох випадках моделювання підібрати топологічну подібність структури складної технічної системи лише із фрагментом будь-якої нейронної мережі виявляється простіше, ніж з повною мережею.

Тут можливі два випадки:

- топологічно подібний фрагмент нейронної мережі автономний (рис. 8.18);
- топологічно подібний фрагмент «пронизує» тіло нейронної мережі (рис. 8.19).

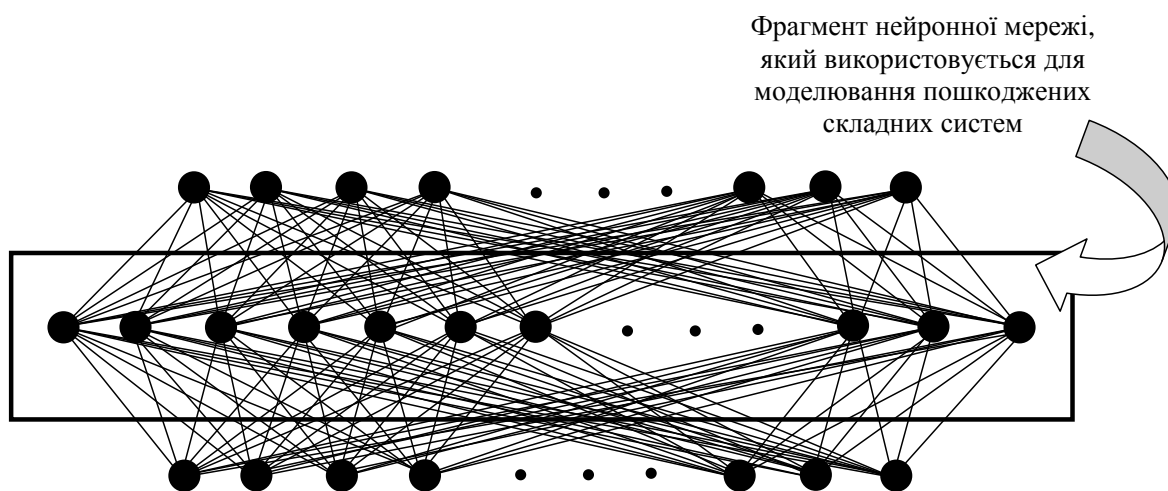


Рис. 8.18. Приклад автономного топологічно подібного фрагмента НМ.

При використанні цього прийому всі топологічні зміни під час моделювання вносяться тільки до подібного фрагменту, а нейронна мережа при цьому продовжує «працювати» цілком.

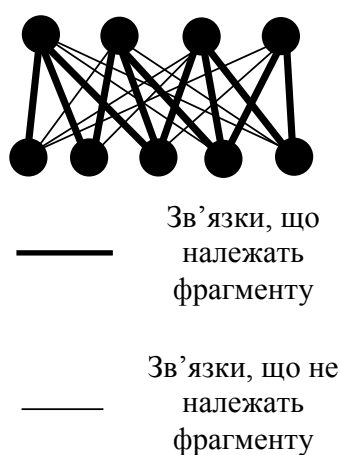


Рис. 8.19. Приклад «пронизуючого» топологічно подібного фрагмента НМ.

Важливою умовою застосовності такого прийому є виконання наступної вимоги:

***при повному видаленні фрагмента з навченої нейронної мережі її працездатність у всіх випадках повинна бути нульовою.***

Нехай варіанти конструкції генеруються САПР залізобетонних виробів. Нехай, також, вони відрізняються основними конструктивними параметрами виробу. Оскільки його зовнішні габаритні розміри задані конструкцією будинків або споруджень, які із цих виробів монтуються, у залізобетонній деталі це, найчастіше, параметри арматури: кількість, матеріал і розмір стрижнів, їх розташування щодо зовнішньої поверхні, а також величина попереднього напруження.

Кожний альтернативний варіант конструкції такого об'єкта інтерпретуєть-

ся окремо у вигляді його структури (набору елементів і зв'язків), а також параметрів елементів, після чого проводиться побудова та навчання топологічно подібної нейронної мережі.

При приведенні топології структури залізобетонного виробу до нейроподібної відповідним чином перераховуються параметри елементів. Залізобетонний виріб є гетерогенним середовищем, яке складається з п'яти компонентів:

- сталева арматури;
- гравій (щебінка);
- кварцевий пісок;
- цементна зв'язка;
- повітряні пори.

Залежно від експлуатаційних вимог до виробу визначаються всі види елементів, на які він розбивається, а також їх інтегральні (ефективні) властивості. Наприклад, якщо в основі можливої відмови виробу є його полонка, то розглядали два види елементів: бетонний і сталевий, якщо відмовою є низька газопроникність, то один, який складається із просторової сітки взаємозалежних пор, якщо низька теплоізоляція, – то тільки бетонний і т.п.

Результати моделювання можуть використовуватися для ідентифікації відмови та видачі рекомендацій з ремонту окремих елементів і системи в цілому. Ці рекомендації поширюються, по-перше, на строки проведення ремонту, по-друге, на конструктивні особливості об'єкта, які повинні забезпечити після ремонту необхідні експлуатаційні характеристики й, насамперед, ту ж відмовостійкість.

Приклад 8.6. Хай модель об'єкта проектування – залізобетонної балки – можна побудувати у вигляді тривимірного набору скінченних елементів у формі паралелепіпедів так, як це зображено на рис. 8.20.

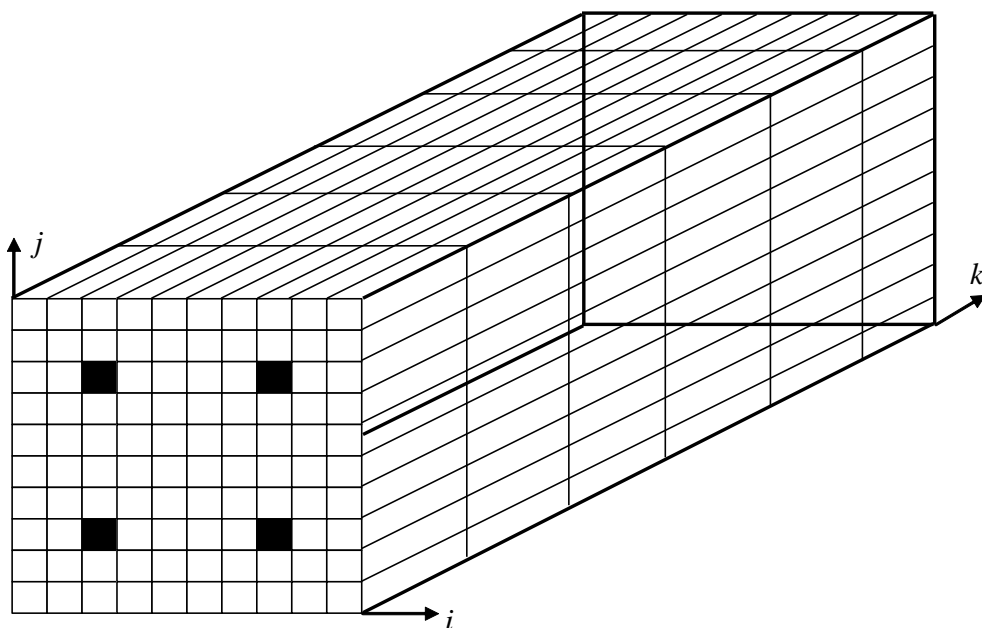


Рис. 8.20. Схема розподілу залізобетонної балки, що містить чотири елементи арматури, на об'ємні елементи

Альтернативні варіанти конструкції залізобетонної балки відрізнялися кількістю, розміром, матеріалом, і місцем розташування арматури, а також величиною її попереднього напруження:

- кількість стрижнів арматури (у моделі враховувалися тільки поздовжні, робочі стрижні): 4 або 8;
- розмір (діаметр) стрижнів арматури: 12, 14, 16, 18, 20 або 22 мм;
- матеріал стрижнів арматури: сталь Ст. 5 або 25 ГС;
- місце розташування арматури (товщина захисного шару бетону або, що те ж саме, глибина залягання стрижнів арматури): 34 або 40 мм.

Металоемність варіанта конструкції визначали як вміст металу в одному погонному метрі балки відповідно до розрахункової таблиці:

Номер профілю (номінальний діаметр стрижня), мм	Маса 1 м профілю, кг	Кількість метрів в 1 тн
12	0,888	1126,13
14	1,21	826,45
16	1,58	632,91
18	2,00	500,00
20	2,47	404,86
22	2,98	335,57

В проект закладено сталь гарячекатану для армування періодичного профілю у вигляді стрижнів з рівномірно розташованими на їхній поверхні під кутом до поздовжньої осі поперечними виступами (рифленням) для поліпшення зчеплення з бетоном. Залежно від механічних властивостей арматурну сталь розподіляють на класи А-I (А240), А-II (А300), А-III (А400), А-IV (А600), А-V (А800), А-VI (А1000). В прикладі використовували арматурну сталь класів А-II (А300) і А-III (А400):

Клас арматурної сталі	Діаметр профілю, мм	Марка сталі
А-II (А300)	12 – 22	Ст 5
А-III (А400)	12 – 22	25 ГС

Розглянемо перетин одного із шарів моделі балки уздовж осі  $k$ . У нашому випадку балка була оснащена арматурами із чотирьох (рис. 8.21) або восьми (рис. 8.22) симетрично розташованих сталевих прутів.

Як видно з рис. 8.21 і 8.22, залежно від конструктивного варіанта в перетинах, чотири або вісім елементів мають властивості відповідного металу арматури й, відповідно, дев'яносто шість або дев'яносто два – бетону.

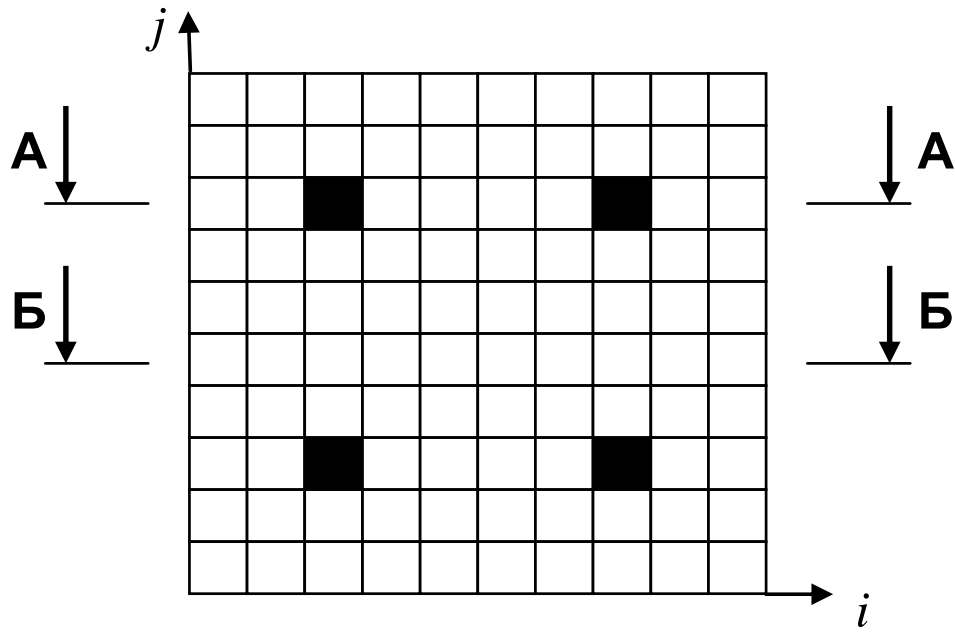
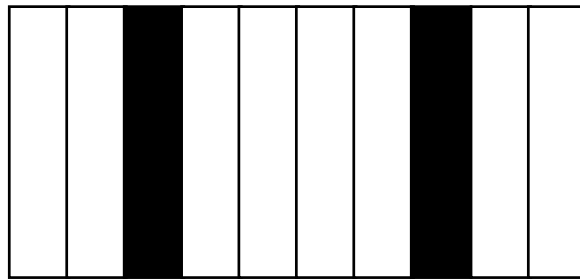
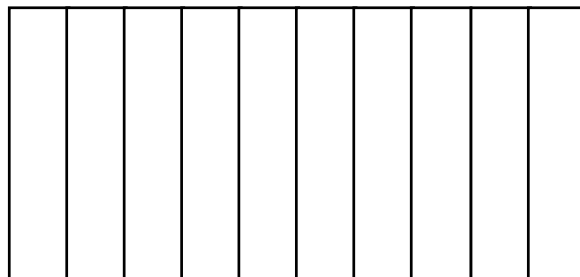


**А – А****Б – Б**

Рис. 8.21. Перетин залізобетонної балки, що містить чотири арматурні прутки, розділений на плоскі елементи:

-  – елемент, що моделює бетон;
-  – елемент, що моделює арматури



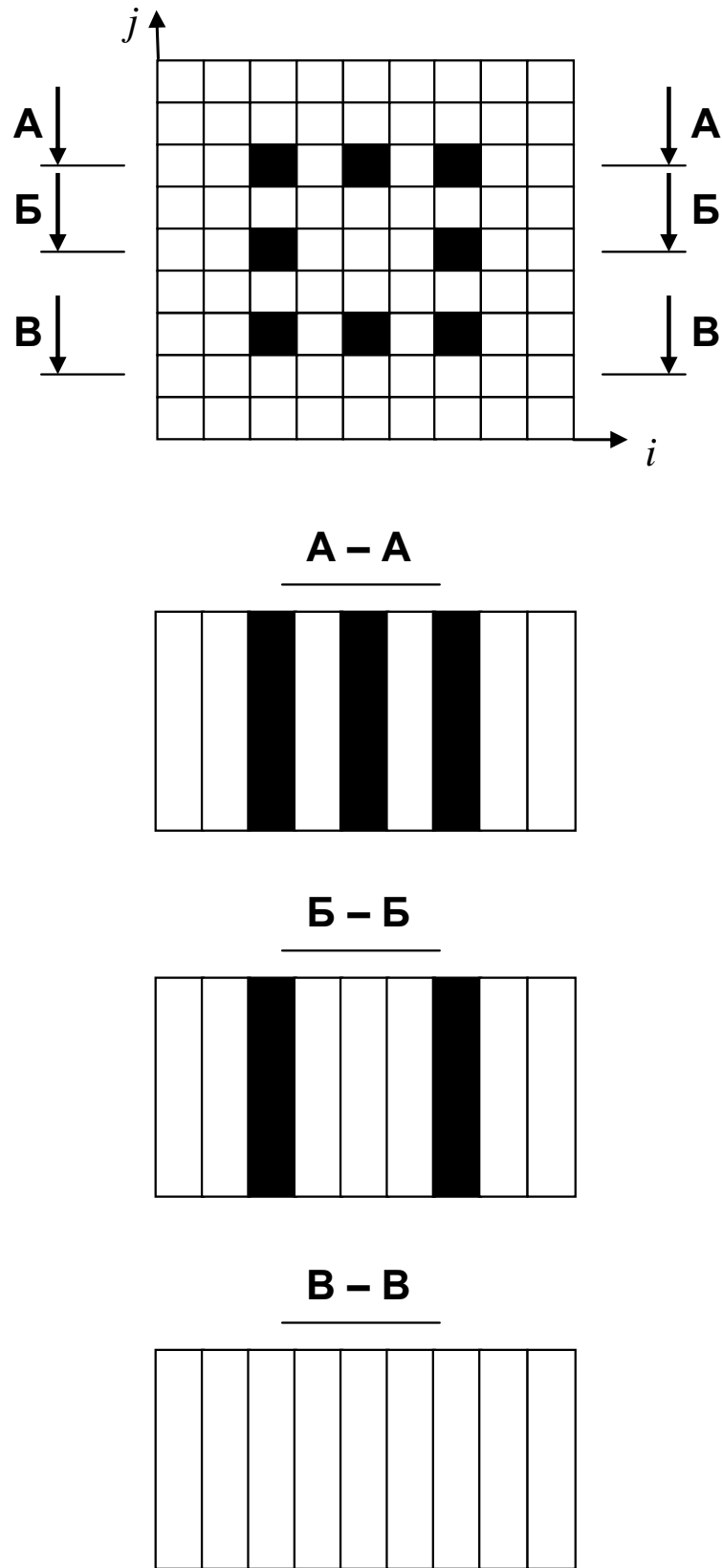




Рис. 8.22. Перетин залізобетонної балки, що містить вісім арматурних прутів, розділений на плоскі елементи:

-  – елемент, що моделює бетон;
-  – елемент, що моделює арматури

В моделі передбачалося також, що кожний її об'ємний елемент в процесі навантаження взаємодіє, незалежно від своїх механічних властивостей, із шістьма сусідніми елементами уздовж осей  $i$ ,  $j$  та  $k$  (див. схему на рис. 8.23).

Відповідний до схеми зв'язків об'ємних елементів залізобетонної балки, що враховуються, топологічно подібний її фрагмент нейронної мережі представлений на рис. 8.24.

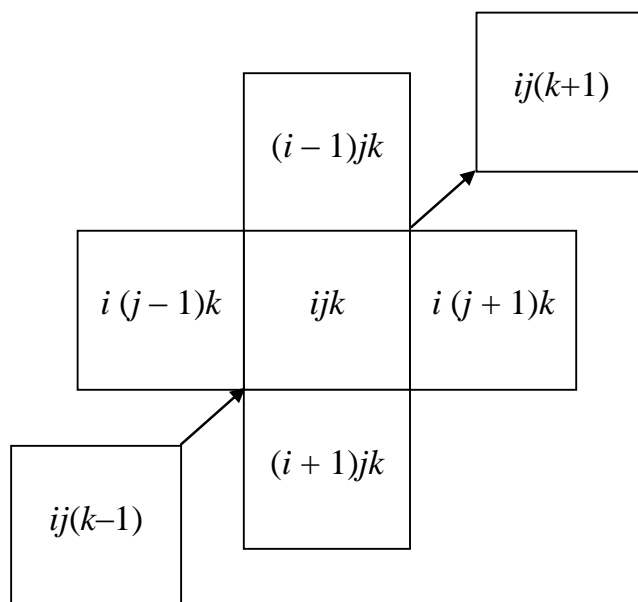


Рис. 8.23. Схема зв'язків, що враховуються, об'ємних елементів залізобетонної балки

Неповнозв'язану нейронну мережу прямого поширення, що містить  $k$  проміжних шарів, будували із фрагментів, зображених на рис. 8.24, так, як це показано на рис. 8.25.

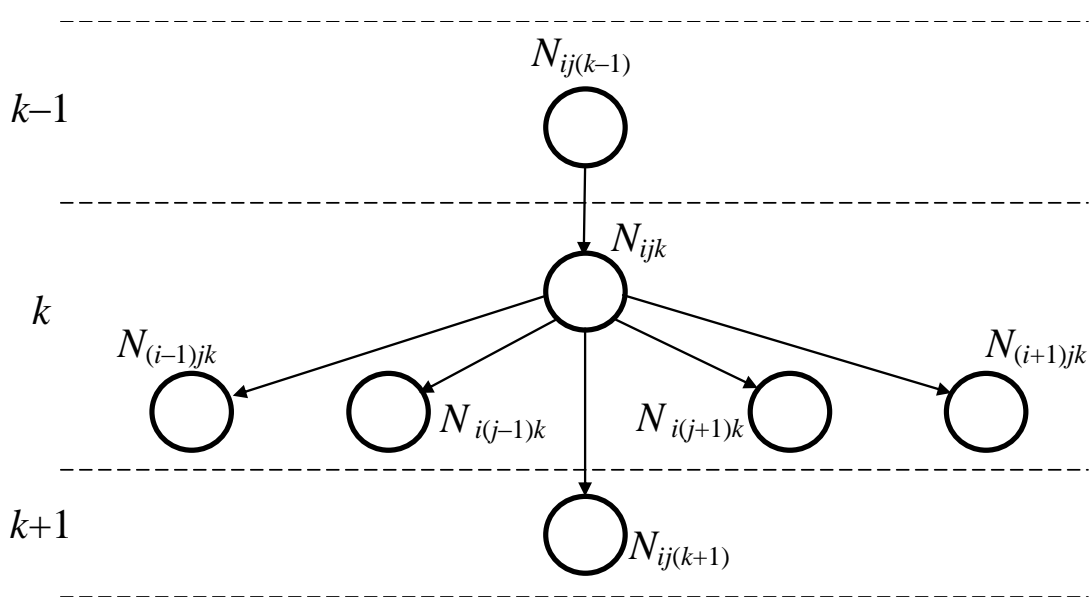


Рис. 8.24. Фрагмент нейронної мережі, топологічно подібний групі об'ємних елементів та зв'язків залізобетонної балки, зображеної на рис. 8.20

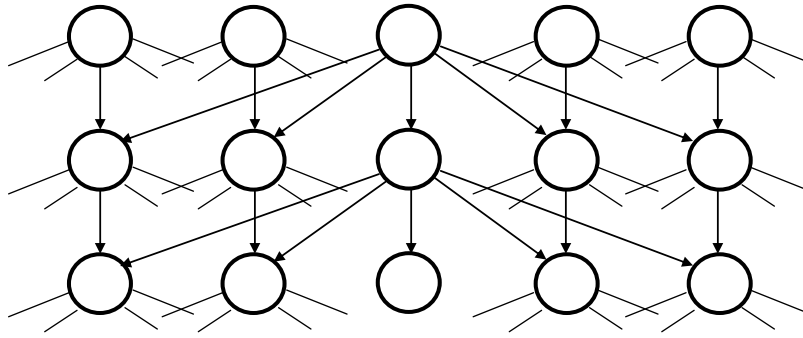


Рис. 8.25. Неповнозв'язана нейронна мережа, зібрана із фрагментів, представлених на рис. 8.23

## 8.8. Морфологічні моделі надійності об'єктів із резервованою структурою

### 8.8.1. Динаміка відновлюваних систем

Розглянемо моделювання надійності систем з відновленням, що мають резервовану структуру. На передньому плані стоїть динаміка таких систем.

Поведінка системи в часі описується стохастичним процесом  $\{Z(t), t \geq 0\}$ , де  $Z(t)$  означає стан системи в момент  $t$  (загалом кажучи, випадковий). Множина  $\mathcal{Z}$  можливих станів системи називається *простором станів* для процесу  $\{Z(t)\}$ , який є *фазовим процесом* розглянутої системи. Найчастіше будемо припускати, що множина  $\mathcal{Z}$  скінченна і її можна представити у вигляді  $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_+ \cup \mathcal{Z}_-$ , де  $\mathcal{Z}_+ \cap \mathcal{Z}_- = \emptyset$ , причому  $\mathcal{Z}_+$  ( $\mathcal{Z}_-$ ) означає множину *станів працездатності* (*відмови*). Так, для простої відновлюваної системи  $\mathcal{Z} = \{0, 1\}$ ,  $\mathcal{Z}_+ = \{1\}$ ,  $\mathcal{Z}_- = \{0\}$ . Для монотонної системи з  $n$  елементами та структурною функцією  $\varphi$   $\mathcal{Z}$  є множиною  $n$ -мірних векторів  $z$  з бінарними компонентами, а  $\mathcal{Z}_+ = \{z, z \in \mathcal{Z}, \varphi(z) = 1\}$ .

Якщо система прийняла стан  $z$  з множини  $\mathcal{Z}$ , то вона проводить в ньому деякий час, загалом кажучи, випадковий, а потім, внаслідок відмови або закінчення відновлення будь-якого елемента, «стрибкоподібно» переходить у новий стан. Таким чином, усі *реалізації* фазового процесу  $\{Z(t)\}$  є *кусочно-постійними*.

Розглянемо теоретичні основи аналізу надійності структурованих систем. Для їх аналізу використовуються як традиційні моделі, такі, як марковські і напівмарковські процеси, так й більш сучасні – випадкові точкові процеси, процес з вкладенням точкових процесів та, особливо, напіврегенеруючі процеси.

Випадкові точкові процеси розглядають як процеси, призначені для опису динаміки відмов. Формулюються різні варіанти пуассонівської граничної теореми для композиції, що розріджують точкові процеси. Ця гранична теорема пояснює той факт, що процес, породжений моментами відмов системи з багатьма високонадійними елементами, добре апроксимується пуассонівським

процесом.

Центральне твердження полягає в описі зв'язку між стаціонарними позначеними точковими процесами і стаціонарними послідовностями відповідного виду, або, інакше кажучи, між стаціонарними та синхронними позначеними точковими процесами.

Ясно, що стаціонарний і відповідний синхронний позначений точковий процес описують динаміку однієї й тієї ж системи в стаціонарному режимі, хоча й з різних точок зору. Вже тут чітко видно, що точкові та позначені точкові процеси є зручним узагальненням процесів відновлення і марковських процесів, які застосовуються тоді, коли відсутня незалежність.

Наразі розглядають винятково важливий для теорії надійності клас процесів із вкладеним точковим процесом. Це поняття безпосередньо пов'язане з поняттям позначеного точкового процесу. Зокрема, у цей клас входять такі типи стохастичних процесів: напівмарковські, стрибкоподібні марковські процеси, напіврегенеруючі процеси, що і дозволяє їх розглядати з однакових позицій.

Введемо деякі позначення та визначення.

Нехай  $X_{\mathfrak{A}}$  – час до першої відмови системи, початковий стан якої описується подією  $\mathfrak{A}$ , і  $F_{\mathfrak{A}}(t)$  – функція розподілу  $X_{\mathfrak{A}}$ . Якщо  $\{Z(t)\}$  – фазовий процес із розподілом  $P$ , то

$$F_{\mathfrak{A}}(t) = P(\inf\{u: Z(u) \in \mathfrak{Z}_-\} \leq t | Z(0) \in \mathfrak{A}) \quad (8.27)$$

Як правило, нас цікавить випадок  $\mathfrak{A} = \{0\}$ , де  $0 \in \mathfrak{Z}_+$  – стан, в якому «усі елементи системи в момент 0 нові».

Для того, щоб визначити стаціонарні характеристики надійності системи, вважаємо, що вона перебуває в стаціонарному режимі вже в момент 0 (тобто працює, починаючи з  $-\infty$ ). Як відомо, існують дві моделі для опису динаміки такої системи. В якості першої розглянемо синхронний процес  $\{Z(t)\}, \{T_n\}, T_n, n > 0$ , що задається умовою

$$Z(T_n - 0) \neq Z(T_n + 0) \in \mathfrak{Z}_+$$

або навіть

$$Z(T_n - 0) \in \mathfrak{Z}_-, \quad Z(T_n + 0) \in \mathfrak{Z}_+ \quad (8.28)$$

Нехай  $P$  – розподіл такого процесу. Довжина кожного циклу

$$L_n = X_n + Y_n,$$

де  $X_n$  – *наробіток*, а  $Y_n$  – *тривалість відмови* в  $n$ -му циклі.

З умови (8.27) випливає  $P(Y_n \geq 0) = 1$ , у той час як з умови (8.28) випливає

$P(Y_n > 0) = 1$ . Оскільки цикли  $\{Z_n(t), 0 \leq t < L_n\}$  утворюють стаціонарну послідовність, можна вилючити індекс  $n$  і позначити через  $L, X$  і  $Y$  «типову» довжину циклу, наробіток і тривалість відмови за цикл.

Нехай  $F(t) = P(X \leq t)$  і  $G(t) = P(Y \leq t)$  – відповідні функції розподілу. У літературі з теорії надійності для величини  $X$  прийнята назва «час між відмовами системи». Очевидно,

$$X = \begin{cases} \inf \{u : Z(u) \in \mathfrak{Z}_-\}, & \text{якщо } Y > 0; \\ L & \text{в протилежному випадку.} \end{cases} \quad (8.29)$$

Математичні очікування  $E_P(X)$  і  $EP(Y)$  називаються відповідно *середнім часом між відмовами системи* та *середнім часом відновлення*. У випадку  $P(Y = 0) > 0$  ці назви для  $X$  і  $E_P(X)$  не зовсім коректні – маються на увазі фактичний і середній наробіток за цикл у стаціонарному режимі.

Нехай тепер  $[\{\tilde{Z}(t)\}, \{\tilde{T}_n\}]$  – стаціонарні, що відповідає процесу  $[\{Z(t)\}, \{T_n\}]$ , який має розподіл  $\tilde{P}$ . Нагадаємо, що процес  $[\{\tilde{Z}(t)\}, \{\tilde{T}_n\}]$  описує динаміку тієї ж системи в стаціонарному режимі, однак початок відліку часу відповідає довільному моменту. Тому ймовірність

$$K = \tilde{P}(\tilde{Z}(0) \in \mathfrak{Z}_+) \quad (8.30)$$

називають (*стаціонарним*) *коефіцієнтом готовності* системи. Якщо за модель розглянутої системи прийняти синхронний об'єкт

$$K = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t P(Z(u) \in \mathfrak{Z}_+) du, \quad (8.31)$$

то величина  $K$  збігається з *усередненим за періодом коефіцієнтом готовності*. Для систем, які можна моделювати за допомогою напіврегенеруючих процесів, границя (8.30) має місце для будь-яких початкових умов, і  $K$  є звичайним коефіцієнтом готовності.

*Стаціонарний коефіцієнт оперативної готовності* визначається як

$$Kx = \tilde{P}(\tilde{Z}(u) \in \mathfrak{Z}_+, 0 \leq u \leq x), \quad x \geq 0. \quad (8.32)$$

Якщо ввести функцію розподілу

$$\tilde{F}(t) = \tilde{P}(\inf\{u : \tilde{Z}(u) \in \mathfrak{Z}_+\} \leq t | \tilde{Z}(0) \in \mathfrak{Z}_+), \quad (8.33)$$

то отримаємо:

$$K_x = K(1 - \tilde{F}(x)) = K \frac{1}{E(x)} \int_x^\infty \bar{F}(u) du. \quad (8.34)$$

Таким чином,  $\tilde{F}(t)=F_R(t)$ . Випадкову величину  $XR$  з функцією розподілу  $FR(t)$  можна назвати *залишковим наробітком* системи, яка до початку спостереження, скажемо до моменту 0, справна.

У літературі  $X$  називають наробітком системи в стаціонарному режимі за умови, що вона справна в момент 0.

### 8.8.2. Моделювання працездатності в міру внесення пошкоджень в структуру

Імовірність відмови об'єктів із надлишковою структурою може бути визначена тільки оціночно за допомогою багаторазового експерименту, тобто фактично мова йде про її статистичну оцінку. Така статистична оцінка виконувалася при дотриманні наступних умов.

1. Генеруються альтернативні варіанти об'єктів.
2. Створюється робоча схема кожного варіанта.
3. Створюється структура об'єктів.
4. Вибирається група ушкоджуваних елементів системи: група, що складається з  $N_B$  вузлів, група, що складається з  $N_3$  зв'язків або сполучена група –  $(N_B + N_3)$  вузлів і зв'язків. «Ушкодженням» зв'язку вважається його видалення із системи, а «ушкодженням» вузла – видалення всіх зв'язків, що примикають до нього.
5. Призначається кількість експериментів  $K_n$ , необхідних для адекватної кількісної статистичної оцінки ймовірності відмови системи. Для достовірної оцінки необхідно, щоб виконувалося співвідношення:  $K_n \geq 100$ .
6. В процесі статистичної оцінки кількість елементів «що ушкоджуються»: вузлів  $n_B$  і (або) зв'язків  $n_3$  групи пробігає інтервал від 0 до  $N$  (де  $N = N_B$ , або  $N = N_3$ , або  $N = N_B + N_3$ ), відповідно до обраної групи, причому на кожній ітерації інтервалу виконується  $K_n$  експериментів.
7. На кожній ітерації інтервалу в початково неушкоджену топологію системи вноситься, відповідно,  $n = n_B$ , або  $n = n_3$ , або  $n = n_B + n_3$  «ушкоджень».
8. Наприкінці кожної ітерації інтервалу «ушкоджена» система «навантажується» стандартним навантаженням і визначається її працездатність у цих умовах. «Навантаження» визначається видом випробовуваної системи та стандартними вимогами, які висуваються до її експлуатації.
9. Працездатність системи визначається стандартними вимогами, що висуваються до результатів її функціонування. Наприклад, механічна конструкція вважається працездатною, якщо в жодній її точці не перевищені допуски по напруженнях і деформації. Якщо ні, – реєструється відмова конструкції. Прикладом працездатності нейронної мережі, навченої розпізнавати образи, є безпомилкове розпізнавання.
10. Наприкінці кожної ітерації інтервалу проводяться розрахунки статистичної оцінки ймовірності відмови системи  $P_n$  при  $n$  ушкодженнях за формулою:

$$P_n = \frac{k_n}{K_n}, \quad (8.35)$$

де  $k_n$  – кількість зареєстрованих відмов.

Очевидно, що оцінка ймовірності  $P_n$  суттєво залежить від  $n$ , змінюючи своє значення від 0 до 1 при пробіганні  $n$  від 0 до  $N$ .

Дослідження працездатності механічних конструкцій з регулярною структурою можна використовувати, наприклад, за допомогою програми *SCAD*, в середовищі якої можливо побудувати модель рами у вигляді регулярної нейроподібної мережі, схема якої представлена на рис. 8.26. Рама являє собою три паралельно розташовані «шари» вузлів, з'єднаних зв'язками-стрижнями так, що утворюється повнозв'язна структура, топологічно відповідна повнозв'язній тришаровій нейронній мережі. У першому «шарі» рами міститься 28 вузлів, у другому – 10, у третьому – 2. Таким чином, у конструкції рами міститься  $N_B = 40$  вузлів і  $N_3 = 28 \times 10 + 10 \times 2 = 300$  елементів зв'язку між ними. Загальна кількість місць можливого пошкодження:  $N_e = N_B + N_3 = 340$ .

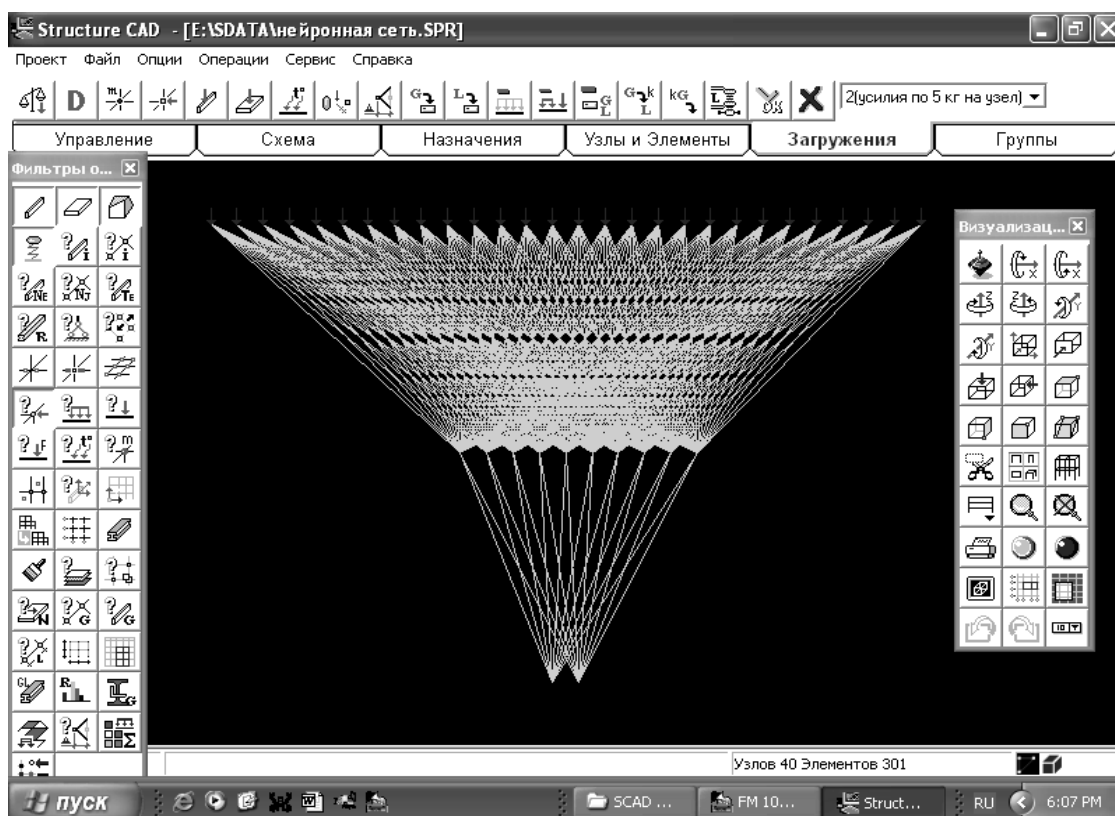


Рис. 8.26. Схема механічної конструкції – рами у вигляді регулярної нейроподібної мережі

Далі побудована рама навантажується зверху рівномірно таким чином, щоб при заданих геометричних характеристиках і властивостях матеріалу стрижнів напруження та деформації в ній в жодній точці не перевищували допустимі значення (рис. 8.27).

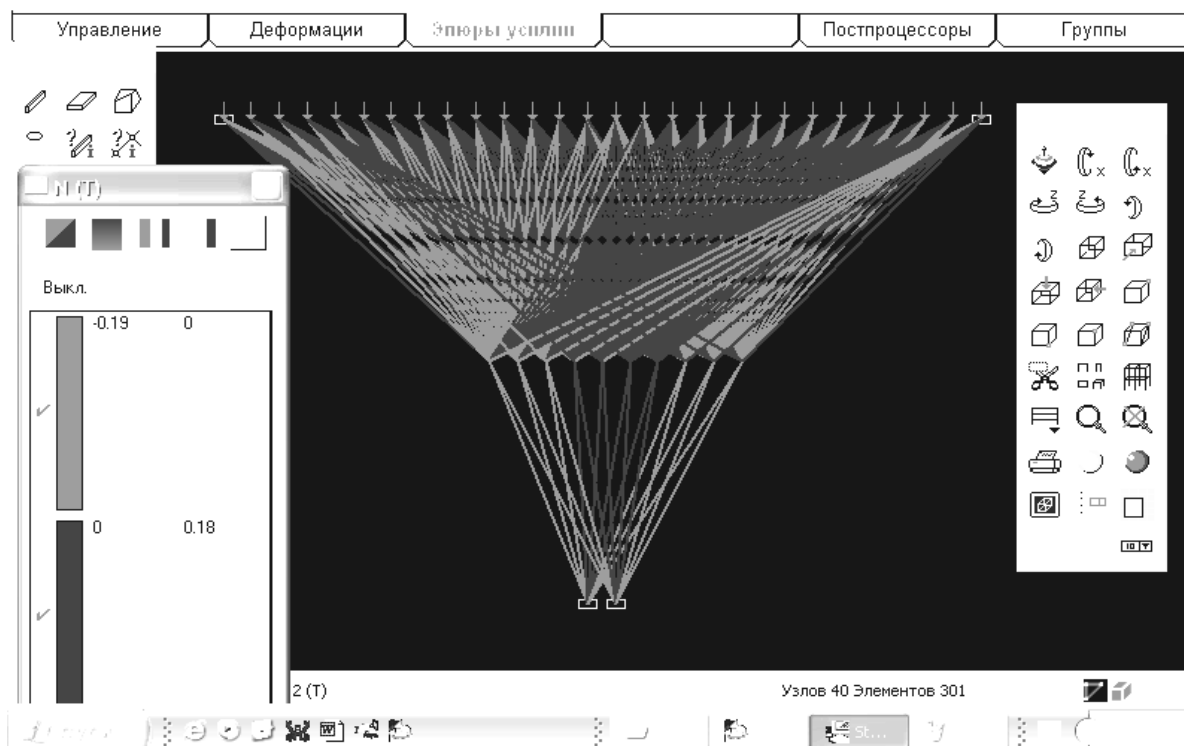


Рис. 8.27. Схема вікна, що демонструє зовнішнє механічне навантаження рами

Алгоритм однієї ітерації комп'ютерного моделювання механічних ушкоджень в рамі виглядає таким чином.

1. Вибирається група об'єктів, що ушкоджуються: група вузлів або група зв'язків. «Ушкодженням» зв'язку вважається його видалення з конструкції, а «ушкодженням» вузла – видалення всіх зв'язків, що примикають до нього.

2. Вибирається кількість ( $n_y$  або  $n_c$ ) об'єктів, що ушкоджуються на даній ітерації з відповідної групи, причому  $n_y < N_y = 40$ ;  $n_c < N_c = 300$ .

3. До конструкції рами вноситься  $n_y$  або  $n_c$  «ушкоджень», причому, які саме елементи «ушкоджуються», визначається випадковим чином (рис. 8.28).

4. «Ушкоджена» рама навантажується так само, як і вихідна, і запускається підпрограма програмного комплексу SCAD, що виконує розрахунки НДС конструкції.

5. Рама з «ушкодженнями» вважається працездатною, якщо в жодній її точці не перевищені допуски по напруженнях і деформаціях. Якщо перевищені, то реєструється відмова конструкції.

Для побудови залежностей  $P_{nv} = f(n_v)$  і  $P_{nz} = f(n_z)$  задавалися значеннями  $K_{nv} = K_{nz} = 100$  і виконували по 100 комп'ютерних експериментів для кожного  $n_v$  з діапазону 0 – 40 і для кожного п'ятого  $n_z$  із діапазону 0 – 300. Експерименти відрізнялися один від другого іншим (випадковим) розташуванням  $n_v$  ушкоджень вузлів серед повної множини  $N_v$  вузлів рами й  $n_z$  ушкоджень зв'язків серед повної множини  $N_z$  зв'язків рами. В результаті для відповідного  $n$  одержували елемент діаграми (рис. 8.29):



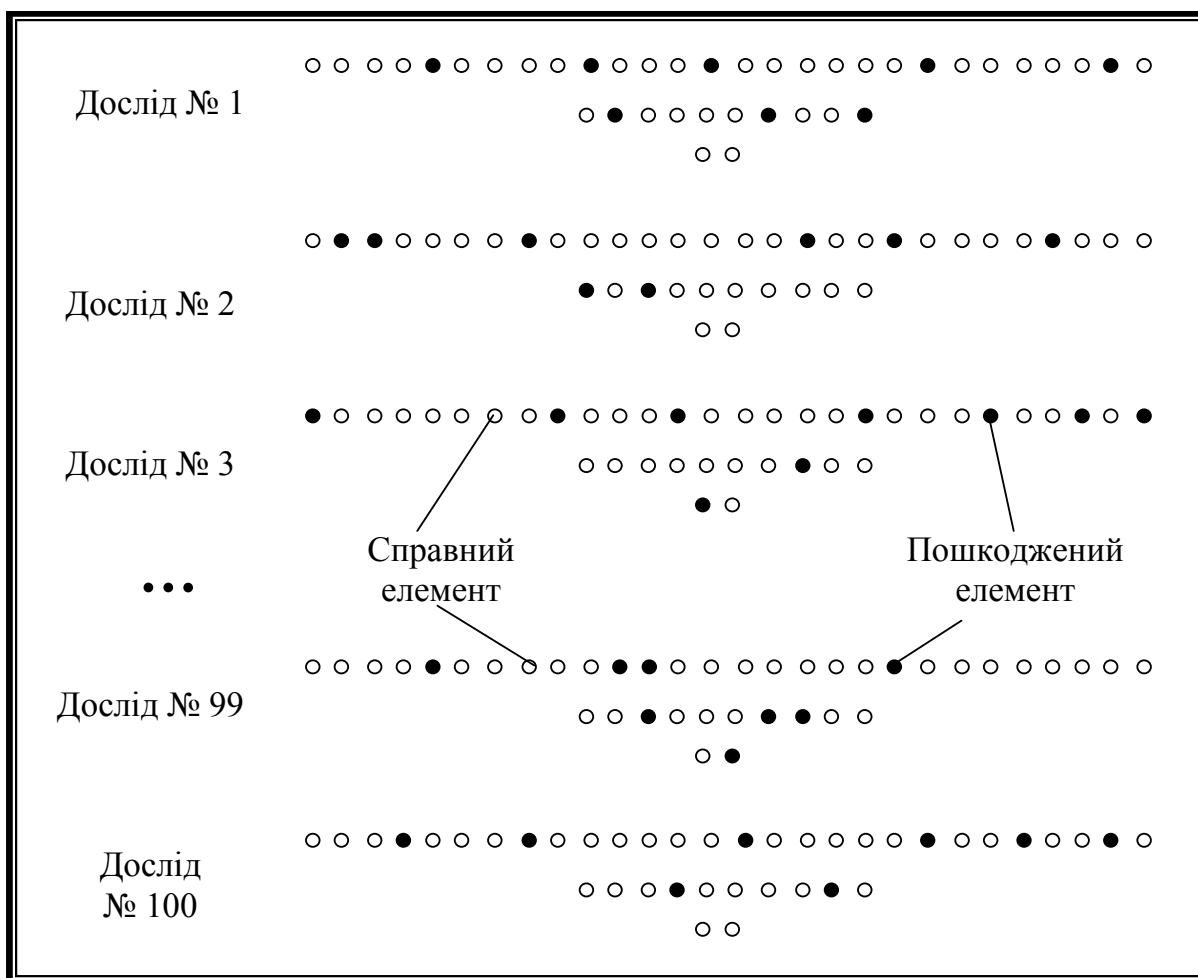


Рис. 8.28. Схема експерименту по визначенню ймовірності відмови при  $K_{nв} = 100$ ,  $n_в = 8$ ,  $N_в = 40$

$$P_n = \frac{k_n}{K_n}. \quad (8.36)$$

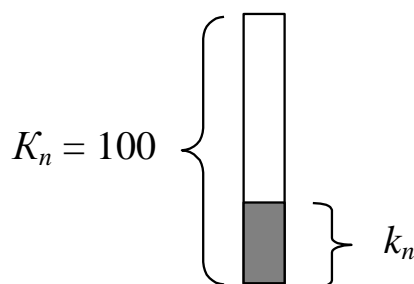


Рис. 8.29. Елемент діаграми, що показує частку відмов  $k_n$  у загальній кількості випробувань  $K_n = 100$  при  $n$  «ушкоджених» елементах

Переходячи до відношення  $P_n = k_n/K_n = 0,01k_n$  і розташовуючи подібні елементи уздовж осі  $n$ , одержуємо гістограму (рис. 8.30), згладжуючи яку можна побудувати вигляд залежностей  $P_{nв} = f(n_в)$  або  $P_{nз} = f(n_з)$ .

Результати дослідження «ушкодженої» механічної конструкції з регулярною структурою у вигляді залежності  $P_n = f(n)$  можна використовувати для подальшого вивчення структурної подоби окремих ізоморфних об'єктів.

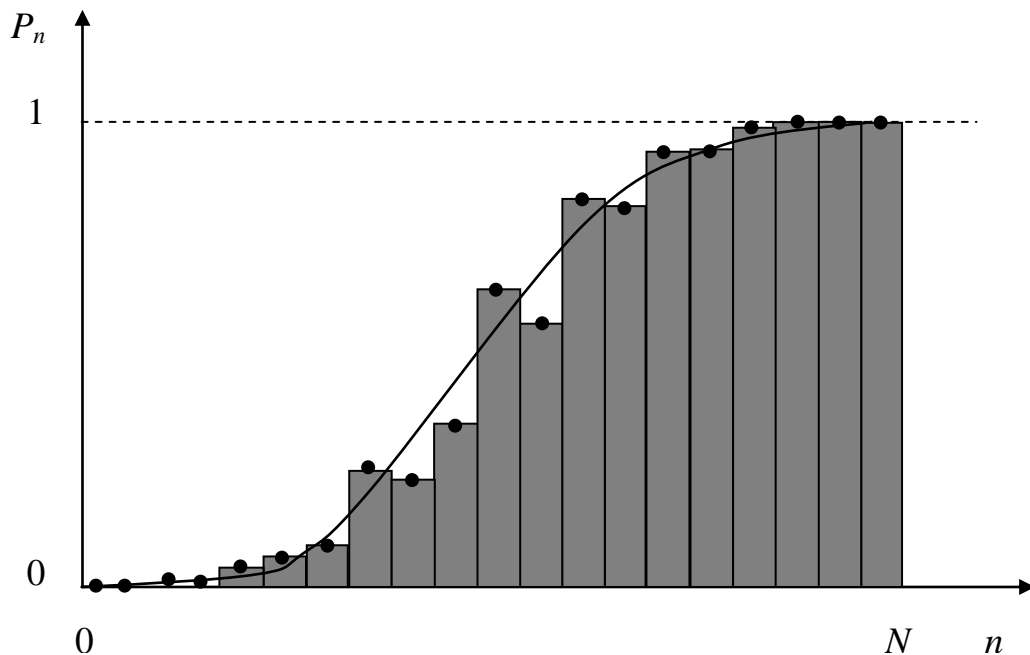


Рис. 8.30. Схема до побудови залежності  $P_n = f(n)$

Таким чином,  $K_n$  експериментів на кожній ітерації дають одну точку на графіку  $P_n(n)$ , а всі ітерації – деяку «хмару» точок, яка характеризує «поведінку» системи при різних ушкодженнях (рис. 8.31), тобто її **статистичну експериментальну відмовостійкість (СЕВ)**.

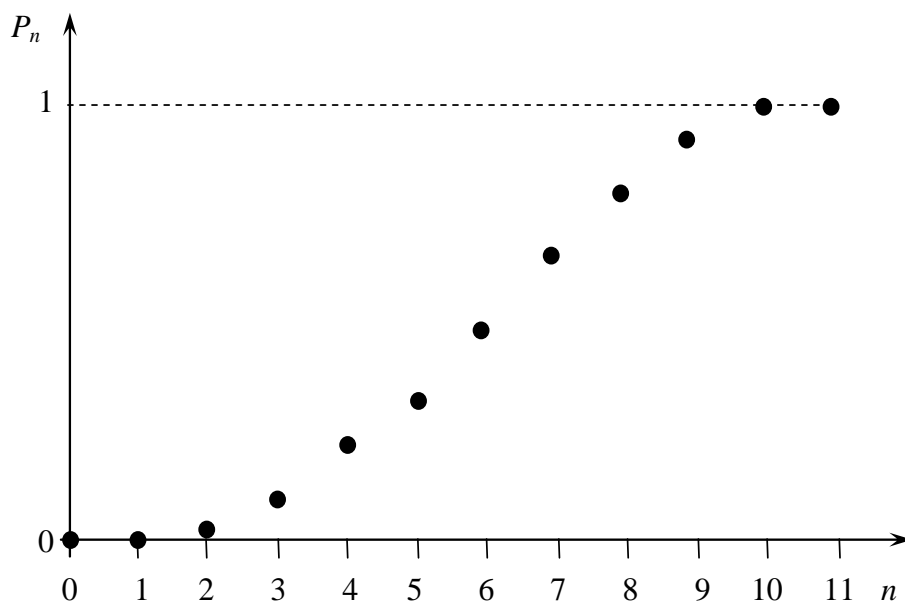


Рис. 8.31. Приклад «хмари» точок, що характеризує «поведінку» системи при різних ушкодженнях ( $N = 11$ )

Вигляд «хмари» для відмовостійких об'єктів із надлишковою структурою завжди носить  $S$ -образний характер, оскільки при малих  $n$  такі системи не повинні відмовляти ( $P_n = 0$ ), а при великих  $n$  (близьких до  $N$ ) – будь-яка система 100 % непрацездатна ( $P_n = 1$ ).

Таким чином, для кожного варіанта об'єктів вдається одержати характеристику СЕВ у вигляді  $S$ -образної «хмари» точок.

Порівнювати системи між собою по такій інформації важко, тому результати оцінки потребують подальшої математичної обробки для одержання порівнянних результатів.

Алгоритм статистичної оцінки відмовостійкості об'єктів із надлишковою структурою виглядає таким чином (рис. 8.32), а приклад наведено на рис. 8.33.

На рис. 8.33 позначені:  $p$  – статистична оцінка ймовірності відмови системи;  $n$  – кількість елементів, що відмовили, і (або) зв'язків між ними;  $n_1$  – максимальна кількість елементів, що відмовили, і (або) зв'язків, при якій ймовірність відмови дорівнює нулю;  $n_2$  – мінімальна кількість елементів, що відмовили, і (або) зв'язків, при якій ймовірність відмови дорівнює одиниці. Як видно з рисунку, сімейство експериментальних точок може бути умовно розбите на три зони:

– зона  $I$ :  $0 \leq n \leq n_1$ ;  $p = 0$  – ушкоджень не більше, ніж  $n_1$ , система абсолютно працездатна;

– зона  $II$ :  $n_1 < n < n_2$ ;  $0 < p < 1$  – ушкоджень більше, ніж  $n_1$ , але менше, ніж  $n_2$ , система зберігає працездатність лише при деякому наборі цих ушкоджень;

– зона  $III$ :  $n_2 \leq n$ ;  $p = 1$  – ушкоджень більше, ніж  $n_2 - 1$ , система непрацездатна при будь-якому їхньому наборі.

Очевидно, що відмовостійкість системи залежить від  $n_1$  і  $n_2$ . Вона тим вище, чим довше зберігається нульова ймовірність відмови (тобто, чим більше  $n_1$ ), і чим більший нахил до осі абсцис має пряма, яка апроксимує експериментальні точки в зоні  $II$  (тобто, чим більше  $n_2 - n_1$ ).

Залежно від наявності та довжини уздовж осі  $n$  цих зон можна класифікувати чотири типи відмовостійкості системи (табл. 8.2).

Схеми типів відмовостійкості, наведені в табл. 8.2, для наочності містять умовну апроксимацію експериментальних точок прямими.

Перший тип за своїми показниками відповідає абсолютній невідмовостійкій і ненадійній системі, перше ж будь-яке ушкодження будь-якого елемента (або зв'язку) якої призводить до відмови. Природно, така система не потребує критерію оцінки відмовостійкості.

Другий тип відповідає системі із сумнівною відмовостійкістю, оскільки перше ж таке ушкодження може призвести до відмови. Використаємо для критерію відмовостійкості в системах другого типу логарифмічний показник виду

$$K_2 = - \sum_{i=n_1+1}^{n_2-1} \log_2 p_i . \quad (8.37)$$

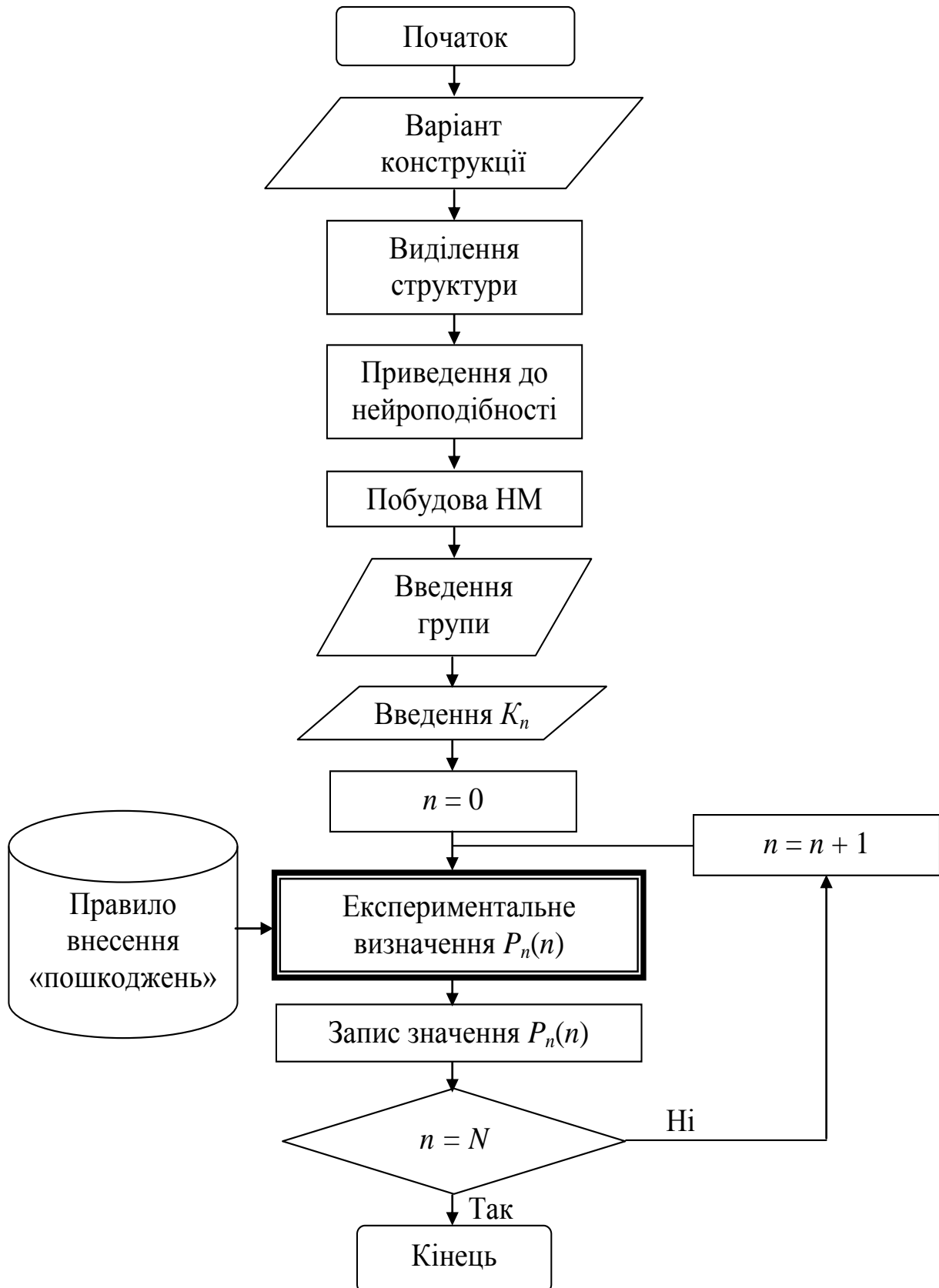


Рис. 8.32. Блок схема алгоритму оцінки статистичної експериментальної відмовостійкості ОІНС

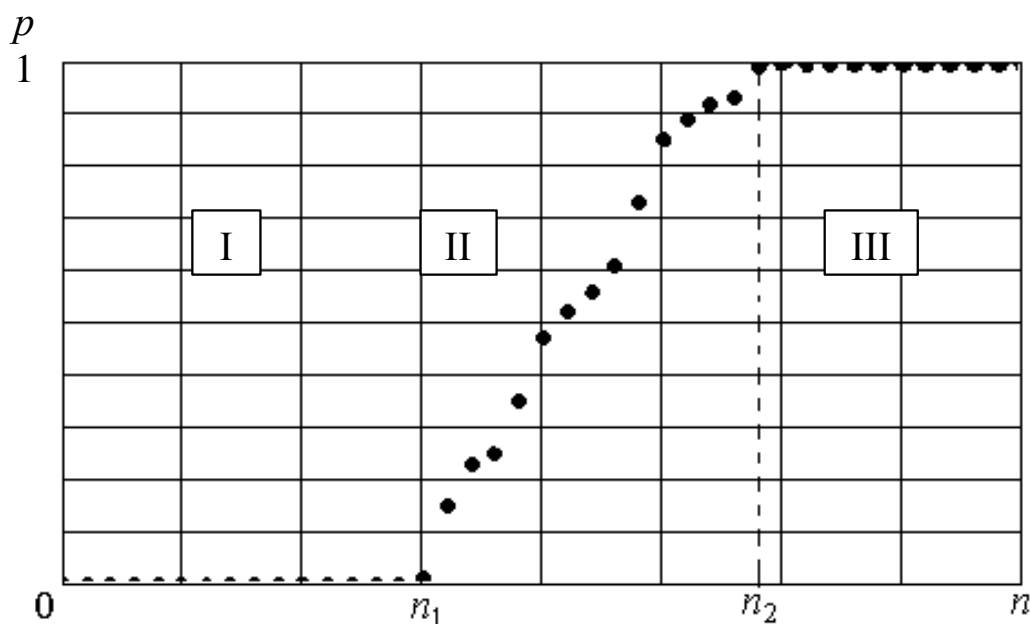


Рис. 8.33. Результати експериментальної статистичної оцінки ймовірності відмови складної технічної системи

Третій тип відмовостійкості також є сумнівним з погляду експлуатаційної надійності системи, оскільки після деякої кількості ушкоджень ймовірність відмови перетворюється з 0 в 1. Однак він дозволяє ввести в практику оцінки відмовостійкості такий логарифмічний критерій:

$$K_3 = \log_2 n_1. \quad (8.38)$$

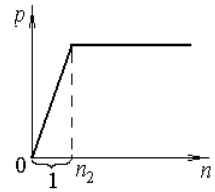
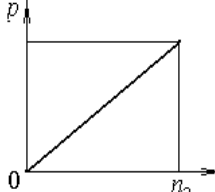
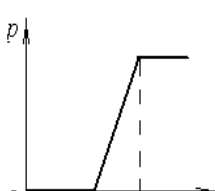
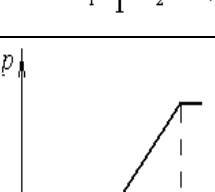
Нарешті, для четвертого типу відмовостійкості в якості критерію останньої рекомендується добуток виразів (8.37) та (8.38):

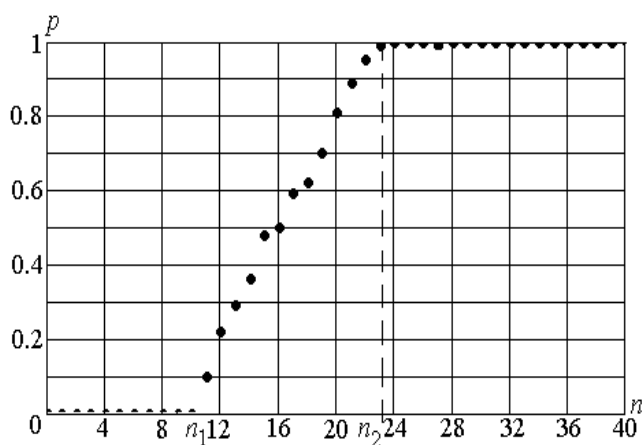
$$K_4 = K_2 \cdot K_3 = - \sum_{i=1}^{n_2-1} \log_2 p_i \cdot \log_2 n_1, \quad (8.39)$$

оскільки схема цього типу (див. табл. 8.2) містить ділянки, характерні для типів 2 та 3. Це ще раз підтверджує той факт, що при порівнянні відмовостійкості декількох систем перевагу варто віддавати тій, в якій більше і величина  $n_1$  і величина  $(n_2 - n_1)$ .

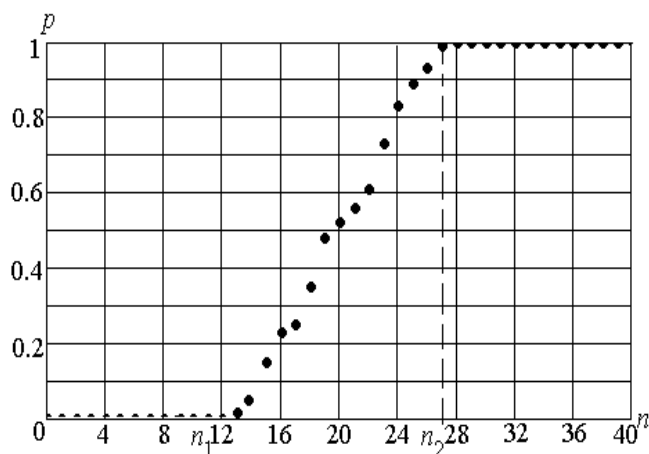
Приклад 8.7. Нехай в результаті експериментальної статистичної оцінки ймовірності відмови для кожної з двох різних за конструкцією, але функціонально однакових систем отримані сорок пар значень  $(n, p)$  (точки на рис. 8.34 а, б).

Класифікація типів відмовостійкості складних систем

№	Тип відмовостійкості	Схема	Значення границь зон	Характеристика
1	Абсолютно невідмовостійка		$n_1 = 0$ $n_2 = 1$	Перше ж будь-яке ушкодження призводить до відмови
2	Відмовостійкість пропорційна ймовірності $p$		$n_1 = 0$ $n_2 > 1$	Негарантована відмовостійкість при $n > 0$
3	Відмовостійкість залежить від $n_1$		$n_1 > 0$ $n_2 = n_1 + 1$	Гарантована відмовостійкість до $n = n_1$ , при $n > n_1$ перше ж будь-яке ушкодження призводить до відмови
4	Відмовостійкість залежить від $n_1$ та $p$		$n_1 > 0$ $n_2 - n_1 > 1$	Гарантована відмовостійкість до $n_1$ і негарантована від $n_1$ до $n_2$



а



б

Рис. 8.34. Експериментальні значення статистичної оцінки ймовірності відмови для двох різних систем

З огляду на викладене, а також виходячи з того, що у системи  $b$  і величина  $n_1$ , і величина  $(n_2 - n_1)$  виявилися більше, ніж у системи  $a$ , припустимо, що і значення логарифмічного критерію відмовостійкості у системи  $b$  більше, тобто повинна виконуватися нерівність:  $K_4^b > K_4^a$ .

Розрахунок критерію відмовостійкості за формулою (8.39) показав такі результати:

$$K_4^a = -\log_2 10 \sum_{i=10+1}^{23-1} \log_2 p_i = 44,55, \quad (8.40)$$

$$K_4^b = -\log_2 12 \sum_{i=12+1}^{27-1} \log_2 p_i = 70,86. \quad (8.41)$$

Як ми й припускали, значення логарифмічного критерію відмовостійкості у системи  $b$  виявилось вище, ніж у системи  $a$ .

У межах зони  $II$  не завжди вдається більш-менш точно апроксимувати експериментальні точки прямими так, як це показано на рис. 8.35 *a*.

Іноді ближче виявляються криві, наведені, наприклад, на рис. 8.35 *б, в*. У цих випадках оцінка за допомогою виразу (8.39) не є інформативною і не може бути використана як критерій відмовостійкості для порівняння окремих проектних систем.

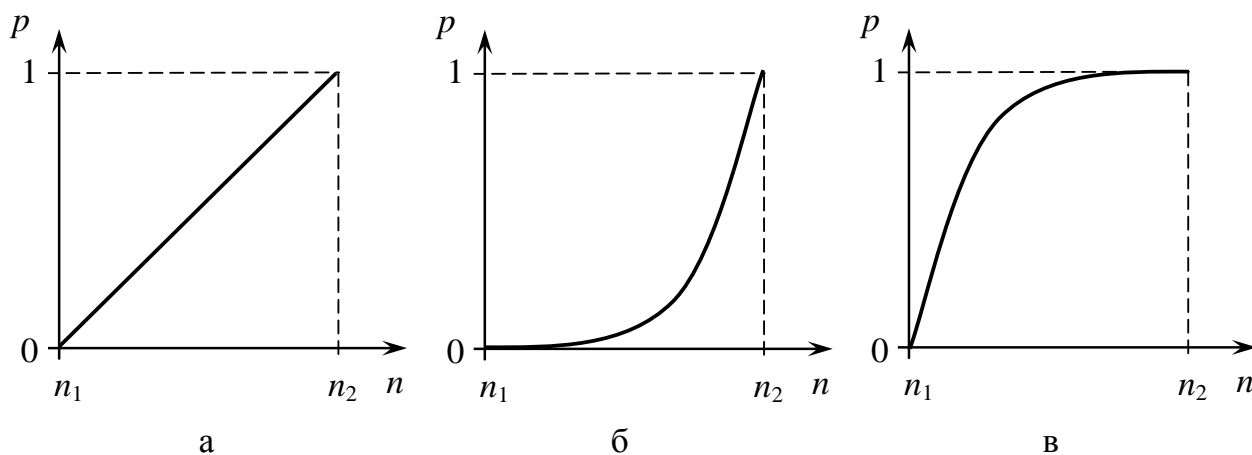


Рис. 8.35. Варіанти апроксимації експериментальних точок у межах  $II$  зони

Зважимо на те, що кожна  $i$ -а експериментальна точка на рис. 8.34 містить інформацію про ймовірності двох подій, які являють собою повну множину: «система відмовила»  $p_i$  і «система працездатна  $(1 - p_i)$ ». Тому для оцінки відмовостійкості в межах зони  $II$  можна застосувати ентропійний вираз:

$$K_2 = - \sum_{i=n_1+1}^{n_2-1} [p_i \log_2 p_i + (1 - p_i) \log_2 (1 - p_i)] \quad (8.42)$$

Використання ентропії для оцінки та порівняння складних технічних систем, «поведінка» яких має ознаки стохастичності, набуває все більшого поширення.

В нашому випадку вона дає можливість при діагностиці оцінити технічний стан системи одним числом, що може в багатьох випадках відіграти головну роль при необхідності швидкого підбору, наприклад, варіанта конструкції в САПР або варіанта навантаження системи в управлінні.

Отримані експериментально окремі точки можуть бути аналітично апроксимовані  $S$ -подібними функціями:

– із використанням степеневого ряду:

$$f_s(x, a, b, \dots, k, l) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + kx + l, \quad (8.43)$$

де  $a, b, \dots, k, l$  – деякі числові параметри, які приймають довільні дійсні значення;

– із використанням тригонометричної залежності:

$$f_s(x, a, b) = \begin{cases} 0, & x \leq a; \\ 0,5 + 0,5 \cos\left(\frac{x-b}{b-a} \pi\right), & a < x \leq b; \\ 1, & x > b, \end{cases} \quad (8.44)$$

де  $a, b$  – деякі числові параметри, які приймають довільні дійсні значення та впорядковані співвідношенням:  $a < x \leq b$ ;

– із використанням степеневі залежності:

$$f_s(x, a, b) = \begin{cases} 0, & x \leq a; \\ 2^{p-1} \left(\frac{x-b}{b-a}\right)^p, & a < x \leq \frac{a+b}{2}; \\ 1 - 2^{p-1} \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^p, & \frac{a+b}{2} < x \leq b; \\ 1, & x > b, \end{cases} \quad (8.45)$$

де  $a, b$  – деякі числові параметри, які приймають довільні дійсні значення та впорядковані співвідношенням:  $a < b$ ,  $p$  – ціле позитивне число;

– із використанням гіперболічної тригонометричної залежності:

$$f_s(x, b, c) = 0,5 + 0,5 \operatorname{th}(bx + c), \quad (8.46)$$

де  $b, c$  – деякі числові параметри, які приймають довільні дійсні значення;



– із використанням гіперболічної тригонометричної залежності при  $c = 0$  (сігмоїдальна функція):

$$f_s(x, b) = 0,5 + 0,5 \operatorname{th}(bx) = \frac{1}{1 + e^{-2bx}}, \quad (8.47)$$

де  $b > 0$ .

Розглянемо конкретні приклади, отримані в наступних умовах. Експерименти проводили із штучною нейронною мережею, яка методом *back propagation* була навчена розпізнаванню арабських цифр від 0 до 9. Вхідний кортеж навчальної вибірки містив  $4 \times 7 = 28$  двійкових чисел – по кількості пікселів у розпізнаваному образі, а вихідний – 9 нулів і одну одиницю, що відповідає по місцю розташування розпізнаваному образу.

Ушкодження серед  $N$  нейронів другого шару наносили штучно випадковим образом  $M$  раз для кожного з  $n$ , що пробігає значення від 0 до  $N$ . На рис. 8.36 *a*, *б* представлені три «хмари» точок, що відповідають значенням  $N = 16, 25$  і 40 нейронів.

При цьому під статистичною дискретною оцінкою ймовірності відмови нейронної мережі  $\hat{P}(n)$  розуміли відношення кількості збоїв у роботі мережі  $m(n)$  ( $m \geq M$ ) до загальної кількості випробувань  $M$ :

$$\hat{P}(n) = \frac{m(n)}{M}. \quad (8.48)$$

Збоєм у роботі нейронної мережі визнавали помилку в розпізнаванні пропонуваного образу або ситуації коли кількість одиниць на виході, не дорівнювала 1.

Наведені на рис. 8.36 «хмари» точок є сукупною інтегральною оцінкою відмовостійкості конкретних штучних нейронних мереж. Для одержання критерію цієї оцінки апроксимуємо представлені точки неперервною сигмоїдальною функцією вигляду:

$$P(n) = \frac{a_1}{1 + a_2 e^{-a_3 n}}; \quad 0 \leq n \leq N. \quad (8.49)$$

Графіки таких функцій для досліджених штучних нейронних мереж у вигляді суцільних кривих наведені на рис. 8.37.

Параметри  $a_1$ ,  $a_2$  і  $a_3$ , що входять до (8.49), однозначно визначають характеристику відповідного сигмоїда, відбиваючи його головні властивості: значення кількості ушкоджень, при яких штучна нейронна мережа починає помилятися, і нахил висхідної частини сигмоїду до осі абсцис.

На рис. 8.37 показано, як ці параметри впливають на хід відповідних сигмоїдальних кривих.

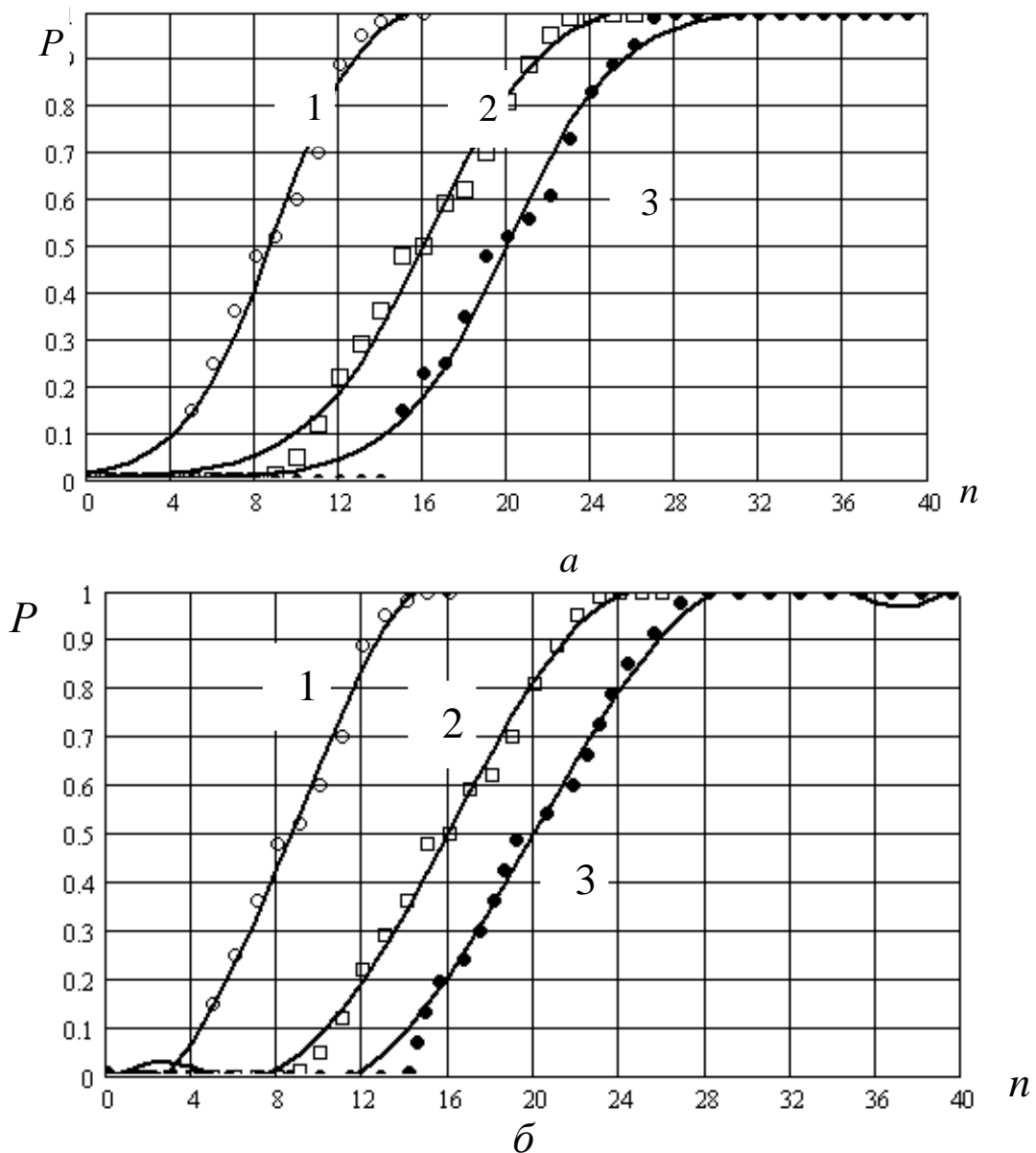


Рис. 8.36. Статистична оцінка ймовірностей відмови тришарової ШНМ при випадковому ушкодженні  $n$  з  $N$  нейронів другого шару:

1 –  $N = 16$ ; 2 –  $N = 25$ ; 3 –  $N = 40$ ;

$a$  – апроксимація сигмоїдною функцією,

$б$  – апроксимація поліномом 6-й ступеня.

Природно припустити, що, чим більше  $n_{\text{но}}$  та менше кут нахилу, тим більша відмовостійкість штучних нейронних мереж.

Таким чином, параметри  $a_1$ ,  $a_2$  і  $a_3$  є критеріями відмовостійкості і по них можна судити про якість нейронної мережі й порівнювати по цьому показнику різні об'єкти.

Іноді «хмару» експериментальних точок зручно апроксимувати не сигмоїдом, а поліномом, наприклад, шостого ступеня:

$$P = a_1 n^6 + a_2 n^5 + a_3 n^4 + a_4 n^3 + a_5 n^2 + a_6 n + a_7. \quad (8.50)$$

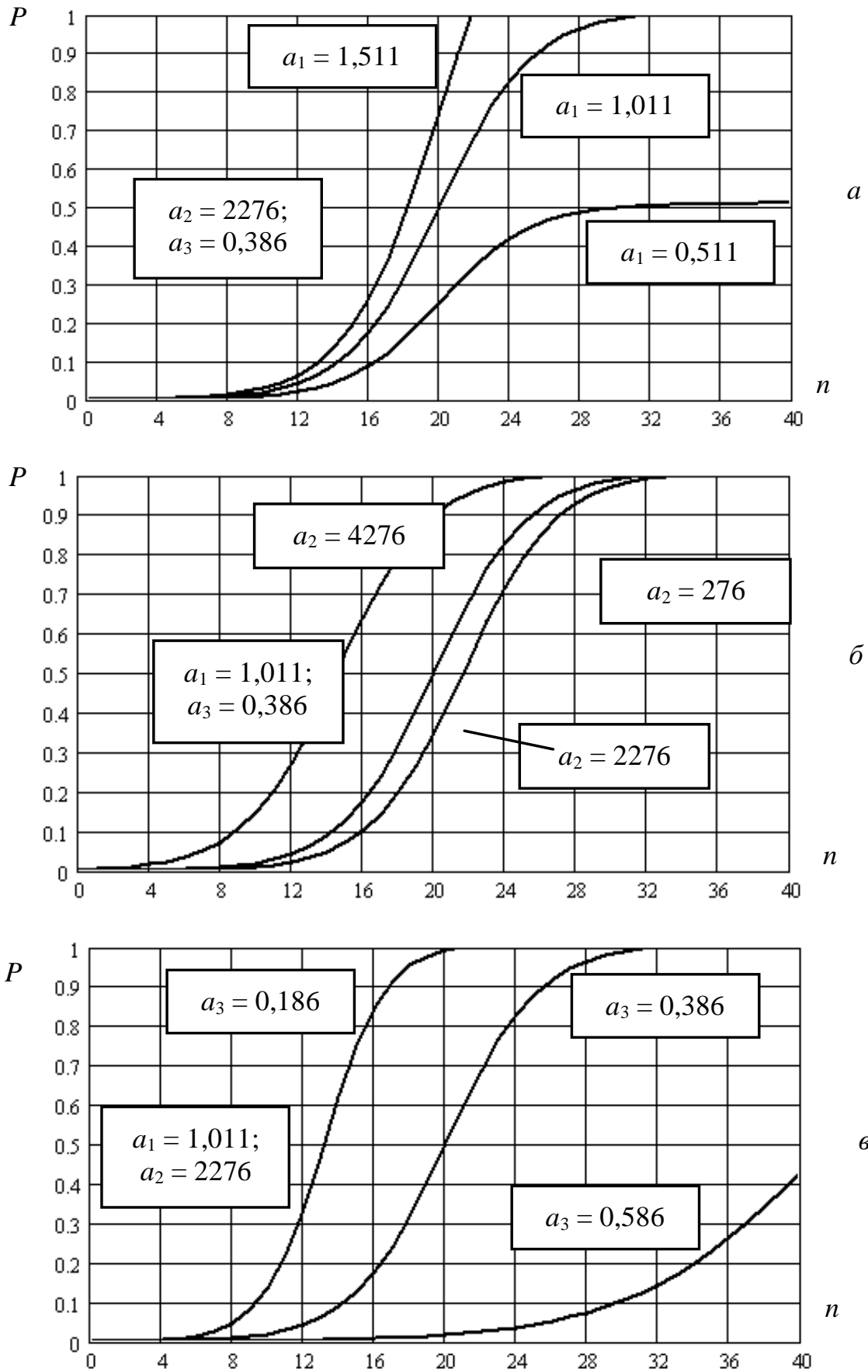


Рис. 8.37. Вплив параметрів  $a_1$ ,  $a_2$  і  $a_3$  на вид сигмоїдів і, отже, на якість (відмовостійкість) ШНМ:  $a - a_1 = \text{var}$ ;  $\bar{b} - a_2 = \text{var}$ ;  $\bar{в} - a_3 = \text{var}$ .

Для конкретних штучних нейронних мереж, описаних вище, апроксимація ушкоджень другого шару сигмоїдальною функцією (8.49) виглядає таким чином:

– при  $N = 16$ :

$$P(n) = \frac{1,049}{1 + 70,093 \cdot e^{-0,478n}}; \quad 0 \leq n \leq 16; \quad (8.51)$$

– при  $N = 25$ :

$$P(n) = \frac{1,045}{1 + 332,3 \cdot e^{-0,357n}}; \quad 0 \leq n \leq 25; \quad (8.52)$$

– при  $N = 40$ :

$$P(n) = \frac{1,011}{1 + 2276 \cdot e^{-0,386n}}; \quad 0 \leq n \leq 40, \quad (8.53)$$

а апроксимація багаточленом (8.50) таким чином:

$$P(n) = -1,628 \cdot 10^{-6}n^6 + 7,386 \cdot 10^{-5}n^5 - 1,242 \cdot 10^{-3}n^4 + 8,754 \cdot 10^{-3}n^3 - 0,013n^2 - 0,013n + 7,878 \cdot 10^{-3}; \quad (8.54)$$

$$P(n) = -6,959 \cdot 10^{-8}n^6 + 6,013 \cdot 10^{-6}n^5 - 2,088 \cdot 10^{-4}n^4 + 3,454 \cdot 10^{-3}n^3 - 0,023n^2 + 0,05n - 0,015; \quad (8.55)$$

$$P(n) = -1,247 \cdot 10^{-9}n^6 + 5,613 \cdot 10^{-7}n^5 - 4,784 \cdot 10^{-3}n^4 + 1,488 \cdot 10^{-3}n^3 - 0,017n^2 + 0,059n - 0,035, \quad (8.56)$$

Рівняння (8.51) – (8.53) дозволяють виділити критерій якості штучної нейронної мережі у вигляді тримісного кортежу:

$$\begin{aligned} &\langle 1,049; 70,093; 0,478 \rangle, \\ &\langle 1,045; 332,3; 0,357 \rangle, \\ &\langle 1,011; 2276; 0,386 \rangle, \end{aligned}$$

а рівняння (8.54) – (8.56) – семимісного:

$$\begin{aligned} &\langle -1,628 \cdot 10^{-6}; 7,386 \cdot 10^{-5}; -1,242 \cdot 10^{-3}; 8,754 \cdot 10^{-3}; -0,013; - \\ &\quad - 0,013; 7,878 \cdot 10^{-3} \rangle, \\ &\langle -6,959 \cdot 10^{-8}; 6,013 \cdot 10^{-6}; -2,088 \cdot 10^{-4}; 3,454 \cdot 10^{-3}; -0,023; 0,05; -0,015 \rangle, \\ &\langle -1,247 \cdot 10^{-9}; 5,613 \cdot 10^{-7}; -4,784 \cdot 10^{-3}; 1,488 \cdot 10^{-3}; -0,017; 0,059; -0,035 \rangle. \end{aligned}$$

На жаль їх «пряме спостереження» не дозволяє проектувальникові класифікувати штучні нейронні мережі за рівняннями відмовостійкості, тому було запропоноване виконання такого аналізу за допомогою іншої нейронної мережі, навченої класифікації на вибірках виду  $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle \langle K \rangle$  для сигмоїду і виду  $\langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 \rangle \langle K \rangle$  – для багаточлена. Клас якості  $K$  може приймати наступні значення: 1 – відмовостійкість дуже погана; 2 – погана; 3 – середня; 4 – хороша; 5 – дуже хороша.

Наведені критерії можуть бути застосовані, наприклад, при підтримці прийняття рішення для роботи із САПР на етапі структурного проектування. Інформаційна схема такої САПР представлена на рис. 8.38.

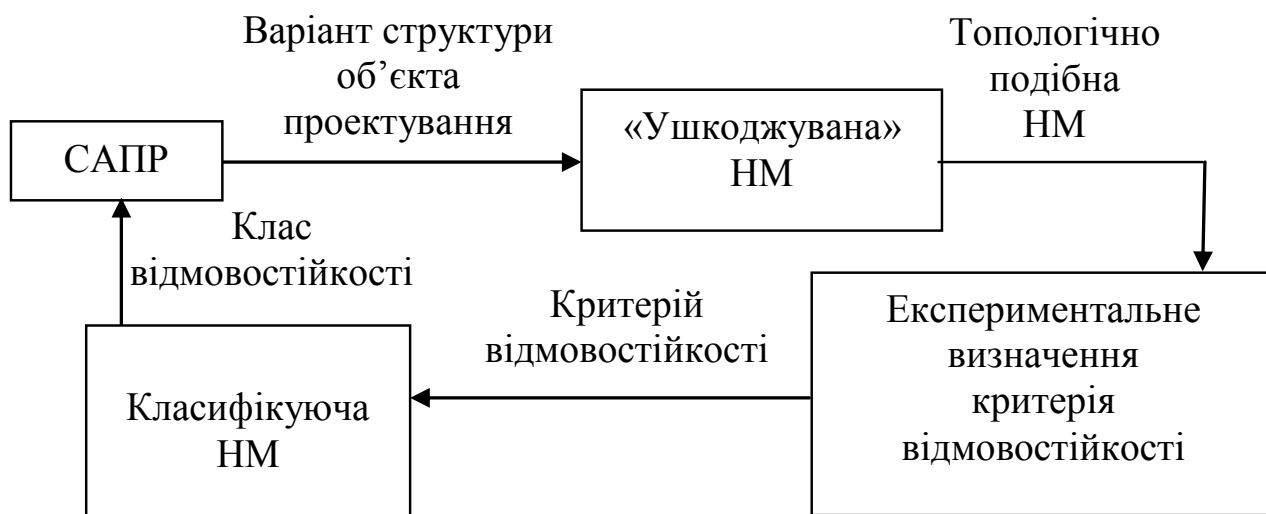


Рис. 8.38. Інформаційна схема автоматизованої системи підтримки прийняття рішень в САПР на етапі структурного проектування

Ця структура універсальна й може бути використана при автоматизованому проектуванні структур будь-яких об'єктів, здатних продовжувати функціонувати при часткових ушкодженнях. На рис. 8.39 наведено структурну схему алгоритму оцінки відмовостійкості за допомогою структурно подібних нейронних мереж.

## 8.9. Питання до самоконтролю

1. Моделі у вигляді графів. Які властивості моделюємого об'єкта вони відбивають?
2. Основні визначення теорії графів. Що таке власне граф як об'єкт математичного моделювання.
3. Наведіть приклади різних за кресленням, але однакових за топологією зображень, які є графами.
4. Вершини, ребра, петлі. Надайте визначення та перелічіть їхні властивості.
5. Які ребра називаються кратними (або паралельними)?
6. Що таке мультиграф та орграф? Накресліть в якості приклада їхнє зображення.
7. Що таке маршрут?
8. Інші математичні форми представлення структур. Що таке матриці графів?
9. Досяжність та зв'язність.
10. Ейлерові та гамільтонові графи.

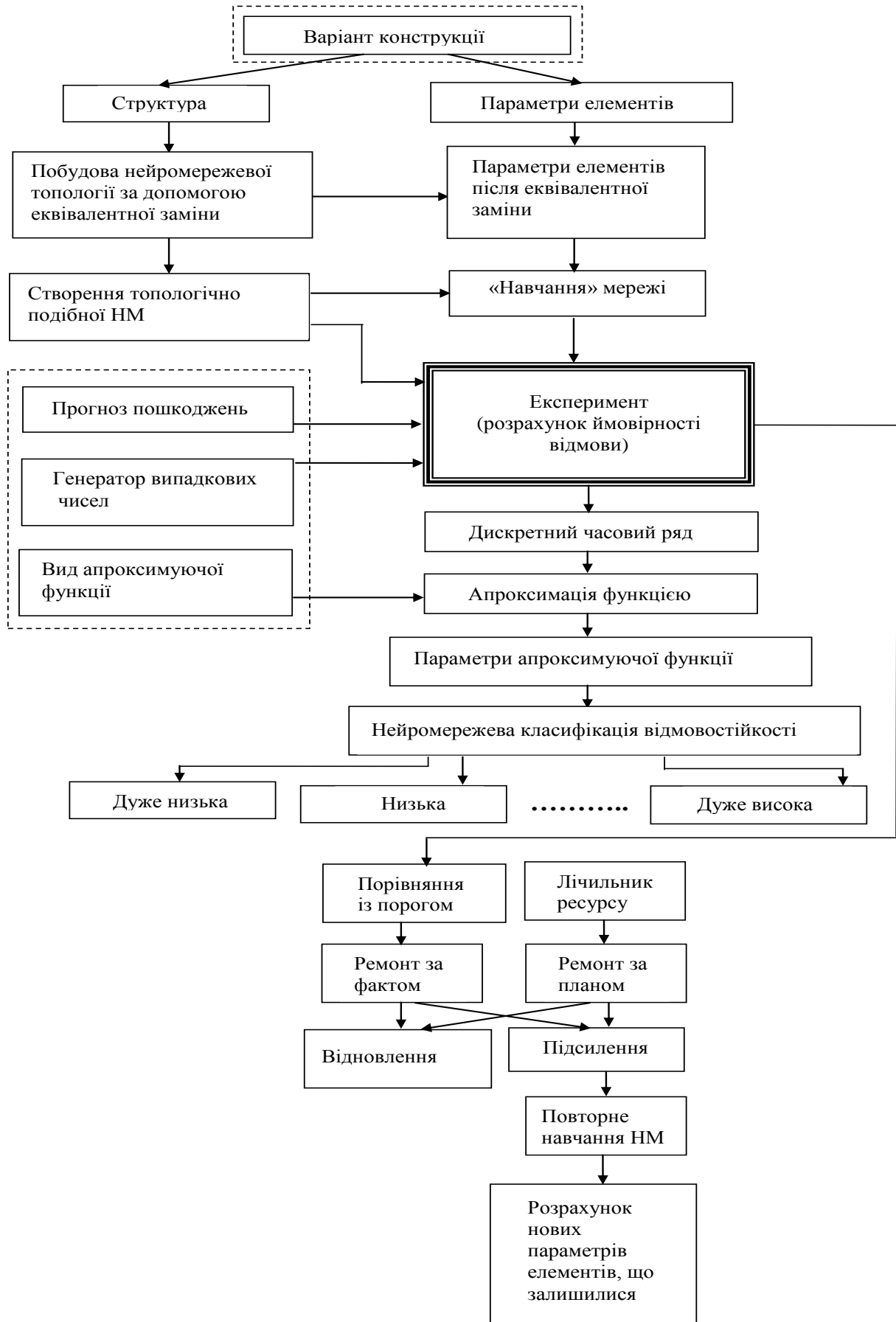


Рис. 8.39. Блок-схема алгоритму оцінки відмовостійкості складних систем

11. Древа та цикли.
12. Як співвідносяться кількість ребер та вершин у графі, який є графом-деревом?
13. Ізоморфізм графів та проблеми аналітичних методів його виявлення. Для яких потреб може використовуватися поняття ізоморфізму?
14. Експериментально-статистичний метод виявлення ізоморфізму графів.
15. Методи забезпечення ізоморфності структур. На якій науковій гіпотезі вони засновані?
16. Приведення структури реального об'єкта до представлення у вигляді графа необхідної форми.
17. Еквівалентне перетворення моделі механічної конструкції.
18. Використання графових моделей для моделювання окремих фрагментів структур.
19. Побудова структурної моделі реального об'єкта. Навести приклад та показати, які властивості графів при цьому використовуються.
20. Морфологічні моделі надійності об'єктів із резервованою структурою.
21. Динаміка відновлюваних систем
22. Ізоморфні методи моделювання працездатності в міру внесення пошкоджень в структуру складних систем.

## Розділ 9 МАРКОВСЬКІ МОДЕЛІ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ

### 9.1. Марковські процеси

#### 9.1.1. Поняття випадкового процесу

**В**ипадковим процесом (ВП) називається множина або сімейство випадкових величин, що змінюється з часом. Наприклад, число студентів в аудиторії, атмосферний тиск або температура в цій аудиторії є випадковими процесами. Іншими словами: випадкова величина, що залежить від змінної величини (часу) є випадковим процесом.

Випадкові процеси знаходять широке застосування при вивченні складних стохастичних систем як адекватні математичні моделі процесу функціонування таких систем.

Основними поняттями для випадкових процесів є поняття стану процесу й переходу його з одного стану в інший.

Розрізняють випадкові процеси з дискретним і неперервним часом та дискретним і неперервним станом.

Значення змінних, які описують випадковий процес у даний момент часу називаються станом випадкового процесу. Випадковий процес переходить з одного стану в інший, якщо значення змінних, які задають один стан, змінюються на значення, які визначають інший стан.

Кількість можливих станів (простір станів) випадкового процесу може бути скінченною або нескінченною. Якщо кількість можливих станів скінченна (усім можливим станам можуть бути присвоєні порядкові номери), то випадковий процес називається процесом з дискретними станами. Наприклад, кількість покупців у магазині, кількість клієнтів у банку протягом дня описуються випадковими процесами з дискретними станами.

Якщо змінні, які описують випадковий процес, можуть приймати будь-які значення зі скінченного або нескінченного неперервного інтервалу, тобто кількість станів незліченна, то випадковий процес називається процесом з неперервними станами. Наприклад, температура повітря протягом доби є випадковим процесом з неперервними станами.

Для випадкових процесів з дискретними станами характерні стрибкоподібні переходи з одного стану в інший, тоді, як у процесах з неперервними станами переходи є плавними.

Процеси з дискретними станами часто називають ланцюгами.

Позначимо через  $g(t)$  випадковий процес із дискретними станами, а можливі значення  $g(t)$ , тобто можливі стани ланцюга – через символи  $S_0, S_1, S_2, \dots$ .



Іноді для позначення дискретних станів використовують числа  $0, 1, 2, \dots$  з натурального ряду.

Випадковий процес  $g(t)$  називається процесом з дискретним часом, якщо переходи процесу зі стану в стан можливі тільки в строго певні, заздалегідь фіксовані моменти часу  $t_0, t_1, t_2, \dots$ . Якщо перехід процесу зі стану в стан можливий в заздалегідь невідомий момент часу, то випадковий процес називається процесом з неперервним часом. У першому випадку інтервали часу між переходами є детермінованими, а в другому – випадковими величинами.

Процес із дискретним часом має місце або коли структура системи, яка описується цим процесом, така, що її стани можуть змінюватися тільки в заздалегідь встановлені моменти часу, або коли передбачається, що для опису системи досить знати її стан в певні моменти часу. Тоді ці моменти можна пронумерувати і говорити про стан  $S_i$  в момент часу  $t_i$ .

Випадкові процеси з дискретними станами можуть зображуватися у вигляді графа переходів (або станів), у якому вершини відповідають станам, а орієнтовані дуги – переходам з одного стану в інший. Якщо зі стану  $S_i$  можливий перехід тільки в один стан  $S_j$ , то цей факт на графові переходів відбивається дугою, спрямованою з вершини  $S_i$  у вершину  $S_j$  (рис. 9.1, *а*). Переходи з одного стану в декілька інших та з декількох станів в один відбивається на графові переходів, як показано на рис. 9.1, *б* і *в*.

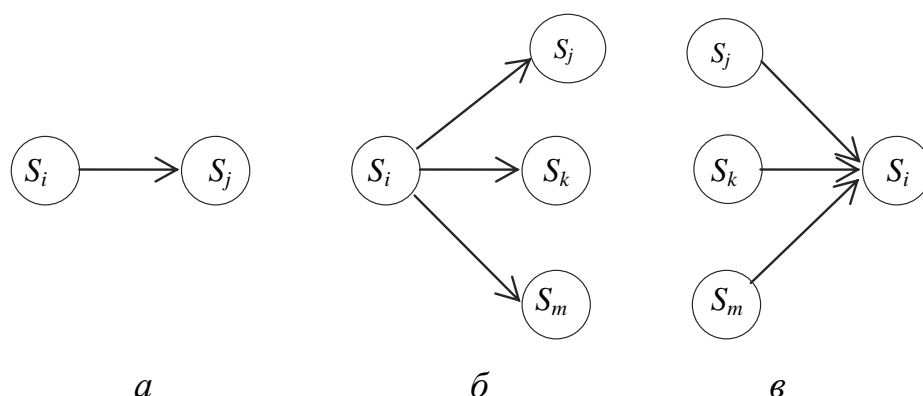


Рис. 9.1. Фрагменти графа переходів

Для визначення числових параметрів, які характеризують стохастичні об'єкти, необхідно побудувати деяку імовірнісну модель явища, що враховує випадкові фактори. Для математичного опису багатьох явищ, що розвиваються у формі випадкового процесу, може бути з успіхом застосований математичний апарат, розроблений у теорії ймовірностей для так званих марковських випадкових процесів.

### 9.1.2. Класифікація марковських випадкових процесів

Випадковий процес називається марковським, якщо ймовірність будь-якого його стану в майбутньому залежить тільки від поточного стану і не зале-

жить від того, яким чином і коли процес прийшов до цього стану. Аналітичний запис визначення може бути представлений у вигляді:

$$\begin{aligned} \Pr\{g(t_{n+1}) = S_{n+1}/g(t_0) = S_0, g(t_1) = S_1, \dots, g(t_n) = S_n\} = \\ = \Pr\{g(t_{n+1}) = S_{n+1}/g(t_n) = S_n\}, \end{aligned} \quad (9.1)$$

де  $t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1}$ , а  $S_n$  – поточний стан.

Іншими словами, у марковських випадкових процесах вплив усієї передісторії процесу на його майбутнє повністю зосереджений в поточному стані процесу.

Ця властивість називається *властивістю відсутності післядії* або стосовно до випадкових процесів *марковською властивістю*.

Марковські випадкові процеси також діляться на класи. Перша класифікаційна ознака – характер спектра станів. Друга класифікаційна ознака – характер функціонування в часі.

Характер часових реалізацій основних видів випадкових процесів представлений на рис. 9.2.

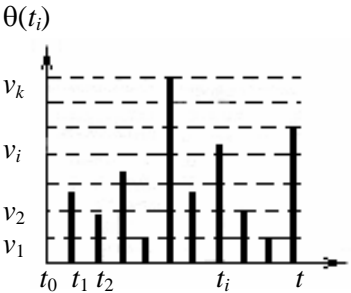
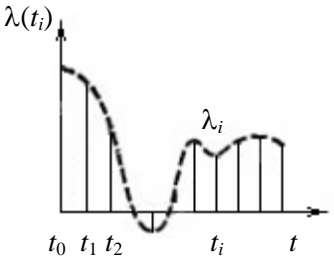
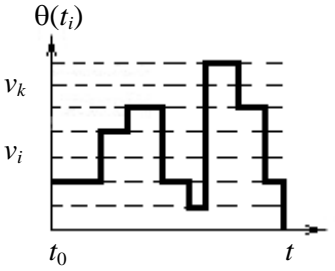
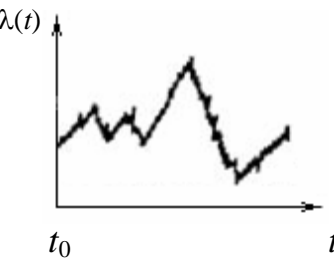
		Простір станів	
		Дискретний	Неперервний
Значення аргумента	Дискретні	 <p>Ланцюг Маркова</p>	 <p>Марковська послідовність</p>
	Неперервні	 <p>Дискретний марковський процес</p>	 <p>Неперервний марковський процес</p>

Рис. 9.2. Часові реалізації основних видів марковських процесів

Властивість відсутності післядії накладає істотні обмеження на розподіл часу перебування марковського процесу в тому або іншому стані. Так, у випадку ланцюга Маркова з неперервним часом час перебування системи в даному стані розподіляється за експонентним законом, а у випадку дискретного ланцюга – за геометричним законом розподілу, які є єдиними, відповідно, неперервним і дискретним розподілами без післядії. Тільки за таких обмежень на час перебування процесу у відповідних станах гарантоване виконання марковської властивості.

Розглянемо марковський випадковий процес  $g(t)$  зі скінченною кількістю станів  $S_0, S_1, \dots, S_n$ . Позначимо через  $p_i(t)$  імовірність того, що випадковий процес у момент часу  $t$  перебуває в стані  $S_i$ :

$$p_i = \Pr\{g\{t\} = S_i\}, i = \overline{0, n}. \quad (9.2)$$

Очевидно, що в будь-який момент часу  $t$  процес перебуває в одному з  $n + 1$  можливих станів, тобто події  $g\{t\} = S_i, i = \overline{0, n}$ , які полягають у тому, що в момент часу  $t$  процес перебуває в станах  $S_0, S_1, \dots, S_n$ , утворюють повну групу несумісних подій. Звідси випливає, що в будь-який момент часу  $t$  виконується умова:

$$\sum_{i=0}^n p_i(t) = 1, \quad (9.3)$$

яка називається нормувальною.

Сукупність ймовірностей  $p_i(t), i = \overline{0, n}$ , може бути представлена вектором, який називається вектором станів, із кількістю компонентів, рівною кількості можливих станів процесу:

$$\mathbf{p}(t) = \{p_0(t), p_1(t), \dots, p_n(t)\}. \quad (9.4)$$

Головне завдання вивчення марковських випадкових процесів полягає у визначенні ймовірностей  $p_i(t), i = \overline{0, n}$  знаходження процесу в будь-який момент часу  $t$  у тому або іншому стані, що подає повну інформацію про випадковий процес. Для розв'язання даного завдання необхідно:

- 1) вказати в якому стані перебуває процес у початковий момент часу;
- 2) описати переходи між станами.

Стан процесу в початковий момент часу  $t = 0$  задається вектором початкових ймовірностей

$$\mathbf{p}(0) = \{p_0(0), p_1(0), \dots, p_n(0)\}. \quad (9.5)$$

Опис переходів між станами залежить від того, яким (з дискретним або з

неперервним часом) є досліджуваний марковський випадковий процес.

Часто при вивченні марковських випадкових процесів досить визначити ймовірності  $p_0(t), p_1(t), \dots, p_n(t)$  у будь-який момент часу  $t$ , а їх граничні значення (якщо вони існують) при  $t \rightarrow \infty$ .

Якщо при  $t \rightarrow \infty$  ймовірності  $p_i(t), i = \overline{0, n}$  прагнуть до граничних значень  $p_i, i = \overline{0, n}$  не залежних від розподілу початкових ймовірностей  $p_i(0), i = \overline{0, n}$  то говорять, що випадковий процес має *ергодичну властивість*. Таким чином, для ергодичних процесів існують межі

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t) = p_i, i = \overline{0, n}. \quad (9.6)$$

Граничні ймовірності  $p_i, i = \overline{0, n}$  часто називають ймовірностями станів рівноваги або стаціонарними ймовірностями.

### 9.1.3. Марковські процеси з дискретним часом. Марковські ланцюги

Для випадкових процесів з дискретним часом зміни станів можливі тільки в певні моменти часу ( $t_0, t_1, t_2, \dots$ ).

Модель марковського процесу представимо у вигляді графа, в якому стани (вершини) зв'язані між собою зв'язками (переходами з  $i$ -го стану в  $j$ -ий стан).

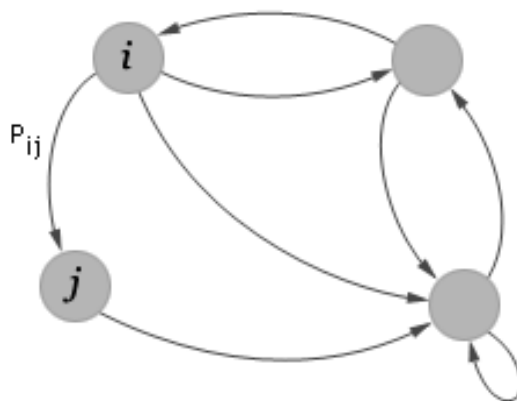


Рис. 9.3. Приклад графа переходів

Кожний перехід характеризується ймовірністю переходу  $p_{ij}$ . Ймовірність  $p_{ij}$  показує, як часто після потрапляння в  $i$ -ий стан здійснюється перехід в  $j$ -ий стан. Звичайно, такі переходи відбуваються випадково, але якщо виміряти частоту переходів за досить великий час, то виявиться, що ця частота буде збігатися із заданою ймовірністю переходу.

Для кожного стану сума ймовірностей усіх переходів (вихідних стрілок) з нього в інші стани повинна завжди дорівнювати 1 (рис. 9.4).

Наприклад, повністю граф може виглядати так, як показано на рис. 9.5

Реалізація марковського процесу (процес його моделювання) є обчислен-

ням послідовності (ланцюга) переходів зі стану в стан (рис. 9.6). Ланцюг на рис. 9.6 є випадковою послідовністю й може мати також і інші варіанти реалізації.

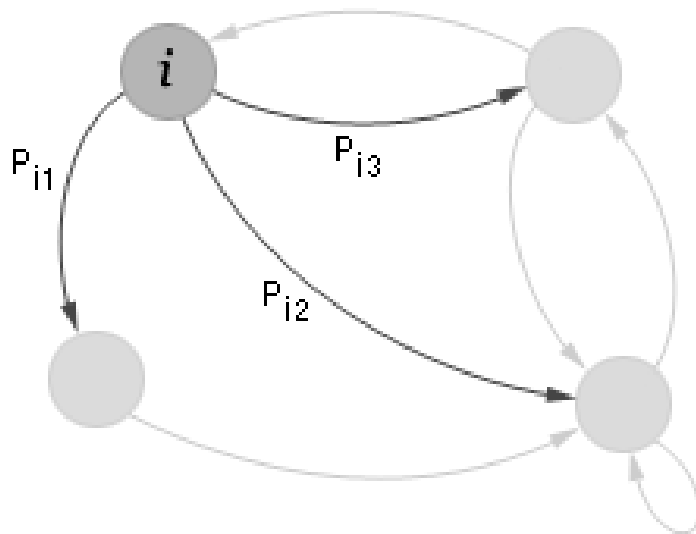


Рис. 9.4. Фрагмент графа переходів (переходи з  $i$ -го стану є повною групою випадкових подій)

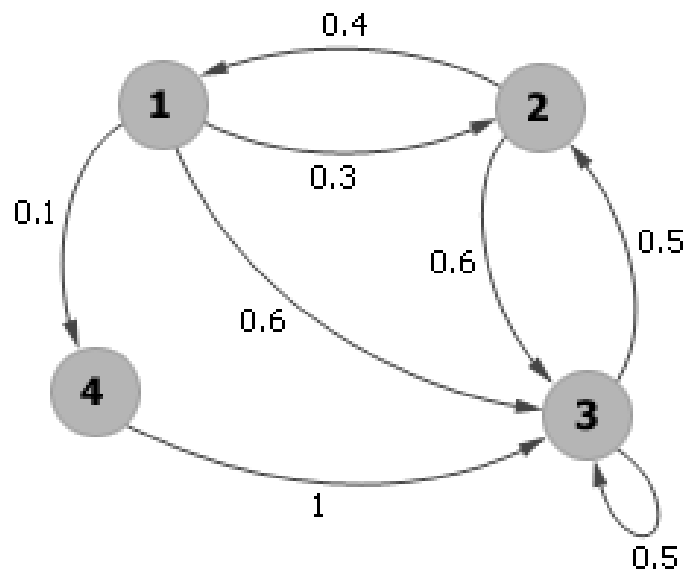


Рис. 9.5. Приклад марковського графа переходів



Рис. 9.6. Приклад марковського ланцюга, змодельованого за марковським графом, зображеним на рис. 9.5

Щоб визначити, у який новий стан із поточного  $i$ -го перейде процес досить розбити інтервал  $[0; 1]$  на підінтервали величиною  $p_{i1}, p_{i2}, p_{i3}, \dots$  ( $p_{i1} + p_{i2} + p_{i3} + \dots = 1$ ), (рис. 9.7). Далі за допомогою генератора випадкових чисел (ГВЧ) треба одержати чергове рівномірно розподілене в інтервалі  $[0; 1]$  випадкове число  $r_{pp}$  і визначити, у який з інтервалів воно потрапляє.

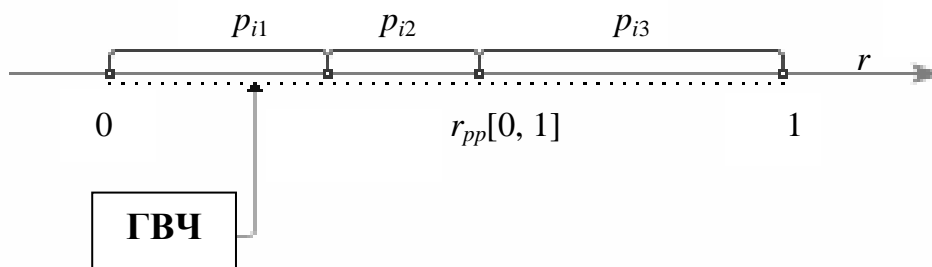


Рис. 9.7. Процес моделювання переходу з  $i$ -го стану марковського ланцюга в  $j$ -ий з використанням генератора випадкових чисел

Після цього здійснюється перехід у стан, визначений ГВЧ, і повтор описаної процедури для нового стану. Результатом роботи моделі є марковський ланцюг (див. рис. 9.6).

Розглянемо приклад імітації стрільби з гармати по цілі. Для цього побудуємо модель марковського випадкового процесу.

Визначимо наступні три стани:  $S_0$  – ціль не ушкоджена;  $S_1$  – ціль ушкоджена;  $S_2$  – ціль зруйнована. Задамо вектор початкових ймовірностей:

	$S_0$	$S_1$	$S_2$
$p_0$	0,8	0,2	0

Значення  $p_0$  для кожного зі станів показує, яка ймовірність кожного зі станів об'єкта до початку стрільби.

Задамо матрицю переходу станів.

Таблиця 9.1

Матриця ймовірностей переходу дискретного марковського процесу

	До $S_0$	До $S_1$	До $S_2$	Сума ймовірностей переходів
з $S_0$	0,45	0,40	0,15	$0,45 + 0,40 + 0,15 = 1$
з $S_1$	0	0,45	0,55	$0 + 0,45 + 0,55 = 1$
з $S_2$	0	0	1	$0 + 0 + 1 = 1$

Матриця задає ймовірність переходу зі стану до стану. Слід відмітити, що

ймовірності задані так, що сума ймовірностей переходу з деякого стану до інших завжди дорівнює одиниці (кудиись система повинна перейти обов'язково).

Наочно модель марковського процесу можна представити у вигляді наступного графа (рис. 9.8).

Використовуючи модель і метод статистичного моделювання, спробуємо розв'язати наступне завдання: визначити середню кількість снарядів, необхідних для повного руйнування цілі.

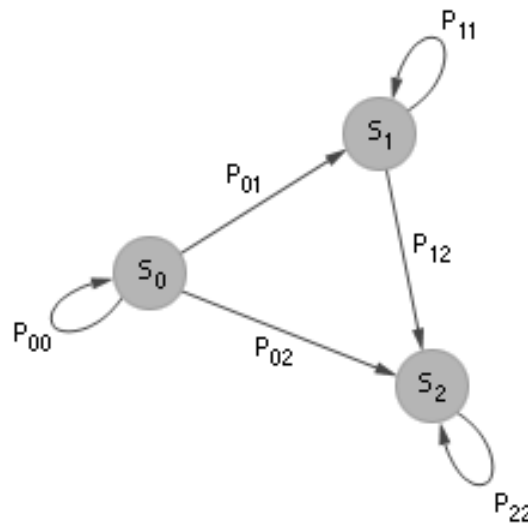


Рис. 9.8. Граф марковського процесу, що моделює стрільбу з гармати по цілі

Здійснимо імітацію процесу стрільби, використовуючи таблицю випадкових чисел. Нехай початковий стан буде  $S_0$ . Виберемо із таблиці послідовність випадкових чисел: 0,31; 0,53; 0,23; 0,42; 0,63; 0,21; ...

0,31: ціль перебуває в стані  $S_0$  і залишається в стані  $S_0$ , оскільки  $0 < 0,31 < 0,45$ ;

0,53: ціль перебуває в стані  $S_0$  і переходить до стану  $S_1$ , оскільки  $0,45 < 0,53 < 0,45 + 0,40$ ;

0,23: ціль перебуває в стані  $S_1$  і залишається в стані  $S_1$ , оскільки  $0 < 0,23 < 0,45$ ;

0,42: ціль перебуває в стані  $S_1$  і залишається в стані  $S_1$ , оскільки  $0 < 0,42 < 0,45$ ;

0,63: ціль перебуває в стані  $S_1$  і переходить до стану  $S_2$ , оскільки  $0,45 < 0,63 < 0,45 + 0,55$ .

Оскільки досягнутий стан  $S_2$  (далі ціль переходить із  $S_2$  до стану  $S_2$  з імовірністю 1), ціль уражена. Для цього в даному експерименті треба було витратити 5 снарядів.

На рис. 9.9 наведена часова діаграма, яку одержують під час описаного процесу моделювання. Діаграма показує, як у часі відбувається процес зміни станів. Такт моделювання для даного випадку має деяку фіксовану величину, важливим є сам факт переходу (до якого стану переходить система) і не важливо, коли саме це відбувається.

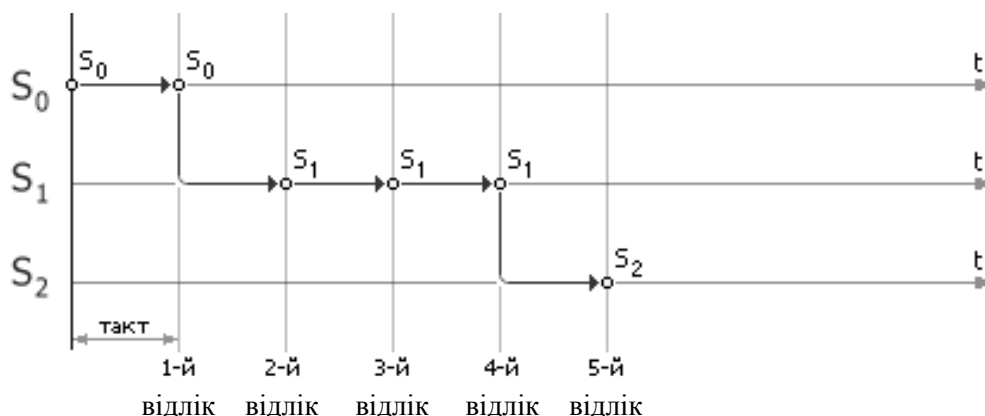


Рис. 9.9. Часова діаграма переходів у марковському графі (приклад імітації)

Процедура знищення цілі виконується за 5 тактів, тобто марковський ланцюг цієї реалізації виглядає наступним чином:  $S_0 - S_0 - S_1 - S_1 - S_1 - S_2$ . Звичайно, відповіддю на завдання це число бути не може, оскільки в різних реалізаціях відповіді будуть різними.

Повторюючи таку імітацію, можна одержати, наприклад, ще й такі реалізації (це залежить від того, які конкретно випадкові числа обрані):

- 4  $(S_0 - S_0 - S_1 - S_1 - S_2)$ ;
- 11  $(S_0 - S_0 - S_0 - S_0 - S_0 - S_1 - S_1 - S_1 - S_1 - S_1 - S_1 - S_2)$
- 5  $(S_1 - S_1 - S_1 - S_1 - S_1 - S_2)$ ;
- 6  $(S_0 - S_0 - S_1 - S_1 - S_1 - S_1 - S_2)$ ;
- 4  $(S_1 - S_1 - S_1 - S_1 - S_2)$ ;
- 6  $(S_0 - S_0 - S_1 - S_1 - S_1 - S_1 - S_2)$ ;
- 5  $(S_0 - S_0 - S_1 - S_1 - S_1 - S_2)$ .

Усього імітовано знищення 8 цілей. Середня кількість переходів у процедурі стрільби склала:

$$(5 + 4 + 11 + 5 + 6 + 4 + 6 + 5)/8 = 5.75,$$

або, округляючи, 6.

Саме стільки снарядів, у середньому, рекомендується мати в бойовому запасі гармати для знищення цілі при таких ймовірностях влучень.

Тепер слід визначити точність, яка й покаже, наскільки слід довіряти даному висновку. Для цього простежимо, як сходиться послідовність випадкових (наближених) відповідей до правильного (точного) результату. Відповідно до центральної граничної теореми, сума випадкових величин є величина не випадкова, тому для одержання статистично достовірної відповіді необхідно стежити за середньою кількістю снарядів, одержуваною у ряді випадкових реалізацій.

На першому етапі обчислень середня відповідь склала 5 снарядів, на другому етапі середня відповідь склала  $(5 + 4)/2 = 4,5$  снаряди, на третьому –  $(5 + 4$



+ 11)/3 = 6,7. Далі ряд середніх величин, в ході накопичення статистики, виглядає наступним чином: 6,3; 6,2; 5,8; 5,9; 5,8. Якщо зобразити цей ряд у вигляді графіка середньої величини випущених снарядів, необхідних для ураження цілі, залежно від номера експерименту, то виявиться, що даний ряд сходиться до деякої величини, яка і є відповіддю (рис. 9.10).

Спостерігається деяке «заспокоювання» графіка, розкидування між поточною величиною, що обчислюється, і її теоретичним значенням з часом зменшується, прагнучи до статистично точного результату. Тобто в деякий момент графік входить до границь які й визначають точність відповіді.

Алгоритм імітації можна представити у наступному вигляді (рис. 9.11).

Переходи здійснюються такт за тактом. Якщо важливо вказати, у який саме момент часу відбудеться перехід, скільки часу система пробуде в кожному зі станів, потрібно застосувати модель із неперервним часом.

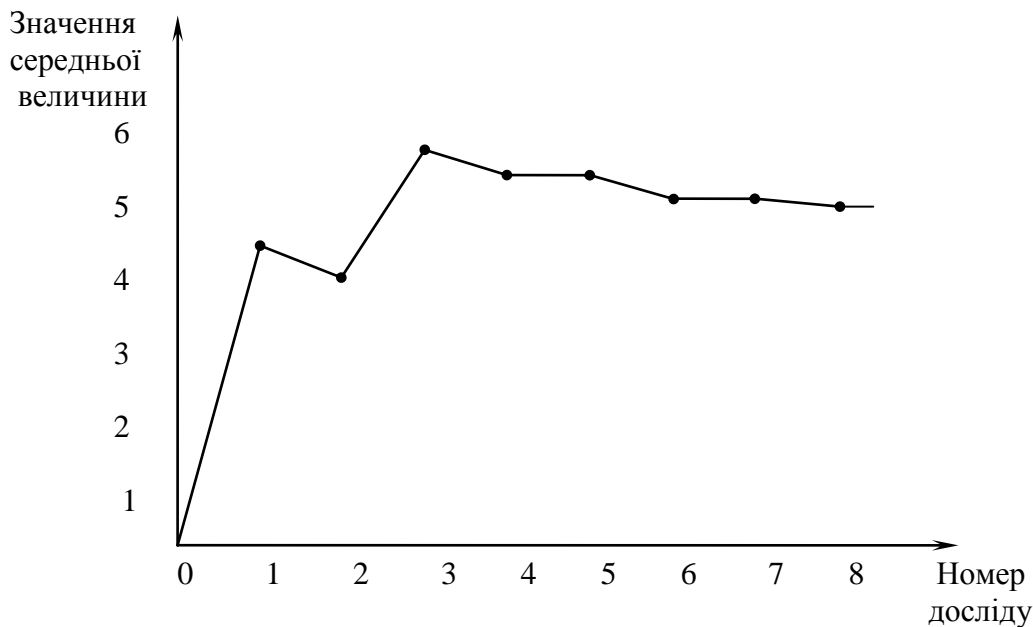


Рис. 9.10. Зміна середньої величини залежно від номера експерименту

Якщо перехідні ймовірності  $p_{ij}$  не залежать від номера кроку, то марковський ланцюг називається однорідним, а якщо залежать, то – неоднорідним.

Поряд з графом станів часто використовують матрицю перехідних ймовірностей:

$$\|P_{ij}\| = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1j} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2j} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nj} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}. \quad (9.7)$$

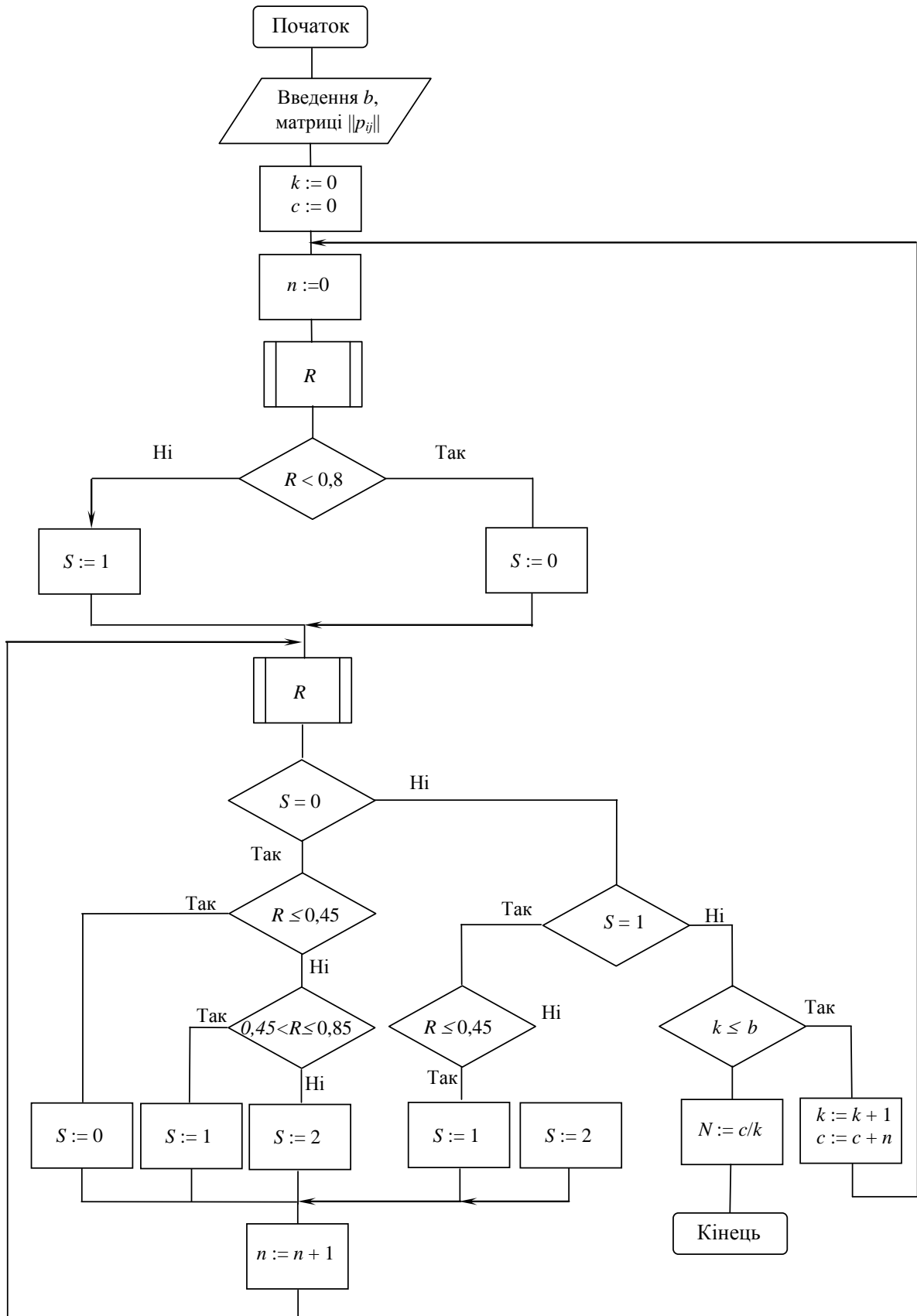


Рис. 9.11. Блок-схема імітації дискретного марковського процесу на прикладі стрільби з гармати

Якщо розглядати деяку фізичну систему  $S$  з дискретними станами і дискретним часом  $t_1, t_2, \dots, t_k$ , то при будь-якому  $k$  події  $S_1^k, S_2^k, \dots, S_n^k$  утворюють повну групу і несумісні. Випадкові процеси, які відбуваються у системі, можна представити як послідовність подій  $S_1^{(0)}, S_2^{(1)}, S_1^{(2)}, S_2^{(3)}, S_3^{(4)}, \dots$ . Тоді перехідні ймовірності можна написати як умовні ймовірності:

$$P_{ij} = P\left(\frac{S_j^k}{S_i^{(k-1)}}\right). \quad (9.8)$$

Сума членів у кожному рядку матриці повинна дорівнювати 1.

Маючи в розпорядженні розмічений граф станів (або матрицю перехідних ймовірностей) і знаючи початковий стан системи, можна знайти ймовірності станів

$$p_1(k), p_2(k), \dots, p_n(k).$$

Нехай початковий стан системи  $S_m$ , тоді

$$p_1(0) = 0; \quad p_2(0) = 0; \quad \dots; \quad p_m(0) = 1; \quad \dots; \quad p_n(0) = 0.$$

Перший крок:

$$p_1(1) = p_{m1}, p_2(1) = p_{m2}, \dots, p_m(1) = p_{mm}, \dots, p_n(1) = p_{mn}.$$

Після другого кроку за формулою повної ймовірності одержимо:

$$\begin{aligned} p_1(2) &= p_1(1)p_{11} + p_2(1)p_{21} + \dots + p_n(1)p_{n1}, \\ p_i(2) &= p_1(1)p_{1i} + p_2(1)p_{2i} + \dots + p_n(1)p_{ni} \end{aligned}$$

або

$$p_i(2) = \sum_{j=1}^n p_j(1)p_{ji}. \quad (9.9)$$

Для довільного кроку  $k$  одержуємо:

$$p_i(k) = \sum_{j=1}^n p_j(k-1)p_{ji}, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (9.10)$$

Для неоднорідного марковського ланцюга перехідні ймовірності залежать від номера кроку. Позначимо перехідні ймовірності для кроку  $k$  через

$$p_{ij}^{(k)} = p \left( \frac{S_j^{(k)}}{S_i^{(k-1)}} \right).$$

Тоді формула для розрахунків ймовірностей станів матиме вигляд:

$$p_i(k) = \sum_{j=1}^n p_j(k-1) p_{ji}^{(k)}. \quad (9.11)$$

#### 9.1.4. Марковські процеси з неперервним часом (напівмарковські процеси)

На практиці значно частіше зустрічаються ситуації, коли переходи системи зі стану в стан відбувається у випадкові моменти часу, які заздалегідь вказати неможливо: наприклад, вихід з ладу будь-якого елемента апаратури, закінчення ремонту (відновлення) цього елемента. Для опису таких процесів може бути з успіхом застосована схема марковського випадкового процесу з дискретними станами й неперервним часом – неперервний ланцюг Маркова.

Модель такого марковського процесу у вигляді графа представлена на рис. 9.12. У цьому графові стани (вершини) зв'язані між собою зв'язками (переходами з  $i$ -го стану в  $j$ -й).

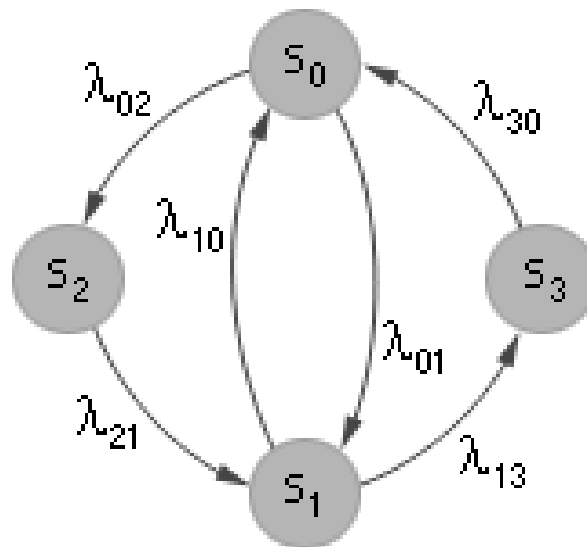
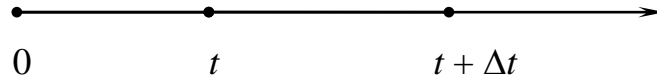


Рис. 9.12. Приклад графа марковського процесу з неперервним часом

Нехай  $S = \{ S_0, S_1, \dots, S_n \}$ . Позначимо через  $p_i(t)$  – імовірність того, що в момент  $t$  система  $S$  буде перебувати в стані  $S_i$  ( $i = 1, n$ ).

Очевидно  $\sum_{i=1}^n p_i(t) = 1$ . Поставимо завдання – визначити для будь-якого  $t$   $p_i(t)$ . Замість перехідних ймовірностей  $p_{ij}$  введемо в поняття щільності ймовірностей переходу  $\lambda_{ij}$



$$\lambda_{ij} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}. \quad (9.12)$$

$$p_{ij}(\Delta t) \approx \lambda_{ij} \Delta t. \quad (9.13)$$

Якщо  $\lambda_{ij}$  не залежить від  $t$ , говорять про однорідний ланцюг, інакше – про неоднорідний. Нехай нам відомі  $\lambda_{ij}$  для всіх пар станів (заданий розмічений граф станів).

Виявляється, знаючи розмічений граф станів можна визначити  $p_1(t)$ ,  $p_2(t)$ , ...,  $p_n(t)$  як функції часу. Ці ймовірності задовольняють певного виду диференціальним рівнянням, (рівнянням Колмогорова).

Наприклад, маємо граф (рис. 9.13).

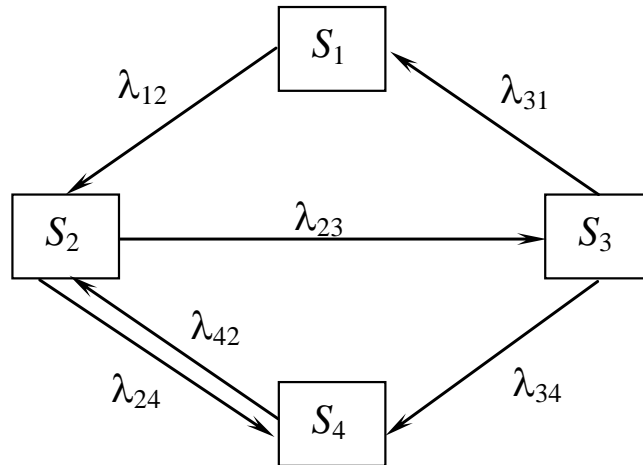


Рис. 9.13. Приклад графа напівмарковського процесу

$$\begin{cases} \frac{dp_1}{dt} = -\lambda_{12}p_1 + \lambda_{31}p_3 \\ \frac{dp_2}{dt} = -\lambda_{23}p_2 - \lambda_{24}p_2 + \lambda_{12}p_1 + \lambda_{42}p_4 \\ \frac{dp_3}{dt} = -\lambda_{31}p_3 - \lambda_{34}p_3 + \lambda_{23}p_2 \\ \frac{dp_4}{dt} = -\lambda_{42}p_4 + \lambda_{24}p_2 + \lambda_{34}p_3 \end{cases} \quad (9.14)$$

Інтегрування цих рівнянь при відомому початковому стані системи дасть шукані ймовірності станів як функції часу. Знаючи, що  $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$ , для рішення системи можна обійтися трьома рівняннями.

Правила складання рівнянь Колмогорова. У лівій частині кожного рівняння знаходиться похідна ймовірності стану, а права частина містить стільки членів, скільки стрілок пов'язані з даним станом. Якщо стрілка спрямована зі стану – член, що їй відповідає, має знак мінус, якщо до стану – знак плюс.

Кожний член дорівнює добутку щільності ймовірності переходу, відповідної для даної стрілки, помноженої на ймовірність того стану, з якого виходить стрілка.

При розгляданні процесів, які протікають в системі з дискретними станами і неперервним часом, зручніше уявити собі процес так, начебто переходи системи зі стану до стану відбуваються під дією деяких потоків подій.

Потоком подій називається послідовність однорідних подій, що відбуваються одна за іншою в деякі, загалом кажучи, випадкові моменти часу (потік викликів на телефонній станції; потік збоїв ЕОМ; потік вантажних потягів, що надходять на станцію; потік відвідувачів; потік пострілів, спрямованих в ціль). Будемо зображувати потік подій послідовністю точок на осі часу  $0t$ . Положення кожної точки на осі випадкове. Потік подій називається регулярним, якщо події відбуваються одна за одною через строго визначені проміжки часу (рідко зустрічається на практиці). Розглянемо потоки спеціального типу, для цього введемо ряд визначень.

Визначення 9.1. Потік подій називається стаціонарним, якщо ймовірність потрапляння тієї або іншої кількості подій на ділянку часу довжиною  $\tau$  залежить тільки від довжини ділянки і не залежить від того, де саме на осі  $0t$  розташована ця ділянка (однорідність за часом) – ймовірнісні характеристики такого потоку не повинні мінятися від часу. Зокрема, так звана інтенсивність (або щільність) потоку подій (середня кількість подій в одиницю часу) повинна залишатися постійною.

Визначення 9.2. Потік подій називається потоком без наслідку, якщо для будь-яких непересічних ділянок часу кількість подій, які потрапляють на одну з них, не залежить від того, скільки подій потрапило на іншу (або інші, якщо розглядається більше двох ділянок). Відсутність наслідування в потоці означає, що події, які утворюють потік, з'являються в послідовні моменти часу незалежно одна від одної.

Визначення 9.3. Потік подій називається ординарним, якщо ймовірність потрапляння на елементарну ділянку двох або більш подій зневажливо мала в порівнянні з ймовірністю потрапляння однієї події (події в потоці приходять поодиноці, а не парами, трійками і т.д.).

Потік подій, що має всі три властивості, називається найпростішим (або стаціонарним пуассонівським). Нестаціонарний пуассонівський потік має тільки властивості 2 і 3. Пуассонівський потік подій (як стаціонарний, так і нестаціонарний) тісно пов'язаний з відомим розподілом Пуассона. А саме, кількість подій потоку, що потрапляють на будь-яку ділянку, розподілена за законом Пуассона.

Для прикладу розглянемо на осі  $0t$ , де спостерігається потік подій, деяку ділянку довжиною  $t$ , що починається в момент  $t_0$  і закінчується в момент  $t_0 + t$ .

Неважно довести, що ймовірність потрапляння на цю ділянку  $m$  подій виражається формулою:

$$p_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a} \quad (m = 0, 1, \dots), \quad (9.15)$$

де  $a$  – середня кількість подій, що потрапляють на ділянку  $t$ .

Для стаціонарного (найпростішого) пуассонівського потоку  $a = \lambda t$ , тобто не залежить від того, де на осі  $0t$  взята ділянка  $t$ . Для нестаціонарного пуассонівського потоку величина  $a$  виражається формулою

$$a = \int_{t_0}^{t_0+t} \lambda(t) dt, \quad (9.16)$$

і, таким чином, залежить від того, у якій точці  $0t$  починається ділянка  $t$ .

## 9.2. Процеси загибелі та розмноження

Маючи в розпорядженні розмічений граф станів, можна легко записати рівняння Колмогорова для ймовірностей станів, а також записати та розв'язати алгебраїчні рівняння для фінальних ймовірностей. Для деяких випадків вдається останні рівняння розв'язати заздалегідь, у буквенному виді. Зокрема, це вдається зробити, якщо граф станів системи є так званою «схемою загибелі та розмноження».

Процеси розмноження та загибелі є частковими випадками марковських випадкових процесів, які, проте, знаходять досить широке застосування при дослідженні дискретних систем із стохастичним характером функціонування. Переходи в таких процесах зі стану  $S_i$  припустимі тільки в сусідні стани  $S_{i-1}$ ,  $S_i$  і  $S_{i+1}$ .

Описуючи процес в цій моделі, кажуть, що об'єкт знаходиться в стані  $S_i$ , якщо об'єм популяції дорівнює  $i$  членам.

При цьому перехід із стану  $S_i$  в стан  $S_{i+1}$  відповідає стану розмноження, а в стан  $S_{i-1}$  – загибелі.

Позначимо через  $\lambda_i$  інтенсивність розмноження; вона описує швидкість, з якою відбувається розмноження в популяції. Аналогічно, через  $\mu_i$  позначимо інтенсивність загибелі, яка задає швидкість із якою відбувається загибель у популяції.

Ці інтенсивності розмноження та загибелі не залежать від часу, а залежать тільки від стану  $S_i$ , отже, одержуємо неперервний однорідний ланцюг Маркова типу розмноження та загибелі.

Граф станів для схеми загибелі й розмноження має вигляд, показаний на рис. 9.4. Особливість цього графа полягає в тому, що всі стани системи можна

втягнути в один ланцюжок, у якому кожний із середніх станів ( $S_1, S_2, \dots, S_{n-1}$ ) зв'язаний прямою і зворотною стрілкою з кожним із сусідніх станів – правим і лівим, а крайні стани ( $S_0, S_n$ ) – тільки з одним сусіднім.

Термін «схема загибелі та розмноження» бере початок від біологічних завдань, де подібною схемою описується зміна чисельності популяції.

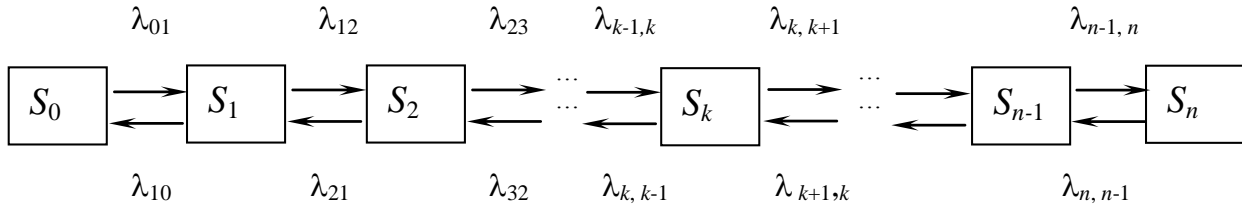


Рис. 9.4. Схема процесу загибелі і розмноження

Припустимо, що всі потоки подій, що переводять систему по стрілках графа, – найпростіші (для стислості будемо називати і систему  $S$ , і процес, що й протікає в ній, – найпростішими).

Користуючись графом рис. 9.4, складемо алгебраїчні рівняння для фінальних ймовірностей станів (їх існування впливає з того, що з кожного стану можна перейти в інший, і кількість станів скінченна).

Для першого стану  $S_0$  маємо:

$$p_0 \lambda_{01} = \lambda_{10} p_1 \quad (9.17)$$

Для другого стану  $S_1$ :

$$(\lambda_{12} + \lambda_{10}) p_1 = p_0 \lambda_{01} + \lambda_{21} p_2.$$

У силу (9.17) остання рівність приводиться до виду

$$p_1 \lambda_{12} = \lambda_{21} p_2,$$

далі, запишемо аналогічно

$$p_2 \lambda_{23} = \lambda_{32} p_3,$$

і взагалі,

$$p_{k-1} \lambda_{k-1,k} = \lambda_{k,k-1} p_k,$$

де  $k$  приймає всі значення від 0 до  $n$ . Отже, фінальні ймовірності  $p_0, p_1, \dots, p_n$  задовольняють рівнянням





$$p_0 \left( 1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} + \dots + \frac{\lambda_{n-1,n}\dots\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1}\dots\lambda_{21}\lambda_{10}} \right) = 1,$$

або

$$p_0 = \left( 1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} + \dots + \frac{\lambda_{n-1,n}\dots\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1}\dots\lambda_{21}\lambda_{10}} \right)^{-1}. \quad (9.24)$$

Коефіцієнти при  $p_0$  у кожній з формул (9.20) – (9.23) є послідовними членами ряду, які стоять після одиниці у формулі (9.24). Виходить, обчислюючи  $p_0$ , ми знайдемо ці коефіцієнти.

Більш точно визначення неперервного процесу розмноження та загибелі полягає в наступному: деякий процес є процесом розмноження та загибелі, якщо він є однорідним ланцюгом Маркова з множиною станів  $\{S_1, S_2, \dots, S_n, \dots\}$ , якщо народження та загибель є незалежними подіями (це впливає безпосередньо з марковської властивості). При цьому повинні виконуватися наступні умови:

1)  $\Pr$  [точно 1 народження в проміжку часу  $(t, t+\Delta t)$  | об'єм популяції рівний  $i$ ] =  $\lambda_i \Delta t + o(\Delta t)$ ;

2)  $\Pr$  [точно 1 загибель у проміжку часу  $(t, t+\Delta t)$  | об'єм популяції рівний  $i$ ] =  $\mu_i \Delta t + o(\Delta t)$ ;

3)  $\Pr$  [точно 0 народжень у проміжку часу  $(t, t+\Delta t)$  | об'єм популяції рівний  $i$ ] =  $1 - \lambda_i \Delta t + o(\Delta t)$ ;

4)  $\Pr$  [точно 0 загибелей у проміжку часу  $(t, t+\Delta t)$  | об'єм популяції рівний  $i$ ] =  $1 - \mu_i \Delta t + o(\Delta t)$ .

Згідно із цими припущеннями кратні народження, кратні загибелі та одночасні народження і загибелі протягом малого проміжку часу  $(t, t+\Delta t)$  заборонені в тому розумінні, що ймовірність таких коротких подій має порядок  $o(\Delta t)$ .

Ймовірність того, що неперервний процес розмноження та загибелі в момент часу  $t$  перебуває в стані  $S_i$  (об'єм популяції рівний  $i$ ) визначається як

$$\begin{aligned} \frac{dp_i(t)}{dt} &= -(\lambda_i + \mu_i)p_i(t) + \lambda_{i-1}p_{i-1}(t) + \mu_{i+1}p_{i+1}(t), \quad i \geq 1; \\ \frac{dp_0(t)}{dt} &= -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t), \quad i = 0. \end{aligned} \quad (9.25)$$

Для розв'язку отриманої системи диференціальних рівнянь у нестационарному випадку, коли ймовірності  $p_i(t)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$  залежать від часу, необхідно задати розподіл початкових ймовірностей  $p_i(0)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$  при  $t = 0$ . Крім того, повинна задовольнятися нормувальна умова.

Розглянемо тепер найпростіший процес чистого розмноження, який визначається як процес, для якого  $\mu_i = 0$  при всіх  $i$ . Крім того, для ще більшого спрощення завдання припустимо, що  $\lambda_i = \lambda$  для всіх  $i = 0, 1, 2, \dots$ . Підставляючи ці значення в рівняння (9.25) одержимо

$$\begin{aligned} \frac{dp_i(t)}{dt} &= -\lambda p_i(t) + \lambda p_{i-1}(t), \quad i \geq 1; \\ \frac{dp_0(t)}{dt} &= -\lambda p_0(t), \quad i = 0. \end{aligned} \quad (9.26)$$

Для простоти припустимо також, що процес починається в нульовий момент часу при нульових членах, тобто:

$$p_i(0) = \begin{cases} 1, & i = 0; \\ 0, & i \neq 0. \end{cases} \quad (9.27)$$

Звідси для  $P_0(t)$  одержуємо розв'язок

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}. \quad (9.28)$$

Підставляючи цей розв'язок у (9.26) при  $i = 1$ , приходимо до рівняння

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = -\lambda p_1(t) + \lambda e^{-\lambda t}. \quad (9.29)$$

Розв'язок цього диференціального рівняння, має вигляд

$$p_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}. \quad (9.30)$$

Далі по індукції як розв'язок рівняння (9.26) знаходимо

$$p_i(t) = \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}, \quad i \geq 0, \quad t \geq 0. \quad (9.31)$$

Це є розподілом Пуассона. Таким чином, процес чистого розмноження з постійною інтенсивністю  $\lambda$  приводить до послідовності народжень, яка утворює пуассонівський процес.

Найбільший інтерес у практичному плані представляють ймовірності станів процесу розмноження та загибелі в режимі, що встановився. Припускаючи, що процес є ергодичним, тобто існують межі  $\lim_{t \rightarrow \infty} P_i(t)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , перейдемо до визначення граничних ймовірностей  $p_i$ .

Рівняння для визначення ймовірностей стаціонарного режиму можна оде-

ржати безпосередньо з (9.25), враховуючи, що  $dp_i(t) / dt = 0$  при  $t \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} -(\lambda_i + \mu_i)p_i + \lambda_{i-1}p_{i-1} + \mu_{i+1}p_{i+1} &= 0, \quad i \geq 1; \\ -\lambda_0p_0 + \mu_1p_1 &= 0, \quad i = 0. \end{aligned} \quad (9.32)$$

Отримана система рівнянь розв'язується з урахуванням нормувальної умови.

Систему рівнянь (9.23) для режиму процесу розмноження та загибелі, що встановився, можна скласти безпосередньо за графом інтенсивностей переходів, застосовуючи принцип рівності потоків ймовірностей до окремих станів процесу. Наприклад, якщо розглянути стан  $S_i$  у режимі, що встановився, тобто, коли інтенсивність потоку ймовірностей у  $S_i = \lambda_{i-1}p_{i-1} + \mu_{i+1}p_{i+1}$  й інтенсивність потоку ймовірностей з  $S_i = (\lambda_i + \mu_i)p_i$ ,  $i \geq 1$ .

У стані рівноваги ці два потоки повинні бути рівні, і тому безпосередньо одержуємо

$$\lambda_{i-1}p_{i-1} + \mu_{i+1}p_{i+1} = (\lambda_i + \mu_i)p_i. \quad (9.33)$$

Але ж це і є першою рівністю у системі (9.32). Аналогічно можна одержати і другу рівність системи. Ті ж самі міркування про збереження потоку, які були наведені раніше, можуть бути застосовані і до потоку ймовірностей крізь будь-яку замкнену границю. Наприклад, замість того, щоб виділяти кожний стан і записувати для нього рівняння, можна вибрати послідовність контурів, перший з яких охоплює стан  $S_0$ , другий – стан  $S_0$  та  $S_1$ , і т.д., включаючи щораз у нову границю черговий стан. Тоді для  $i$ -го контуру (навколишнього стану  $S_0, S_1, \dots, S_{i-1}$ ) умову збереження потоку ймовірностей можна записати в наступному простому вигляді:

$$\lambda_{i-1}p_{i-1} = \mu_i p_i, \quad i \geq 1. \quad (9.34)$$

Для складання останньої системи рівнянь потрібно провести вертикальну лінію, що розділяє сусідні стани, і порівняти потоки через границю, що утворилася.

Загальний розв'язок системи рівнянь має вигляд

$$p_i = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i} p_0, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (9.35)$$

або, враховуючи, що, за визначенням, добуток по порожній множині дорівнює одиниці:

$$p_i = p_0 \prod_{k=0}^{i-1} \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (9.36)$$

Таким чином, усі ймовірності для режиму, що встановився, виражаються через єдину невідому константу  $p_0$ , яка при підсумовуванні за всіма  $i$  становить:

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{k=0}^{i-1} \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}}}. \quad (9.37)$$

### 9.3. Синергетичне поєднання можливостей марковських моделей

Основне поняття синергетики – визначення структури як стану, що виникає в результаті різноманітної та неоднозначної поведінки таких багатоелементних структур або багатофакторних середовищ, які не деградують до стандартного для замкнених систем усереднення термодинамічного типу, а розвиваються внаслідок відкритості, припливу енергії ззовні, нелінійності внутрішніх процесів, появи особливих режимів із загостренням і наявністю більш одного стійкого стану. При розгляданні марковського процесу як моделі «поведінки» таких структур дослідники зустрічаються з багатьма проблемами, розв'язок яких може бути знайдений на шляху взаємодії марковських моделей різних видів, оскільки, відповідно до принципів синергетики, коли нелінійні динамічні системи поєднуються, нове утворення не дорівнює сумі частин, а утворює систему іншої організації або систему іншого рівня.

Головна проблема моделювання марковських процесів полягає в тому, що кількість станів моделюючої системи та можливих переходів швидко зростає з ростом кількості елементів в ній. Крім того, види марковських моделей, що існують, не дозволяють поєднувати стохастичну основу такого підходу із цілком детермінованими подіями, що відбуваються при реальній експлуатації конкретних технічних об'єктів. Одним з діючих методів підвищення надійності відповідальних об'єктів є структурне резервування – введення додаткових резервних елементів структури, які при абсолютній надійності елементів вихідної системи не є функціонально необхідними.

Моделювання життєвого циклу (ЖЦ) таких об'єктів зручніше за все здійснювати за допомогою методів марковського аналізу станів, що використовують діаграму переходів, моделюючих аспекти надійності поведінки системи в часі. Головною перевагою застосування таких методів є те, що вони дозволяють легко моделювати багаточисленні стратегії технічного обслуговування. Крім того, в марковській моделі можна відбити порядок, в якому відбуваються багаторазові відмови. На жаль, інші методи аналізу надійності не завжди дозволяють враховувати складні стратегії технічного обслуговування.

Марковська система розглядається як набір елементів, кожний з яких може існувати тільки в одному із двох станів: неприцездатному або працездатному. Структурний аналіз марковських систем ґрунтується на тому припущенні, що

система в цілому може існувати в різних станах, кожний з яких визначається специфічною комбінацією працездатного та непрацездатного станів її елементів. У випадковий момент відмови або відновлення хоча б одного елемента вся система може перейти з одного стану в наступний за часом. Найважливішим компонентом такого аналізу є *прогноз ушкоджень структури*, що представляє собою «розклад» майбутніх відмов окремих елементів систем, які резервуються. Прогнозуюча модель повинна, при цьому, містити дві основні підмоделі: підмодель *прогнозу ушкоджень структури* проєктованих (керованих) об'єктів протягом їхніх життєвих циклів (ЖЦ) і підмодель *чисельної оцінки критеріїв надійності* цих об'єктів.

Існує багато видів марковських моделей, частина яких найбільше підходить для прогнозування та оцінки надійності.

Зокрема, саме для цього створюється емпірико-статистична (ЕС) *модель*, робота якої побудована на безпосередній оцінці ушкоджень, які відбуваються в об'єкті при його стендових і полігонних випробуваннях. Маючи більший «практичний досвід» прогнозування заелементних ушкоджень, така модель, на жаль, не може оцінити поточний стан об'єкта в цілому, тим більше, ідентифікувати його відмову.

*Напівмарковські* (НМ) *моделі* створені для моделювання дискретних об'єктів у неперервному часі, однак для їхнього навчання необхідна інформація, отримана при практичних випробуваннях об'єкта моделювання, що не завжди зручно, особливо, на етапі проєктування об'єкта.

І, нарешті, *морфологічні* (МО) *марковські моделі* застосовні при ідентифікації станів складних систем, але малоприсадибні для моделювання ЖЦ реальних об'єктів.

Таким чином, марковські моделі є універсальним засобом для вивчення та прогнозування багатьох динамічних процесів. Однак реальне застосування цього засобу в багатьох випадках обмежується відсутністю інформації про поведінкові тенденції в розвитку відповідних динамічних систем, а також діючих і, головне, швидкопрацюючих методів ідентифікації відмов та інтегральної оцінки надійності пропонованих технічних рішень, необхідних як при проєктуванні, так і при керуванні складними резервованими об'єктами.

Метою є створення інформаційної системи підтримки прийняття рішень в САПР і АСУ, заснованої на синергетичному об'єднанні можливостей різного виду марковських моделей складних динамічних систем з резервуванням, в основному, в області техніки.

Розглянемо структуру складного об'єкта у вигляді  $n$  окремих взаємозалежних елементів. Якщо система прийняла стан  $z$ , то вона проводить у ньому деякий час, загалом кажучи, випадковий, а потім, внаслідок відмови або відновлення будь-якого елемента, «стрибокподібно» переходить у новий стан. Таким чином, у цьому випадку всі реалізації фазового процесу  $\{Z(t)\}$  є *кусочно-постійними*. Будемо вважати також зв'язки абсолютно надійним, а елементи такими, що можуть перебувати тільки у двох станах: справному та несправному. Прийmemo також, що система поглинаюча, тобто вузли, що відмовили, не від-

новлюються і подальші переходи з них неможливі.

Головною особливістю прогнозування експлуатації таких систем з резервуванням є те, що на всіх ітераціях ЖЦ, крім останнього, сумарне ушкодження не призводить до відмови, отже, перед моделлю виникає проблема «призначення» деякої сукупності ушкоджень на кожній такій ітерації. Природно припустити, що в реальному житті нагромадження ушкоджень носить стохастичний характер: не буває двох зовсім однакових об'єктів (особливості виготовлення), однакових умов їх роботи (особливості експлуатації) і однакових випадковостей, що підстерігають об'єкти.

Розглянемо простий приклад. Нехай в якості об'єкта представлена деяка система, структура якої складається з  $n = 7$  елементів. Початковий стан системи – момент  $i$  – характеризується їхньою справністю (рис. 9.15).

Сукупність переходів на графі можливих станів об'єкта в процесі його експлуатації є множиною варіантів зміни станів системи на одній ітерації ЖЦ. Потужність цієї множини, навіть для відносно простих об'єктів, надзвичайно велика. Так, у нашому прикладі тільки на першій ітерації перехід до моменту  $j$  може бути реалізовано 127 способами:

$$S_7 = C_7^1 + C_7^2 + C_7^3 + C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7 = 127. \quad (9.38)$$

Загальна кількість варіантів швидко росте при збільшенні  $n$ . Оскільки система має надлишкову структуру, частина  $S_n$  отк цих переходів призведе до відмови системи в цілому, а частина  $S_n$  спр – ні. Очевидно, що

$$S_{n \text{ від}} + S_{n \text{ спр}} = S_n. \quad (9.39)$$

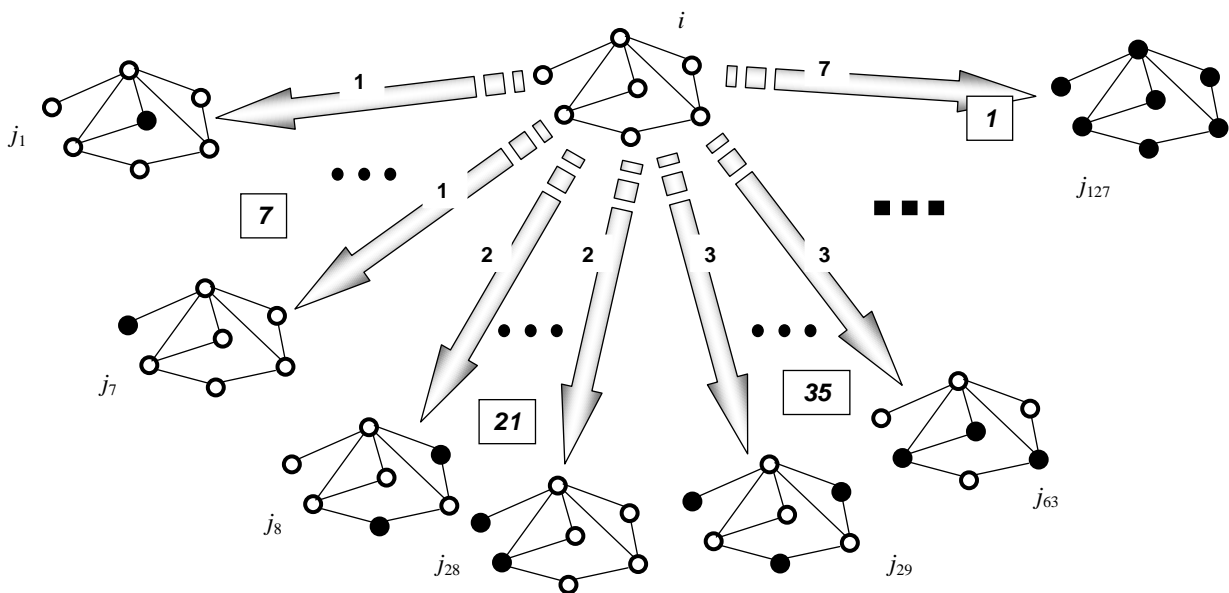


Рис. 9.15. Схема 127 можливих переходів семивузлової системи зі стану  $i$  у новий стан  $j$  на одній ітерації ЖЦ

На розглянутому в нашому прикладі етапі ЖЦ система в будь-який момент часу зі стану  $i$  може перейти в стан  $j$ , при цьому може відбутися відмова будь-якої комбінації із семи елементів по 1, 2, ..., 6 (переходи  $ij_1 - ij_{126}$ ) і, нарешті, можуть відмовити всі елементи (перехід  $ij_{127}$ ). Кожний з переходів від  $i$  до  $j_1 \dots j_{127}$ , відповідно, характеризується ймовірностями  $p_1 \dots p_{127}$ , значення яких визначаються трьома групами факторів:

- внутрішніми властивостями системи (конструкцією елементів і зв'язків, технологічними переходами та ін.);
- умовами зовнішнього середовища (механічні навантаження, температурний вплив та ін.);
- непередбаченими випадковими впливами, джерела яких перебувають як усередині, так і поза системою.

Тут виникають *перша та друга задачі*: визначити ймовірності  $p_1 \dots p_{127}$  і статистичні характеристики часу настання переходів  $\tau_{ji}$  для реальної системи, що працює в реальних умовах експлуатації. Ці задачі вирішуються в результаті комплексного застосування ЕС і НМ моделей.

У випадку виходу системи із чергової ітерації в працездатному стані моделювання може бути продовжене від обраного «кореня» (рис. 9.16).

Вибір може бути обґрунтований рядом причин і необов'язково відповідати найбільш імовірному переходу. Тому, у рамках розв'язку *третьої задачі* на кожній ітерації моделювання ЖЦ необхідно вибрати один шлях серед  $S_n$  спр можливих, причому ця величина визначається кількістю елементів і характером останніх. Фактично, саме тут вирішується питання про вибір «кореня» подальшої еволюції, оскільки вона може бути продовжена від будь-якого стану з підмножини  $S_n$  спр, а потужність цієї підмножини, особливо на початкових стадіях ЖЦ резервованих систем, мало відрізняється від потужності множини  $S_n$ .

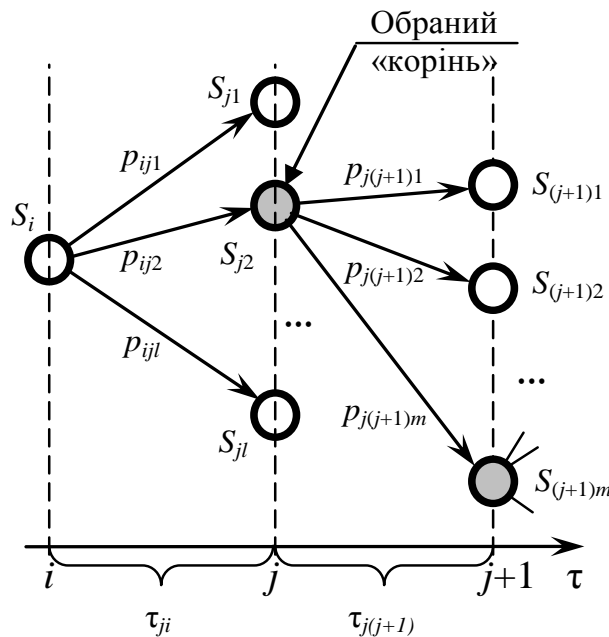


Рис. 9.16. Схема можливих рухів системи по ітераціях життєвого циклу



Ця задача вирішується в результаті комплексного застосування ПМ і МО моделей. Аналогічні міркування можна застосовувати до всіх інших переходів ЖЦ системи:  $j \rightarrow (j+1)$ ;  $(j+1) \rightarrow (j+2)$  і т.д., що зберігають працездатність системи в цілому.

**Четверта задача** полягає в ідентифікації відмови на послідовних позиціях еволюції системи. Ці задачі вирішуються в результаті комплексного застосування ЕС і МО моделей.

І, нарешті, інтегральна оцінка надійності об'єкта здійснюється в рамках розв'язку *n'ятої задачі*. Для цього використовується МО модель (табл. 9.2), заснована на обчисленні ентропійного критерію надійності

$$K = - \sum_{i=n_1+1}^{n_2-1} [p_i \log_2 p_i + (1-p_i) \log_2 (1-p_i)], \quad (9.40)$$

де  $p_i$  – імовірність відмови системи після ушкодження  $n$  її елементів.

Таблиця 9.2

Використання марковських моделей різних типів для розв'язання задач інформаційної підтримки структурного проектування та управління

№	Зміст задачі	Застосовувані моделі		
		ЕС	НМ	МО
1	Визначення ймовірностей переходів	+	+	–
2	Визначення часу переходів	+	+	–
3	Вибір «кореня» наступного переходу	–	+	+
4	Ідентифікація відмови	+	–	+
5	Інтегральна оцінка надійності	–	–	+

Використання ентропії для оцінки й порівняння складних технічних систем, «поведінка» яких має ознаки стохастичності, здобуває все більше поширення. У нашому прикладі вона дає можливість при діагностиці оцінити технічний стан системи одним числом, що відіграє у багатьох випадках головну роль, наприклад, при необхідності швидкого добору варіанта конструкції в САПР або варіанта структурної перебудови системи в управлінні.

#### 9.4. Немарковські моделі

Марковські моделі далеко не завжди можуть адекватно представляти усе різноманіття еволюції системи.

Наразі в існуючій марковській парадигмі проявляється все більше неузгодженостей та труднощів. Основна причина – неврахування пам'яті в марковському підході. Тому вони принципово не можуть бути послідовно описані за до-

помогою наявної парадигми.

Шлях до адекватного опису систем біологічного, інформаційного та соціально-економічного плану лежить через побудову теорії процесів з пам'яттю, або як її ще називають – **теорії немарковських процесів**, що описує зміну структур. Якщо в марковських процесах джерелом руху служить енергія, то в немарковських найважливішою додатковою характеристикою служить негентропія як захід упорядкування, запорука складності структури. Марковські процеси локальні в часі. Знаючи стан системи в будь-який момент часу  $t_0$ , можна в принципі визначити імовірнісну картину поведінки системи в майбутньому; ця картина не міняється від додаткових відомостей про події при  $t < t_0$ . Немарковські процеси враховують ці додаткові відомості, пам'ять про минуле; і по своїй природі нелокальні в часі.

Опис немарковських процесів за допомогою добре розробленої теорії стохастичних диференціальних систем, у якій використовуються стохастичні диференціальні рівняння, наприклад, рівняння Фоккера – Планка, може бути лише наближенням. Це обумовлене тим, що диференціальні рівняння зв'язують величини в поточний момент часу і не можуть врахувати пам'ять немарковського процесу. Немарковський процес може бути в принципі описаний за допомогою інтегральних стохастичних рівнянь, що дозволяють урахувати спадкоємні властивості процесу.

Тому на відміну від марковських процесів вони описуються не диференціальними рівняннями, а інтегро-диференціальними (саме інтегрування за часом дозволяє враховувати минуле). За допомогою цих рівнянь може бути визначена еволюція системи. Це одне із принципових відмінностей між двома парадигмами в математичному описі явищ.

Таким чином, немарковський процес – випадковий процес, еволюція якого після будь-якого заданого значення часу  $t$  залежить від еволюції, що передувала цьому моменту часу. Інакше кажучи, «майбутнє» немарковського процесу залежить від його «минулого». Немарковський процес – це випадковий процес із пам'яттю, при цьому, говорячи про пам'ять процесу, маємо на увазі, що від характеру еволюції процесу в минулому залежать його статистичні характеристики в майбутньому. Немарковський процес протиставляється марковському процесу.

Прикладом немарковського процесу може служити фліккер-шум, спостережуваний у системах, що мають різну фізичну природу. Зокрема, експериментально спостережувані флуктуації кінетичних коефіцієнтів (наприклад, флуктуації коефіцієнта електропровідності) мають спектральну щільність, характерну для фліккер-шуму. Фліккер-шум є основним типом шуму, що обмежує чутливість електронних приладів у низькочастотній частині спектра.

Відзначимо також, що вплив марковського процесу на будь-яку динамічну систему призводить до того, що її відгук являє собою в загальному випадку немарковський процес. Сума двох марковських процесів, загалом кажучи, є немарковським процесом. Немарковськими будуть також процеси, утворені при інтегруванні марковського. До класу немарковських процесів відносяться також,

реальні радіотехнічні сигнали при їхній амплітудній і фазовій модуляції сукупністю детермінованих і випадкових процесів.

Типовий випадковий процес – броуновський рух частинки в вязкому середовищі – також, загалом кажучи, відноситься до класу немарковських процесів. Насправді, броуновська частинка, рухаючись у в'язкому середовищі, захоплює частинки середовища, що її оточують, які, у свою чергу, починають впливати на броуновську частинку. Такий вплив залежить від характеру руху частинок середовища, який, у свою чергу, залежить від того, як рухалася броуновська частинка раніше. Немарковськими, наприклад, будуть флуктуації інтенсивності люмінесценції, у тому випадку, якщо зовнішній вплив на люмінофор піддається білому або дробовому шуму.

Принципово немарковськими процесами є випадкові процеси в складних системах. До них відносять коливання курсу акцій, зміну середньої температури Землі та інші процеси.

В біології слід розрізняти пам'ять, пов'язану з генотипом і фенотипом. Фенотип – сукупність ознак і властивостей особи, що формуються в процесі взаємодії її генетичної структури (генотипу) і зовнішнього середовища. Фенотип обумовлений як генотипом, так і зовнішніми умовами протікання відповідного немарковського процесу.

До останнього часу використання немарковського підходу у фізиці носило досить обмежений характер. Показано, що до немарковським процесам відноситься широкий клас фізичних задач, але їх немарковська природа присутня неявно, сховано, вона залишається на другому плані. Немарковський підхід перспективний для реології – сукупності методів дослідження руху та деформації реальних середовищ. У фізиці твердого тіла немарковські рівняння використовуються при описі процесів, пов'язаних із гістерезисом. Вони також виникають у процесах, зв'язаних зі структурою дефектів. Побудоване узагальнене немарковське рівняння Больцмана, що описує щільний газ. Для коливальних хімічних реакцій, зокрема реакції Белоусова – Жаботинського, у ряді експериментальних досліджень відзначалося, що індукційний період до початку коливань залежить від передісторії. У цілому створюється враження, що у фізиці, незважаючи на різноманітність явищ, пов'язаних з немарковськими процесами, йдеться про локальні збурювання існуючої марковської парадигми.

Інформаційні структури, як і матеріальні, характеризуються негентропією  $S$ . Розподіл кількості інформації  $I$  задається співвідношенням:

$$I = I_0 \exp(-I/\rho). \quad (9.41)$$

Величина  $\rho$  служить індикативним показником стану інформаційної системи.

Для немарковських процесів слушний негентропійний принцип інформації, згідно з яким слід розглядати єдине рівняння для інформації та негентропії.

Для замкнених систем приріст їх суми менше або дорівнює нулю. Для відкритих систем необхідно враховувати обмін не тільки речовиною та енергією,

але й інформацією (негентропією). Будь-який досвід, що дає інформацію про фізичну систему, приводить, у середньому, до зменшення негентропії системи або її оточення, тобто інформація оплачується негентропією. Подібно тому, як енергія перетворюється з однієї форми на іншу, негентропія переходить від однієї структури до іншої. Якщо цей процес оборотний, то він відбувається без втрат.

Для конкретного вивчення інформаційних процесів суттєвим є врахування немарковського підходу. До них відноситься ефект концентрації – різка асиметрія рівноважних розподілів. У загальному випадку різні частини розподілів суттєво різні за своїми властивостями. З одного боку – досить ефективним для системи в цілому виявляється регулювання тієї її частини, яка відповідає більшим значенням  $S$ , з іншого боку – не слід піддавати надмірній регламентації основну масу об'єктів з малим  $S$ . Наприклад, зі збільшенням деталізації інформаційної документації в САПР (інструкцій, приписань, проектів) відбувається швидкий кількісний ріст інформаційного масиву при досить незначному прирості структурної інформації.

Важливо також врахування ієрархічної структури інформації. Серед понять є вищі за ієрархією (з більшим  $S$ ). Успіх інформаційного впливу обумовлений правильним вибором таких понять і концентрацією зусиль саме на них. Ефективність сприйняття матеріалу також у значній мірі визначається ієрархічно – структурованою подачею матеріалу (включаючи заголовки, резюме, немонотонність викладу).

У природних інформаційних системах рівновага по  $S$  встановлюється за рахунок стохастичних процесів. Виникають переходи на більш високі негентропійні рівні, інформація структурується, створюються нові загальні поняття.

Таким чином, немарковські структури носять змішаний характер, вони містять і матеріальну, і інформаційну складові.

## 9.5. Приховані марковські моделі

В описаних вище марковських моделях кожному фізичному явищу відповідав певний стан моделі. Ця модель, на жаль, занадто обмежена і їй не під силу вирішення багатьох актуальних проблем. У цьому розділі ми розглянемо марковські моделі, в яких спостережувана послідовність – це результат переходів відповідно до позначених ймовірностей. У цьому випадку модель (прихована марковська модель – ПММ) – це результат двох випадкових процесів. Перший – прихований процес – його ніяк не можна зареєструвати, але його можна охарактеризувати за допомогою іншого випадкового процесу, який надає нам набір сигналів – спостережувану послідовність.

Прихована марковська модель – статистична модель, що імітує роботу процесу, схожого на марковській процес із невідомими параметрами, і задачею ставиться отримання невідомих параметрів на основі спостережуваних. Отримані параметри можуть бути використані надалі в аналізі, наприклад, для розпі-

знавання образів. ПММ може бути розглянута як найпростіша Байєсовська мережа довіри.

Перші замітки про приховані марковських моделях опублікував Баум в 1960-х роках, і вже в 70-х їх вперше застосували при розпізнаванні мови. Із середини 1980-х ПММ застосовуються при аналізі біологічних послідовностей, зокрема ДНК.

Основне застосування ПММ одержали в області розпізнавання мови, тексту, рухів та біоінформатики. Крім того, ПММ застосовуються в кріптоаналізі, машинному перекладі.

На рис. 9.18 наведено приклад діаграми переходів у прихованій марковській моделі.

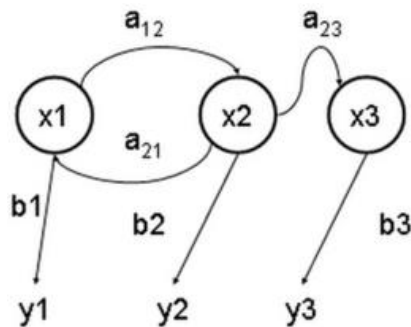


Рис. 9.18. Діаграма переходів у прихованій марківській моделі:  
 $x$  – приховані стани;  $y$  – спостережувані результати;  
 $a$  – імовірності переходів;  $b$  – імовірність результату

Представимо двох друзів, що обговорюють щовечора по телефону, що вони сьогодні робили днем. Ваш друг може робити лише три речі: гуляти в парку, ходити за покупками або вбиратися в кімнаті. Його вибір ґрунтується лише на погоді, яка була в момент прийняття рішення. Ви нічого не знаєте про погоду в тому регіоні, де живе ваш друг, але ви можете, ґрунтуючись на його рішеннях, спробувати встановити, яка погода була.

Погода представима у вигляді марковського ланцюга, вона має два стани: сонячно або дощ, але ви не можете самі побачити її, оскільки вона прихована від вас. Щодня ваш друг приймає одне із трьох можливих рішень: прогулянка, покупки або прибирання. Ви можете довідатися про рішення вашого друга, тому це спостережуване значення. У цілому ми одержуємо ПММ.

**Структура прихованої марковської моделі.** У звичайній марковській моделі стан видимий спостерігачеві, тому ймовірності переходів – єдиний параметр. У прихованій марковській моделі ми можемо стежити лише за змінними, на які впливає даний стан. Кожний стан має імовірнісний розподіл серед усіх можливих вихідних значень. Тому послідовність символів, згенерована ПММ, надає інформацію про послідовність станів.

Діаграма, представлена на рис. 9.19, показує загальну структуру ПММ. Овали являють собою змінні з випадковим значенням. Випадкова змінна  $x(t)$  є значенням прихованої змінної в момент часу  $t$ . Випадкова змінна  $y(t)$  – це зна-

чення спостережуваної змінної в момент часу  $t$ . Стрілки на діаграмі символізують умовні залежності.

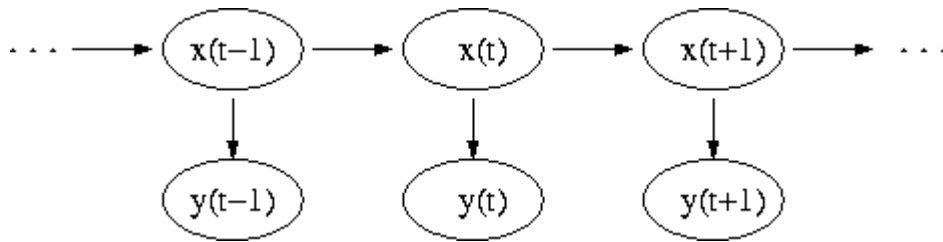


Рис. 9.19. Діаграма, що відбиває структуру прихованої марковської моделі

З діаграми видно, що значення прихованої змінної  $x(t)$  (у момент часу  $t$ ) залежить тільки від значення прихованої змінної  $x(t-1)$  (у момент часу  $t-1$ ). Це називається властивістю Маркова. Хоча, у той же час, значення спостережуваної змінної  $y(t)$  залежить тільки від значення прихованої змінної  $x(t)$  (обидві в момент часу  $t$ ).

Імовірність побачити послідовність  $Y = y(0), y(1), \dots, y(L-1)$  довжиною  $L$  дорівнює

$$P(Y) = \sum_X P(Y | X)P(X), \quad (9.42)$$

де сума пробігає по всіх можливих послідовностях прихованих вузлів  $X = x(0), x(1), \dots, x(L-1)$ . Метод підрахунку повного перебору значень  $P(Y)$  дуже трудомісткий для багатьох задач із реального життя в силу того, що кількість можливих послідовностей прихованих вузлів дуже велика.

Дамо формальне визначення елементам ПММ і пояснимо, як модель генерує спостережувану послідовність. ПММ визначається наступними елементами:

1.  $N$  – загальна кількість станів у моделі. Незважаючи на те що стани в ПММ є схованими, у багатьох випадках є відповідність між станом моделі і реальним станом процесу. Наприклад, при підкиданні монети кожний стан відповідає обраній монеті. Загалом, перехід у будь-який обраний стан можливий з будь-якого стану всієї системи (у тому числі і сам в себе); з іншого боку, лише певні шляхи переходів становлять інтерес у кожній конкретній моделі. Позначимо сукупність станів моделі множиною  $S = \{S_1, S_2, \dots, S_N\}$ , а поточний стан у момент часу  $t$  як  $q_t$ .

2.  $M$  – кількість можливих символів у спостережуваній послідовності, розмір алфавіту спостережуваної послідовності. У випадку з підкиданням монети – це 2 символи: орел і решка. Алфавіт спостережуваної послідовності позначимо як  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_M\}$ .

3. Матриця ймовірностей переходів (або матриця переходів)  $A = \{a_{ij}\}$ , де

$$a_{ij} = P [q_{t+1} = S_j | q_t = S_i], \quad 1 \leq i, j \leq N, \quad (9.43)$$

тобто це ймовірність того, що система, що перебуває в стані  $S_i$ , перейде в стан  $S_j$ . Якщо для будь-яких двох станів у моделі можливий перехід з одного стану в інший, то  $a_{ij} > 0$  для будь-яких  $i, j$ . В інших ПММ для деяких  $i, j$  ймовірність переходу  $a_{ij} = 0$ .

4. Розподіл ймовірностей появи символів в  $j$ -му стані  $B = \{b_j(k)\}$ , де

$$b_j(k) = P [v_k | q_t = S_j] \quad 1 \leq j \leq N, \quad 1 \leq k \leq M, \quad (9.44)$$

$b_j(k)$  – ймовірність того, що в момент часу  $t$ , система, що перебуває в  $j$ -му стані (стан  $S_j$ ), видасть  $k$ -й символ (символ  $v_k$ ) у спостережувану послідовність.

5. Розподіл ймовірностей початкового стану  $\pi = \{\pi_i\}$ , де

$$\pi_i = P [q_1 = S_i], \quad 1 \leq i \leq N, \quad (9.45)$$

тобто ймовірність того, що  $S_i$  – це початковий стан моделі.

Сукупність значень  $N, M, A, B$  і  $\pi$  – це прихована марковська модель, яка може згенерувати спостережувану послідовність

$$O = O_1 O_2 \dots O_T, \quad (9.46)$$

де  $O_t$  – один із символів алфавіту  $V$ , а  $T$  – це кількість елементів у спостережуваній послідовності.

ПММ будує спостережувану послідовність по наступному алгоритму

1. Вибираємо початковий стан  $q_1 = S_i$  відповідно до розподілу  $\pi$ .
2. Встановлюємо  $t = 1$ .
3. Вибираємо  $O_t = v_k$  відповідно до розподілу  $b_j(k)$  у стані ( $S_i$ ).
4. Переводимо модель у новий стан  $q_t + 1 = S_j$  відповідно до матриці переходів  $a_{ij}$  з урахуванням поточного стану  $S_i$ .

Встановлюємо час  $t = t + 1$ ; вертаємося до кроку 3, якщо  $t < T$ ; інакше – закінчуємо виконання.

Підводячи підсумок, помітимо, що повний опис ПММ складається із двох параметрів моделі ( $N$  і  $M$ ), опису символів спостережуваної послідовності та трьох масивів ймовірностей –  $A, B$  і  $\pi$ . Для зручності використовують наступний запис

$$\lambda = (A, B, \pi) \quad (9.47)$$

для позначення достатнього опису параметрів моделі.

Існує три основні задачі, які повинні бути розв'язані для того, щоб модель могла успішно функціонувати.

Задача 9.1. Дано: спостережувана послідовність  $O = O_1, O_2, \dots, O_T$  і мо-

дель  $\lambda = (A, B, \pi)$ . Необхідно обчислити ймовірність  $P(O | \lambda)$  того, що дана спостережувана послідовність побудована саме для даної моделі.

Це задача оцінки моделі, яка полягає в обчисленні ймовірності того, що модель відповідає заданій спостережуваній послідовності. До суті цієї задачі можна підійти і з іншого боку: наскільки обрана ПММ відповідає заданій спостережуваній послідовності. Такий підхід має більшу практичну цінність. Наприклад, якщо в нас існує питання вибору найкращої моделі з набору вже існуючих, то розв'язок першої задачі дає нам відповідь на це питання.

Задача 9.2. Дано: спостережувана послідовність  $O = O_1, O_2, \dots, O_T$  і модель  $\lambda = (A, B, \pi)$ . Необхідно підібрати таку послідовність станів системи  $Q = q_1, q_2, \dots, q_T$ , яка найкраще відповідає спостережуваній послідовності, тобто «пояснює» спостережувану послідовність.

Це задача, в якій можна зрозуміти, що ж відбувається в схованій частині моделі, тобто знайти «правильну» послідовність, яку проходить модель. Ясно, що абсолютно точно не можна визначити цю послідовність. Тут можна говорити лише про припущення з відповідним ступенем вірогідності. Проте для наближеного розв'язання цієї проблеми звичайно користуються деякими оптимальними показниками, критеріями. На жаль, не існує єдиного критерію оцінки для визначення послідовності станів. При розв'язанні другої задачі необхідно щораз приймати рішення щодо того, які показники використовувати. Дані, отримані при розв'язанні використовуються для вивчення поведінки побудованої моделі, знаходження оптимальної послідовності її станів, для статистики, тощо.

Задача 9.3. Підібрати параметри моделі  $\lambda = (A, B, \pi)$  таким чином, щоб максимізувати  $P(O | \lambda)$ .

Розв'язання задачі 3 полягає в оптимізації моделі таким чином, щоб вона якнайкраще описувала реальну спостережувану послідовність. Спостережувана послідовність, за якою оптимізується ПММ, прийнято називати навчальною послідовністю, оскільки за допомогою її ми «навчаємо» модель. Задача навчання – це найважливіша задача для більшості проєктованих ПММ, оскільки вона полягає в оптимізації параметрів ПММ на основі навчальної спостережуваної послідовності. Таким чином створюється модель, що щонайкраще описує реальні процеси.



### 9.6. Питання до самоконтролю

1. Марковські моделі дискретних систем.
2. Марковські процеси.
3. Поняття випадкового процесу.
4. Класифікація марковських випадкових процесів.
5. Марковські процеси з дискретним часом.
6. Марковські ланцюги.
7. Марковські процеси з неперервним часом.
8. Процеси загибелі та розмноження.
9. Марковські моделі надійності.
10. Синергетичне поєднання можливостей марковських моделей.
11. Моделювання працездатності ОІНС в міру внесення пошкоджень в її структуру.
12. Динаміка відновлюваних систем.
13. Немарковські моделі. Поняття негентропії.
14. Приховані марковські моделі. Три задачі, розв'язувані такими моделями.

## ЧАСТИНА IV ІНТЕЛЕКТУАЛЬНІ МОДЕЛІ

### Розділ 10 НЕЧІТКІ МОДЕЛІ \*

#### 10.1. Основні поняття та визначення

##### 10.1.1. Основні визначення

**В**изначення 10.1. Множина є об'єднанням в одне ціле об'єктів, що мають деякі загальні властивості.

Основні поняття теорії множин:  $X$  – множина,  $A$  – підмножина  $X$ . Вони формально записуються як:

$$A \subset X. \quad (10.1)$$

Якщо елемент  $x$  множини  $X$  є елементом підмножини  $A \subset X$ , то це позначається формулою

$$x \in A. \quad (10.2)$$

Множина  $X$  є *універсальною* множиною, якщо з її елементів формуються всі підмножини, розглянуті в обраному класі задач. Приклади універсальних множин: множина дійсних чисел, множина чисел натурального ряду, множина неперервних функцій, множина днів тижня, множина жителів регіону і т.д. Для представлення належності елемента  $x$  підмножині  $A$  використовують поняття *характеристичної функції*  $\mu_A(x)$ , значення якої вказує, чи є  $x$  елементом  $A$ :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in A \\ 0, & \text{якщо } x \notin A \end{cases} \quad (10.3)$$

**Приклад 10.1.** Нехай  $X = (a, b, c, d, e, f)$ ,  $A = (a, c, f)$ . Запишемо тепер для кожного елемента з  $X$  степінь його належності підмножині  $A$ . Маємо:

---

\* В розділі використані матеріали монографії Л.Г. Раскіна та О.В. Сірої «Нечеткая математика. Основы теории. Приложения».

$$\mu_A(a) = 1, \mu_A(b) = 0, \mu_A(c) = 1, \mu_A(d) = 0, \mu_A(e) = 0, \mu_A(f) = 1.$$

На практиці використовуються й інші, еквівалентні способи опису ступеню належності елементів з  $X$  підмножині  $A$  :

$$A = \{(a, 1), (b, 0), (c, 1), (d, 0), (e, 0), (f, 1)\}, \quad (10.4)$$

або

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x = a, x = c, x = f \\ 0, & \text{якщо } x = b, x = d, x = e \end{cases}. \quad (10.5)$$

Щодо підмножин універсальної множини  $X$ , то для них вводяться наступні операції.

Для двох будь-яких підмножин  $A \in X$  і  $B \in X$  перетином  $A \cap B$  називається підмножина  $C$  така, що  $x \in C$ , якщо  $x \in A$  і одночасно  $x \in B$ , тобто

$$\mu_C(x) = \mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x). \quad (10.6)$$

Операцію перетину можна записати і як:

$$\mu_C(x) = \mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}. \quad (10.7)$$

Для двох будь-яких підмножин  $A \in X$  і  $B \in X$  об'єднанням  $A \cup B$  називається множина  $D$  така, що  $x \in D$ , якщо  $x \in A$ , але  $x \notin B$ , або  $x \in B$ , але  $x \notin A$ , або, на решті,  $x \in A$  і  $x \in B$ , тобто

$$\mu_D(x) = \mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x). \quad (10.8)$$

Використовується й інша форма завдання значення характеристичної функції результату об'єднання:

$$\mu_D(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}. \quad (10.9)$$

У наведених співвідношеннях операції  $\cap$  і  $\cup$  визначаються таблицями на рис. 10.1. і 10.2.

Доповненням  $A$  відносно  $X$  називається така підмножина  $A$ , для якої

$$A \cup \bar{A} = X, \quad A \cap \bar{A} = \emptyset \quad (10.10)$$

При цьому, якщо  $x \in A$ , то  $x \notin \bar{A}$ , тобто, якщо

$\cap$	0	1
0	0	0
1	0	1

Рис. 10.1. Визначення операції  $\cap$ 

$\cup$	0	1
0	0	1
1	1	1

Рис. 10.2. Визначення операції  $\cup$ 

$$\mu_A(x)=1, \text{ то } \mu_{\bar{A}}(x)=0. \quad (10.11)$$

Теорія нечітких множин є узагальненням й, певною мірою, переосмисленням основних понять і формалізмів звичайної теорії множин. У її основі лежать ідеї:

- багатозначної логіки, що визначила можливість переходу від двох до довільного числа значень істинності;
- теорії ймовірностей, яка, започаткувавши можливість коректного опису невизначеності експериментальних даних, відкрила шляхи визначення та інтерпретації не обов'язково булевої функції належності;
- дискретної математики, що запропонувала інструмент побудови моделей багаторівневих систем;
- теорії множин.

Формальний апарат останньої теорії послужив підставою для появи й розвитку нечіткої теорії множин.

**Визначення 10.2.** **Нечітка множина** є сукупністю елементів довільної природи, щодо кожного з яких не можна з повною мірою стверджувати чи належить цей елемент розглянутій сукупності даної множини чи ні.

Інакше кажучи, нечітка множина відрізняється від звичайної множини тим, що для всіх або частини її елементів не існує однозначної відповіді на запитання: «Належить чи не належить той або інший елемент розглянутій нечіткій множині?».

Підхід до формалізації поняття нечіткої множини полягає в узагальненні поняття характеристичної функції. При цьому нечіткі множини – природне узагальнення звичайних множин на випадок, коли характеристичні функції можуть приймати не тільки значення 0 або 1, але і будь-яке значення в інтервалі  $[0, 1]$ .

В теорії нечітких множин характеристична функція називається функцією належності, а її значення  $\mu_A(x)$  – ступенем належності елемента  $X$  до нечіткої множини  $A$ .

Формально нечітка множина  $A$  визначається як множина впорядкованих пар або кортежів виду:  $\langle x, \mu_A(x) \rangle$ , де  $x$  – елемент деякої універсальної множини або універсума  $X$ , а  $\mu_A(x)$  – функція належності, яка ставить у відповідність кожному з елементів  $x \in X$  деяке дійсне число з інтервалу  $[0, 1]$ , тобто

$$\mu_A(x): X \rightarrow [0, 1] \quad (10.12)$$

При цьому значення  $\mu_A(x) = 1$  для деякого  $x \in X$  означає, що елемент  $x$  напевно належить нечіткій множині  $A$ , а значення  $\mu_A(x) = 0$  означає, що елемент  $x$  напевно не належить нечіткій множині  $A$ .

Формально нечітку множину, що містить скінченну кількість елементів, записують як:

$$A = \{\langle x_1, \mu_A(x_1) \rangle, \langle x_2, \mu_A(x_2) \rangle, \dots, \langle x_n, \mu_A(x_n) \rangle\}, \quad (10.13)$$

а в загальному випадку:

$$A = \{\langle x, \mu_A(x) \rangle\}. \quad (10.14)$$

В літературі іноді використовуються інші позначення для опису нечітких множин.

Із усіх нечітких множин виділимо два часткові випадки, які мають свої класичні аналоги. Такою є порожня нечітка множина, яка не містить жодного елемента. Вона позначається символом  $\emptyset$  і формально визначається як така нечітка множина, функція належності елементів якої тотожно дорівнює нулю для всіх без винятку елементів:  $\mu_A(x) = 0, x \in X$ .

Іншу спеціальну множину – універсум уже було введено вище в якості звичайної множини, що містить в обраному класі задач усі можливі елементи. Формально слід вважати, що функція належності елементів універсума як нечіткої множини тотожно дорівнює одиниці для всіх без винятку його елементів:

$$\mu_A(x) = 1, x \in X. \quad (10.15)$$

Введемо тепер поняття носія нечіткої множини.

Визначення 10.3. Носієм нечіткої множини  $A$  називається звичайна множина  $A_S$ , яка містить ті і тільки ті елементи універсума, для яких значення функції належності відповідної нечіткої множини відмінні від нуля. Математично носій нечіткої множини визначається наступним виразом:

$$A_S = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\}. \quad (10.16)$$

Відмітимо, що в багатьох роботах для опису носія використовується позначення  $\text{supp } A$  (від англ. *support*).

Зрозуміло, що порожня нечітка множина має порожній носій, а носій універсума, розглянутого як нечітка множина, збігається із самим універсумом.

Для запису довільної нечіткої множини звичайно вказують значення її функції належності для елементів носія, оскільки значення функції належності для всіх інших елементів дорівнюють нулю.

Залежно від кількості елементів у нечіткій множині, за аналогією зі звичайними множинами, їх можна поділити на скінченні та нескінченні.

Визначення 10.4. Нечітка множина називається **скінченною**, якщо її носій є скінченною множиною. При цьому говорять, що така нечітка множина має скінченну потужність, яка чисельно дорівнює кількості елементів її носія як звичайної множини. Для завдання потужності довільної нечіткої множини  $A$  використовується позначення  $card(A)$ . Природньо вважати потужність порожньої множини рівною 0.

Аналогічним чином можна визначити нескінченні нечіткі множини як такі нечіткі множини, носій яких не є скінченною множиною. При цьому рахунковою нечіткою множиною будемо називати нечітку множину з рахунковим носієм, тобто носій якої має рахункову потужність  $\aleph_0$ .

Незліченою нечіткою множиною будемо називати нечітку множину з незліченим носієм, тобто носій якого має незлічену потужність або потужність континууму  $\aleph$ .

Розглянемо два основні способи, якими формально можуть бути задані довільні нечіткі множини.

1. Список з перерахуванням усіх елементів і відповідних їм значень функції належності, що утворюють розглянуту нечітку множину. При цьому елементи з нульовими значеннями функції належності в цьому списку просто не вказуються. Цей спосіб використовується для завдання нечітких множин зі скінченим дискретним носієм і невеликою кількістю елементів. Як ми вже відзначали, таку нечітку множину записують у вигляді:

$$A = \{ \langle x_1, \mu_A(x_1) \rangle, \langle x_2, \mu_A(x_2) \rangle, \dots, \langle x_n, \mu_A(x_n) \rangle \}, \quad (10.17)$$

де  $n$  – кількість елементів нечіткої множини  $A$ .

2. Аналітичний вираз для опису відповідної функції належності. Цей спосіб може бути використаний для завдання довільних нечітких множин як зі скінченим, так і з нескінченим носієм. У цьому випадку нечітку множину зручно записувати у вигляді  $A = \{ \langle x, \mu_A(x) \rangle \}$ , де  $\mu_A(x)$  – деяка функція, задана аналітично у формі  $f(x)$  або графічно у вигляді деякої кривої. При цьому вигляд функції  $f(x)$  цілком визначається тим, яку саме нечітку множину ця функція повинна описати.

### 10.1.2. Основні характеристики нечітких множин

Нехай  $A = \{ \langle x, \mu_A(x) \rangle \}$  – довільна нечітка множина (скінченна або нескінченна) з елементами з універсума  $X$  і функцією належності  $\mu_A(x)$ .

Множиною рівня  $\alpha$  ( $\alpha$ -зрізом) нечіткої множини  $A$  називається нечітка підмножина універсальної множини  $X$ , визначена за формулою

$$A_\alpha = \{ x \mid \mu_A(x) \geq \alpha \} \text{ де } \alpha \in [0, 1]. \quad (10.18)$$

Множина строгого рівня  $\alpha$  визначається у вигляді  $A_\alpha = \{ x \mid \mu_A(x) > \alpha \}$ . Зок-

рема, носієм нечіткої множини  $A$  є множина строгого рівня  $\alpha = 0$  множини  $A$ , тобто множина елементів, для яких  $\mu_A(x) > 0$ .

У випадку нескінченних нечітких множин для побудови множин  $\alpha$ -рівня слід на графіку відповідної функції належності провести пряму лінію  $y = \alpha$ . Після цього потрібно на осі  $X$  виділити ті точки або інтервали, для яких відповідні частини графіка розташовані не нижче цієї лінії.

Відмітимо, що для всіх множин  $\alpha$ -рівня довільної нечіткої множини  $A$  справедливе наступне твердження: якщо  $\alpha_1 \geq \alpha_2$ , то  $A_{\alpha_1} \subseteq A_{\alpha_2}$ .

**Визначення 10.5. Висота нечіткої множини.** Величина  $h_A = \sup\{\mu_A(x)\}$ , де супремум береться за всіма значеннями  $x \in A_S$ , називається *висотою* нечіткої множини  $A$ .

При цьому висота скінченної нечіткої множини  $A$  «невелике натуральне число» дорівнює 1 і відповідає двом елементам універсума: 1 і 2. Висота нечіткої множини  $B$ , яка представляє «дійсне число, яке приблизно дорівнює нулю» також дорівнює 1 і  $\mu_B(0) = 1$ .

**Визначення 10.6. Нормальна нечітка множина.** Нечітка множина  $A$  називається *нормальною*, якщо

$$\max \mu_A(x) = 1. \quad (10.19)$$

**Визначення 10.7. Субнормальна нечітка множина.** Нечітка множина  $A$  називається *субнормальною*, якщо її висота дорівнює 1, але умова (10.19) не виконується.

Довільну непусту нечітку множину можна привести до нормальної (тобто нормалізувати) за формулою

$$\tilde{\mu}_A(x) = \frac{\mu_A(x)}{\sup \mu_A(x)} = \frac{\mu_A(x)}{h_A}. \quad (10.20)$$

**Визначення 10.8. Унімодальна нечітка множина.** Нечітка множина  $A$  називається *унімодальною*, якщо її функція належності  $\mu_A(x)$  є унімодальною на носії множини  $A$ . При цьому точка  $x_m \in A_S$  є точкою максимуму функції належності, якщо

$$x_m = \arg \max_{x \in A_S^{\varepsilon}} \{\mu(x)\} \quad (10.21)$$

де  $A_{x_m}^{\varepsilon}$  –  $\varepsilon$ -околиця точки  $x_m$ .

Будь-яка точка  $x_m \in A$  нечіткої множини  $A$ , що задовольняє умові (10.21) називається *модальним значенням* або *модою* нечіткої множини  $A$ .

Якщо точка  $x_m$ , що задовольняє (10.21), є єдиною, то відповідна функція належності називається *строго унімодальною*.

**Визначення 10.9. Ядро нечіткої множини.** Ядром нечіткої множини  $A$  називається чітка множина  $A_1$ , елементи якої задовольняють умові:

$$A_1 = \{x \in X \mid \mu_A(x) = 1\}. \quad (10.22)$$

Наприклад, ядро нечіткої множини «невелике натуральне число» дорівнює двохелементній множині  $A_1 = \{1, 2\}$ . Ядро нечіткої множини  $B$  «дійсне число, приблизно рівне нулю» дорівнює одноелементній множині  $B_1 = \{0\}$ . Нечітка множина  $C$  «велике дійсне число» має порожнє ядро.

Зрозуміло, що якщо довільна нечітка множина є субнормальною, то ядро такої нечіткої множини буде порожнім.

**Визначення 10.10. Границі нечіткої множини.** Границями нечіткої множини називаються такі елементи універсума, для яких значення функції належності відмінні від 0 і 1. Інакше кажучи, границі нечіткої множини  $A = \{x, \mu_A(x)\}$  включають ті і тільки ті елементи універсума  $x \in X$ , для яких виконується умова:  $0 < \mu_A(x) < 1$ .

**Визначення 10.11. Точки переходу нечіткої множини.** Елементи нечіткої множини  $x \in A$ , для яких виконується умова:  $\mu_A(x) = 0,5$ , називаються точками переходу цієї множини  $A$ .

**Визначення 10.12. Найближча чітка множина.** Чітка множина  $A^*$ , найближча до нечіткої множини визначається як:

$$\mu_{A^*}(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \mu_A(x) \leq 0,5, \\ 1, & \text{якщо } \mu_A(x) > 0,5. \end{cases} \quad (10.23)$$

**Визначення 10.13. Опукла нечітка множина.** Нечітку множину  $A = \{x, \mu_A(x)\}$  з універсумом  $X$  називають опуклою, якщо для кожної пари точок  $x_1 \in X$ ,  $x_2 \in X$  її функція належності задовольняє нерівності

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}, \lambda \in [0, 1] \quad (10.24)$$

На рис. 10.3 і 10.4 зображені графіки двох функцій належності, перша з яких є опуклою, а друга – неопуклою. Крім того, слід відмітити, що перша функція належності є строго унімодальною з модою  $x_m = 5$ , а друга – не унімодальною і має два модальні значення:  $x_m = 2$  і  $x_m = 4$ .

**Показник розмитості нечітких множин.** Уже відзначалося, що нечіткі множини використовуються для опису погано визначуваних об'єктів, понять, що неоднозначно розуміються і трактуються за ситуацією. Запропоновано ввести показник цієї невизначеності, який названо *показник розмитості* (або мірою ентропії) нечітких множин. У якості цього показника запропонований функціонал, аналогічний ентропії, що використовується в теорії інформації.

Показник розмитості нечітких множин трактується по-різному. По-перше,



це числова характеристика внутрішньої невизначеності, двозначності, суперечливості, обумовленої неповною (частковою) належністю об'єктів розглянутій множині. По-друге, показник розмитості – величина відмінності нечіткої множини від найближчої чіткої множини. Зрозуміло, що технологія розрахунків показника розмитості залежить від того, яке саме трактування цього показника обране для оцінки розглянутої нечіткої множини.

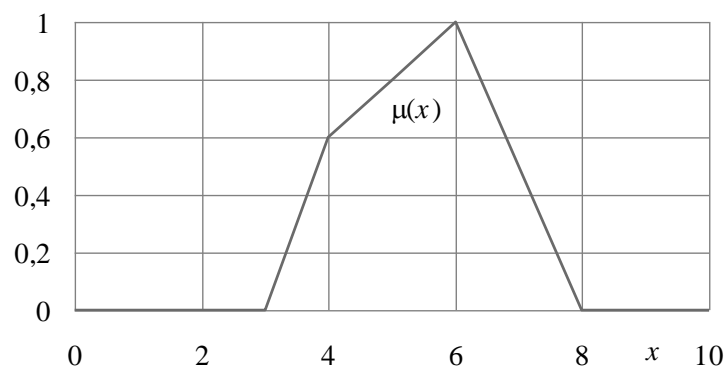


Рис. 10.3. Графік функції належності неопуклої нечіткої множини

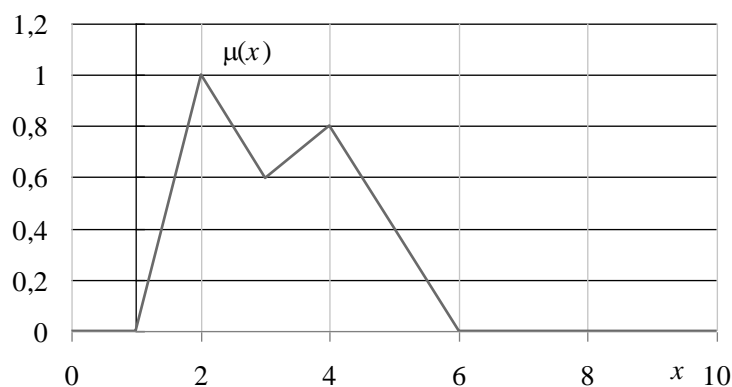


Рис. 10.4. Графік функції належності не випуклої нечіткої множини

Показник розмитості як величина внутрішньої невизначеності, двозначності об'єктів множини  $X$  стосовно деякої конкретної властивості, що характеризує ці об'єкти та визначає в  $X$  деяку множину об'єктів  $A$ , розраховується наступним чином. Якщо будь-який об'єкт  $x \in X$  має згадану конкретну властивість, але лише частково, то величину належності розглянутого об'єкта до множини об'єктів, що мають цю властивість можна оцінити значенням функції належності  $\mu_A(x) \in [0, 1]$ . Внутрішня невизначеність, двозначність об'єкта  $x$  стосовно цієї властивості проявляється в тому, що один і той же об'єкт, хоча й у різному ступені, належить двом протилежним класам: класу об'єктів, *що мають обрану властивість*, і класу об'єктів, *що не мають цю властивість*. Ця двозначність максимальна, коли ступені належності об'єкта  $x$  до обох класів рівні, тобто  $\mu_A(x) = \mu_{\bar{A}}(x) = 0,5$ . І, навпаки, двозначність мінімальна, коли об'єкт однозначно належить одному із класів, тобто  $\mu_A(x) = 1, \mu_{\bar{A}}(x) = 0$ , або  $\mu_A(x) = 0, \mu_{\bar{A}}(x) = 1$ .

Один з можливих способів розрахунку показника розмитості для скінченної множини  $A$ , що містить  $n$  елементів, полягає в обчисленні шеннонівської логарифмічної ентропії нечіткої множини

$$d(A) = \sum_{j=1}^n s_j(\mu_A(x_j)), \quad (10.25)$$

де  $s_j(\mu_A(x_j)) = -\mu_A(x_j) \ln \mu_A(x_j) - (1 - \mu_A(x_j)) \ln(1 - \mu_A(x_j)) = -\mu_A(x_j) \ln \mu_A(x_j) - \mu_{\bar{A}}(x_j) \ln \mu_{\bar{A}}(x_j)$ .

З іншого боку, показник розмитості може бути визначений за допомогою метрики як величина відмінності нечіткої множини від найближчої до неї звичайної множини.

Як ми вже відзначали, множиною  $A^*$ , найближчою до нечіткої множини  $A$ , є чітка, нерозмита множина з характеристичною функцією

$$\mu_{A^*}(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \mu_A(x) \leq 0,5, \\ 1, & \text{якщо } \mu_A(x) > 0,5. \end{cases} \quad (10.26)$$

Тоді показник розмитості визначається співвідношенням

$$d(A) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |\mu_A(x_j) - \mu_{A^*}(x_j)|. \quad (10.27)$$

Якщо в останньому співвідношенні замість хеммінгової метрики використовувати колмогорівську, то формула для розрахунків показника розмитості прийме вигляд:

$$d(A) = \frac{1}{n} \left[ \sum_{j=1}^n (\mu_A(x_j) - \mu_{\bar{A}}(x_j))^p \right]^{\frac{1}{p}}, \quad (10.28)$$

де  $p$  – позитивне, ціле число.

В окремих випадках, коли  $p = 1$  – одержимо хеммінгову відстань, а при  $p = 2$  – евклідову.

### 10.1.3. Основні типи функцій належності

Введене вище формальне визначення нечіткої множини не накладає ніяких обмежень на вибір вигляду її функції належності. Однак, практична робота з нечіткими множинами робить доцільним виділити деякі конкретні види функцій, аналітичне представлення яких забезпечує простоту та зручність виконання операцій над нечіткими множинами.

**Кусочно-лінійні функції належності.** Одним з найбільш простих типів

функцій належності є функції, які, як випливає з їхньої назви, складаються з відрізків прямих ліній. Типовими прикладами таких функцій є «трикутна» (рис. 10.5) і «трапецієподібна» (рис. 10.6) функції належності.

Трикутна функція належності в загальному випадку задається аналітично виразом:

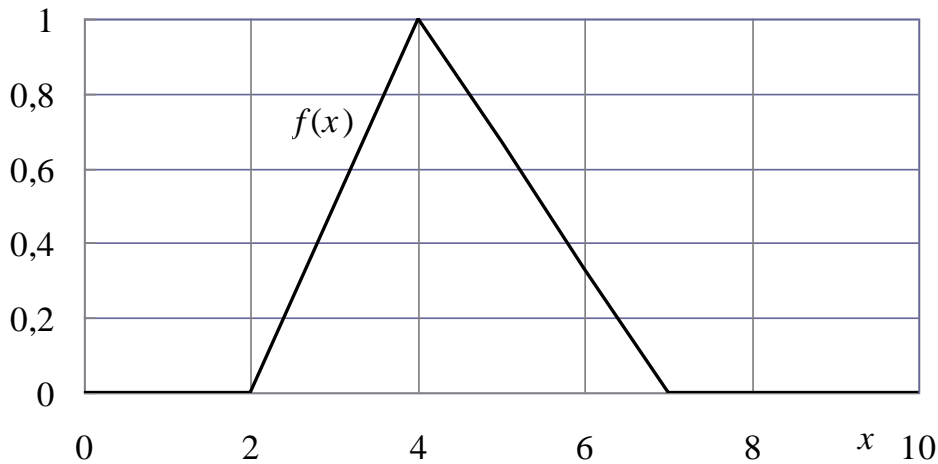


Рис. 10.5. Графік функції належності трикутної форми

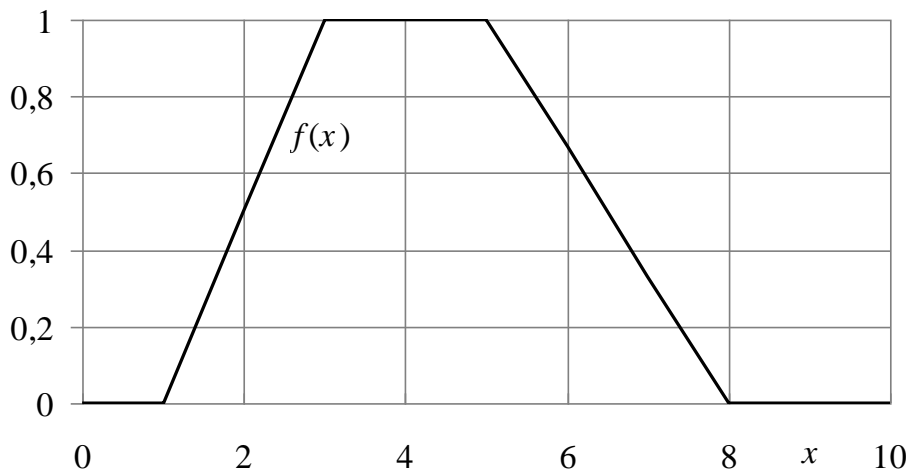


Рис. 10.6. Графік функції належності трапецієподібної форми

$$f(x; a, b, c) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b, \\ \frac{c-x}{c-b}, & b \leq x \leq c, \\ 0, & x > c, \end{cases} \quad (10.29)$$

де  $a, b, c$  – деякі числові параметри, що приймають довільні дійсні значення і упорядковані відношенням:  $a \leq b \leq c$ .

Для функції, зображеної на рис. 10.6, значення параметрів дорівнюють:  $a = 2$ ,  $b = 4$ ,  $c = 7$ . Ця функція належності породжує нормальну випуклу унімодальну нечітку множину з носієм – інтервалом  $[a, c]$ , границями  $[a, c] \setminus \{b\}$ , ядром  $\{b\}$  і модою  $b$ .

Трапецієподібна функція належності в загальному випадку може бути аналітично задана наступним виразом:

$$f(x; a, b, c, d) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b, \\ 1, & b \leq x < c, \\ \frac{d-x}{d-c}, & c \leq x \leq d, \\ 0, & x > d. \end{cases} \quad (10.30)$$

де  $a, b, c, d$  – деякі числові параметри, що приймають довільні дійсні значення і упорядковані відношенням:  $a \leq b \leq c \leq d$ .

Зрозуміло, що в окремому випадку, коли  $b = c$ , трапецієподібна функція належності вироджується в трикутну.

**Z-подібні і S-подібні функції належності.** Ці функції належності також одержали свою назву за виглядом кривих, які представляють їхні графіки.

Z-подібна функція належності може задаватися аналітично, наприклад:

$$f_{Z_1}(x; a, b) = \begin{cases} 1, & x \leq a, \\ 0.5 + 0.5 \cos\left(\frac{x-a}{b-a} \pi\right), & a < x \leq b, \\ 0, & x > b, \end{cases} \quad (10.31)$$

де  $a, b$  – деякі числові параметри, що приймають довільні дійсні значення і упорядковані відношенням:  $a < b$ . Графік цієї функції для деякої нечіткої множини  $A$  і універсума  $X = [0, 10]$  зображений на рис. 10.7.

Z-подібна функція може бути задана й іншим виразом:

$$f_{Z_1}(x; a, b) = \begin{cases} 1, & x \leq a, \\ 1 - 2^{p-1} \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^p, & a < x \leq \frac{a+b}{2}, \\ 2^{p-1} \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^p, & \frac{a+b}{2} < x \leq b, \\ 0, & x > b, \end{cases} \quad (10.32)$$

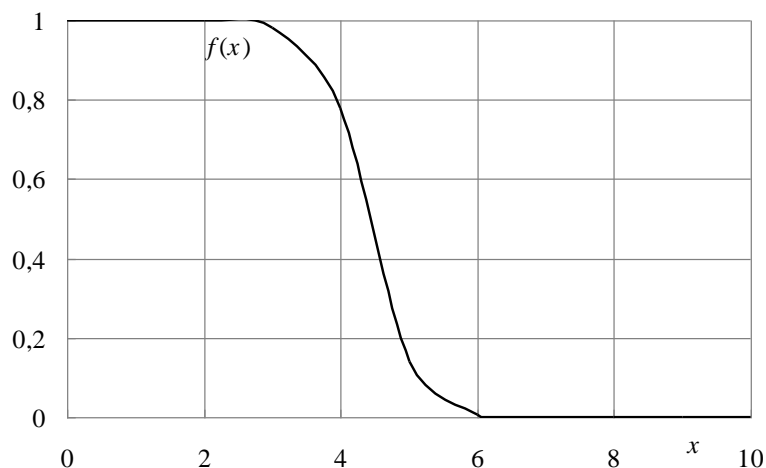


Рис. 10.7. Графік Z-подібної функції належності  $f_{Z1}$  для значень  $a = 3, b = 6$

де  $a, b$  – деякі числові параметри, що приймають довільні дійсні значення і упорядковані відношенням:  $a < b$ , а  $p$  – ціле позитивне число. Графік цієї функції для деякої нечіткої множини  $A$  і універсума  $X = [0, 10]$  зображений на рис. 10.8.

Z-подібні функції належності (10.30), (10.31) породжують нормальні опуклі нечіткі множини з ядром  $(-\infty, a]$  і носієм  $(-\infty, b)$ .

S-подібна функція належності може бути задана аналітично наступним виразом:

$$f_{S_1}(x; a, b) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ 0,5 + 0,5 \cos\left(\frac{x-b}{b-a} \pi\right), & a < x \leq b, \\ 1, & x > b, \end{cases} \quad (10.32)$$

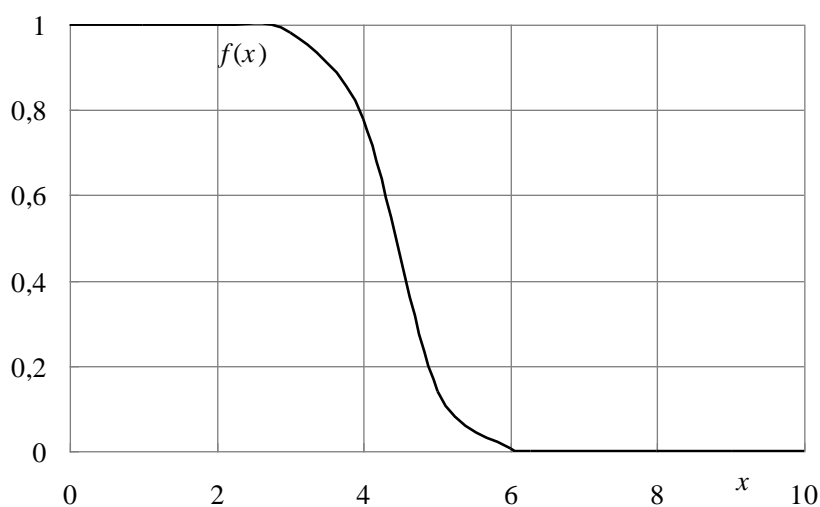


Рис. 10.8. Графік Z-подібної функції належності  $f_{Z1}$  для значень  $a = 3, b = 6, p = 2$

де  $a, b$  – деякі числові параметри, що приймають довільні дійсні значення і упорядковані відношенням:  $a < b$ . Графік цієї функції для деякої нечіткої множини  $A$  і універсума  $X = [0, 10]$  зображений на рис. 10.8.

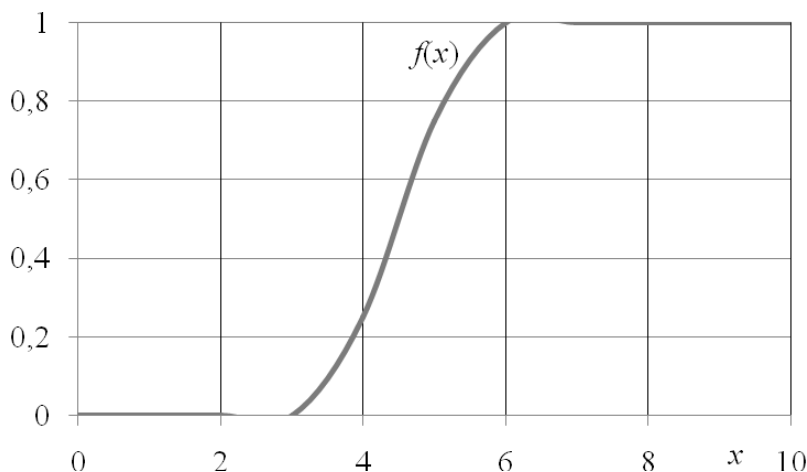


Рис. 10.8. Графік  $S$ -подібної функції належності  $f_{S1}$  для значень  $a = 3, b = 6$

$S$ -подібна функція належності може бути також задана виразом:

$$f_{S_1}(x; a, b) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ 2^{p-1} \left( \frac{x-a}{b-a} \right)^p, & a < x \leq \frac{a+b}{2}, \\ 1 - 2^{p-1} \left( \frac{b-x}{b-a} \right)^p, & \frac{a+b}{2} < x \leq b, \\ 1, & x > b, \end{cases} \quad (10.34)$$

де  $a, b$  – деякі числові параметри, що приймають довільні дійсні значення і упорядковані відношенням:  $a < b$ , а  $p$  – ціле позитивне число. Графік цієї функції для деякої нечіткої множини  $A$  і універсума  $X = [0, 10]$  зображений на рис. 10.10.

$S$ -подібні функції належності (10.32), (10.33) породжують нормальні випуклі нечіткі множини з ядром  $[b, \infty)$  і носієм  $(a, \infty)$ . Якщо в співвідношеннях (10.31) – (10.33) параметр  $p = 1$ , то описувані цими співвідношеннями функції стають кусочно-лінійними.

Більш гнучке завдання  $S$ -подібних і  $Z$ -подібних функцій належності одержують з використанням функцій вигляду

$$f_{S-Z}(x; b, c) = 0,5 + 0,5th(bx + c), \quad (10.35)$$

де  $b, c$  – числові параметри, що приймають довільні дійсні значення. Ця функ-

ція при деяких конкретних значеннях  $b$ ,  $c$  описує так звану сигмоїдальну функцію.

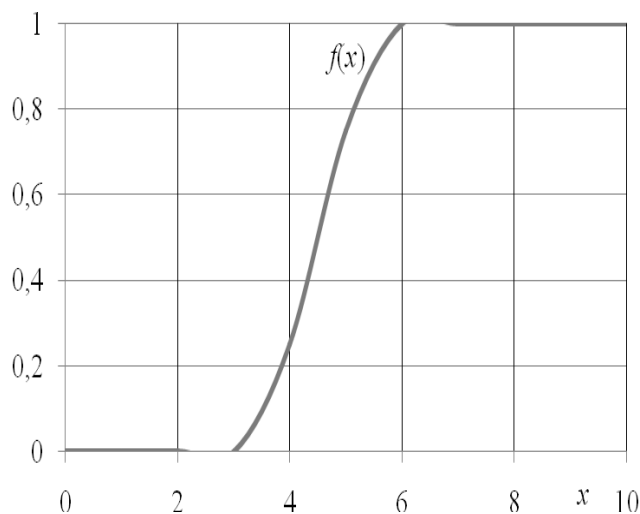


Рис. 10.10. Графік  $S$ -подібної функції належності  $f_{S1}$  для значень  $a = 3$ ,  $b = 6$ ,  $p = 2$

Нехай, наприклад,  $c = 0$ . Тоді

$$f_{S-Z}(x; b) = 0,5 + 0,5th(bx) = 0,5 + \frac{e^{bx} - e^{-bx}}{2(e^{bx} + e^{-bx})} = \frac{e^{bx}}{e^{bx} + e^{-bx}} = \frac{1}{1 + e^{-2bx}}. \quad (10.36)$$

При цьому, якщо  $b > 0$ , то отримана функція є  $S$ -подібною, якщо ж  $b < 0$ , то це –  $Z$ -подібна функція належності.

Графіки функції (10.34) для деякої нечіткої множини  $A$  і універсума  $X = [0, 10]$  зображені на рис. 10.11, 10.12.

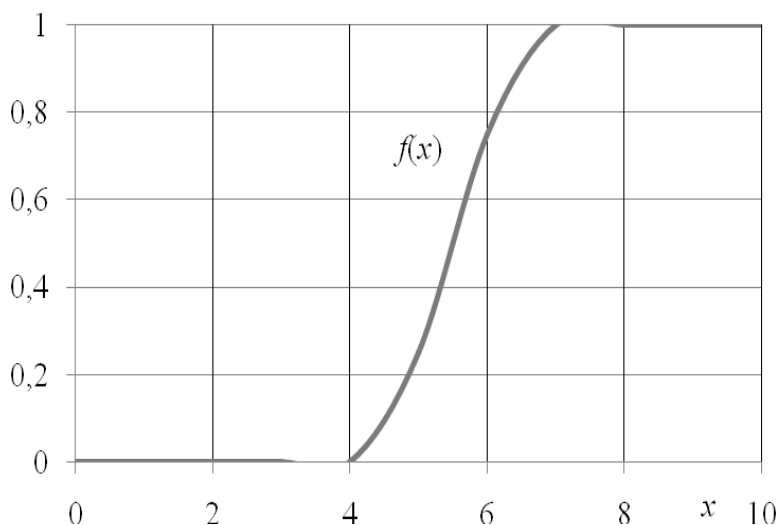


Рис. 10.11. Графік  $S$ -подібної функції належності  $f_{S-Z}$  для значень  $b = 1,5$ ,  $c = -9$

При цьому  $S$ -подібній функції належності відповідають значення параметрів  $b = 1,5$ ,  $c = -9$  (рис. 10.12), а  $Z$ -подібній функції належності відповідають значення параметрів  $b = -1,5$ ,  $c = 9$  (рис. 10.13).

Функції належності (10.34) породжують нормальні випуклі нечіткі множини з носієм і границею  $R$  і точкою переходу  $x = -\frac{c}{b}$ .

Як уже вказувалося, окремими випадками  $Z$ - і  $S$ -подібних кривих є лінійна  $Z$ -подібна функція і лінійна  $S$ -подібна функція.

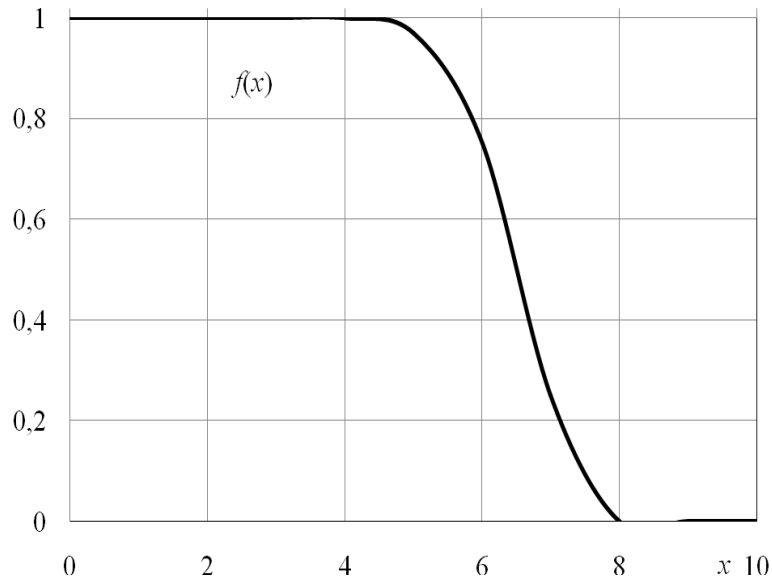


Рис. 10.12. Графік  $Z$ -подібної функції належності  $f_S - Z$  для значень  $b = -1,5$ ,  $c = 9$

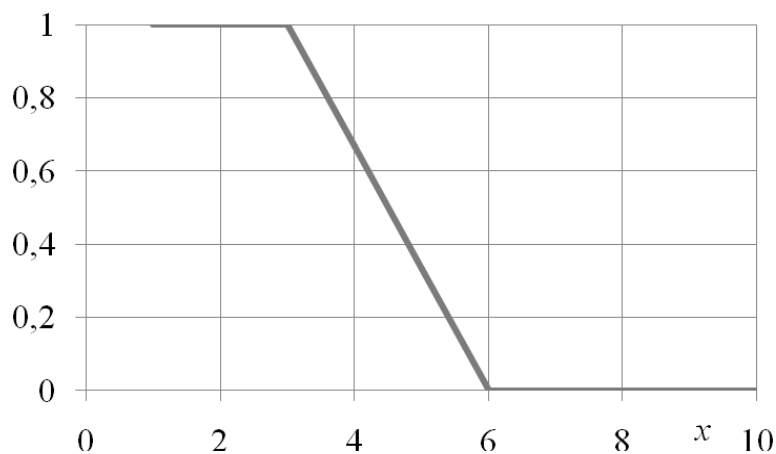


Рис. 10.13. Графік  $Z$ -подібної функції належності для значень  $a = 3$ ,  $b = 6$

При цьому лінійна  $Z$ -подібна функція в загальному випадку може бути задана аналітично наступним виразом:



$$f_{\downarrow}(x; a, b) = \begin{cases} 1, & x \leq a, \\ \frac{b-x}{b-a}, & a < x \leq b, \\ 0, & x > b, \end{cases} \quad (10.37)$$

де  $a, b$  – деякі числові параметри, що приймають довільні дійсні значення і упорядковані відношенням:  $a < b$ . Графік цієї функції для деякої нечіткої множини  $A$  і універсума  $X = [0, 10]$  зображений на рис. 10.13.

Лінійна  $S$ -подібна функція в загальному випадку задається аналітичним виразом:

$$f_{\uparrow}(x; a, b) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b, \\ 1, & x > b, \end{cases} \quad (10.38)$$

де  $a, b$  – деякі числові параметри, що приймають довільні дійсні значення і упорядковані відношенням:  $a < b$ . Графік цієї функції для деякої нечіткої множини  $A$  і універсума  $X = [0, 10]$  зображений на рис. 10.14.

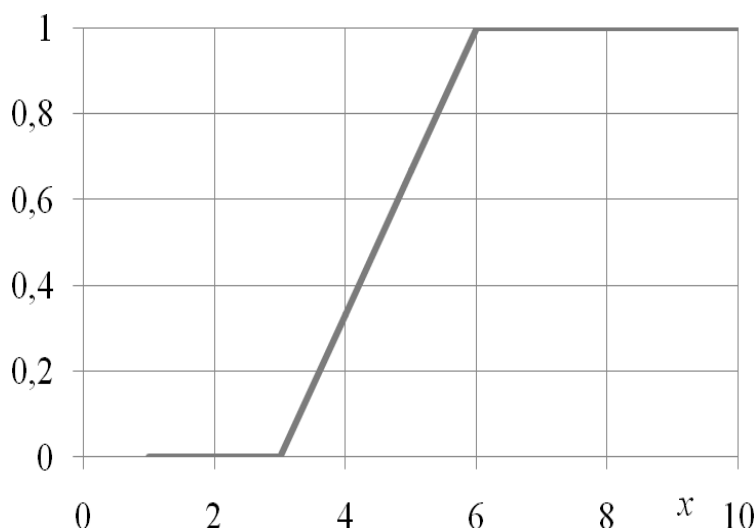


Рис. 10.14. Графік  $S$ -подібної функції належності для значень  $a = 3, b = 6$

Ці функції належності породжують нормальні випуклі нечіткі множини із границями  $(a, b)$ .

**П-подібні функції належності.** До цього типу функцій належності можна віднести цілий клас так званих дзвоноподібних кривих.

Один з можливих способів завдання  $\Pi$ -подібної функції належності полягає у використанні композиції  $S$ -подібної і  $Z$ -подібної функцій відповідно до співвідношення:

$$f_{\Pi_1}(x, a, b, c, d) = f_S(x; a, b) \cdot f_Z(x; c, d) \quad (10.39)$$

де  $a, b, c, d$  – деякі числові параметри, що приймають довільні дійсні значення і упорядковані відношенням:  $a < b < c < d$ .

При цьому можуть бути використані будь-які з розглянутих вище  $Z$ - і  $S$ -подібних функцій. Зокрема, якщо використовувати функції  $f_{S_1}$  і  $f_{Z_1}$ , то одержимо  $\Pi$ -функцію  $f_{\Pi_1}$ , графік якої для деякої нечіткої множини  $A$  і універсума  $X = [0, 10]$  зображений на рис. 10.15. При цьому значення параметрів для функції  $f_{S_1}$  мають величини  $a = 1, b = 4$ , а для функції  $f_{Z_1}$   $c = 5, d = 9$ .

Цей тип функцій належності породжує нормальні випуклі нечіткі множини з носієм  $(a, d)$  і ядром  $[b, c]$ .

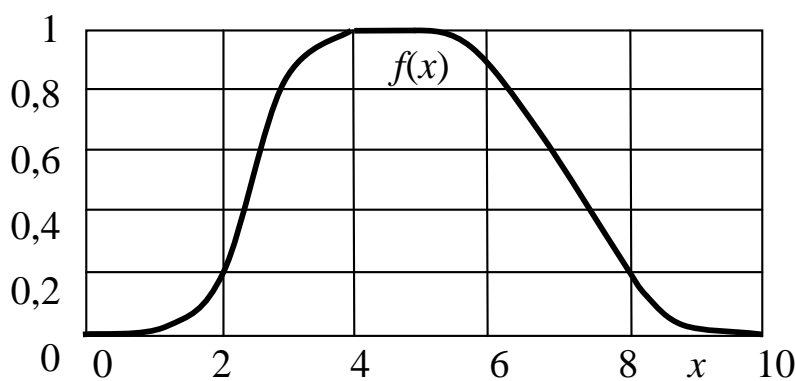


Рис. 10.15. Графік  $\Pi$ -подібної функції належності  $f_{\Pi_1}$  для значень параметрів  $a = 1, b = 4, c = 5, d = 9$

Інший приклад композиційного формування  $\Pi$ -подібних функцій – добуток двох сигмоїдальних функцій. Така функція в загальному випадку може бути аналітично задана:

$$f_{\Pi_2}(x, b_1, c_1, b_2, c_2) = f_{S-Z}(x; b_1, c_1) \cdot f_{Z-S}(x; b_2, c_2) \quad (10.40)$$

де  $b_1, c_1, b_2, c_2$  – деякі числові параметри, що приймають довільні дійсні значення, причому  $b_1 > 0, c_1 < 0, b_2 < 0, c_2 > 0$  і впорядковані відношенням:  $b_1 c_2 > b_2 c_1$

На рис. 10.16 наведений графік  $\Pi$ -подібної функції, отриманої відповідно до (10.39) для  $b_1 = 0,62, c_1 = -3, b_2 = -3, c_2 = 27$ .

Типова некомпозиційна дзвоноподібна функція аналітично задається наступним виразом:

$$f_{\Pi_3}(x; a, b, c) = \frac{1}{1 + \left| \frac{x-c}{a} \right|^{2b}}, \quad (10.41)$$

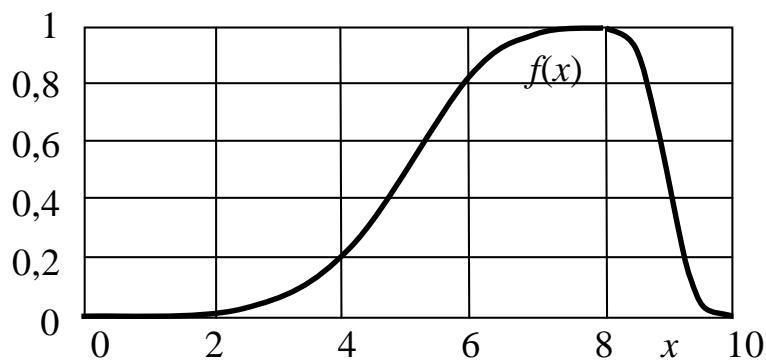


Рис. 10.16. Графік П-подібної функції належності  $f_{\Pi_2}$  для значень параметрів  $b_1 = 0,62$ ,  $c_1 = -3$ ,  $b_2 = -3$ ,  $c_2 = 27$

де  $a, b, c$  – деякі числові параметри, що приймають довільні дійсні значення, при цьому параметр  $b > 0$  (рис. 10.17).

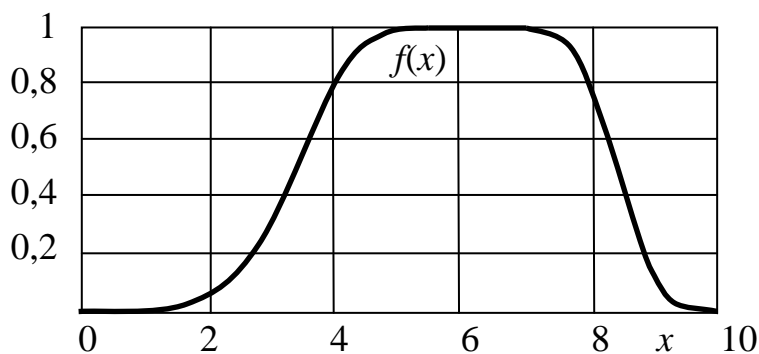


Рис. 10.17. Графік П-подібної функції належності  $f_{\Pi_3}$  для значень параметрів  $a = 2$ ,  $b = 4$ ,  $c = 6$

Тут  $\sigma$  і  $c$  – числові параметри, що приймають довільні дійсні значення, причому  $\sigma > 0$ . Графік такої функції при відповідних параметрах  $c$  і  $\sigma$  наведено на рис. 10.18.

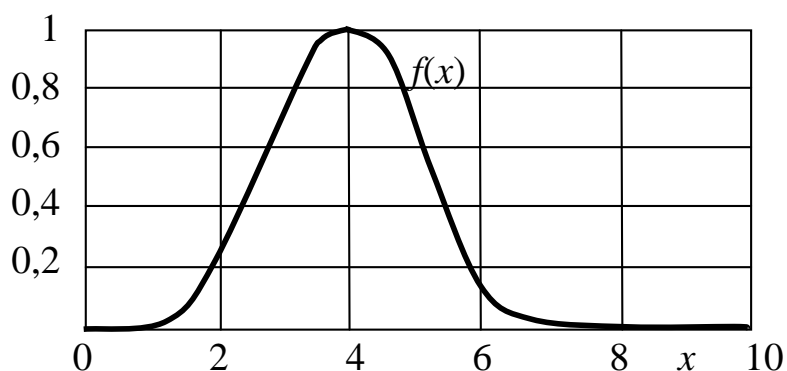


Рис. 10.18. Графік П-подібної функції належності  $f_{\Pi_4}$  для значень параметрів  $\sigma = 1$ ,  $c = 4$

Функції належності (10.40) та (10.41) породжують нормальні випуклі нечіткі множини.

Приведемо ще один, найбільш простий, зручний і тому часто застосовуваний спосіб формування дзвоноподібної функції належності з використанням гауссової кривої:

$$f_{\Pi_4}(x; \sigma, c) = e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \quad (10.42)$$

Нарешті, асиметрична дзвоноподібна функція належності може бути отримана відповідно до виразу

$$f_{\Pi_5}(x) = \exp\left\{-\frac{(x-\theta_1)^2}{2\theta_2^2}(1+\theta_3 \operatorname{sign}(x-\theta_1))\right\}. \quad (10.43)$$

де  $\operatorname{sign}(u) = \begin{cases} 1, & u > 0, \\ 0, & u = 0, \\ -1, & u < 0, \end{cases}$   $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  – дійсні числа, при чому  $\theta_2 > 0, |\theta_3| \leq 1$ .

На рис. 10.19 наведений графік П-подібної функції належності, що визначається для  $\theta_1 = 4, \theta_2 = 1, \theta_3 = -0,8$ .

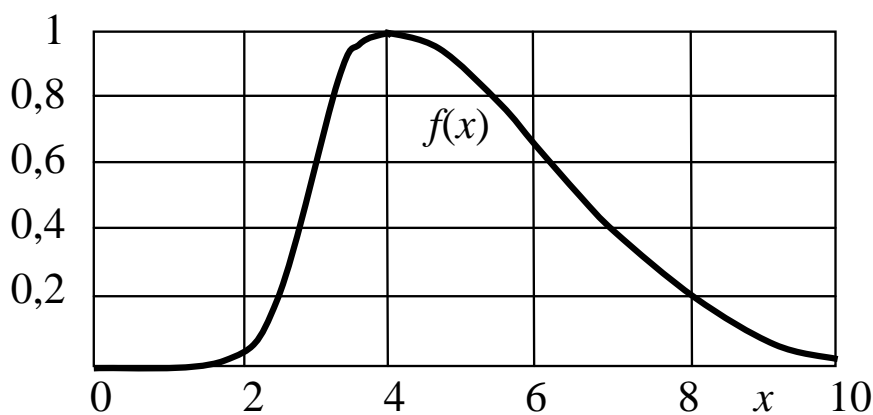


Рис. 10.19. Графік П-подібної функції належності  $f_{\Pi_5}(x)$  для значень параметрів  $\theta_1 = 4, \theta_2 = 1, \theta_3 = -0,8$

#### 10.1.4. Методи побудови функцій належності нечітких множин

В основі теорії з будь-якої області природознавства лежить дуже важливе поняття елементарного об'єкта. Наприклад, для механіки – це матеріальна точка, для електродинаміки – вектор напруженості поля. Для теорії нечітких множин основним поняттям є поняття нечіткої множини, яке характеризується і визначається функцією належності. За допомогою нечітких множин можна строго описувати властиві природі розпливчасті, не точно задані об'єкти, без формалі-

зації яких немає надії суттєво просунутися вперед у моделюванні інтелектуальних процесів.

Однак, основною проблемою, яка ускладнює інтенсивне застосування теорії нечітких множин при розв'язанні практичних задач, є те, що функція належності повинна бути задана поза самою теорією і, отже, її адекватність не може бути перевірена засобами теорії. У кожному відомому методі побудови функції належності формулюються свої вимоги та обґрунтування до вибору саме такої її побудови.

Л. Заде запропонував оцінювати ступінь належності числами з відрізка  $[0, 1]$ . Фіксація конкретних значень при цьому носить суб'єктивний характер. З одного боку, для експертних методів важливим є характер вимірів (первинні або похідні) і тип шкали, у якій одержують інформацію від експерта і яка визначає припустимий вид операцій, застосовуваних при експертній оцінці. З іншого боку, кожному об'єкту властиві два типи його властивостей: ті, які можна безпосередньо виміряти, і ті, які є якісними і вимагають попарного порівняння об'єктів, що мають оцінювану властивість, для того, щоб визначити їхнє місце стосовно розглянутого поняття.

Існує ряд методів побудови функції належності нечіткої множини за експертними оцінками, які можна розділити на дві групи: прямі та непрямі методи.

**Прямі методи** визначаються тим, що експерт або група експертів безпосередньо задають правила визначення значень функції належності, які характеризують дане поняття. При цьому, чим більше елемент  $x \in X$  володіє властивістю, тим ближчим до одиниці повинне бути значення функції належності. І, навпаки, чим менша міра властивості, тим ближче до нуля повинне бути це значення.

Якщо елемент  $x \in X$  однозначно не володіє розглянутою властивістю, то відповідне значення функції належності дорівнює нулю. Якщо ж елемент  $x \in X$  однозначно володіє розглянутою властивістю, то це значення дорівнює одиниці. Крім того, значення функції належності узгоджуються з експертними перевагами на множині об'єктів  $X$ :

- для будь-яких  $x_1, x_2 \in X, \mu_A(x_1) < \mu_A(x_2)$  тоді і тільки тоді, коли  $x_2$  переважніше  $x_1$ , тобто більшою мірою володіє властивістю  $A$ ;
- для будь-яких  $x_1, x_2 \in X, \mu_A(x_1) = \mu_A(x_2)$  тоді і тільки тоді, коли  $x_1$  і  $x_2$  рівною мірою володіють властивістю  $A$ .

Приклади прямих методів: безпосереднє завдання функції належності таблицею, формулою, перерахуванням.

Заде обґрунтовує призначення прямого методу наступним: «За своєю природою оцінка є наближенням. У багатьох випадках достатня досить приблизна характеристика набору даних, оскільки в більшості основних задач, розв'язуваних людиною, не потрібна висока точність.

Людський мозок використовує допустимість такої неточності, кодуючи інформацію, достатню для розв'язку задачі, елементами нечітких множин, які приблизно описують вихідні дані. Потік інформації, що надходить у мозок через органи зору, слуху, дотику, тощо, звужується таким чином у тонкий струмок

інформації, необхідної для розв'язання поставленої задачі із допустимим ступенем точності».

Процес побудови або завдання нечіткої множини на основі кількісних значень вимірюваної ознаки одержав спеціальну назву – *фазифікація* або приведення до нечіткості. Мова йде про те, що навіть якщо дослідникові буває відомо деяке значення вимірюваної величини, слід мати на увазі, що це значення відомо неточно, можливо з погрішністю або з випадковою помилкою.

При цьому, чим менша впевненість у точності виміру ознаки, тим більшим буде інтервал носія відповідної нечіткої множини. Саме із цієї причини фазифікація дозволяє більш адекватно представити неточність результатів фізичних вимірів.

У *непрямих* методах значення функції належності вибираються таким чином, щоб задовольняти заздалегідь сформульованим умовам. Експертна інформація формує тільки початкові дані для подальшої обробки. Додаткові умови можуть накладатися як на вид одержуваної інформації, так і на процедуру обробки.

Прикладами додаткових умов можуть служити: функція належності повинна відображати близькість до заздалегідь виділеного еталона; об'єкти множини  $X$  є точками в деякому параметричному просторі; результатом процедури обробки повинна бути функція належності, що задовольняє умовам інтервальної шкали; при попарному порівнянні об'єктів, якщо один об'єкт за деякою характеристикою оцінюється в  $a$  раз сильніше, ніж інший, то другий об'єкт обов'язково оцінюється в  $1/a$  раз сильніше, ніж перший, і т.д.

Як правило, прямі методи використовуються для опису понять, які характеризуються вимірними властивостями, такими як висота, зріст, вага, об'єм. У цьому випадку, у припущенні, що в процесі вимірів не робиться випадкових помилок, зручно безпосереднє завдання значень ступеню належності. Прямі виміри, засновані на безпосередньому визначенні функції належності, можуть використовуватися тільки в тому випадку, коли такі помилки незначні або малоймовірні.

Непрямі методи засновані на більш песимістичних уявленнях про людей як про «вимірювальні прилади». Розглянемо, наприклад, поняття «КРАСА», яке, на відміну від понять «ДОВЖИНА» або «ВИСОТА», є складним і важкоформалізуємим.

Практично не існує універсальних елементарних вимірних властивостей, через які визначаються подібні поняття. У таких випадках використовуються тільки рангові вимірювання при попарному порівнянні об'єктів. Непрямі методи більш трудомісткі, ніж прямі, але їх перевага – стійкість стосовно викривлень у вимірюваннях.

Для непрямих методів використовується умова «беззастережного екстремуму»: при визначенні ступеню належності множина досліджуваних об'єктів повинна містити, принаймні, два об'єкти, чисельні представлення яких на інтервалі  $[0, 1]$  приймають значення 0 і 1, відповідно.

Серед непрямих методів найбільше застосування одержав так званий ме-

тод попарних порівнянь. Цей метод використовується для скінченних нечітких множин і заснований на припущенні, що безпосереднє оцінювання значень функції належності  $\mu_A(x_i)$  у точках  $x \in X$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , важке, однак попарне їхнє порівняння в різних точках носія проблем не викликає.

Нехай за результатами експертного оцінювання побудована матриця  $A = (a_{ij})$ , кожний елемент якої оцінює величину відношення відповідних невідомих значень функції належності, тобто

$$a_{ij} = \frac{\mu_A(x_i)}{\mu_A(x_j)}, i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (10.44)$$

Поставимо задачу визначення невідомого набору значень  $\{\mu_A(x_i)\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Зі співвідношення (10.43) маємо

$$a_{ij} = \frac{\mu_A(x_j)}{\mu_A(x_i)} = \frac{1}{a_{ji}}, a_{ij} = 1, i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (10.45)$$

і, крім того,

$$a_{ij}a_{jk} = \frac{\mu_A(x_i)\mu_A(x_j)}{\mu_A(x_j)\mu_A(x_k)} = \frac{\mu_A(x_i)}{\mu_A(x_k)} = a_{ik}, i = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (10.46)$$

З (10.44) та (10.45) випливає, що матриця  $A = (a_{ij})$ , складена за правилом (10.43), є зворотньосиметричною і має транзитивність. Таку матрицю будемо називати погодженою.

Далі, з (10.43) одержимо

$$a_{ij} \frac{\mu_A(x_j)}{\mu_A(x_i)} = 1, i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (10.47)$$

звідки, склавши ліву і праву частини по  $j$ , маємо

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \mu_A(x_j) \frac{1}{\mu_A(x_i)} = \frac{1}{\mu_A(x_i)} \sum_{j=1}^n a_{ij} \mu_A(x_j) = n. \quad (10.48)$$

Тобто

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \mu_A(x_j) = n \mu_A(x_i), i = 1, 2, \dots, n. \quad (10.49)$$

Сукупність співвідношень (10.48) є системою лінійних алгебраїчних рівнянь щодо невідомих значень функції належності в точках  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Ця си-

стема в матричній формі має вигляд  $AM = nM$ , де  $M^T = (\mu_A(x_1), \mu_A(x_2), \dots, \mu_A(x_n))$ .

Звідси випливає, що для зворотньосиметричної погодженої матриці  $A$  є власним числом, яке дорівнює  $n$ , і є відповідний до цього числа позитивний власний вектор  $M$ , компонентами якого є шуканий набір значень функції належності. Таким чином, отримане співвідношення встановлює зв'язок між матрицею попарних порівнянь значень функції належності та самими цими значеннями. Зрозуміло, що якщо задана матриця  $A$ , то невідомий вектор  $M$  може бути отриманий шляхом розрахунків з використанням (10.49) власного вектора цієї матриці, відповідного до власного числа, яке дорівнює  $n$ .

Цей результат лежить в основі запропонованого Т. Сааті методу аналізу ієрархій. Разом з тим, як легко показати, шуканий вектор  $M$  може бути отриманий і набагато більш простим способом. З метою спрощення запису введемо наступні позначення:

$$\mu_A(x_i) = w_i, i = 1, 2, \dots, n, \quad W^T = (w_1, w_2, \dots, w_n). \quad (10.50)$$

Тоді, відповідно до (10.43) матриця  $A$  прийме вигляд

$$A = \begin{pmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \dots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \dots & \frac{w_2}{w_n} \\ \frac{w_3}{w_1} & \frac{w_3}{w_2} & \dots & \frac{w_3}{w_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \dots & \frac{w_n}{w_n} \end{pmatrix}. \quad (10.51)$$

Обчислимо суми елементів для кожного з рядків матриці  $A$ . Для довільного  $i$ -го рядка маємо

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n \frac{w_i}{w_j} = w_i \sum_{j=1}^n \frac{1}{w_j} = C w_i, i = \overline{1, n}. \quad (10.52)$$

Зі співвідношення (10.52) випливає, що кожний компонент власного вектора  $M$  з точністю до константи може бути розрахований безпосередньо за елементами матриці  $A$ . Константу  $C$  визначимо, виходячи із вимоги до нормування вектора  $M$ .

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1. \quad (10.53)$$

Виконаємо додавання по  $i$  лівої і правої частин співвідношення (1.52). При



цьому, з урахуванням (10.53) одержимо

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} = C \sum_{i=1}^n w_i = C. \quad (10.54)$$

Тоді

$$\mu_A(x_i) = w_i = \frac{1}{C} \sum_{j=1}^n a_{ij} = \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (10.55)$$

Легко перевірити, що одержуваний відповідно до (10.55) вектор  $M^T = (\mu_A(x_1), \mu_A(x_2), \dots, \mu_A(x_n))$  є власним вектором матриці  $A$ , відповідним до власного числа, рівного  $n$ .

$$A = \begin{pmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \dots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \dots & \frac{w_2}{w_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \dots & \frac{w_n}{w_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \frac{w_1}{w_j} \\ \sum_{j=1}^n \frac{w_2}{w_j} \\ \dots \\ \sum_{j=1}^n \frac{w_n}{w_j} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{w_i}{w_j}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{w_i}{w_j}} \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n \left( \frac{w_1}{w_k} \sum_{j=1}^n \frac{w_k}{w_j} \right) \\ \sum_{k=1}^n \left( \frac{w_2}{w_k} \sum_{j=1}^n \frac{w_k}{w_j} \right) \\ \dots \\ \sum_{k=1}^n \left( \frac{w_n}{w_k} \sum_{j=1}^n \frac{w_k}{w_j} \right) \end{pmatrix} = \quad (10.56)$$

$$= \frac{1}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{w_i}{w_j}} \begin{pmatrix} \frac{w_1}{w_1} \cdot w_1 \sum_{j=1}^n \frac{1}{w_j} + \frac{w_1}{w_2} \cdot w_2 \sum_{j=1}^n \frac{1}{w_j} + \dots + \frac{w_1}{w_n} \cdot w_n \sum_{j=1}^n \frac{1}{w_j} \\ \frac{w_2}{w_1} \cdot w_1 \sum_{j=1}^n \frac{1}{w_j} + \frac{w_2}{w_2} \cdot w_2 \sum_{j=1}^n \frac{1}{w_j} + \dots + \frac{w_2}{w_n} \cdot w_n \sum_{j=1}^n \frac{1}{w_j} \\ \dots \\ \frac{w_n}{w_1} \cdot w_1 \sum_{j=1}^n \frac{1}{w_j} + \frac{w_n}{w_2} \cdot w_2 \sum_{j=1}^n \frac{1}{w_j} + \dots + \frac{w_n}{w_n} \cdot w_n \sum_{j=1}^n \frac{1}{w_j} \end{pmatrix} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{w_i}{w_j}} \cdot \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \frac{w_1}{w_j} \\ \sum_{j=1}^n \frac{w_2}{w_j} \\ \dots \\ \sum_{j=1}^n \frac{w_n}{w_j} \end{pmatrix} = nW.$$

Таким чином, співвідношення (10.55) дозволяє розрахувати значення функції належності, що відповідають кожному з елементів носія. При цьому зрозуміло, що нечітка множина, описувана отриманою функцією належності, не є нормальною. Приведення множини до нормальної здійснюється стандартним чином за формулою

$$\tilde{\mu}_A(x_i) = \frac{\mu_A(x_i)}{\max_i \mu_A(x_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (10.57)$$

Відзначимо, що співвідношення (10.55) дозволяє точно оцінити значення компонентів функції належності тільки у випадку, якщо матриця  $A$  є зворотно симетричною і узгодженою. Однак, на практиці ця матриця, що містить результати попарних порівнянь значень функції належності, сформованих експертами, є зворотно симетричною, але не задовольняє (10.45). У зв'язку із цим, вектор  $M^T$ , що визначається відповідно до (10.55), оцінює компоненти цієї функції з погрішністю тим більшою, чим сильніше реальна матриця  $A$  відрізняється від необхідної.

Розглянемо процедуру корекції реальної матриці, що наближає цю матрицю, до узгодженої.

Введемо матрицю

$$A_1 = (a_{ij,1}) = \frac{1}{n} AA. \quad (10.58)$$

Тобто

$$a_{ij,1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{kj}. \quad (10.59)$$

Переконаємося в тому, що діагональні елементи цієї матриці дорівнюють одиниці. Дійсно

$$a_{ii,1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot a_{ki} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\mu_A(x_i) \mu_A(x_k)}{\mu_A(x_k) \mu_A(x_i)} = \frac{n}{n} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (10.60)$$

$$a_{ij}^{(1)} = \frac{a_{ij,1}}{(a_{ij,1} a_{ji,1})^{\frac{1}{2}}}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (10.61)$$

Отримана при цьому матриця  $A^{(1)}$  буде більш узгоджена, ніж початкова. Продовжимо операцію корегування. При цьому фактична обчислювальна процедура на кожній ітерації корекції може бути спрощена за рахунок об'єднання співвідношень (10.59) і (10.61).

При цьому

$$a_{ij}^{(1)} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot a_{kj}}{\left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot a_{kj} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_{jk} \cdot a_{ki} \right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left( \frac{\sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot a_{kj}}{\sum_{k=1}^n a_{jk} \cdot a_{ki}} \right)^{\frac{1}{2}}}{\left( \frac{\sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot a_{kj}}{\sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot a_{kj}} \right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (10.62)$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

Нехай виконано  $l$  ітерацій корекції, у результаті яких отримана матриця

$A^{(l)} = (a_{ij}^{(l)})$ . Тоді на черговій  $(l + 1)$ -ій ітерації виконуються наступні обчислення

$$a_{ij}^{(l+1)} = \left( \frac{\sum_{k=1}^n a_{ik}^{(l)} \cdot a_{kj}^{(l)}}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_{ik}^{(l)} \cdot a_{kj}^{(l)}}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (10.63)$$

Співвідношення (10.63) дозволяють розрахувати елементи матриці  $A^{(l+1)}$  безпосередньо через елементи матриці  $A^{(l)}$ .

## 10.2. Операції над нечіткими множинами

Введемо сукупність операцій над нечіткими множинами. При розгляді цих операцій слід мати на увазі, що нечіткі множини – узагальнення традиційних, класичних множин. Тому операції над нечіткими множинами повинні бути введені таким чином, щоб вони залишалися вірними, тобто давали правильні відповіді в окремих випадках, коли замість нечіткої множини використовується її чіткий аналог.

Оскільки узагальнення може бути реалізоване різними способами, то будь-якій операції над звичайними множинами можуть відповідати кілька різних операцій над множинами нечіткими.

### 10.2.1. Рівність і домінування нечітких множин

Найпростішими відношеннями, які можуть бути між двома довільними нечіткими множинами  $A$  і  $B$ , заданими на одному універсумі  $X$ , є рівність двох нечітких множин і нечітке домінування.

**Визначення 10.14. Рівність нечітких множин.** Дві нечіткі множини  $A = \{x, \mu_A(x)\}$  і  $B = \{x, \mu_B(x)\}$  вважаються рівними, якщо їх функції належності приймають рівні значення на всьому універсумі  $X$ :  $\mu_A(x) = \mu_B(x)$  для будь-якого  $x \in X$ .

Рівність множин записується як  $A = B$ .

**Визначення 10.15. Нечітка підмножина.** Нечітка множина  $A = \{x, \mu_A(x)\}$  є нечіткою підмножиною нечіткої множини  $B = \{x, \mu_B(x)\}$  тоді й тільки тоді, коли значення функції належності першого не перевершують відповідних значень функції належності другого, тобто виконується наступна умова:

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x), \quad x \in X. \quad (10.64)$$

Для позначення нечіткої підмножини, як і для звичайних множин, використовується символ  $\subseteq$ . При цьому, у випадку  $A \subseteq B$  говорять, що нечітка мно-

жина  $B$  домінує над нечіткою множиною  $A$ , а нечітка множина  $A$  міститься в нечіткій множині  $B$ .

Це визначення не виключає випадок можливої рівності двох нечітких множин  $A$  і  $B$ . Якщо ж у визначенні нечіткої підмножини рівність відповідних нечітких множин виключається, то факт домінування позначається як:  $A \subset B$ . Тоді говорять, що нечітка множина  $B$  строго домінує над нечіткою множиною  $A$ , а нечітка множина  $A$  строго міститься в нечіткій множині  $B$ .

З наведеного визначення, зокрема, випливає, що для будь-якої нечіткої множини, що не є універсумом  $X$ , справедливе твердження:  $A \subset X$ .

Якщо для двох нечітких множин  $A$  і  $B$ , заданих на одному універсумі, не виконується ні відношення  $A \subseteq B$ , ні відношення  $B \subseteq A$ , то в цьому випадку говорять, що нечіткі множини  $A$  і  $B$  непорівнянні.

### 10.2.2. Унарні операції над нечіткими множинами

Розглянемо основні унарні операції, які використовуються при побудові нечітких моделей складних систем.

**Визначення 10.16. Доповнення.** Доповненням нечіткої множини  $A$  називається нечітка множина  $\bar{A}$ , задана на тому ж універсумі  $X$ , функція належності якого  $\mu_{\bar{A}}(x)$  визначається за формулою:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x), \quad x \in X. \quad (10.65)$$

Для скінченних нечітких множин операція доповнення може бути використана з метою розрахунку показника розмитості за формулою:

$$\rho(A, \bar{A}) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |\mu_A(x_j) - \mu_{\bar{A}}(x_j)| = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |2\mu_A(x_j) - 1|. \quad (10.66)$$

Якщо при цьому для розрахунків замість хеммінгової метрики використовувати Колмогорову, то ця формула прийме вигляд

$$\rho(A, \bar{A}) = \frac{1}{n} \left[ \sum_{j=1}^n (\mu_A(x_j) - \mu_{\bar{A}}(x_j))^p \right]^{\frac{1}{p}}, \quad (10.67)$$

де  $p$  – позитивне, ціле число.

**Визначення 10.17. Піднесення до степеня.** Нехай  $A$  – довільна нечітка множина, задана на універсумі  $X$ ,  $k$  – позитивне дійсне число ( $k \in R_+$ ). Операцію піднесення до степеня визначимо за формулою:

$$\mu_B(x) = \mu_A^k(x), \quad x \in X. \quad (10.68)$$

Цю операцію звичайно позначають через  $A^k$ .

Операція піднесення до степеня використовується для здійснення спеціальних перетворень функцій належності нечітких множин: концентрування та розтягання.

**Визначення 10.18. Концентрування.** Нехай на універсумі  $X$  задана довільна нечітка множина  $A$  з функцією належності  $\mu_A(x)$ . Операція *концентрування*, що позначається через  $CON(A)$ , дає в результаті нечітку множину  $C$ , функція належності якої дорівнює значенням функції належності початкової нечіткої множини, піднесеної до степеня  $p > 1$ , тобто

$$\mu_C(x) = \mu_A^p(x), \quad x \in X. \quad (10.69)$$

**Визначення 10.19. Розтягування.** Операція *розтягування*, що позначається через  $DIL(A)$ , дає в результаті нечітку множину  $D$ , функція належності якої дорівнює значенням функції належності початкової нечіткої множини, піднесеної до степеня  $q \in (0, 1)$ , тобто

$$\mu_D(x) = \mu_A^q(x), \quad x \in X. \quad (10.70)$$

Застосування операції концентрування до нечіткої множини призводить до зменшення нечіткості або невизначеності в задаванні цієї множини. І навпаки, у результаті застосування операції розтягування відбувається посилення невизначеності в задаванні нечіткої множини.

### 10.2.3. Бінарні операції над нечіткими множинами

Нехай  $A$  і  $B$  – довільні (скінченні або нескінченні) нечіткі множини, задані на одному й тому ж універсумі  $X$ .

**Визначення 10.20. Перетинання.** Перетинанням двох нечітких множин  $A$  і  $B$  будемо називати деяку третю нечітку множину  $C$ , задану на цьому ж універсумі  $X$ , функція належності якої визначається за формулою:

$$\mu_C(x) = \mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \quad x \in X. \quad (10.71)$$

Операція перетинання нечітких множин за аналогією зі звичайними множинами позначається знаком  $\cap$ . Результат операції перетинання двох нечітких множин записується у вигляді:  $C = A \cap B$ .

Зрозуміло, що результат перетинання  $A \cap B$  є найбільша нечітка підмножина  $C$ , яка міститься одночасно в нечітких множинах  $A$  і  $B$ . Операцію перетинання нечітких множин у трактуванні (10.71) іноді називають *min*-перетинанням або  $\wedge$ -перетинанням. Відповідна функція належності перетинання  $\mu_C(x)$  записується у вигляді:  $\mu_C(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$ ,  $x \in X$ . При цьому знак  $\wedge$  використовується в якості синоніма операції знаходження мінімального зна-

чення.

Операція *min*-перетинання нечітких множин коректна в тому розумінні, що вона зберігає своє визначення для випадку звичайних множин.

Дійсно, якщо в якості нечітких множин  $A$  і  $B$  взяти звичайні множини як їхній окремий випадок, то визначення операції перетинання (10.71) перетвориться у визначення операції перетинання для характеристичних функцій звичайних множин.

Результат операції перетинання двох і більшої кількості нечітких множин, заданих на тому самому універсумі  $X$ , можна зобразити графічно в декартовій системі координат на площині.

Відзначимо наступну властивість випуклих нечітких множин.

Якщо нечіткі множини  $A$  і  $B$  – випуклі, то їх перетинання  $A \cap B$  також є опуклою нечіткою множиною.

**Визначення 10.21. Об'єднання.** Об'єднанням двох нечітких множин  $A$  і  $B$  називається деяка третя нечітка множина  $D$ , задана на тому ж універсумі  $X$ , функція належності якої визначається за формулою:

$$\mu_D(x) = \mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, x \in X. \quad (10.72)$$

Операція об'єднання нечітких множин за аналогією зі звичайними множинами позначається знаком  $\cup$ . Результат операції об'єднання двох нечітких множин записується у вигляді:  $D = A \cup B$ .

Зрозуміло, що об'єднання  $A \cup B$  є найменша нечітка множина  $D$ , яка домінує одночасно як  $A$ , так і  $B$ . Операцію об'єднання нечітких множин у вигляді (10.72) іноді називають *max*-об'єднанням або  $\vee$ -об'єднанням. Відповідно функція належності об'єднання  $\mu_D(x)$  у цьому випадку записується у вигляді:  $\mu_D(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x), x \in X$ .

При цьому знак *max* використовується в якості синоніма операції знаходження максимального значення.

Операція *max*-об'єднання нечітких множин також зберігає своє визначення для випадку звичайних множин. Якщо в якості нечітких множин  $A$  і  $B$  взяти звичайні множини як окремий випадок, то визначення операції об'єднання (10.72) перетвориться у визначення операції об'єднання для характеристичних функцій звичайних множин.

Результат операції об'єднання двох і більшої кількості нечітких множин, заданих на тому самому універсумі  $X$ , також можна зобразити графічно в декартовій системі координат на площині.

**Визначення 10.22. Різниця.** Різницею двох нечітких множин  $A$  і  $B$  називається деяка третя нечітка множина  $E$ , задана на цьому ж універсумі  $X$ , функція належності якої визначається за формулою:

$$\mu_E(x) = \max\{\mu_A(x) - \mu_B(x), 0\}, x \in X. \quad (10.73)$$

Операція різниці двох нечітких множин за аналогією зі звичайними мно-

жинами позначається знаком «\». Результат операції різниці двох нечітких множин записується у вигляді:  $E = A \setminus B$ .

**Визначення 10.23. Симетрична різниця.** Операція різниці двох нечітких множин, на відміну від операцій  $\vee$ -об'єднання і  $\wedge$ -перетинання, не є комутативною, тобто в загальному випадку  $A \setminus B \neq B \setminus A$ . Разом з тим, при розв'язанні багатьох практичних задач виявляється корисною комутативна операція *симетричної різниці* двох нечітких множин  $A$  і  $B$  (позначимо її через  $A \ominus B$ ). Результатом виконання цієї операції для двох нечітких множин  $A$  і  $B$  є деяка третя нечітка множина  $F$ , задана на цьому ж універсумі  $X$ , функція належності якого визначається за формулою:

$$\mu_F(x) = |\mu_A(x) - \mu_B(x)|, \quad x \in X. \quad (10.74)$$

Легко перевірити, що  $A \ominus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ , тобто симетрична різниця двох нечітких множин є об'єднанням двох різниць нечітких множин  $A$  і  $B$ .

Визначені вище операції різниці і симетричної різниці двох нечітких множин коректні в тому розумінні, що вони залишаються слухними для випадку звичайних множин. Розглянуті операції над нечіткими множинами мають наступні фундаментальні властивості, аналогічні властивостям звичайних теоретико-множинних операцій.

Нехай  $A$ ,  $B$  і  $C$  – довільні (скінченні або нескінченні) нечіткі множини, задані на тому самому універсумі  $X$ . Тоді справедливі наступні твердження.

**Твердження 10.1.** Комутативність операцій об'єднання і перетинання нечітких множин:

$$A \cup B = B \cup A; \quad A \cap B = B \cap A. \quad (10.75)$$

**Твердження 10.2.** Асоціативність операцій об'єднання і перетинання нечітких множин:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C; \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C. \quad (10.76)$$

**Твердження 10.3.** Дистрибутивність операцій об'єднання і перетинання нечітких множин відносно одна одної:

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned} \quad (10.77)$$

**Твердження 10.4.** Ідемпотентність операцій об'єднання та перетинання нечітких множин:

$$A \cup A = A; \quad A \cap A = A. \quad (10.78)$$

**Твердження 10.5.** Поглинання однієї з нечітких множин при операціях

об'єднання та перетинання:

$$A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A. \quad (10.79)$$

Твердження 10.6. Універсальні верхня й нижня границі (єдиничні елементи) операцій перетинання і об'єднання нечітких множин:

$$A \cup \emptyset = A; \quad A \cup X = X, \quad (10.80)$$

$$A \cap X = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset. \quad (10.81)$$

Твердження 10.7. Інволюція (подвійне доповнення) нечіткої множини:

$$\overline{\overline{A}} = A. \quad (10.82)$$

Твердження 10.8. Закони де Моргана:

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}; \quad \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}. \quad (10.83)$$

Разом з тим слід помітити, що для розглянутих операції над нечіткими множинами не виконуються закон *виключеного третього* і закон *тотожності* (властивості доповнюваності операцій перетинання та об'єднання). А саме, у загальному випадку виявляються слушними нерівності:

$$A \cap \overline{A} \neq \emptyset. \quad (10.84)$$

$$A \cup \overline{A} \neq X. \quad (10.85)$$

Крім того, відзначимо, що для операцій *min*-перетинання й *max*-об'єднання нечітких множин можливі й інші альтернативні способи їх визначення, які коректні звичайним теоретико-множинним операціям.

Визначення 10.24. **Алгебраїчне перетинання.** Алгебраїчним перетинанням (або алгебраїчним добутком) двох нечітких множин  $A$  і  $B$  називається деяка третя нечітка множина  $C$ , задана на цьому ж універсумі  $X$ , функція належності якої визначається за формулою:

$$\mu_C(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \quad x \in X. \quad (10.86)$$

Алгебраїчне перетинання двох нечітких множин  $A$  і  $B$  позначається через  $C = A \bullet B$ .

Визначення 10.25. **Алгебраїчне об'єднання.** Алгебраїчним об'єднанням (або алгебраїчною сумою) двох нечітких множин  $A$  і  $B$  називається нечітка множина  $D$ , задана на цьому ж універсумі  $X$ , функція належності якої визначається за формулою:



$$\mu_D(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \quad x \in X. \quad (10.87)$$

Алгебраїчне об'єднання двох нечітких множин  $A$  і  $B$  позначається через  $D = A + B$

Операції алгебраїчного перетинання та алгебраїчного об'єднання нечітких множин мають лише деякі із властивостей, аналогічних властивостям звичайних теоретико-множинних операцій. При цьому справедливі наступні твердження.

- Комутативність операцій алгебраїчного об'єднання і перетинання нечітких множин:

$$A + B = B + A; \quad A \bullet B = B \bullet A \quad (10.88)$$

- Асоціативність операцій алгебраїчного об'єднання і перетинання нечітких множин:

$$A + (B + C) = (A + B) + C; \quad A \bullet (B \bullet C) = (A \bullet B) \bullet C \quad (10.89)$$

- Універсальні верхня й нижня границі (одичні елементи) операцій алгебраїчного перетинання й об'єднання нечітких множин:

$$A + \emptyset = A \quad A + X = X; \quad (10.90)$$

$$A \bullet X = A; \quad A \bullet \emptyset = \emptyset. \quad (10.91)$$

- Закони де Моргана:

$$\overline{(A + B)} = \overline{A} \bullet \overline{B}; \quad \overline{(A \bullet B)} = \overline{A} + \overline{B}. \quad (10.92)$$

Однак, у загальному випадку інші властивості не виконуються. Справедливі наступні твердження.

- Недистрибутивність операцій алгебраїчного об'єднання і перетинання нечітких множин відносно один одного:

$$A + (B \bullet C) \neq (A + B) \bullet (A + C); \quad A \bullet (B + C) \neq (A \bullet B) + (A \bullet C). \quad (10.93)$$

- Неідемпотентність операцій алгебраїчного об'єднання і перетинання нечітких множин:

$$A + A \neq A; \quad A \bullet A \neq A. \quad (10.94)$$

- Непоглинання однієї з нечітких множин при операціях алгебраїчного об'єднання і перетинання:

$$A + (A \bullet B) \neq A; \quad A \bullet (A + B) \neq A. \quad (10.95)$$

- Не виконуються закон виключеного третього і закон протиріччя:

$$A \bullet \bar{A} \neq \emptyset; \quad (10.96)$$

$$A + \bar{A} \neq X. \quad (10.97)$$

**Визначення 10.26. Граничне перетинання.** Граничним перетинанням двох нечітких множин  $A$  і  $B$  називається нечітка множина  $C$ , задана на цьому ж універсумі  $X$ , функція належності якої визначається за формулою:

$$\mu_C(x) = \max\{\mu_A(x) + \mu_B(x) - 1, 0\}, \quad x \in X \quad (10.98)$$

Граничне перетинання нечітких множин позначається  $C = A \oplus B$ .

**Визначення 10.27. Граничне об'єднання.** Граничним об'єднанням двох нечітких множин  $A$  і  $B$  називається нечітка множина  $D$ , задана на тому ж універсумі  $X$ , функція належності якої визначається за формулою:

$$\mu_D(x) = \min\{\mu_A(x) + \mu_B(x), 1\}, \quad x \in X \quad (10.99)$$

**Визначення 10.28. Операція  $\lambda$ -суми нечітких множин.**  $\lambda$ -сумою двох нечітких множин  $A$  і  $B$ , називається множина  $G$ , задана на цьому ж універсумі  $X$ , функція належності якого визначається за формулою:

$$\mu_G(x) = \lambda\mu_A(x) + (1-\lambda)\mu_B(x), \quad x \in X, \quad (10.100)$$

де параметр  $\lambda \in [1,0]$ .

Ця операція позначається через  $G = A +_\lambda B$ .

Для введених альтернативних операцій над нечіткими множинами справедливе наступне співвідношення

$$\emptyset \subseteq A \oplus B \subseteq A \bullet B \subseteq A \cap B \subseteq A +_\lambda B \subseteq A \cup B \subseteq A + B \subseteq X. \quad (10.101)$$

Ці нерівності означають, що для довільних нечітких множин  $A$  і  $B$  результат лівої операції завжди буде нечіткою підмножиною результату правої операції.

Узагальненням операції  $\lambda$ -суми двох нечітких множин є операція визначення опуклої комбінації довільної скінченної кількості нечітких множин.

**Визначення 10.29. Опукла комбінація нечітких множин.** Опуклою комбінацією нечітких множин  $A_1, A_2, \dots, A_n$  називається нечітка множина  $H$ , функція належності якої визначається за формулою:

$$\mu_H(x) = \lambda_1 \mu_{A_1}(x) + \lambda_2 \mu_{A_2}(x) + \dots + \lambda_n \mu_{A_n}(x), \quad x \in X, \quad (10.102)$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \in [0, 1], \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

**Визначення 10.30. Диз'юнктивна сума.** Диз'юнктивною сумою двох нечітких множин  $A$  і  $B$  називається деяка третя множина  $K$ , задана на цьому ж універсумі  $X$ , функція належності якої визначається за формулою:

$$\mu_K(x) = \max\{\min\{\mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\}, \min\{1 - \mu_A(x), \mu_B(x)\}\}, \quad x \in X \quad (10.103)$$

Еквівалентний запис для визначення операції диз'юнктивної суми має вигляд:  $K = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$ .

#### 10.2.4. Нечіткі оператори

Введені вище нечіткі теоретико-множинні операції не вичерпують усі потенційно можливі способи їх завдання. У зв'язку із цим великий практичний інтерес представляє побудова узагальнених нечітких параметризованих операторів перетинання, об'єднання, доповнення, тощо. Загальний і витончений підхід до опису операцій перетинання та об'єднання полягає в їхньому визначенні в класі трикутних норм і конорм.

**Визначення 10.31. Трикутна норма (Т-норма).** Довільна дійсна функція від двох змінних  $T: [0, 1] \cdot [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  називається трикутною нормою, якщо вона задовольняє наступним властивостям, які називаються аксіомами трикутної норми:

$$T(x, 0) = 0, \quad T(x, 1) = x \quad (\text{обмеженість}); \quad (10.104)$$

$$T(x, y) = T(y, x) \quad (\text{комутативність}); \quad (10.105)$$

$$T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z) \quad (\text{асоціативність}); \quad (10.106)$$

$$T(x, y) \leq T(z_1, z_2), \quad \text{якщо } x \leq z_1, \quad y \leq z_2. \quad (\text{монотонність}). \quad (10.107)$$

Прикладами трикутних норм є:

- операція  $\wedge$  - перетинання нечітких множин:

$$T_{\min}((\mu_A(x), \mu_B(x))) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}; \quad (10.108)$$

- операція граничного перетинання:

$$T_{\max}((\mu_A(x), \mu_B(x))) = \max\{0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1\}; \quad (10.109)$$

- операція алгебраїчного перетинання:

$$T_p((\mu_A(x), \mu_B(x))) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x); \quad (10.110)$$

- спеціальна операція перетинання, що задається співвідношенням:

$$T_W(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \begin{cases} \mu_A(x), & \text{якщо } \mu_A(\bar{\sigma}) = 1, \\ \mu_B(x), & \text{якщо } \mu_B(\bar{\sigma}) = 1, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (10.111)$$

**Визначення 10.32. Трикутна конорма (T-конорма, S-норма).** Довільна дійсна функція від двох змінних  $S: [0, 1] \cdot [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  називається трикутною конормою, якщо вона задовольняє наступним властивостям, які називаються аксіомами трикутної конорми:

$$S(x, 0) = x, S(x, 1) = 1 \quad (\text{обмеженість}); \quad (10.112)$$

$$S(x, y) = x, S(y, x) \quad (\text{комутативність}); \quad (10.113)$$

$$S(x, S(y, z)) = S(S(x, y), z) \quad (\text{асоціативність}); \quad (10.114)$$

$$S(x, y) \leq S(z_1, z_2), \text{ якщо } x \leq z_1, y \leq z_2. \quad (\text{монотонність}). \quad (10.115)$$

Прикладами трикутних конорм є

- операція  $\vee$ -об'єднання нечітких множин:

$$S_{max}((\mu_A(x), \mu_B(x))) = \max \{(\mu_A(x), \mu_B(x))\}; \quad (10.116)$$

- операція граничного об'єднання:

$$S_{min}((\mu_A(x), \mu_B(x))) = \min \{\mu_A(x) + \mu_B(x), 1\}; \quad (10.117)$$

- операція алгебраїчного об'єднання:

$$S_p((\mu_A(x), \mu_B(x))) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x); \quad (10.118)$$

- спеціальна операція об'єднання, що задається співвідношенням:

$$S_W(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \begin{cases} \mu_A(x), & \text{якщо } \mu_B(x) = 0, \\ \mu_B(x), & \text{якщо } \mu_A(x) = 0, \\ 0, & \text{в інших випадках} \end{cases} \quad (10.119)$$

**Визначення 10.33. Оператор заперечення.** Нехай задане деяке відображення  $\lambda: [0,1] \rightarrow [0,1]$ . Це відображення називається *оператором заперечення*, якщо виконується наступні умови:

$$\lambda(0) = 1, \quad \lambda(1) = 0 \quad (10.120)$$

якщо

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x), \text{ то } \lambda(\mu_A(x)) \geq \lambda(\mu_B(x)). \quad (10.121)$$

Функція  $\lambda(\mu(x))$  називається *суворим запереченням*, якщо ця функція неперервна і вона строго убиває.

Функція  $\lambda(\mu(x))$  називається *сильним запереченням* або *інволюцією*, якщо разом з умовами (10.120), (10.121) для неї справедливо:

$$\lambda(\lambda(\mu(x))) = \mu(x). \quad (10.122)$$

Прикладами функції заперечення є:

- класичне заперечення (доповнення);

$$\lambda(\mu(x)) = 1 - \mu(x); \quad (10.123)$$

- квадратичне заперечення:

$$\lambda(\mu(x)) = (1 - \mu^2(x))^{0.5}; \quad (10.124)$$

- заперечення Сугено:

$$\lambda(\mu(x)) = \frac{1 - \mu(x)}{1 + \mu(x)k}, \quad -1 < k < \infty; \quad (10.125)$$

- порогове доповнення

$$\lambda_a(\mu(x)) = \begin{cases} 1, & \mu(x) \leq a, \\ 0, & \mu(x) > a. \end{cases} \quad (10.126)$$

Значення  $\mu(x)$ , для якого  $\lambda(\mu(x)) = \mu(x)$  називається *рівноважною точкою*.

### 10.3. Нечіткі відношення

Нечіткі відношення відіграють фундаментальну роль у теорії нечітких множин. Апарат теорії нечітких відношень використовується при розв'язанні численних задач моделювання структури і поведінки складних систем, при аналізі процесів прийняття рішень і, взагалі, у задачах, в яких традиційно застосовується теорія звичайних (чітких) відношень.

#### 10.3.1. Нечітке відношення і способи його завдання

Нечітке відношення визначається як будь-яка нечітка підмножина впорядкованих кортежів, побудованих з елементів тих або інших базисних множин – універсумів. При цьому під кортежем, так само як і у випадку звичайних мно-

жин, розуміється довільний набір або список упорядкованих елементів.

У загальному випадку *нечітким  $k$ -арним відношенням*, заданим на множинах (універсумах)  $X_1, X_2, \dots, X_k$ , називається деяка нечітка підмножина декартового добутку цих універсумів. Позначимо довільне нечітке відношення через  $Q$ .

$$Q = \{ \langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle, \mu_Q(\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle) \}, \quad (10.127)$$

де  $\mu_Q(\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle)$  – функція належності даного нечіткого відношення, яка визначається як відображення

$$\mu_Q : X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_k \rightarrow [0, 1]. \quad (10.127)$$

Тут через  $\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle$  позначений кортеж з  $k$  елементів, кожний з яких вибирається зі свого універсума, тобто

$$x_1 \in X_1, \quad x_2 \in X_2, \dots, x_k \in X_k. \quad (10.128)$$

Найпростіший тип нечітких відношень задається, як бінарне нечітке відношення між елементами із двох універсальних множин. При цьому на форму і вигляд функції належності нечіткого відношення попередньо ніяких обмежень не накладається.

**Визначення 10.34. Порожнє нечітке відношення.** У теорії нечітких відношень порожнє нечітке відношення визначається як відношення, яке не містить жодного кортежу. Це відношення позначається через 0 і формально визначається як таке нечітке відношення, функція належності якого тотожно дорівнює 0 на всіх елементах декартового добутку його універсумів.

**Визначення 10.35. Повне нечітке відношення.** Повне нечітке відношення збігається зі звичайним повним відношенням, яке, у свою чергу, дорівнює за визначенням декартовому добутку відповідних універсумів  $X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_k$ . Функція належності повного нечіткого відношення тотожно дорівнює одиниці для всіх без винятку кортежів, тобто

$$\mu_X(\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle) \equiv 1. \quad (10.129)$$

**Визначення 10.36. Бінарне нечітке відношення.** Бінарне нечітке відношення задається на базисних множинах  $X_1, X_2$  і визначається як нечітке відношення

$$Q = \{ \langle x_i, x_j \rangle, \mu_Q(\langle x_i, x_j \rangle) \}. \quad (10.130)$$

Тут  $\mu_Q(\langle x_i, x_j \rangle)$  – функція належності бінарного нечіткого відношення, яка визначається як відображення

$$\mu_Q : X_1 \cdot X_2 \rightarrow [0, 1], \quad (10.131)$$

а через  $\langle x_i, x_j \rangle$  позначений кортеж з двох елементів, причому  $x_i \in X_1, x_j \in X_2$ .

**Визначення 10.37. Зворотнє нечітке відношення.** Якщо задане бінарне нечітке відношення  $Q$  на декартовому добутку  $X_1 \cdot X_2$ , то зворотним до нього нечітким відношенням (позначається через  $Q^{-1}$ ) називається таке бінарне нечітке відношення, яке задано на декартовому добутку  $X_2 \cdot X_1$ , а функція належності якого визначається за формулою:

$$\mu_{Q^{-1}}(x_i, x_j) = \mu_Q(x_j, x_i), \quad x_i \in X_2, \quad x_j \in X_1. \quad (10.132)$$

**Визначення 10.38. Бінарне нечітке відношення, задане на одному універсумі.** Бінарне нечітке відношення, задане на одній базисній множині (універсумі)  $X$ , визначається як нечітке відношення

$$Q = \{ \langle x_i, x_j \rangle, \mu_Q(\langle x_i, x_j \rangle) \}, \quad (10.133)$$

де  $\mu_Q(\langle x_i, x_j \rangle)$  – функція належності бінарного нечіткого відношення, яка визначається як відображення

$$\mu_Q : X \cdot X \rightarrow [0, 1]. \quad (10.134)$$

а через  $\langle x_i, x_j \rangle$  позначений кортеж із двох елементів, причому  $x_i \in X, x_j \in X$ .

Найпоширенішими способами завдання нечітких відношень є:

1) у формі списку з безпосереднім перерахуванням усіх кортежів нечіткого відношення і відповідних до цих кортежів значень функції належності:

$$Q = \{ (w_1, \mu_Q(w_1)), (w_2, \mu_Q(w_2)), \dots, (w_q, \mu_Q(w_q)) \}, \quad (10.135)$$

де  $w_i$  –  $i$ -й кортеж  $\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle$  елементів цього відношення,  $q$  – число кортежів нечіткого відношення  $Q$ . При цьому для скорочення подібного запису кортежі з нульовими значеннями функції належності в списку звичайно не вказуються. Зрозуміло, що цей спосіб доцільно застосовувати тільки для завдання нечітких відношень зі скінченною і невеликою кількістю кортежів  $q$ ;

2) аналітично у формі деякого математичного виразу, що забезпечує можливість обчислення значення функції належності нечіткого відношення для кожного з кортежів; цей дуже зручний спосіб може бути застосований для завдання нечітких відношень як зі скінченною, так і з нескінченною кількістю кортежів. При його використанні нечітке відношення записується у вигляді:

$$Q = \{ \langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle, \mu_Q(\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle) \}, \quad (10.136)$$

де  $\mu_Q(\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle) = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$  – деяка задана функція  $k$  змінних, що задовольняє стандартним вимогам до функцій належності.

Для завдання бінарних відношень, крім перерахованих, можуть додатково використовуватися й деякі інші способи:

– графічно у формі деякої поверхні або сукупності окремих точок у тривимірному просторі; при цьому дві координати (незалежні змінні) будуть відповідати значенням елементів  $x_1$  і  $x_2$  із універсумів  $X_1, X_2$ , а третя координата – функції належності зі значеннями з інтервалу  $[0, 1]$ ;

– у формі матриці нечіткого відношення; при цьому нечітке бінарне відношення зі скінченною кількістю кортежів описується з використанням матриці  $M_Q$ , першому рядку якої відповідають перші елементи кортежів  $x_1 \in X_1$ , а першому стовпчику – другі елементи кортежів  $x_2 \in X_2$ ; елементами матриці є відповідні значення функції належності  $\mu_Q(\langle x_i, x_j \rangle)$  даного відношення; якщо бінарне нечітке відношення задається на одному універсумі, то матриця такого відношення  $M_Q$  є квадратною;

– у формі так званого *орієнтованого нечіткого графа*, який формально може бути заданий у вигляді двох звичайних скінченних множин і деякої функції належності у вигляді:

$$G = (V, E, \mu_G), \quad (10.137)$$

де  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  – множина вершин нечіткого графа,  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  – множина дуг нечіткого графа, кожній з яких приписано значення функції належності.

Натуральне число  $n$  визначає кількість вершин конкретного нечіткого графа, а натуральне число  $m$  – кількість дуг нечіткого графа.

При цьому дуги з нульовою функцією належності в нечіткому графі звичайно не зображуються.

Кожному орієнтованому нечіткому графові  $G$  відповідає деяке бінарне нечітке відношення  $Q_G$ , що складається із усіх пар виду  $\langle v_i, v_j \rangle$ , де  $v_i, v_j \in V$ . При цьому для кожної пари  $\langle v_i, v_j \rangle$  визначене деяке дійсне число з інтервалу  $[0, 1]$ , яке дорівнює значенню функції належності  $\mu_G(e_k)$  для дуги  $e_k \in E$ , що з'єднує цю пару вершин.

При завданні нечіткого відношення  $Q$  за допомогою орієнтованого нечіткого графа  $G$  кожному елементу універсума  $x_i \in X$  буде відповідати окрема вершина  $v_i \in V$  цього нечіткого графа, а кожному кортежу нечіткого відношення  $\langle x_i, x_j \rangle \in Q$  буде відповідати дуга графа  $e_k = \langle v_i, v_j \rangle$  з початком у вершині  $v_i$ , кінцем у вершині  $v_j$  і значенням функції належності  $\mu_Q(\langle x_i, x_j \rangle)$ .

Залежно від кількості кортежів, нечітке відношення може бути скінченним або нескінченним. Нечітке відношення називається скінченним, якщо його носій є кінцевим відношенням.

При цьому це відношення має скінченну потужність, яка чисельно дорівнює кількості кортежів його носія, розглянутого як звичайна множина. У цьому випадку для позначення потужності довільного нечіткого відношення  $Q$  використовують загальноприйняте позначення  $card(Q)$ .



Аналогічно рахунковим нечітким відношенням називається нечітке відношення з рахунковим носієм, тобто відношення, носій якого має рахункову потужність  $N_0$ .

Незліченим нечітким відношенням називається нечітке відношення з незліченим носієм, тобто носій якого має незліченну потужність або потужність континууму  $N$ .

### 10.3.2. Основні характеристики нечітких відношень

Нехай  $Q = \{ \langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle, \mu_Q(\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle) \}$  – довільне нечітке  $k$ -арне відношення з кортежами з декартового добутку відповідних універсумів  $X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_k$  і функцією належності  $\mu_Q(\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle)$ .

#### Визначення 10.39. Носій нечіткого відношення.

Носієм нечіткого відношення  $Q$  називається звичайне відношення  $Q_S$ , таке, що:

$$Q_S = \{ \langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle, \mu_Q(\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle) \mid \mu_Q(\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle) > 0 \} \quad (10.138)$$

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle \in X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_k.$$

Інакше кажучи, носій нечіткого відношення містить ті й тільки ті кортежі, для яких значення відповідної функції належності відмінне від 0.

#### Визначення 10.40. Відношення $\alpha$ -рівня.

Узагальненням поняття нечіткого відношення є відношення  $\alpha$ -рівня, тобто звичайне відношення вигляду:

$$Q_\alpha = \{ \langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle \mid \mu_Q(\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle) \geq \alpha \} \quad (10.139)$$

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle \in X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_k.$$

де  $\alpha$  – деяке дійсне число,  $\alpha \in [0, 1]$ .

#### Визначення 10.41. Висота нечіткого відношення.

Висотою нечіткого відношення  $Q$  називається величина

$$h_Q = \sup \{ \mu_Q(\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle) \}, \quad (10.140)$$

де супремум береться за всіма значеннями функції належності, відповідним до кортежів  $\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle \in X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_k$ .

#### Визначення 10.42. Нормальне нечітке відношення.

Нечітке відношення  $Q$  називається нормальним, якщо максимальне значення його функції належності дорівнює 1. Це означає, що для нормального нечіткого відношення необхідне виконання умови:

$$\max_{\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle \in X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_k} \mu_Q(\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle) = 1, \quad (10.141)$$

**Визначення 10.43. Субнормальне нечітке відношення.**

Якщо висота нечіткого відношення дорівнює одиниці ( $h_Q = 1$ ), але умова (10.141) не виконується, то таке нечітке відношення називається субнормальним.

Довільне непусте нечітке відношення  $Q$  можна зробити субнормальним, використовуючи наступне перетворення:

$$\mu_Q(\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle) = \frac{\mu_Q(\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle)}{h_Q}. \quad (10.142)$$

**Визначення 10.44. Мода нечіткого відношення.**

Деякий кортеж  $w_m \in X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_k$  нечіткого відношення  $Q$  називається модою, якщо цей кортеж є точкою локального максимуму відповідної до функції належності  $\mu_Q(\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle)$ , тобто виконується умова:

$$w_m = \arg \max \{ \mu_Q(\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle) \}, \quad (10.143)$$

де максимум розглядається в деякій локальній околиці кортежу  $w_m$  з області визначення функції належності.

**Визначення 10.45. Ядро нечіткого відношення.**

Ядром нечіткого відношення  $Q$  називається звичайне відношення  $P$ , яке визначається як

$$P = \{ \langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle, \mu_Q(\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle) \mid (\mu_Q(\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle) = 1), \langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle \in X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_k \}. \quad (10.144)$$

**Визначення 10.46. Найближче чітке відношення.**

Найближчим чітким відношенням  $P$  до нечіткого відношення  $Q$  називається чітке відношення, характеристична функція якого визначається виразом:

$$X_P(\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle) = \begin{cases} 0, & \mu_Q(\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle) < 0,5, \\ 1, & \mu_Q(\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle) > 0,5, \\ 0 \text{ або } 1, & \mu_Q(\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle) = 0,5, \end{cases} \quad (10.145)$$

Границі, точки переходу, а також властивість опуклості нечіткого відношення визначаються аналогічно відповідним до понять, введених для нечітких множин.

**Визначення 10.47. Рівність нечітких відношень.**

Два нечіткі відношення вважаються рівними, якщо вони задані на одних і самих універсумах  $X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_k$ , мають однакову арність та їх функції належності приймають рівні значення на всіх елементах декартового добутку відповідних універсумів.

Формальну рівність двох нечітких відношень  $R$  і  $Q$  можна записати як

$$Q = R. \quad (10.146)$$

Тобто довільні нечіткі відношення рівні тоді і тільки тоді, коли значення функцій належності цих відносин рівні для всіх елементів декартова добутку їх універсумів, тобто виконується наступна умова:

$$\begin{aligned} \mu_Q(\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle) &= \mu_R(\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle), \\ \langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle &\in X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_k. \end{aligned} \quad (10.147)$$

#### Визначення 10.48. Нечітке домінування.

Нечітке відношення  $Q$  строго містить у собі (строго домінує) нечітке відношення  $R$  (записується як  $R \subset Q$ ), якщо значення функції належності першого строго більше відповідних значень функції належності – другого, тобто виконується наступна формальна умова:

$$\begin{aligned} \mu_Q(\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle) &> \mu_R(\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle), \\ \langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle &\in X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_k. \end{aligned} \quad (10.148)$$

Якщо в цьому визначенні в умові (10.148) замість знака строгої нерівності записати знак нестрокої нерівності  $\geq$ , то одержимо визначення нестроого включення нечітких відношень або нестроого домінування, яке позначається як  $R \subseteq Q$ . При цьому у випадку  $R \subseteq Q$  говорять, що нечітке відношення  $Q$  домінує над нечітким відношення  $R$ , а нечітке відношення  $R$  утримується в нечіткому відношенні  $Q$ .

### 10.3.3. Операції над нечіткими відношеннями

Оскільки кожне нечітке відношення є нечіткою множиною, то стосовно до нечітких відношень є слушними всі операції, які були визначені вище для нечітких множин. Додатково слід відзначити деякі особливості.

#### Визначення 10.49. Перетинання.

Перетинанням двох нечітких відношень

$$Q = \{ \langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle \mid \mu_Q(\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle) \}, \quad (10.149)$$

$$R = \{ \langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle \mid \mu_R(\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle) \}, \quad (10.150)$$

називається деяке третє нечітке відношення  $S$ , задане на цьому ж декартовому добутку універсумів  $X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_k$ , функція належності якого визначається за формулою:

$$\mu_S(\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle) = \min \{ \mu_Q(\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle), \mu_R(\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle) \}. \quad (10.151)$$

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle \in X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_k.$$

Результат операції перетинання двох відношень записується як:

$$S = Q \cap R, \quad (10.152)$$

де  $S = \{ \langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle \mid \mu_S(\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle) \}$  з функцією належності  $\mu_S(\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle)$ , яка визначається за формулою (10.151).

Операцію перетинання нечітких відношень у контексті (10.151) також називають *min*-перетинанням або  $\wedge$ -перетинанням.

**Визначення 10.50. Об'єднання.**

Об'єднанням двох нечітких відношень  $Q$  і  $R$  називається деяке третє нечітке відношення  $U$ , задане на цьому ж декартовому добутку універсумів  $X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_k$ , функція належності якого визначається за формулою:

$$\mu_U(\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle) = \max \{ \mu_Q(\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle), \mu_R(\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle) \}. \quad (10.153)$$

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle \in X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_k.$$

Результат операції об'єднання двох відношень можна записати як:

$$U = Q \cup R, \quad (10.154)$$

де  $U = \{ \langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle \mid \mu_U(\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle) \}$ , з функцією належності  $\mu_U(\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle)$ , яка визначається за формулою (10.153).

Операцію об'єднання нечітких відношень називають *max*-об'єднанням або  $\vee$ -об'єднанням.

**Визначення 10.51. Різниця.** Різницею двох нечітких відношень  $Q$  і  $R$  називається деяке третє нечітке відношення  $T$ , задане на цьому ж декартовому добутку універсумів  $X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_k$ , функція належності якого визначається за формулою:

$$\mu_T(\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle) = \max \{ \mu_Q(\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle) - \mu_R(\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle), 0 \}. \quad (10.155)$$

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle \in X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_k.$$

Операція різниці двох нечітких відношень за аналогією зі звичайними відношеннями позначається знаком «\». Результат операції різниці двох відношень можна записати у вигляді:

$$T = Q \setminus R, \quad (10.156)$$

де  $T = \{ \langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle, \mu_T(\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle) \}$  з функцією належності  $\mu_T(\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle)$ .

**Визначення 10.52. Симетрична різниця.**

Симетричною різницею двох нечітких відношень  $Q$  і  $R$  (позначається через  $\Theta$ ) називається таке нечітке відношення  $Q \Theta R$ , функція належності якого:

$$\mu_{Q\Theta R}(\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle) = |\mu_Q(\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle) - \mu_R(\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle)|. \quad (10.157)$$

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle \in X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_k.$$

При цьому справедливе наступне твердження:

$$Q \Theta R = (Q \setminus R) \cup (R \setminus Q), \quad (10.158)$$

тобто симетрична різниця двох нечітких відношень є об'єднанням двох різниць нечітких відношень  $Q$  і  $R$ .

**Визначення 10.53. Доповнення.**

Унарна операція доповнення нечіткого відношення  $Q$  позначається через  $\bar{Q}$  і визначається аналогічно операції доповнення нечіткої множини, тобто

$$\bar{Q} = \{ \langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle, \mu_{\bar{Q}}(\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle) \}, \quad (10.159)$$

де функція належності  $\mu_{\bar{Q}}(\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle)$  визначається за формулою:

$$\mu_{\bar{Q}}(\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle) = 1 - \mu_Q(\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle) \quad (10.160)$$

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle \in X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_k.$$

**Визначення 10.54. Композиція двох бінарних нечітких відношень.**

Нехай  $Q$  і  $R$  скінченні або нескінченні бінарні нечіткі відношення. Нехай при цьому нечітке відношення

$$Q = \{ \langle x_i, x_j \rangle, \mu_Q(\langle x_i, x_j \rangle) \}, \quad (10.161)$$

задане на декартовому добутку універсумів  $X_1 \cdot X_2$ , а нечітке відношення

$$R = \{ \langle x_i, x_j \rangle, \mu_R(\langle x_i, x_j \rangle) \} \quad (10.162)$$

на декартовому добутку універсумів  $X_2 \cdot X_3$ .

Нечітке бінарне відношення, задане на декартовому добутку  $X_2 \cdot X_3$  і позначене через  $Q \otimes R$ , називається композицією бінарних нечітких відношень  $Q$  і  $R$ , а його функція належності визначається виразом:

$$\mu_{Q \otimes R}(\langle x_i, x_j \rangle) = \max_{x_j \in X_2} \{ \min \{ \mu_Q(\langle x_i, x_j \rangle), \mu_R(\langle x_i, x_j \rangle) \} \}. \quad (10.163)$$

$$\langle x_i, x_j \rangle \in X_1 \cdot X_3.$$

Визначену таким чином композицію бінарних нечітких відношень називають іноді (*max-min*)-композицією або максимальним звертуванням нечітких відношень.

Можна показати, що ця операція асоціативна та дистрибутивна щодо нечіткого об'єднання, але не дистрибутивна щодо нечіткого перетинання. Інакше кажучи, для довільних бінарних нечітких відношень  $P, Q, R$ , заданих на декартових добутках  $X_1 \cdot X_2, X_2 \cdot X_3, X_3 \cdot X_4$  відповідно, мають місце властивості:

$$P \otimes (Q \otimes R) = (P \otimes Q) \otimes R. \quad (10.164)$$

$$P \otimes (Q \cup R) = (P \otimes Q) \cup (P \otimes R). \quad (10.165)$$

$$P \otimes (Q \cap R) = (P \otimes Q) \cap (P \otimes R). \quad (10.166)$$

Відмітимо також, що для (*max-min*)-композиції довільних бінарних нечітких відношень  $P, Q, R$ , заданих на декартових добутках  $X_1 \cdot X_2, X_2 \cdot X_3, X_3 \cdot X_4$ , відповідно, виконується наступна властивість монотонності:

$$\text{якщо } Q \subseteq R, \text{ то } (P \otimes Q) \subseteq (P \otimes R). \quad (10.167)$$

#### 10.3.4. Відображення нечітких множин

Нехай  $A$  – деяка нечітка підмножина множини  $X$  з функцією належності  $\mu_A(x)$ .

**Визначення 10.55. Чітке відображення нечіткої множини.**

Бінарне нечітке відношення

$$F = \{ \langle x_i, x_j \rangle, \mu_F(\langle x_i, x_j \rangle) \}, \quad (10.168)$$

задане на декартовому добутку  $X_1 \cdot X_2$ , називається *чітким відображенням нечіткої множини  $A$* , якщо для будь-якого  $x_1 \in A, A \subset X_1$ , існує рівно один елемент  $x_j \in X_2$  з відмінним від нуля значенням функції належності  $\mu_F(\langle x_i, x_j \rangle)$ .

**Визначення 10.56. Чітка функція нечіткої множини.**

Якщо в якості універсумів  $X_1$  і  $X_2$  розглядати числові множини, то відповідне відображення природно назвати *чіткою функцією нечіткої множини* або *чіткою функцією нечіткого аргументу*.

Нехай  $\varphi : X \rightarrow Y$  – задане відображення, тобто  $y = \varphi(x)$ . Нечіткий образ нечіткої підмножини  $A$  при відображенні  $\varphi$  є нечітка підмножина  $B$  множини  $Y$ , яка описується співвідношенням:

$$B = \{ \langle y, \mu_B(y) \rangle \} = \{ \langle \varphi(x), \mu_A(x) \rangle \}. \quad (10.169)$$

При цьому функція належності  $\mu_B(y)$  визначається як

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in \varphi^{-1}(y)} \mu_A(x) \quad (10.170)$$

$$\varphi^{-1}(y) = \{x: x \in X, \varphi(x) = y\}. \quad (10.171)$$

Розширимо область визначення поняття відображення нечіткої множини на випадок, коли кожному елементу  $x \in X$  початкової нечіткої множини при відображенні ставиться у відповідність не один конкретний елемент множини  $Y$ , а нечітка підмножина елементів множини  $Y$  з функцією належності, що залежить від  $x$ .

**Визначення 10.57. Нечітке відображення нечіткої множини.**

Бінарне відображення

$$\Phi = \{ \langle x_i, x_j \rangle, \mu_\Phi(\langle x_i, x_j \rangle) \}, \quad (10.172)$$

задане на декартовому добутку  $X_1 \cdot X_2$ , називається нечітким відображенням нечіткої множини  $A$ , якщо для будь-якого  $x_i \in A$ ,  $A \subset X_i$  може бути визначена нечітка підмножина множини  $X_2$ , з функцією належності  $\mu_\Phi(\langle x_i, x_j \rangle)$ , що представляє в  $X_2$  нечіткий образ елемента  $x_i \in X_1$  при відображенні  $\Phi$ .

**Визначення 10.58. Нечітка функція нечіткого аргументу.**

Нечітка функція нечіткого аргументу є окремим випадком нечіткого відображення нечіткого аргументу, якщо  $X_1$  і  $X_2$  – числові множини.

Нехай  $\Phi: X \rightarrow Y$  – задана нечітка функція, тобто  $y = \Phi(x)$ . Тоді функція належності для нечіткого образу  $B$  нечіткої множини  $A$  при нечіткому відображенні  $\Phi: X \rightarrow Y$  має вигляд

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in \varphi^{-1}(y)} \min \{ \mu_A(x), \mu_\Phi(x, y) \}. \quad (10.173)$$

**Визначення 10.59. Нечітка алгебраїчна операція** є частковим випадком нечіткого відображення, коли всі універсуми  $X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_k$  тотожно рівні  $X$ . При цьому нечітка  $k$ -місцева операція записується у формі  $F: X \cdot X \cdot \dots \cdot X \rightarrow X$ .

10.3.5. Властивості бінарних нечітких відношень, заданих на одному універсумі

Розглянемо основні властивості бінарних нечітких відношень, які узагальнюють відомі властивості звичайних відношень.

**Визначення 10.60. Рефлексивність.**

Бінарне нечітке відношення (10.161), задане на декартовому добутку  $X \cdot X$ , називається *рефлексивним*, якщо для кожного з кортежів  $\langle x_i, x_j \rangle$  виконується рівність:

$$\mu_\Phi(\langle x_i, x_j \rangle) = 1, \quad x_i \in X. \quad (10.174)$$

Ясно, що всі елементи головної діагоналі матриці рефлексивного бінарного нечіткого відношення зі скінченним універсумом дорівнюють 1.

**Визначення 10.61. Антирефлексивність.**

Бінарне нечітке відношення (10.161), задане на декартовому добутку  $X \cdot X$ , називається антирефлексивним, якщо для кожного з кортежів  $\langle x_i, x_j \rangle$  виконується рівність:

$$\mu_Q(\langle x_i, x_j \rangle) = 0, \quad x_j \in X. \quad (10.175)$$

При цьому всі елементи головної діагоналі матриці антирефлексивного бінарного нечіткого відношення зі скінченним універсумом дорівнюють 0.

**Визначення 10.62. Симетричність.**

Бінарне нечітке відношення (10.161), задане на декартовому добутку  $X \cdot X$ , називається симетричним, якщо для кожного з кортежів  $\langle x_i, x_j \rangle$  виконується рівність:

$$\mu_Q(\langle x_i, x_j \rangle) = \mu_Q(\langle x_j, x_i \rangle), \quad \langle x_i, x_j \rangle \in X \cdot X. \quad (10.176)$$

Матриця симетричного бінарного нечіткого відношення зі скінченним універсумом симетрична щодо головної діагоналі.

**Визначення 10.63. Асиметричність.**

Бінарне нечітке відношення (10.161), задане на декартовому добутку  $X \cdot X$ , називається асиметричним, якщо виконується наступна умова:

$$\min\{\mu_Q(\langle x_i, x_j \rangle), \mu_Q(\langle x_j, x_i \rangle)\} = 0, \quad \langle x_i, x_j \rangle \in X \cdot X. \quad (10.177)$$

З (10.177) випливає, що всі елементи головної діагоналі матриці асиметричного бінарного нечіткого відношення зі скінченним універсумом дорівнюють 0. На додаток до цього один із двох (а може і обидва) симетричних щодо головної діагоналі елементів повинні дорівнювати 0.

**Визначення 10.64. Антисиметричність.**

Бінарне нечітке відношення (10.161), задане на декартовому добутку  $X \cdot X$ , називається антисиметричним, якщо виконується наступна умова:

$$\min\{\mu_Q(\langle x_i, x_j \rangle), \mu_Q(\langle x_j, x_i \rangle)\} = 0, \quad \langle x_i, x_j \rangle \in X \cdot X, \quad x_i \neq x_j \quad (10.178)$$

Відмітимо, що антисиметричність є більш слабкою властивістю, ніж асиметричність, оскільки не вимагає рівності нулю елементів головної діагоналі матриці відповідного бінарного нечіткого відношення.

**Визначення 10.65. Транзитивність.**

Бінарне нечітке відношення (10.161), задане на декартовому добутку  $X \cdot X$ , називається транзитивним, якщо виконується наступна умова:

$$\mu_Q(\langle x_i, x_k \rangle) \geq \max_{x_j \in X} \left\{ \min \left\{ \mu_Q(\langle x_i, x_j \rangle), \mu_Q(\langle x_j, x_k \rangle) \right\} \right\}, \quad (10.179)$$

$$x_i, x_j, x_k \in X.$$



**Визначення 10.66. Котранзитивність.**

Бінарне нечітке відношення (10.161), задане на декартовому добутку  $X \cdot X$ , називається котранзитивним, якщо виконується наступна умова:

$$\mu_Q(\langle x_i, x_k \rangle) \geq \min_{x_j \in X} \{ \max \{ \mu_Q(\langle x_i, x_j \rangle), \mu_Q(\langle x_j, x_k \rangle) \} \} \quad (10.180)$$

$$x_i, x_j, x_k \in X.$$

Введені властивості симетричності (антисиметричності), рефлексивності (антирефлексивності), транзитивності (котранзитивності) дають можливість розбити всі типи нечітких відношень на три класи. У перший клас входять симетричні відношення, які характеризують подібність або відмінності між об'єктами множини  $X$ . Другий клас утворюють антисиметричні відношення, що задають відношення впорядкованості, домінування. Інші відношення входять у третій клас. Відношення кожного класу розділяються на підкласи залежно від виконання умов рефлексивності та антирефлексивності.

**Визначення 10.67. Подібність.**

Бінарне нечітке рефлексивне та симетричне відношення (10.161), задане на декартовому добутку  $X \cdot X$ , називається відношенням подібності, толерантності.

**Визначення 10.68. Відмінність.**

Бінарне нечітке антирефлексивне і симетричне відношення (10.161), задане на декартовому добутку  $X \cdot X$ , називається відношенням відмінності.

**Визначення 10.69. Еквівалентність.**

Бінарне нечітке рефлексивне, симетричне та транзитивне відношення (10.161), задане на декартовому добутку  $X \cdot X$  називається відношенням еквівалентності.

**Визначення 10.70. Нечітка розбивка.**

Система нечітких підмножин  $A_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , нечіткої множини  $A$  називається нечіткою розбивкою, якщо

$$\bigcup_k A_k = A, \quad A_k \subset A, \quad (10.181)$$

$$h_{C_{k_1, k_2}} < 1, \quad C_{k_1, k_2} = A_{k_1} \cap A_{k_2}, \quad A_{k_1} \subset A, \quad A_{k_2} \subset A, \quad (10.182)$$

$$k_1 = 1, 2, \dots, n, \quad k_2 = 1, 2, \dots, n, \quad k_1 \neq k_2.$$

Співвідношення (10.181) означає, що об'єднання всіх (або частини) нечітких підмножин  $A_k$  збігається з вихідною нечіткою підмножиною  $A$ .

З (10.182) випливає, що висота перетинання для будь-якої пари підмножин нечіткої розбивки строго менше одиниці.

**Операція транзитивного замикання бінарного нечіткого відношення.**

Розглянемо довільне скінченне бінарне нечітке відношення (10.161), задане на одній базисній множині  $X$ . Операція транзитивного замикання являє собою узагальнення операції (*max-min*)-композиції (10.163) довільних бінарних нечітких відношень.

**Визначення 10.71.** Транзитивне замикання бінарного нечіткого відношення.

Транзитивним замиканням бінарного нечіткого відношення  $Q$ , заданого на скінченному універсумі  $X$ , називається таке бінарне нечітке відношення (10.161), яке задано на тому ж універсумі, а його функція належності визначається наступним виразом:

$$\mu_{Q_T}(\langle x_i, x_j \rangle) = \max_{x_{l_1}, x_{l_2}, \dots, x_{l_{n-2}} \in X} \{ \min \{ \mu_Q(\langle x_i, x_{l_1} \rangle), \mu_Q(\langle x_{l_1}, x_{l_2} \rangle), \dots, \mu_Q(\langle x_{l_{n-2}}, x_j \rangle) \} \}, \quad (10.183)$$

$$x_i, x_j \in X \cdot X, \quad l_s \neq i, \quad s = 1, 2, \dots, n-2.$$

Сутність операції транзитивного замикання бінарного нечіткого відношення  $Q$  можна пояснити наступним чином.

Універсуму  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  і сукупності пар  $\langle x_i, x_j \rangle$ , для кожної з яких визначено деяке дійсне число з інтервалу  $[0, 1]$ , що дорівнює значенню функції належності  $\mu_Q(\langle x_i, x_j \rangle)$ , поставимо у відповідність граф  $G(X, E, \mu_G)$ . Тут  $X$  – множина вершин графа,  $E$  – множина дуг графа, яким приписані значення функції належності, обумовлені вершинами початку й кінця дуг. Виберемо тепер пару вершин графа, наприклад,  $x_i, x_j$  і побудуємо множину всіх можливих шляхів, що починаються у вершині  $x_i$ , закінчуються у вершині  $x_j$  і проходять крізь усі інші вершини графа. Для кожного такого шляху  $(\langle x_i, x_{l_1} \rangle, \langle x_{l_1}, x_{l_2} \rangle, \dots, \langle x_{l_{n-2}}, x_j \rangle)$  розрахуємо його характеристику, яка задається числом, рівним

$$L(x_i, x_j) = \min \{ \mu_Q(\langle x_i, x_{l_1} \rangle), \mu_Q(\langle x_{l_1}, x_{l_2} \rangle), \dots, \mu_Q(\langle x_{l_{n-2}}, x_j \rangle) \}. \quad (10.184)$$

Тепер серед усіх можливих шляхів, що з'єднують вершини  $x_i$  і  $x_j$ , знайдемо такий, для якого значення характеристики  $L(x_i, x_j)$  буде максимальним. Повторивши цю процедуру для всіх пар  $(x_i, x_j) \in X \cdot X$ , одержимо сукупність значень функції належності для нечіткого відношення

$$Q = \{ \langle x_i, x_j \rangle, \mu_Q(\langle x_i, x_j \rangle) \}. \quad (10.185)$$

Практичне виконання операції транзитивного замикання бінарного нечіткого відношення  $Q$  реалізується з використанням представлення цього відношення у формі матриці  $M_Q$ . Результат операції транзитивного замикання бінарного нечіткого відношення представляється у вигляді матриці  $M_{Q_T}$ :

$$M_{Q_T} = M_Q \vee M_Q^2 \vee M_Q^3 \vee \dots \vee M_Q^k \vee \dots, \quad (10.186)$$

де через  $M_Q^k$  позначений  $k$ -ступінь композиції матриці  $M_Q$  нечіткого відно-

шення  $Q$ . При цьому  $k$ -ступінь матриці бінарного нечіткого відношення визначається рекурентно:

$$M_Q^k = M_Q \otimes M_Q^{k-1}, k > 1. \quad (10.187)$$

Таким чином, відповідно до (10.186) сукупність  $(n - 1)$ -ланкових шляхів, що визначають матрицю значень функції належності для нечіткого відношення  $Q_T$ , визначається в результаті об'єднання матриць, що відповідають одноланковим, дволанковим, ...,  $(n - 1)$ -ланковим шляхам. При цьому мають на увазі, що якщо, наприклад, на  $k$ -у кроці обчислень матриць  $M_Q^k$  має місце рівність

$$M_Q^k = M_Q^{k-1}, \quad (10.188)$$

то, із цієї рівності випливає

$$M_Q^{k-1} = M_Q^k = M_Q^{k+1}. \quad (10.189)$$

Тому, починаючи з  $k$ -го кроку, подальші обчислення можна припинити.

### 10.3.6. Нечіткі відношення переваги

Типовим атрибутом задач прийняття рішень є необхідність вибору одного із множини можливих альтернативних рішень, яке краще (або, принаймні, не гірше) інших відносно заданого відношення переваги. Бінарне відношення переваги може бути описане у вигляді підмножини декартового добутку множини альтернатив самих на себе. Якщо при цьому відношення переваги задане нечітко, то виникає ситуація, що вимагає спеціального розгляду.

#### Визначення 10.72. Нечітке відношення нестрогої переваги.

Бінарне нечітке відношення

$$R = \{ \langle x_i, x_j \rangle, \mu_R(\langle x_i, x_j \rangle) \}, \quad (10.190)$$

задане на декартовому добутку  $X \times X$ , називається відношенням нестрогої переваги, якщо для будь-якої пари  $(x_i, x_j) \in X \cdot X$  із деяким ступенем упевненості, рівним  $\mu_R(\langle x_i, x_j \rangle)$ , вірне таке твердження: « $x_i$  не гірше  $x_j$ » (позначається як  $x_i \succeq x_j$  або  $(x_i, x_j) \in R$ ). Відповідно до цього запис  $(x_i, x_j) \in R$  означає, що « $x_j$  не гірше  $x_i$ », а із запису  $(x_i, x_j) \notin R$  випливає, що  $x_i$  і  $x_j$  непорівнянні між собою.

Відношення нестрогої переваги рефлексивно, тобто

$$\mu_R(\langle x_i, x_j \rangle) = 1 \text{ при } x \in X. \quad (10.191)$$

Рівність  $\mu_R(\langle x_i, x_j \rangle) = 0$  означає, або що з позитивним ступенем виконується-

ся зворотна перевага  $x_j \succeq x_i$ , або що  $x_i$  і  $x_j$  непорівнянні між собою ні з яким позитивним ступенем.

За заданим на множині  $X$  нечітким відношенням  $R$  можна однозначно визначити наступні відповідні йому нечіткі відношення, які використовуються в задачах прийняття рішень для виділення найкращих альтернатив.

**Визначення 10.73. Нечітке відношення строгої переваги.**

Бінарне нечітке відношення

$$R^s = \{ \langle x_i, x_j \rangle, \mu_{R^s}(\langle x_i, x_j \rangle) \} \quad (10.192)$$

називається відношенням строгої переваги, якщо для будь-якої пари  $x_j, x_i \in R$  зі ступенем упевненості, рівним  $\mu_{R^s}(\langle x_i, x_j \rangle)$ , вірно:  $x_i \succeq x_j$ ; і не вірно  $x_j \succeq x_i$ , тобто  $(x_i, x_j) \in R$  і одночасно  $(x_i, x_j) \notin R$ , або

$$R^s = R \setminus R^{-1}. \quad (10.193)$$

Тут  $R^{-1}$  – відношення, зворотне до  $R$ , тобто з  $(x_i, x_j) \in R^{-1}$  випливає, що  $(x_j, x_i) \in R$ . Запис (10.193) означає, що із усієї множини пар  $(x_i, x_j)$ , для яких  $x_i \succeq x_j$  або  $x_j \succeq x_i$ , віддаляються ті, для яких  $x_j \succeq x_i$ .

Якщо  $(x, y) \in R^s$ , то говорять, що альтернатива  $x$  домінує альтернативу  $y$ . Альтернатива  $x$  називається недомінуючою, якщо не існує альтернативи  $y$  такої, що  $(x, y) \in R^s$ . Відношення  $R^s$  антирефлексивне і антисиметричне.

Функція належності  $\mu_{R^s}(\langle x_i, x_j \rangle)$  для пар  $(x, y) \in R^s$  отримується через функцію належності  $\mu_R(\langle x_i, x_j \rangle)$ :

$$\mu_{R^s}(\langle x_i, x_j \rangle) = \begin{cases} \mu_R(\langle x_i, x_j \rangle) - \mu_R(\langle x_j, x_i \rangle), & \text{якщо } \mu_R(\langle x_i, x_j \rangle) \geq \mu_R(\langle x_j, x_i \rangle), \\ 0 & \text{якщо } \mu_R(\langle x_i, x_j \rangle) < \mu_R(\langle x_j, x_i \rangle) \end{cases}. \quad (10.194)$$

**Визначення 10.74. Нечітке відношення байдужності.**

Бінарне нечітке відношення

$$R^I = \{ \langle x_i, x_j \rangle, \mu_{R^I}(\langle x_i, x_j \rangle) \} \quad (10.195)$$

називається відношенням байдужності, якщо не виконана ані перевага  $x_i \succeq x_j$ , ані перевага  $x_j \succeq x_i$  або обидві ці переваги виконуються одночасно.

Цьому визначенню відповідає наступний компактний запис:

$$R^I = ((X \times X) \setminus (R \cup R^{-1})) \cup (R \cap R^{-1}). \quad (10.196)$$

Відношення  $R^l$  рефлексивне й симетричне.

Використовуючи визначення операцій перетинання, об'єднання і доповнення над нечіткими відношеннями, запишемо функцію належності  $\mu_{R^l}(\langle x_i, x_j \rangle)$  через функцію належності  $\mu_R(\langle x_i, x_j \rangle)$ :

$$\mu_{R^l}(\langle x_i, x_j \rangle) = \max\{1 - \max\{\mu_R(\langle x_i, x_j \rangle), \mu_R(\langle x_j, x_i \rangle)\}, \min\{\mu_R(\langle x_i, x_j \rangle), \mu_R(\langle x_j, x_i \rangle)\}\}. \quad (10.197)$$

### Визначення 10.75. Нечітке відношення квазіеквівалентності.

Бінарне нечітке відношення

$$R^L = \{\langle x_i, x_j \rangle, \mu_{R^L}(\langle x_i, x_j \rangle)\} \quad (10.197)$$

називається відношенням квазіеквівалентності, якщо для будь-якої пари  $x_i, y_j \in X$  зі ступенем впевненості, обумовленим функцією належності  $\mu_{R^L}(\langle x_i, x_j \rangle)$ , має місце одночасно  $x_i \succeq x_j$  і  $x_j \succeq x_i$ .

Компактний запис визначення відношення  $R^L$  має вигляд  $R^L = R \cap R^{-1}$ , а відповідна функція належності визначається співвідношенням

$$\mu_{R^L}(\langle x_i, x_j \rangle) = \min\{\mu_R(\langle x_i, x_j \rangle), \mu_R(\langle x_j, x_i \rangle)\}. \quad (10.198)$$

Відношення  $R^L$  рефлексивне й симетричне.

Надалі, для спрощення запису, і там, де це не викликає непорозумінь, будемо замість  $\mu_A(\langle x_i, x_j \rangle)$  писати  $\mu_A(x_i, x_j)$ .

### Визначення 10.76. Нечітка підмножина невідоміючих альтернатив.

Розглянемо задачу раціонального вибору альтернативи із множини допустимих альтернатив  $X$ , на якій задано нечітке відношення нестрокої переваги  $R$  з функцією належності  $\mu_R(x_i, x_j)$ .

Нехай, крім того,  $R^S$  – відповідне  $R$  нечітке відношення строгої переваги з функцією належності  $\mu_{R^S}(x_i, x_j)$ . У відповідності з визначенням відношення  $R^S$  для будь-якої пари альтернатив  $x, y \in X$  величина  $\mu_{R^S}(x, y)$  є ступінь, з якою альтернатива  $y$  домінує над альтернативою  $x$ . Отже, при фіксованому  $y \in Y$  визначена на  $X$  функція  $\mu_{R^S}(y, x)$  є функцією належності нечіткої множини  $Q_y(x)$  усіх тих альтернатив  $x$ , які строго домінують над альтернативою  $y$ . Функція належності множини  $\bar{Q}_y(x)$  відповідно до (10.163) визначається за формулою

$$\mu_{\bar{Q}_y}(x) = 1 - \mu_{R^S}(y, x). \quad (10.199)$$

Тепер можна відшукати підмножину  $\bar{Q}(x)$  усіх тих альтернатив  $x$ , кожна з яких не домінується ні однією з альтернатив з  $X$ . Ця підмножина є перетинанням всіх підмножин виду  $\bar{Q}_y(x)$  за всіма  $y \in X$ , тобто

$$\bar{Q}(x) = \bigcap_{y \in X} \bar{Q}_y(x). \quad (10.200)$$

При цьому функція належності для підмножини  $\bar{Q}(x)$  відповідно до (10.150) визначається співвідношенням

$$\mu_{\bar{Q}(x)}(x) = \inf_{y \in X} \{\mu_{\bar{Q}_y(x)}(x)\} = \inf_{y \in X} \{1 - \mu_{R^s}(y, x)\} = 1 - \sup_{y \in X} \mu_{R^s}(y, x) \quad (10.201)$$

Значення  $\mu_{\bar{Q}(x)}(x)$  задає ступінь, з якого альтернатива  $x$  не домінується ні однією з альтернатив множини  $X$ .

Тепер, використовуючи (10.194), запишемо вираз (10.201) у більш зручній для розрахунків формі

$$\mu_{\bar{Q}(x)}(x) = 1 - \sup_{y \in X} \{\mu_R(y, x) - \mu_R(x, y)\}, \quad (10.202)$$

де  $\mu_R(x, y)$  – функція належності початкового нечіткого відношення переваги  $R$  на множині  $X$ .

Оскільки величина  $\mu_{\bar{Q}(x)}(x)$  є ступенем недомінуєності альтернативи  $x$ , то при виборі найкращої альтернативи природно відшукати ту із допустимих, якій відповідає максимальний ступінь належності нечіткій множині  $\bar{Q}(x)$  недомінуєних альтернатив.

У розглянутому вище підході передбачалося, що всі можливі альтернативи однаково допустимі. У реальних задачах це допущення може не виконуватися. У цьому випадку ступінь допустимості різних альтернатив може бути заданий функцією належності  $\mu_A(x_i)$ ,  $x_i \in X$ .

Тоді найкращими будуть ті альтернативи, які мають найбільші ступені недомінуєності і допустимості. Оскільки ці дві якості кожної з альтернатив ніяк не зв'язані між собою, виникає необхідність компромісу, який може бути досягнутий, наприклад, так.

Нехай  $\mu_A(x_i)$  і  $\mu_{\bar{Q}(x)}(x_i)$ ,  $x_i \in X$  – набори значень ступеню допустимості і недомінуєності альтернатив. Тоді раціональну альтернативу  $x_i^*$  пропонується відшукати зі співвідношення

$$\mu(x_i^*) = \max_{x_i} \min \{\mu_A(x_i), \mu_{\bar{Q}(x)}(x_i)\}. \quad (10.203)$$

## 10.4. Нечіткі величини, числа та інтервали

Принципова перевага теорії нечітких множин, що визначає доцільність її практичного застосування для дослідження систем, які функціонують в умовах невизначеності, ґрунтується на можливості адекватного представлення змінних таких систем з використанням цих множин.

При цьому для опису змінних системи можуть використовуватися різні спеціальні нечіткі множини.

### 10.4.1. Основні визначення

**Визначення 10.77.** **Нечіткою величиною** називається довільна нечітка множина  $B = \{x, \mu_B(x)\}$ , задана на множині дійсних чисел  $R$ . Функція належності нечіткої величини є відображення  $\mu_B(x): R \rightarrow [0, 1]$ . Якщо в якості універсума взяти підмножину неневід'ємних дійсних чисел  $R$ , то одержимо визначення не-негативної нечіткої величини  $B$ .

Конкретизацією загального поняття нечітка величина є поняття *нечіткий інтервал* і *нечітке число*.

**Визначення 10.78.** **Нечітким інтервалом** називається нечітка величина з опуклою функцією належності.

**Визначення 10.79.** **Нечітким числом** називається нечітка величина, що має нормальну і опуклу функцію належності.

Нечітке число називається **нечітким нулем**, якщо його модальне значення дорівнює 0.

Нечітке число називається **позитивним (негативним)**, якщо воно має строго позитивний (відповідно, строго негативний) носій.

Введених вище понять недостатньо для коректного визначення всієї множини математичних (зокрема, арифметичних) операцій, необхідних для розв'язку конкретних задач аналізу та синтезу систем.

Оскільки нечіткі числа і інтервали є нечіткими множинами, то для них вірні всі властивості й виконуються всі операції, визначені раніше для нечітких множин.

Теорія нечітких множин, зокрема, нечітких чисел – крок на шляху зближення бездоганної точності класичної математики та всепроникаючої неточності реального світу. Очевидна їхня несумісність призводить до необхідності розробки комплексу понять, методів, теорій, у яких неточність сприймається як універсальна реальність нашого життя і які в сукупності формують повну й несуперечливу систему правил виконання операцій над об'єктами цієї теорії, тобто алгебру.

Алгебра – аксіоматична теорія, тобто введені і використовувані в цій теорії операції визначаються деяким набором основних аксіом. Цей набір може бути різним, відповідно до цього можуть бути побудовані різні алгебри. Проведемо аналіз відомих результатів в області побудови алгебри над нечіткими числами.

При розробці алгебри над множиною нечітких чисел звичайно використовується так званий принцип узагальнення, що дозволяє перенести різні математичні операції із чітких множин на нечіткі. Принцип узагальнення є однією з фундаментальних ідей теорії нечітких множин і широко використовується при розв'язанні всіх задач, невід'ємним елементом яких є нечітке відображення. Розглянемо цей принцип.

Нехай задане звичайне, чітке відображення  $f : X \rightarrow Y$ , де  $X$  і  $Y$  – звичайні скінченні або нескінченні множини. Нехай далі  $A$  – деяка нечітка підмножина множини  $X$  з функцією належності  $\mu_A(x)$ . Істотним і нетривіальним є питання про те, як побудувати образ нечіткої множини  $A$  при відображенні  $f$ . Л. Заде запропонував наступний підхід (саме він і названий принципом узагальнення), результатом застосування якого є визначення образу нечіткої множини при звичайному (чітко описаному) відображенні. Відповідно до цього принципу образ  $A$  при відображенні  $f : X \rightarrow Y$  визначається як нечітка підмножина  $B$  множини  $Y$ , що є сукупністю пар

$$(y, \mu_B(y)) = (f(x), \mu_A(x)), x \in X, \quad (10.204)$$

де  $\mu_B(y)$  – функція належності образу. Зрозуміло, що цю функцію нечіткої множини  $B$ , що є образом нечіткої множини  $A$  при відображенні  $f$ , можна записати у вигляді

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x), y \in Y. \quad (10.205)$$

Тут множина  $f^{-1}(y)$  для будь-якого фіксованого  $y \in Y$  визначається співвідношенням

$$f^{-1}(y) = \{x : x \in X, f(x) = y\}, \quad (10.206)$$

тобто ця множина є множиною всіх елементів  $x \in X$ , образом кожного з яких при відображенні  $f$  є елемент  $y$ .

Якщо, зокрема, відображення  $f : X \rightarrow Y$  є взаємно однозначним, то співвідношення (10.205) спрощується до виду

$$\mu_B(y) = \mu_A(f^{-1}(y)), y \in Y. \quad (10.207)$$

#### 10.4.2. Операції над нечіткими числами

Нехай  $y = f(x)$  – неперервна, монотонна функція,  $x$  – нечітке число з функцією належності  $\mu_A(x)$ . Тоді функція належності образу  $f(x)$  відповідно до (10.205), (10.207) має вигляд



$$\mu_{f(x)}(y) = \begin{cases} \sup_{x=f^{-1}(y)} \mu_A(x), \\ 0, & f^{-1}(y) = \emptyset, \\ \mu_A(f^{-1}(y)), & \text{якщо } \exists x_1 \neq x_2 \text{ такі, що } f(x_1) = f(x_2). \end{cases} \quad (10.208)$$

Легкість виконання унарних операцій над нечіткими числами визначається простотою реалізації в цьому випадку операції  $x = f^{-1}(y)$ , що дозволяє знайти значення  $x$ , яке є прообразом  $y$  при відображенні  $y = f(x)$ . Для бінарних і, взагалі,  $k$ -арних операцій ситуація суттєво ускладнюється. Розглянемо, наприклад, найпростішу бінарну операцію додавання

$$z = x + y. \quad (10.209)$$

Зрозуміло, що деяке значення результату додавання  $z$  можна отримати нескінченним числом способів, комбінуючи довільне значення  $x$  і значення  $y = z - x$ .

Нехай  $A_1, A_2, \dots, A_k$  – набір довільних нечітких чисел з функціями належності  $\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2), \dots, \mu_{A_k}(x_k)$ , відповідно. Тоді функція належності нечіткого числа  $B = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$  має вигляд

$$\mu_B(y) = \sup \{ \min \{ \mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2), \dots, \mu_{A_k}(x_k) \} \mid y = f(x_1, x_2, \dots, x_k) \}. \quad (10.210)$$

У найпростішому випадку додавання двох нечітких чисел  $A_1$  і  $A_2$  спрощується до вигляду

$$\mu_B(y) = \max_{\substack{x_1 \cdot x \\ x_1 + x_2 = y}} \min \{ \mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2) \} = \max_{\substack{x_1 \cdot x_2 \\ x_1 + x_2 = y}} \min \{ \mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(y - x_1) \}. \quad (10.211)$$

Таким чином, при реалізації операції додавання двох нечітких чисел  $A_1$  і  $A_2$ , ступінь належності конкретного значення  $y$  нечіткому числу  $B$ , що є результатом складання, дорівнює максимальному ступеню серед усіх таких пар доданків, які відображаються в те саме значення  $y$ .

Аналогічно визначаються функції належності чисел, що є результатом віднімання, множення і ділення:

$$\begin{aligned} \mu_B(y) &= \max_{\substack{x_1 \cdot x_2 \\ x_2 - x_1 = y}} \min \{ \mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2) \} = \max_{\substack{x_1 \cdot x_2 \\ x_2 - x_1 = y}} \min \{ \mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(y + x_1) \} \\ \mu_B(y) &= \max_{\substack{x_1 \cdot x_2 \\ x_1 x_2 = y}} \min \{ \mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2) \} = \max_{\substack{x_1 \cdot x_2 \\ x_1 x_2 = y}} \min \{ \mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(y / x_1) \} \\ \mu_B(y) &= \max_{\substack{x_1 \cdot x_2 \\ x_1 / x_2 = y}} \min \{ \mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2) \} = \max_{\substack{x_1 \cdot x_2 \\ x_1 / x_2 = y}} \min \{ \mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(y x_1) \} \end{aligned} \quad (10.212)$$

Зрозуміло, що безпосередній розрахунок за формулами (10.211) та (10.212) легко реалізується для нечітких чисел з дискретним носієм.

Однак, для неперервних нечітких чисел безпосереднє виконання цих операцій ускладнене.

**Визначення 10.80. Функції  $(L-R)$ -типу** визначаються як довільні незростаючі на множині неневід'ємних дійсних чисел функції, що задовольняють умовам

$$L(-x) = L(x), R(-x) = R(x), L(0) = R(0) = 1. \quad (10.213)$$

Зрозуміло, що розглянуті раніше трикутна функція належності  $f_{\Delta}(x; a, b, c)$  при  $b = 0$  і  $a = -c$ , трапецієподібна функція належності  $f_T(x; a, b, c, d)$  при  $a = -d$  і  $c = -b$ , а також П-подібні функції належності при належному виборі параметрів є функціями  $(L-R)$ -типу.

**Визначення 10.81. Нечітким числом  $(L-R)$ -типу** називається нечітка величина  $B = \{(x, \mu_B(x))\}$ , функція належності якої може бути представлена у формі композиції деякої  $L$ -функції й деякої  $R$ -функції:

$$\mu_B(x) = \begin{cases} L\left(\frac{a-x}{\alpha}\right), & x \leq a, \\ R\left(\frac{x-a}{\beta}\right), & x > a, \end{cases} \quad (10.214)$$

де  $\alpha > 0$  і  $\beta > 0$ .

При цьому параметр  $a$  є модою нечіткого числа, а параметри  $\alpha$  і  $\beta$  є лівим і правим коефіцієнтами нечіткості, відповідно. Як ясно із цього визначення, при задаванні нечітких чисел  $(L-R)$ -типу можуть використовуватися дві різні функції зазначеного виду.

З визначення (10.214) випливає, що нечітке число  $(L-R)$ -типу з функцією належності  $\mu_B(x)$  при фіксованих  $L$  і  $R$  функціях однозначно визначається трійкою своїх параметрів  $\langle a, \alpha, \beta \rangle$ . Нечіткі числа  $(L-R)$ -типу позначаються спеціальним чином:

$$B_{LR} = \langle a, \alpha, \beta \rangle_{LR}. \quad (10.215)$$

Розширенням поняття нечіткого числа  $(L-R)$ -типу є поняття нечіткого інтервалу  $(L-R)$ -типу.

**Визначення 10.82. Нечітким інтервалом  $(L-R)$ -типу** називається нечітка величина  $B = \{(x, \mu_B(x))\}$ , функція належності якої може бути представлена у формі композиції деякої  $L$ -функції й деякої  $R$ -функції:

$$\mu_B(x) = \begin{cases} L\left(\frac{a-x}{\alpha}\right), & x \leq a, \\ 1, & a < x < b \\ R\left(\frac{x-b}{\beta}\right), & x \geq b, \end{cases} \quad (10.216)$$

де  $\alpha > 0$  і  $\beta > 0$ .

При цьому параметри  $a$  і  $b$  визначають ядро нечіткого інтервалу  $[a, b]$  і називаються, відповідно, нижнім і верхнім модальними значеннями нечіткого інтервалу.

Параметри  $\alpha$  і  $\beta$  називаються лівим і правим коефіцієнтами нечіткості, відповідно.

Нечіткий інтервал  $(L-R)$ -типу часто називають толерантним нечітким числом  $(L-R)$ -типу.

Функція належності  $\mu_B(x)$  нечіткого інтервалу  $(L-R)$ -типу при фіксованих  $L$  і  $R$  функціях однозначно визначається четвіркою своїх параметрів  $\langle a, b, \alpha, \beta \rangle$ . Нечіткі інтервали  $(L-R)$ -типу позначаються як:

$$B_{LR} = \langle a, b, \alpha, \beta \rangle_{LR}. \quad (10.217)$$

Зрозуміло, що при  $a = b$  нечіткий інтервал  $(L-R)$ -типу перетворюється в нечітке число  $(L-R)$ -типу.

Простий і гранично формалізований спосіб представлення нечітких чисел і нечітких інтервалів за допомогою функцій  $(L-R)$ -типу ініціював розробку специфічної технології виконання найпростіших операцій із цими числами з використанням тільки значень параметрів відповідних функцій  $(L-R)$ -типу.

Нехай  $A_{LR}$  і  $B_{LR}$  – довільні нечіткі числа  $(L-R)$ -типу, задані у вигляді:

$$A_{LR} = \langle a_1, \alpha_1, \beta_1 \rangle, B_{LR} = \langle a_2, \alpha_2, \beta_2 \rangle. \quad (10.218)$$

Тоді основні арифметичні операції (додавання, віднімання, множення і ділення) над цими числами реалізуються наступним чином.

**Додавання.** Операція додавання нечітких чисел  $(L-R)$ -типу позначається через

$$A_{LR} + B_{LR} = C_{LR} = \langle a, \alpha, \beta \rangle_{LR}, \quad (10.219)$$

де параметри  $a$ ,  $\alpha$  і  $\beta$  результату визначаються як:

$$a = a_1 + a_2, \quad \alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \beta = \beta_1 + \beta_2. \quad (10.220)$$

**Віднімання.** Операція віднімання нечітких чисел  $(L-R)$ -типу позначається

через

$$A_{LR} - B_{LR} = C_{LR} = \langle a, \alpha, \beta \rangle_{LR}, \quad (10.221)$$

де параметри  $a$ ,  $\alpha$  і  $\beta$  результату визначаються як:

$$a = a_1 - a_2, \quad \alpha = \alpha_1 + \beta_2, \quad \beta = \beta_1 + \alpha_2. \quad (10.222)$$

**Множення нечітких чисел ( $L-R$ )-типу.** Операція множення нечітких чисел ( $L-R$ )-типу позначається через

$$A_{LR} \bullet B_{LR} = C_{LR} = \langle a, \alpha, \beta \rangle_{LR}, \quad (10.223)$$

де модальні значення  $a_1$  і  $a_2$  – позитивні; параметри  $a$ ,  $\alpha$  і  $\beta$  результату визначаються як:

$$a = a_1 a_2, \quad \alpha = a_1 \alpha_2 + \alpha_2 a_1, \quad \beta = a_1 \beta_2 + a_2 \beta_1. \quad (10.224)$$

Якщо модальні значення мають різні знаки:  $a_1 < 0$  і  $a_2 > 0$ , то операція множення таких нечітких чисел ( $L-R$ )-типу також позначається через

$$A_{LR} \bullet B_{LR} = C_{LR} = \langle a, \alpha, \beta \rangle_{LR}, \quad (10.225)$$

де параметри  $a$ ,  $\alpha$  і  $\beta$  результату визначаються як:

$$a = a_1 a_2, \quad \alpha = a_2 \alpha_1 + a_2 \beta_2, \quad \beta = a_2 \beta_1 - a_1 \alpha_2. \quad (10.226)$$

Якщо модальні значення  $a_1$  і  $a_2$  негативні, то операція множення таких нечітких чисел ( $L-R$ )-типу визначаються таким чином:

$$a = a_1 a_2, \quad \alpha = -a_2 \beta_1 + a_1 \beta_2, \quad \beta = a_2 \alpha_1 - a_1 \alpha_2. \quad (10.227)$$

**Ділення позитивних нечітких чисел ( $L-R$ )-типу.** Операція ділення таких нечітких чисел ( $L-R$ )-типу позначається через

$$A_{LR} \div B_{LR} = C_{LR} = \langle a, \alpha, \beta \rangle_{LR}, \quad (10.228)$$

де параметри  $a$ ,  $\alpha$  і  $\beta$  результату визначаються як:

$$a = a_1 / a_2, \quad \alpha = \frac{a_1 \beta_2 + a_2 \alpha_1}{a_2^2}, \quad \beta = \frac{a_1 \alpha_2 + a_2 \beta_1}{a_2^2}. \quad (10.229)$$

**Зворотнє нечітке число** для позитивного нечіткого числа  $((L-R)$ -типу  $A_{LR}$ , носій якого є підмножиною  $R$ , позначається через

$$A_{LR}^{-1} = C_{LR} = \langle a, \alpha, \beta \rangle_{LR}, \quad (10.230)$$

де параметри  $a$ ,  $\alpha$  і  $\beta$  результату визначаються таким чином:

$$a = 1/a_1, \quad \alpha = \beta_1/a_1^2, \quad \beta = \alpha_1/a_1^2 \quad (10.231)$$

Для того, щоб правила (10.222) – (10.231) можна було реалізувати стосовно до *трикутних* нечітких чисел необхідно перейти від стандартної форми запису функції належності (10.28) таких чисел до виду (10.214). Це легко зробити, якщо задати функцію  $L$ -типу і  $R$ -типу таким чином:

$$L(u) = -u, \quad u = \frac{a-x}{\alpha}, \quad R(v) = -v, \quad v = \frac{x-c}{\beta}, \quad \alpha = b-a, \quad \beta = c-b.$$

Тоді функція належності, задана у формі (10.28), прийме стандартний для  $(L-R)$  функцій вигляд (10.214).

Нехай два нечіткі числа  $A_1$  і  $A_2$  задані своїми функціями належності  $\mu_{A_1}(x_1)$ ,  $\mu_{A_2}(x_2)$ . Тоді функція належності числа  $B = A_1 + A_2$ , визначається співвідношенням

$$\mu_B(z) = \int_{-x}^z \mu_{A_1}(t) \mu_{A_2}(z-t) dt. \quad (10.232)$$

У цій формулі сповна відображається принципова позиція, відповідно до якої при розрахунках значення функції належності конкретного результату складання  $z$  повинні враховуватися всі можливі комбінації доданків, що визначають при підсумовуванні це значення. Ця важлива перевага введеного з використанням (10.232) правила визначила його широке практичне використання.

Зауважимо, що одержувана відповідно до (10.232) функція належності не буде збігатися з функцією належності (10.210). Справа в тому, що за правилом (10.210) для будь-якого нечіткого значення результату підсумовування у відповідне значення функції належності не може бути більше значень функції належності доданків, що задають  $y$ . Для правила (10.232) значення функції належності результату підсумовування формується за типом «сума добутків» значень функцій належності доданків, тобто може бути більше кожного з них.

Співвідношення (10.232) у дискретному випадку спрощується до вигляду

$$\mu_B(y) = \sum_{y=x_1+x_2} \mu_{A_1}(x_1) \mu_{A_2}(y-x_1). \quad (10.233)$$

Недоліки відомих методик визначення операцій над нечіткими числами робить актуальною розробку деякої ортодоксальної алгебри, що задає правила реалізації основних алгебраїчних операцій, які задовольняють двом основним вимогам: збереження нормальності результату та відповідність принципу узагальнення.

Розглянемо довільну бінарну операцію над двома нечіткими числами  $A_1$  і  $A_2$  з функціями належності  $\mu_{A_1}(x_1)$ ,  $\mu_{A_2}(x_2)$ . Введемо символ  $*$  довільної бінарної операції (додавання, віднімання, множення, ділення), що ставить у відповідність елементам композиції чисел  $A_1$  і  $A_2$  результат  $B$ .

Одночасно із цим введемо «зворотну» операцію  $\otimes$ , з використанням якої за результатом композиції  $B$  і одного з її елементів (наприклад,  $A_1$ ) знаходиться другий елемент.

Нехай

$$\begin{aligned} B &= A_1 * A_2 = A_1 + A_2. \\ B &= A_1 * A_2 = A_1 - A_2. \\ B &= A_1 * A_2 = A_1 A_2. \\ B &= A_1 * A_2 = A_1 / A_2. \end{aligned} \quad (10.234)$$

Тоді, з використанням «зворотної» операції, відповідно, будемо мати

$$\begin{aligned} A_2 &= B \otimes A_1 = B - A_1. \\ A_2 &= B \otimes A_1 = A_1 - B. \\ A_2 &= B \otimes A_1 = \frac{B}{A_1}. \\ A_2 &= B \otimes A_1 = \frac{A_1}{B}. \end{aligned} \quad (10.235)$$

Функцію належності бінарної композиції  $B = A_1 * A_2$  визначимо співвідношенням

$$\mu_B(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_1(t) \mu_2(z \otimes t) dt. \quad (10.236)$$

Зокрема, якщо  $*$  є операція підсумовування, то відповідна до результату функція належності буде мати вигляд

$$\mu_B(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_1(t) \mu_2(z - t) dt. \quad (10.237)$$

Нормалізуємо одержувану з використанням (10.236) функцію належності,

нормуючи її максимальним значенням:

$$\tilde{\mu}_B(z) = \left[ \max_z \{ \mu_B(z) \} \right]^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \mu_1(t) \mu_2(z \otimes t) dt. \quad (10.238)$$

При цьому для операції підсумовування маємо

$$\tilde{\mu}_B(z) = \left[ \max_z \{ \mu_B(z) \} \right]^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \mu_1(t) \mu_2(z - t) dt. \quad (10.239)$$

Співвідношення (10.238) для дискретних нечітких множин набуває вигляду

$$\tilde{\mu}_B(z) = \left[ \max_z \{ \mu_B(z) \} \right]^{-1} \sum_{x_1 + x_2 = z} \mu_{A_1}(x_1) \mu_{A_2}(z \otimes x_1). \quad (10.240)$$

Функція належності (10.238) результату виконання бінарної операції, по-перше, реалізує принцип узагальнення і, по-друге, задовольняє вимозі нормальності.

Зробимо зауваження. Реалізація процедури знаходження максимального значення функції  $\mu_B(z)$  з наступним нормуванням, як правило, не обтяжуюча операція. Для операцій підсумовування, віднімання, добутку двох нечітких чисел значення

$$z_{\max} = \arg \max_z \{ \mu_B(z) \} = \arg \max_z \{ \mu_B(A_1 * A_2) \} = x_{1\max} * x_{2\max}, \quad (10.241)$$

де  $x_{k\max} = \arg \max_{x_k} \{ \mu_k(x_k) \}$ ,  $k = 1, 2$ .

Безпосередні розрахунки показують, що при збільшенні кількості доданків гауссове наближення до результату підсумовування стає більш точним. Цей факт дозволяє використовувати гауссову апроксимацію для опису початкових «первинних» нечітких чисел. І ще одна істотна обставина на користь гауссового опису нечітких чисел – при виконанні операцій додавання та віднімання двох гауссових нечітких чисел за правилом (10.238), а також при множенні гауссового числа на скаляр знову виходить гауссове число:

$$\mu_{A_1}(x) = \exp \left\{ - \frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2} \right\}; \quad (10.242)$$

$$\mu_{A_2}(y) = \exp \left\{ - \frac{(y - m_y)^2}{2\sigma_y^2} \right\}. \quad (10.243)$$

Одержимо нечітке число  $B$  з функцією належності

$$\mu_B(z) = \exp\left\{-\frac{(z-m_z)^2}{2\sigma_z^2}\right\}, \quad (10.244)$$

$$m_z = m_x + m_y, \quad \sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2.$$

Дійсно, у відповідності з (10.236) маємо

$$\begin{aligned} \mu(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mu_1(x) \cdot \mu_2(z-x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right\} \exp\left\{-\frac{[(z-x)-m_y]^2}{2\sigma_y^2}\right\} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(z-x-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right]\right\} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}A(x,z)\right\} dx. \end{aligned} \quad (10.245)$$

Далі

$$\begin{aligned} A(x,z) &= \frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(z-x-m_y)^2}{\sigma_y^2} = \\ &= \frac{1}{\sigma_x^2\sigma_y^2} [\sigma_y^2x^2 - 2\sigma_y^2xm_x + \sigma_y^2m_x^2 + \sigma_x^2z^2 + \sigma_x^2x^2 + \sigma_x^2m_y^2 - 2\sigma_x^2zx + 2\sigma_x^2xm_y - 2\sigma_x^2zm_y] = \\ &= \frac{1}{\sigma_x^2\sigma_y^2} [(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)x^2 - 2x(\sigma_y^2m_x + \sigma_x^2z - \sigma_x^2m_y) + m_x^2\sigma_y^2 + m_y^2\sigma_x^2 + \sigma_x^2z^2 - 2\sigma_x^2zm_y] = \\ &= \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{\sigma_x^2\sigma_y^2} \left[ x^2 - 2x \frac{m_x\sigma_y^2 + \sigma_x^2(z-m_y)}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} + \left( \frac{m_x\sigma_y^2 + \sigma_x^2(z-m_y)}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \right)^2 \right] + \\ &+ \frac{1}{\sigma_x^2\sigma_y^2} \left[ m_x^2\sigma_y^2 + m_y^2\sigma_x^2 + \sigma_x^2z^2 - 2\sigma_x^2zm_y - \frac{(m_x^2\sigma_y^2 + (z-m_y)\sigma_x^2)^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \right] = \\ &= \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{\sigma_x^2\sigma_y^2} \left( x - \frac{m_x\sigma_y^2 + (z-m_y)\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \right)^2 + \frac{1}{\sigma_x^2\sigma_y^2(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)} \times \\ &\times [m_x^2\sigma_x^2\sigma_y^2 + m_x^2\sigma_x^4 + z^2\sigma_x^4 + \sigma_x^2\sigma_y^2z^2 + \sigma_x^4m_y^2 + \sigma_x^2\sigma_y^2m_y^2 - \\ &- 2\sigma_x^4zm_y - 2\sigma_x^2\sigma_y^2zm_y - \sigma_x^4m_y^2 - m_x^2\sigma_x^4 - z^2\sigma_x^4 + 2\sigma_x^4\sigma_y^2m_y m_x + 2\sigma_x^4zm_y - 2\sigma_x^2\sigma_y^2m_y z] = \\ &= \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{\sigma_x^2\sigma_y^2} \left( x - \frac{m_x\sigma_y^2 + (z-m_y)\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \right)^2 + \frac{1}{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)} \times [z^2 + m_x^2 + m_y^2 - 2zm_y - 2zm_x + 2m_x m_y] = \\ &= \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{\sigma_x^2\sigma_y^2} \left( x - \frac{m_x\sigma_y^2 + (z-m_y)\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \right)^2 + \frac{1}{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)} \times [z - (m_x + m_y)]^2. \end{aligned} \quad (10.246)$$



Тоді

$$\begin{aligned}
\mu(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{z - (m_x + m_y)}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}\right]^2\right\} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{x - \frac{m_x\sigma_y^2 - m_y\sigma_x^2 + z\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}}{\frac{\sigma_x^2\sigma_y^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}}\right]^2\right\} dx = \\
&= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{z - (m_x + m_y)}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}\right]^2\right\} \times \frac{\sqrt{2\pi}\sigma_x\sigma_y}{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}} \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x\sigma_y}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{x - \frac{m_x\sigma_y^2 - m_y\sigma_x^2 + z\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}}{\frac{\sigma_x^2\sigma_y^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}}\right]^2\right\} dx = \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}\sigma_x\sigma_y}{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{z - (m_x + m_y)}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}\right]^2\right\}. \tag{10.247}
\end{aligned}$$

Нормуючи функцію належності  $\mu(z)$ , одержимо

$$\tilde{\mu}(z) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{z - (m_x + m_y)}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}\right]^2\right\} = \exp\left\{-\frac{(z - m_z)^2}{2\sigma_z^2}\right\}, \tag{10.248}$$

де  $m_z = m_x + m_y$ ,  $\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$ 

Аналогічно можна показати, що і різниця двох гауссових нечітких чисел є гауссовою. Використовуючи функції належності одержимо функцію належності нечіткого числа  $z = x_1 - x_2$ . Відповідно до (10.236) маємо

$$\begin{aligned}
\mu(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mu_1(x) \cdot \mu_2(x - z) dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right\} \exp\left\{-\frac{[(x - z) - m_y]^2}{2\sigma_y^2}\right\} dx = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2} + \frac{(x - z - m_y)^2}{2\sigma_y^2}\right]\right\} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}A(x, z)\right\} dx \tag{10.249}
\end{aligned}$$

Далі

$$\begin{aligned}
A(x, z) &= \frac{(x - m_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(x - z - m_y)^2}{\sigma_y^2} = \\
&= \frac{1}{\sigma_x^2\sigma_y^2} [\sigma_y^2 x^2 - 2\sigma_y^2 x m_x + \sigma_y^2 m_x^2 + \sigma_x^2 z^2 + \sigma_x^2 m_y^2 - 2\sigma_x^2 z x - 2\sigma_x^2 x m_y + 2\sigma_x^2 z m_y] = \\
&= \frac{1}{\sigma_x^2\sigma_y^2} [(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)x^2 - 2x(\sigma_y^2 m_x + \sigma_x^2 z + \sigma_x^2 m_y) + m_x^2 \sigma_y^2 + m_y^2 \sigma_x^2 + \sigma_x^2 z^2 + 2\sigma_x^2 z m_y] = \\
&= \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{\sigma_x^2\sigma_y^2} \left[ x^2 - 2x \frac{m_x\sigma_y^2 + \sigma_x^2(z + m_y)}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} + \left( \frac{m_x\sigma_y^2 + \sigma_x^2(z + m_y)}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \right)^2 \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} \left[ m_x^2 \sigma_y^2 + \sigma_x^2 z^2 + \sigma_x^2 m_y^2 + 2\sigma_x^2 z m_y - \frac{(m_x^2 \sigma_y^2 + (z + m_y) \sigma_x^2)^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \right] = \\
& = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} \left( x - \frac{m_x \sigma_x^2 + (z + m_y) \sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \right) + \frac{1}{\sigma_x^2 \sigma_y^2 (\sigma_x^2 + \sigma_y^2)} \times \\
& \times \left[ m_x^2 \sigma_x^2 \sigma_y^2 + m_x^2 \sigma_y^4 + z^2 \sigma_x^4 + \sigma_x^2 \sigma_y^2 z^2 + \sigma_x^4 m_y^2 + \sigma_x^2 \sigma_y^2 m_y^2 + 2\sigma_x^4 z m_y + 2\sigma_x^2 \sigma_y^2 z m_y - \sigma_x^4 m_y^2 - m_x^2 \sigma_y^4 - \right. \\
& \left. - z^2 \sigma_x^4 - 2\sigma_x^2 \sigma_y^2 m_y m_x - 2\sigma_x^4 z m_y - 2\sigma_x^2 \sigma_y^2 m_y z \right] = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} \left( x - \frac{m_x \sigma_y^2 + (z + m_y) \sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \right) + \frac{1}{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)} \times \\
& \times \left[ z^2 + m_x^2 + m_y^2 + 2z m_y - 2z m_x - 2m_x m_y \right] = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} \left( x - \frac{m_x \sigma_y^2 + (z + m_y) \sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \right)^2 + \\
& + \frac{1}{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)} \times [z - (m_x - m_y)].
\end{aligned} \tag{10.250}$$

Тоді

$$\mu(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{[z - (m_x - m_y)]^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \right] \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\left[ x - \frac{m_x \sigma_y^2 - m_y \sigma_x^2 + z \sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \right]^2}{\frac{\sigma_x^2 \sigma_y^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}} \right] \right\} dx. \tag{10.251}$$

Нормуючи функцію належності  $\mu(z)$ , одержимо

$$\tilde{\mu}(z) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{[z - (m_x + m_y)]^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \right] \right\} = \exp \left\{ -\frac{(z - m_z)^2}{2\sigma_z^2} \right\}, \tag{10.252}$$

де  $m_z = m_x - m_y$ ;  $\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$ .

Нарешті відзначимо, що і функція належності результату множення гаусового числа на константу є гауссовою. Нехай функція належності  $A$  має вигляд:

$$\mu_A(x) = \exp \left\{ -\frac{(x - m)^2}{2\sigma^2} \right\}. \tag{10.253}$$

Використовуючи (10.208), одержимо функцію належності  $B = kA$ . В підсумку маємо:

$$\mu_B(y) = \mu_A(f^{-1}(y)) = \mu_A\left(\frac{y}{k}\right) = \exp \left\{ -\frac{\left(\frac{y}{k} - m\right)^2}{2\sigma^2} \right\} = \exp \left\{ -\frac{(y - mk)^2}{2k^2 \sigma^2} \right\} = \exp \left\{ -\frac{(y - m_k)^2}{2\sigma_k^2} \right\}. \tag{10.254}$$

### 10.5. Питання до самоконтролю

1. Як ви вважаєте, існування людини в оточуючому середовищі регулюється більше чіткими або не чіткими значеннями параметрів останнього?
2. Чим відрізняються інтелектуальні системи від звичайних? Поясніть на прикладах.
3. Яку ціну приходиться платити інтелектуальним системам за право приймати рішення в умовах неповних початкових даних?
4. Нечіткі множини, величини, числа, інтервали та відношення. Що їх об'єднує та яка між ними різниця?
5. Основні поняття та визначення теорії нечітких множин.
6. Основні характеристики нечітких множин.
7. Основні типи функції належності. Наведіть приклади.
8. Методи побудови функцій належності нечітких множин та області їхнього застосування.
9. Рівність і домінування нечітких множин.
10. Унарні операції над нечіткими множинами.
11. Бінарні операції над нечіткими множинами.
12. Нечіткі оператори.
13. Нечіткі відношення і способи його завдання.
14. Основні характеристики нечітких відношень.
15. Операції над нечіткими відношеннями.
16. Відображення нечітких множин.
17. Властивості бінарних нечітких відношень, заданих на одному універсумі.
18. Нечіткі відношення переваги. Основні визначення.
19. Операції над нечіткими числами.
20. Математичний апарат, що використовується при моделюванні нечітких об'єктів.

## Розділ 11 НЕЙРОННІ МЕРЕЖІ\*

### 11.1. Основні поняття штучних нейронних мереж

#### 11.1.1. Структура штучного нейрона

Штучні нейрони, які також називаються *нейронними клітинами*, *вузлами*, *модулями*, моделюють структуру та функції біологічних нейронів. Архітектура і особливості штучних нейронних мереж (ШНМ), утворених нейронами, залежать від конкретних завдань, які мають бути вирішені з їхньою допомогою.

Структуру штучного нейрона зображено на рис. 11.1.

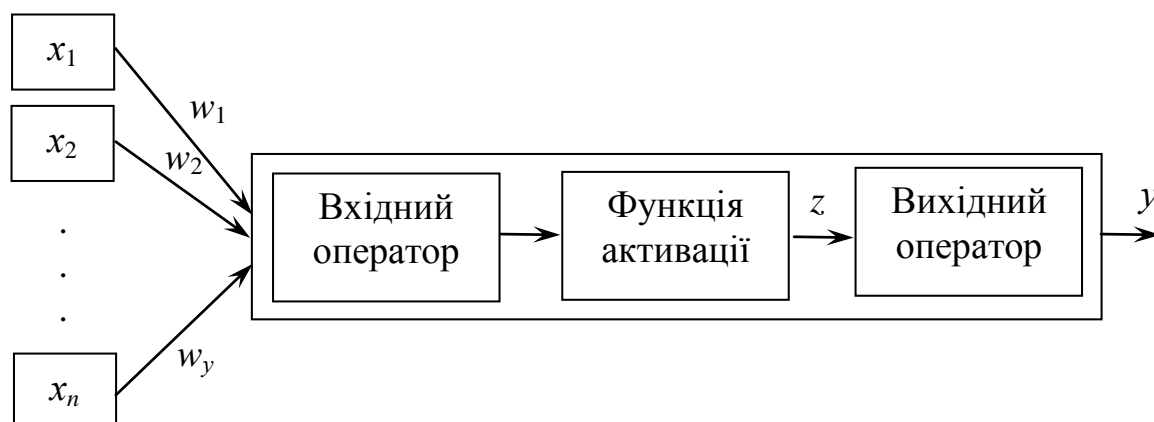


Рис. 11.1. Структура штучного нейрона

Вхідними сигналами штучного нейрона  $x_i (i = \overline{1, N})$  є, наприклад, вихідні сигнали інших нейронів, кожний з яких узятий зі своєю вагою  $w_i (i = \overline{1, N})$ , аналогічною синаптичній силі. Вхідний оператор  $f_{\text{вх}}$  перетворює зважені входи і подає їх на оператор активації  $f_a$ . Вихідний сигнал нейрона  $y$  є перетвореним вихідним оператором  $f_{\text{вих}}$  вихідний сигнал оператора активації. Таким чином, нелінійний оператор перетворення вектора вхідних сигналів  $x$  у вихідний сигнал  $y$  може бути записаний як:

$$y = f_{\text{вих}}(f_a(f_{\text{вх}}(x, w))). \quad (11.1)$$

\* В розділі використані матеріали навчального посібника О.Г. Руденко та Є.В. Бодянського «Штучні нейронні мережі»

Вихідний сигнал даного нейрона є, наприклад, вхідним для наступного.

**Вхідний оператор** (вхідна функція) нейрона задає вигляд використовуваного в нейроні перетворення зважених входів. Відмінність гальмуючих входів від збуджувальних відбивається у знаках відповідних ваг. Звичайно використовуються такі вхідні функції:

– сума зважених входів

$$f(x, w) = \sum_{i=1} w_i x_i ; \quad (11.2)$$

– максимальне значення зважених входів

$$f(x, w) = \max_i (w_i x_i) ; \quad (11.3)$$

– добуток зважених входів

$$f(x, w) = \prod_{i=1}^N (w_i x_i) ; \quad (11.4)$$

– мінімальне значення зважених входів

$$f(x, w) = \min_i (w_i x_i) . \quad (11.5)$$

### 11.1.2. Функція активації

**Функція активації** (*activation function*)  $f_a(\cdot)$  описує правило переходу нейрона, що перебуває в момент часу  $k$  в стані  $z(k)$ , у новий стан  $z(k + 1)$  при надходженні вхідних сигналів  $x$

$$z(k + 1) = f_a(z(k), f_{ax}(x, w)) . \quad (11.6)$$

Найпростішими активаційними функціями є

– лінійна (рис. 11.2):

$$f(z) = Kz, \quad K = \text{const}; \quad (11.7)$$

– лінійна біполярна з насиченням (рис. 11.3):

$$f(z) = \begin{cases} 1 & \text{при } z > \alpha_2 \\ K_z & \text{при } -\alpha_1 \leq z \leq \alpha_2 ; \\ -1 & \text{при } z < \alpha_1 \end{cases} \quad (11.8)$$

– лінійна уніполярна з насиченням (рис. 11.4):

$$f(z) = \begin{cases} 1 & \text{при } z \geq \frac{1}{2\alpha} \\ \alpha z + 0,5 & \text{при } |z| < \frac{1}{2\alpha} \\ 0 & \text{при } z \leq -\frac{1}{2\alpha} \end{cases} ; \quad (11.9)$$

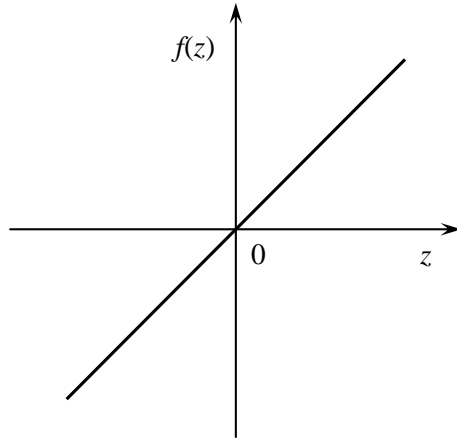


Рис. 11.2. Лінійна функція

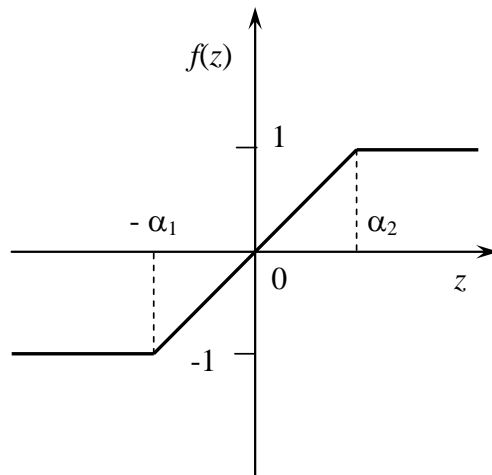


Рис. 11.3. Лінійна біполярна функція з насиченням

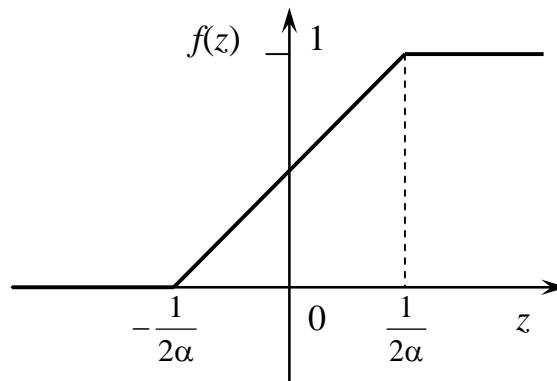


Рис. 11.4. Лінійна уніполярна функція з насиченням

Незважаючи на те, що лінійні функції є найбільш простими, їхнє застосування обмежене, в основному, найпростішими ШНМ, які не мають в своєму складі прихованих шарів, у яких, крім того, існує лінійна залежність між вхідними та вихідними змінними. Такі мережі мають обмежені можливості.

Для багатошарової лінійної мережі справедливо наступне. Оскільки після вхідного оператора на оператор активації надходить сукупність зважених вхідних сигналів, записана, наприклад, у матричному вигляді  $W_1x$ , використання лінійної активаційної функції призводить до того, що на виході другого шару з'явиться сигнал  $W_2(W_1x) = (W_2 W_1)x$ .

Це означає, що двошарова лінійна мережа еквівалентна одношаровій з ваговою матрицею, що дорівнює добутку вагових матриць першого та другого шарів. Звідси випливає, що будь-яка багатошарова лінійна мережа може бути замінена еквівалентною одношаровою. Хоча використання лінійних активаційних функцій не є зайвим, у багатошарових ШНМ для розширення можливостей мережі застосовують нелінійні функції активації.

У роботі У. Маккаллоха і У. Піттса якості активаційної використовувалася функція Хевісайда – *уніполярна гранична функція* (рис. 11.5) вигляду:

$$f(z) = \begin{cases} 1 & \text{при } z \geq \alpha \\ 0 & \text{при } z < \alpha \end{cases} \quad (11.10)$$

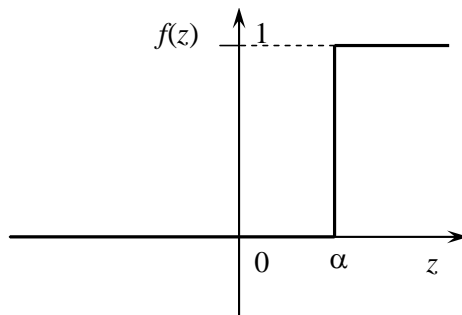


Рис. 11.5. Уніполярна порогова функція

Різновидом даної функції є біполярна порогова функція (рис. 11.6):

$$f(z) = \begin{cases} 1 & \text{при } z \geq \alpha \\ -1 & \text{при } z < \alpha \end{cases} \quad (11.11)$$

Ці функції активації застосовувалися в основному в класичних ШНМ. При побудові нових структур ШНМ найчастіше доводиться працювати як і з самою активаційною функцією, так і з її першою похідною. У цих випадках необхідним є використання як активаційної монотонної диференційованої та обмеженої функції. Особливо важливу роль відіграють такі функції під час моделювання нелінійних залежностей між вхідними і вихідними змінними.

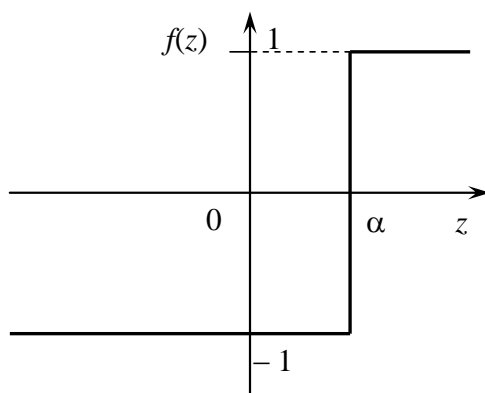


Рис. 11.6. Біполярна порогова функція

Це так звані *логістичні*, або *сигмоїдальні* (*S-подібні*), функції.

Функція  $f(\cdot)$  називається *сигмоїдальною*, якщо вона є монотонно зростаючою, диференційованою і задовольняє умові

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} f(\lambda) = k_1, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} f(\lambda) = k_2, \quad k_1 < k_2. \quad (11.12)$$

До таких функцій належать:

– *логістична* (уніполярна) (рис. 11.7):

$$f_{\log}(z) = \frac{1}{1 + e^{-\alpha z}}, \quad (11.13)$$

$$\frac{d}{dz} f_{\log}(z) = \alpha f_{\log}(z) (1 - f_{\log}(z));$$

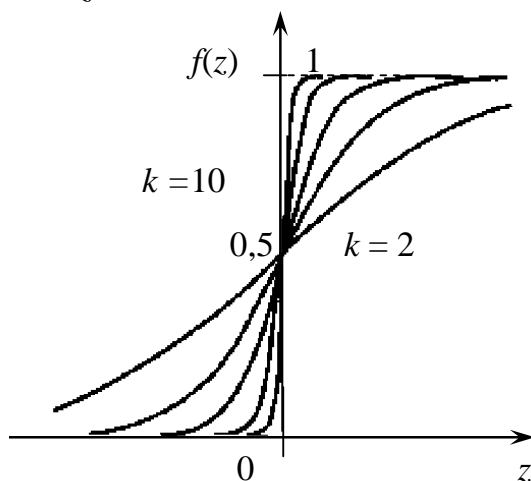


Рис. 11.7. Логістична функція

– *гіперболічного тангенса* (біполярна) (рис. 11.8):

$$f_{th}(z) = \tanh(\alpha z) = \frac{e^{\alpha z} - e^{-\alpha z}}{e^{\alpha z} + e^{-\alpha z}}. \quad (11.14)$$



$$\frac{d}{dz} f_{th}(z) = 1 - \tanh^2(\alpha z).$$

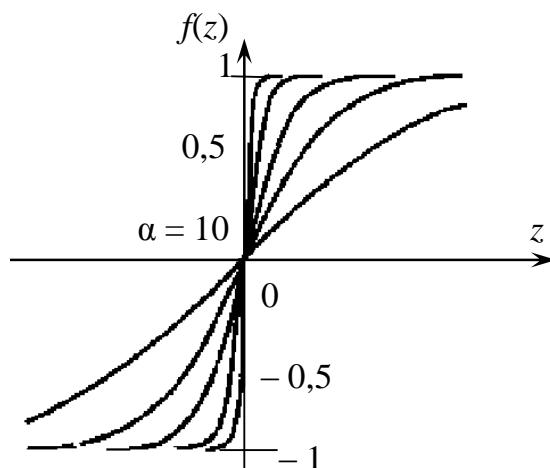


Рис. 11.8. Функція гіперболічного тангенса

Функції (11.13) і (11.14) можуть бути виражені одна через одну. Наприклад,

$$f_{th}(z) = \tanh(\alpha z) = \frac{e^{\alpha z}(1 - e^{-2\alpha z})}{e^{\alpha z}(1 + e^{-2\alpha z})} = \frac{2 - (1 + e^{-2\alpha z})}{1 + e^{-2\alpha z}} = 2f_{\log}(z) - 1. \quad (11.15)$$

Аналогічно можна показати, що  $f_{\log}(z) = \frac{1}{2} \left( \tanh\left(\frac{z}{2}\right) + 1 \right)$ .

Слід також зазначити, що перевага функції  $f_{th}(z)$  над  $f_{\log}(z)$  полягає в її симетричності відносно початку координат (у деяких випадках це істотно полегшує обчислення);

– косинусоїдальна з насиченням (уніполярна) (рис. 11.9):

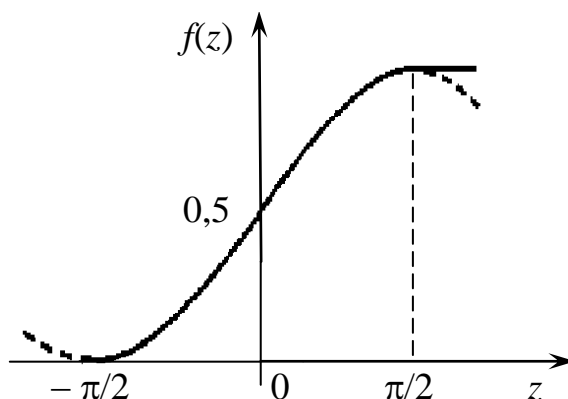


Рис. 11.9. Функція косинусоїдальна з насиченням

$$f_{\cos}(z) = \begin{cases} 1 & \text{при } z \geq \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \left( z - \frac{\pi}{2} \right) \right) & \text{при } |z| < \frac{\pi}{2}; \\ 0 & \text{при } z \leq -\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (11.16)$$

– модульована сигмоїда (рис. 11.10):

$$f(x, y) = \frac{1}{1 + e^{-x-y-\theta}} - \frac{1}{1 + e^{x-y-\theta}}. \quad (11.17)$$

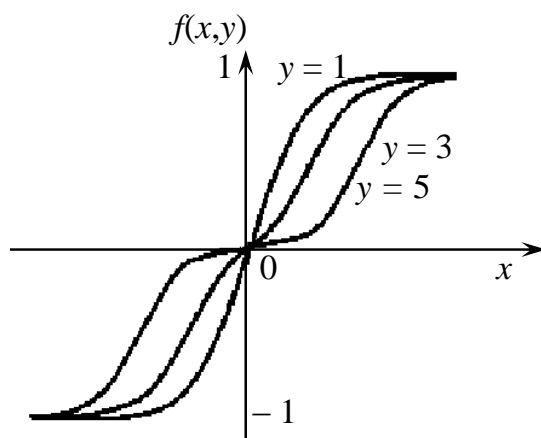


Рис. 11.10. Функція «модульована сигмоїда»

Сигмоїдальну функцію за аналогією з електронними системами можна вважати нелінійною підсилювальною характеристикою штучного нейрона. Центральна область такої функції, що має великий коефіцієнт підсилення, вирішує проблему обробки слабких сигналів, а області зі спадним посиленням на позитивному і негативному кінцях служать для обробки значних збуджень. Таким чином, нейрон функціонує з великим підсиленням у широкому діапазоні рівнів вхідного сигналу.

Вибір конкретного виду активаційної функції специфічний для кожного виду ШНМ і залежить від розв'язуваного завдання.

**Вихідний оператор.** Вихідний оператор служить для представлення стану нейрона в бажаній області значень. Зазвичай у більшості робіт цей оператор не виділяють, а під вихідним сигналом нейрона розуміють сигнал після оператора активації.

Однак під час аналізу та синтезу ШНМ, що містять різні активаційні функції, які мають різні області значень і області визначення, виникає необхідність використання такого оператора.

## 11.2. Моделі штучних нейронів

Моделі штучних нейронів залежать від конкретних застосувань. Тому синтез моделі в кожному окремому випадку є нетривіальним завданням.

### 11.2.1. Формальна модель нейрона Маккаллоха – Піттса

Формальний штучний нейрон (його називають також нейроном Маккаллоха – Піттса) може бути поданий як багатовхідний нелінійний перетворювач із ваговими коефіцієнтами  $w_{ji}$ , які також називаються синаптичними вагами або підсилювачами (рис. 11.11).

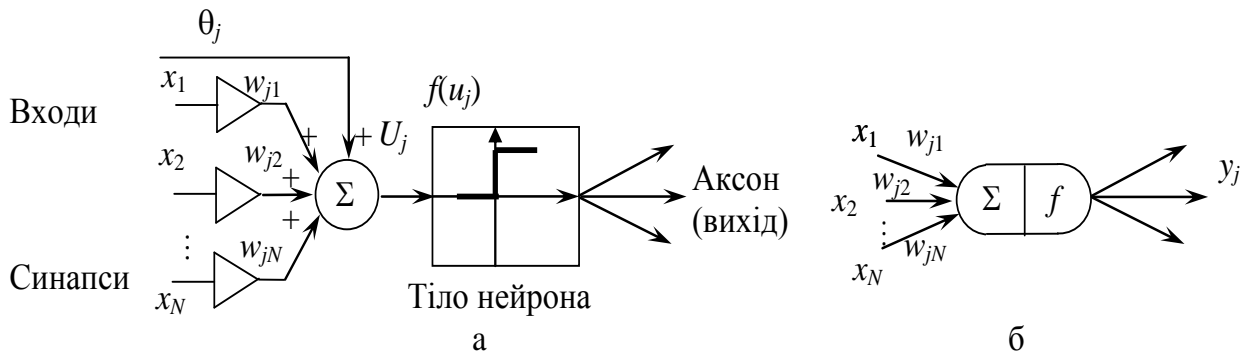


Рис. 11.11. Модель штучного нейрона Маккаллоха – Піттса (а) та її умовне позначення (б)

Клітина тіла нейрона (сома) описується нелінійною обмежувальною або пороговою функцією  $f(u_j)$ . Найпростіша модель штучного нейрона підсумовує  $N$  ваг входів і здійснює нелінійне перетворення (рис. 11.2 – 11.4):

$$y_i = f\left(\sum_{i=1}^N w_{ij}x_i + \theta_j\right), \quad (11.18)$$

де  $y_j$  – вихідний сигнал  $j$ -го нейрона;  $f$  – обмежувальна або порогова функція (активаційна);  $N$  – кількість входів;  $w_{ji}$  – синаптичні ваги;  $x_i$  – вхідні сигнали ( $x_i = \overline{1, N}$ );  $\theta_j$ , ( $\theta_j \in R$ ) – пороговий сигнал, що також називають зсувом.

Позначаючи  $\theta_j = w_{j0}x_0$  (зазвичай  $x_0 = 1$ ), вираз (11.18) можна переписати у вигляді

$$y_i = f\left(\sum_{i=1}^N w_{ij}x_i\right) = f(w_j^T x), \quad (11.19)$$

де  $x = (1, x_1, \dots, x_N)^T$ ;  $w_j = (w_{j0}, w_{j1}, \dots, w_{jN})^T$  – відповідні вектори входів і ваг розмірності  $(N + 1) \times 1$ .

Як випливає з (11.19), будь-який формальний нейрон характеризується своєю активаційною функцією і порогом  $\theta_j$ . Перша модель нейрона, запропонована У. Маккаллохом і У. Піттсом, використовувала тільки бінарні (жорстко

обмежені) функції (11.10). У цій моделі сума всіх зважених входів порівнювалася з пороговим значенням  $\theta_j$  і, якщо вона перевищувала це значення, вихід нейрона встановлювався у «верхнє значення» або логічну 1, в іншому випадку – в «нижнє значення» або логічний 0.

У сучасних застосуваннях порогова функція замінюється більш загальною нелінійною функцією і, отже, вихід нейрона  $y_i$  може приймати як дискретне значення на множині (наприклад,  $\{-1, 1\}$ ), так і неперервне (наприклад, між  $-1$  і  $1$  або в загальному випадку між  $y_{min}$  і  $y_{max}$ ).

Рівень активації або стан нейрона залежить від значення його вихідного сигналу  $y_i$  (наприклад,  $y_i = 1$ , якщо нейрон активний, і  $y_i = 0$  – нейрон перебуває в незбудженому стані) і звичайно визначається монотонно зростаючою сигмоїдальною функцією.

Модель сигмоїдальної функції може бути побудована на основі традиційних електронних компонент. В електричному ланцюзі напруга імітує тіло нейрона (сому), провідності замінюють вхідну структуру (дендрити) і вихідну (аксон) та різні резистори моделюють синаптичні ваги (синапси). Вихідна напруга  $y_i$  імітує вихідну реакцію нейрона.

Сигмоїдальна активаційна функція представлена вольт-амперною характеристикою підсилювача з насиченням. Сигнали  $x_i$  надходять у формі вхідної напруги у провідники-дендрити у співвідношенні сум вихідних напруг і відповідних електропровідностей (рис. 11.12).

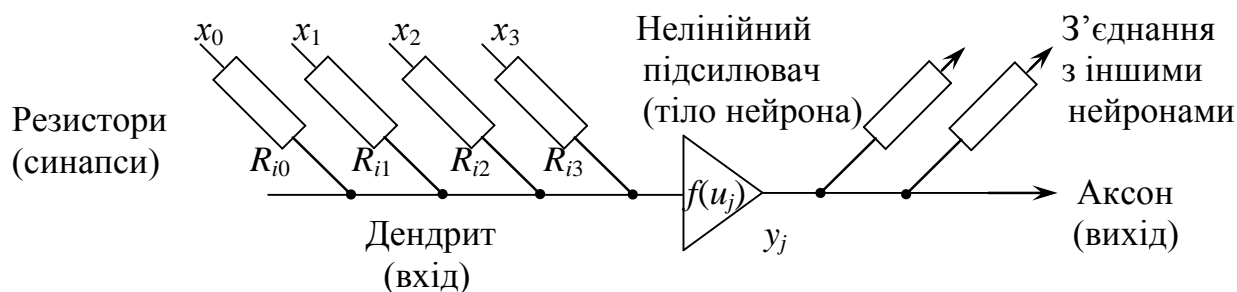


Рис. 11.12. Електронна аналогова модель нейрона

Струм у вхідних ланцюгах схеми (дендритах) прямо пропорційний вхідним напругам  $x_i$  і провідностям  $w_{ji}$ . Напругу на виході можна розрахувати відповідно до закону Кірхгофа

$$y_j = f(u_j) = f\left(\frac{\sum_{i=0}^N G_{ij} x_i}{\sum_{i=0}^N G_{ji}}\right), \quad (11.20)$$

де  $y_i$  – вихідна напруга  $j$ -го нейрона;  $f(\bullet)$  – сигмоїдальна функція підсилювача;  $u_j$  – вхідна напруга  $j$ -го підсилювача;  $G_{ji} = R_{ji}^{-1}$  – провідність резисторів на вході схем;  $x_j$  ( $j = \overline{1, N}$ ) – вхідні напруги.

## 11.2.2. Модель нейрона Фукушіми

У загальному випадку, як і у випадку моделі Маккаллоха – Піттса, синаптичні ваги нейрона можуть бути позитивними, рівними нулю або негативними залежно від того, як впливають сигнали, що надходять, на його реакцію. Сигнали називаються збуджувальними, якщо ваги позитивні ( $\omega_{ji} > 0$ ), і гальмуючими – якщо негативні ( $\omega_{ji} < 0$ ).

Однак у моделі штучного нейрона, запропонованого К. Фукушімою, всі синаптичні ваги і всі вхідні та вихідні сигнали є ненегативними, тобто вони можуть бути рівними нулю або приймати будь-яке позитивне значення. У цій моделі входи та відповідні синаптичні ваги поділяються на дві групи: збуджувальні і гальмуючі (рис. 11.13).

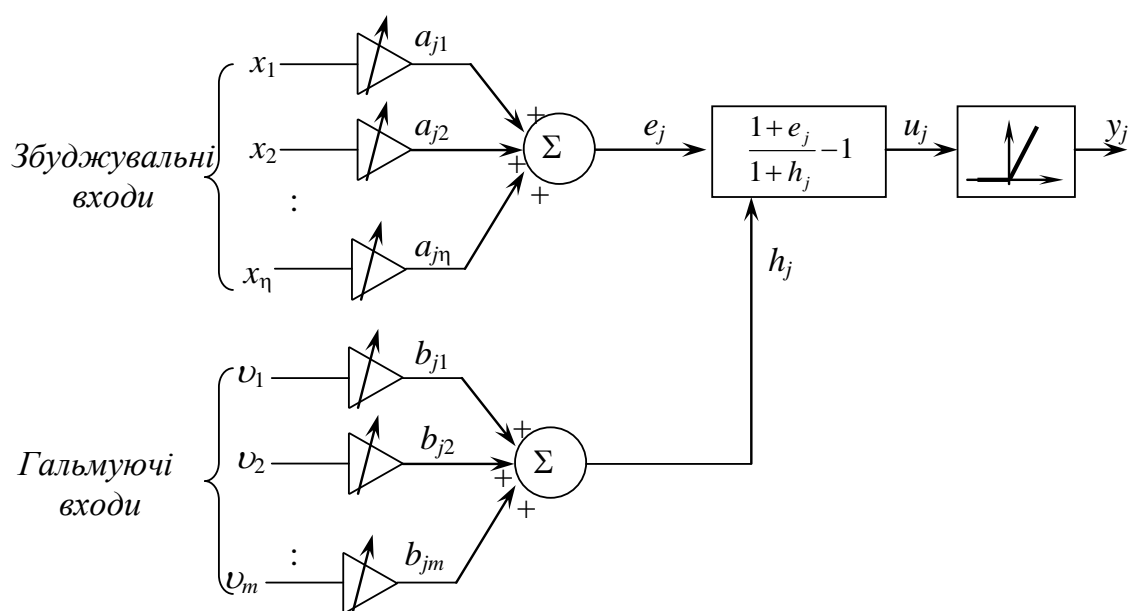


Рис. 11.13. Спрощена модель нейрона Фукушіми

Збуджувальний ефект  $e_j$  визначається зваженою сумою всіх збуджувальних входів. Вихід нейрона може бути описаний виразом

$$y_j = f \left[ \frac{1 + \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i}{1 + \sum_{i=1}^m a_{ji} x_i} - 1 \right], \quad (11.21)$$

де  $f(u) = \begin{cases} u_j, & \text{якщо } u_j \geq 0; \\ 0 & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$

У даному виразі  $a_{ji}$  відповідає збуджувальним синаптичним вагам, реалізованим у вигляді негативних електропровідностей, і  $b_{ji}$  – гальмуючим, також ре-

алізованим у вигляді негативних електропровідностей. Синаптичні ваги звичайно є змінними, і вони змінюються в процесі навчання нейронної мережі.

### 11.2.3. Модель штучного нейрона Гопфілда

Усі описані вище структури нейронів належать до статичних структур і не здатні моделювати динамічний процес. Альтернативою їм може виступати модель нейрона Дж. Гопфілда, що є сьогодні найбільш популярною динамічною моделлю. На рис. 11.14 зображено електричну та функціональну структури нейрона. Електрична схема складається з конденсатора  $C_j$ , резистора  $R_{ji}$  і нелінійного підсилювача із сигмоїдальною функцією. Передбачається, що підсилювач має два асиметричних виходи, при цьому всі резистори, що моделюють синаптичні ваги, мають позитивні значення. Це означає, що позитивна синаптична вага реалізується з'єднанням резистора  $R_{ji}$  з  $(+v_i)$  і негативною вагою – з'єднанням  $R_{ji}$  із сигналом  $(-v_i)$ . Струм  $I_j$  представляє зсув (незалежний зовнішній вхідний сигнал).

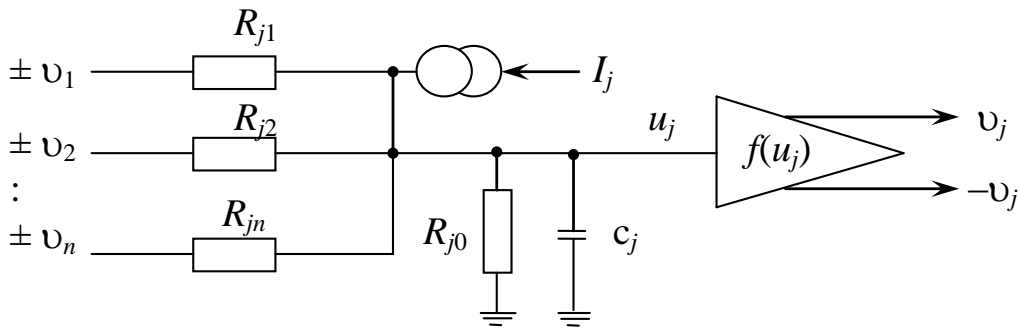


Рис. 11.14. Модель Гопфілда динамічного нейтрона

Застосовуючи закон Кірхгофа, отримуємо диференціальне рівняння, що описує нейрон:

$$C_j \frac{du_j}{dt} = -\frac{u_j}{R_j} + \sum_{i=1}^N \frac{v_i}{R_{ji}} + I_j, \quad (11.22)$$

$$\text{де } \frac{1}{R_j} = \frac{1}{R_{j0}} + \sum_{n=1}^n \frac{1}{R_{jn}} = G_{j0} + \sum_{i=1}^N G_{ji}.$$

Тут  $G_{ji}$  визначає електропровідності ( $i = \overline{1, N}$ );  $v = f(u_j)$ , ( $j = \overline{1, N}$ ).

Вираз (11.22) може бути переписаний у більш загальній формі

$$T_j \frac{du_j}{dt} = -a_j u_j + \left( \sum_{i=0}^N \omega_{ji} x_i + \theta_j \right), \quad (11.23)$$

$$y_j = f(u_j), \quad (11.24)$$

де  $T_j = r_j C_j$  – стала інтегрування;  $u_j$  – внутрішній сигнал, що називається внутрішнім потенціалом або потенціалом дії;  $a_j = r_j / R_j$  – коефіцієнт загасання;  $w_{ji} = \pm r_j / R_{ji}$  – синаптичні ваги (з позитивним знаком, якщо  $R_{ji}$  з'єднаний з  $(+x)$ , з негативним знаком, якщо  $R_{ji}$  з'єднаний з  $(-x)$ );  $x_i = v_i$  ( $i = \overline{1, N}$ ) – вхідні сигнали (напруги, потенціали);  $\theta_j = r_j I_j$  сигнал зсуву. Тут  $r_j$  – масштабуючий опір.

Схему нейрона, що відповідає виразам (11.22), (11.23), зображено на рис. 11.15. Схема містить суматор налаштовуваних синаптичних ваг  $w_{ji}$  інтегратор і нелінійний елемент із сигмоїдальною активаційною функцією.

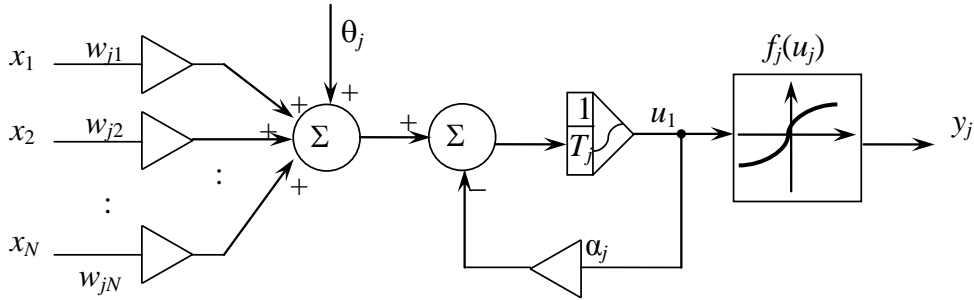


Рис. 11.15. Структура нейрона Гопфілда

Динаміка нейрона в цілому визначається ємністю  $C_j$  та опором  $R_{j0}$ . Синаптичні ваги визначаються вхідними електропровідностями  $C_{ji} = 1 / R_{ji}$ , з'єднаними з одним з виходів  $(+v_i)$  або  $(-v_i)$   $j$ -го підсилювача. Видно, що позитивні синаптичні ваги ( $w_{ji} > 0$ ) потребують, щоб резистор  $R_{ji}$  був з'єднаний з позитивним, а негативні ( $w_{ji} < 0$ ) – з негативним входом  $j$ -го підсилювача.

Дискретну модель нейрона Гопфілда зображено на рис. 11.16.

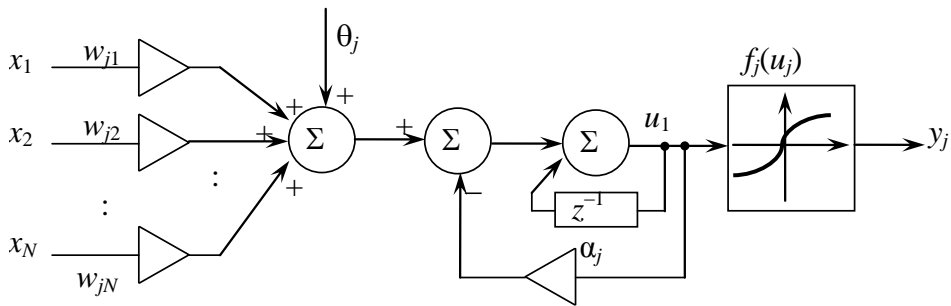


Рис. 11.16. Дискретна модель нейрона Гопфілда

#### 11.2.4. Модель Гроссберга

Штучний нейрон, розроблений С. Гроссбергом, є узагальненням моделі Гопфілда і може бути описаний таким диференціальним рівнянням:

$$T_j \frac{du_j}{dt} = -\alpha_j u_j + (\gamma_j - \beta_j u_j) \left( \sum_{i=1}^n \omega_{ji} f_i(u_i \theta_j) \right), \quad (11.25)$$

де  $u_i$  – внутрішня активність  $j$ -го нейрона;  $\alpha, \beta, \gamma$  – константи, що визначають динаміку нейрона.

Настроювання параметрів нейрона здійснюється за допомогою алгоритму навчання вигляду

$$\frac{dw_{ji}}{dt} = [-\theta_{ji}\omega_{ji} + d_{ji}f_i(u_i)]h_i(u_i). \quad (11.26)$$

Спрощена функціональна схема моделі штучного нейрона Гроссберга, що відповідає виразу (11.25), показана на рис. 11.17.

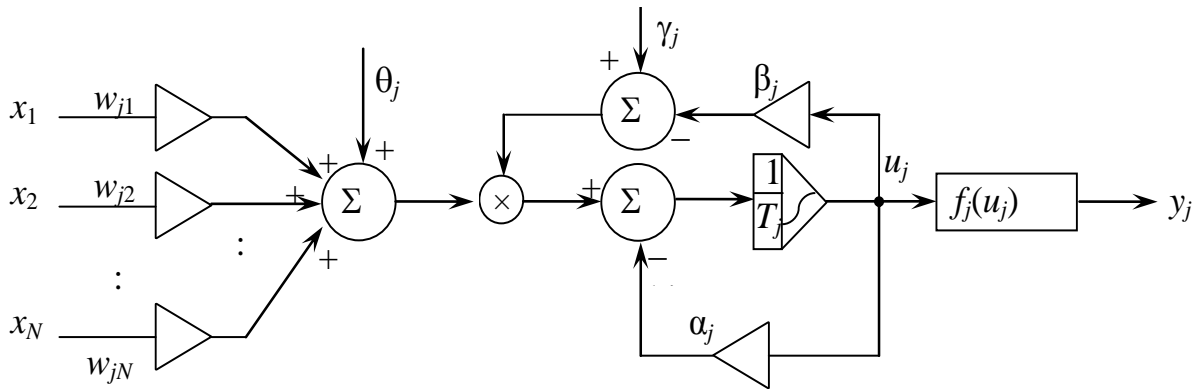


Рис. 11.17. Функціональна модель нейрона Гроссберга

Нейрон може перебувати у двох станах: збудженому і загальмованому, які описуються рівняннями вигляду:

$$T_j \frac{du_j}{dt} = -\alpha_j u_j + (\gamma_{jE} - \beta_{jE} u_j) \left( \sum_{i=1}^{N_E} \omega_{jiE} f_{iE}(u_{iE}) + \theta_{jE} \right) - (\gamma_{ji} + \beta_{ji} u_j) \left( \sum_{i=1}^{N_j} \omega_{jiI} f_{iI}(u_{iI}) + \theta_{ji} \right). \quad (11.27)$$

На рис. 11.18 зображено дискретну модель нейрона Гроссберга.

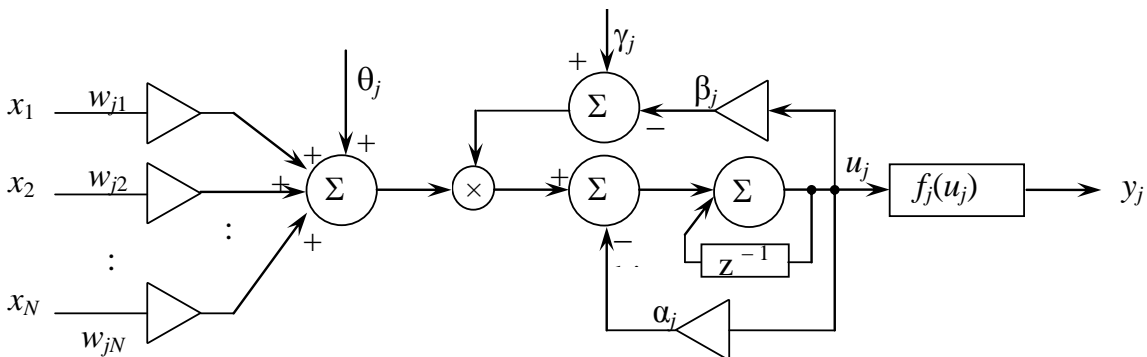


Рис. 11.18. Дискретна модель нейрона Гроссберга



Більшість відомих моделей штучних нейронів можуть бути розглянуті як окремі випадки описаних вище моделей.

### 11.2.5. Узагальнена модель нейрона

У деяких застосуваннях використовуються узагальнені моделі, які містять у собі більш складні комплексні математичні операції, ніж підсумовування. Найбільш загальне подання може бути записане у вигляді системи нелінійних диференціальних рівнянь

$$T_j \frac{du_j}{dt} = \varphi_j \left( J_j(u_j), w_{j1}, w_{j2} f_2(u_2), \dots, w_{jN} f_N(u_N) \right); \quad (11.28)$$

$$T_{ji} \frac{dw_{ji}}{dt} = g_i(w_{ji}, u_i, u_j), \quad (11.29)$$

де  $\varphi_j(\bullet)$  – нелінійне перетворення на вході нейрона;  $J_j(\bullet)$  – функція, що описує внутрішню динаміку  $j$ -го нейрона;  $g_j$  – передавальна функція, що визначає динаміку зміни синаптичних ваг.

Всі наведені динамічні моделі штучних нейронів подано в неперервному часі.

Динамічна поведінка таких нейронів звичайно описується системою диференціальних рівнянь, але під час моделювання роботи ШНМ використовується їхнє дискретне подання.

У загальному випадку дискретна математична модель нейрона має вигляд

$$x_j(k+1) = f \left( \sum_{i=1}^N w_{ji} x_i(k) + \theta_j \right). \quad (11.30)$$

На рис. 11.19 зображено ще одну дискретно-часову модель штучного нейрона, описувану виразами:

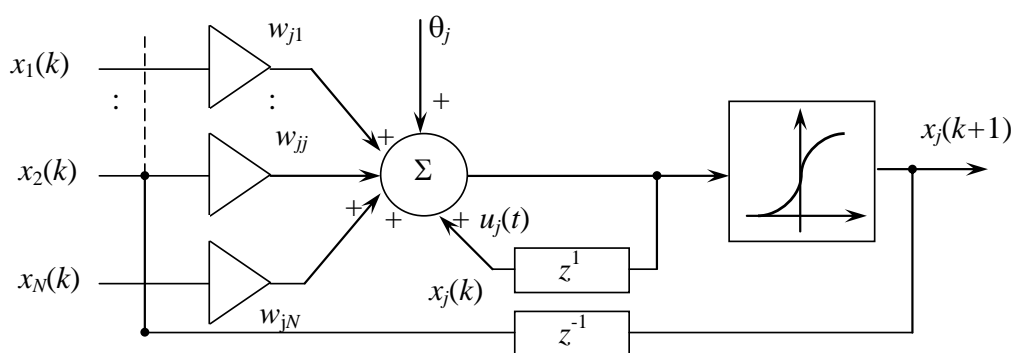


Рис. 11.19. Дискретно-часова модель нейрона

$$\begin{aligned} u_j(k+1) &= u_j(k) + \left( \sum_{i=1}^N w_{ji} x_i(k) + \theta_j \right) \\ x_j(k+1) &= f(u_j(k+1)) \quad j = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (11.31)$$

де  $k = 0, 1, 2, \dots$  – індекс дискретного часу.

У цій моделі інтегратор замінюється суматором, охопленим елементом чистого запізнювання – дігратором. Дискретно-часова модель нейрона може бути отримана з аналогової моделі шляхом конвертування диференціальних рівнянь у відповідні різницеві рівняння.

Хоча можливості окремих нейронів обмежені, можливості мережі, побудовані з їхньою допомогою, практично не мають границь.

### 11.2.6. $\Sigma$ - $\Pi$ -нейрон

Нейрон даного типу покликаний більш точно відобразити властивості біологічного нейрона, а саме здатність моделювати певні синаптичні контакти. З цією метою в цьому нейроні, на відміну від лінійної моделі (11.18), використовується більш складне перетворення вхідних сигналів – їхній добуток або кореляція:

$$z(w, x) = \sum_{i=1}^m w_i \prod_{j=1}^N x_j. \quad (11.32)$$

Вихідний сигнал формується за виразом:

$$y = f(w, x) = f\left(\sum_{i=1}^m w_i \prod_{j=1}^N x_j\right), \quad (11.33)$$

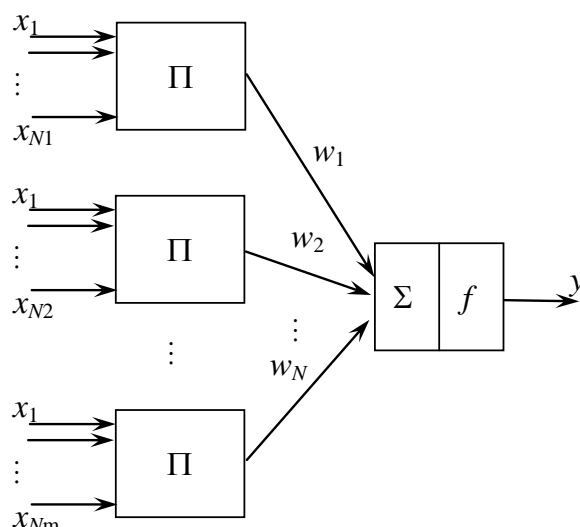
де  $f(\bullet)$  – функція активації (найчастіше гранична).

Схему  $\Sigma$ - $\Pi$ -нейрона наведено на рис. 11.20.

### 11.2.7. Стохастичний нейрон

Розглянуті вище моделі нейронів є детермінованими, оскільки при подачі на їхній вхід деяких сигналів вони видаватимуть однозначно обумовлений використовуваною активаційною функцією вихідний сигнал. У роботі Хайкіна була розглянута модель стохастичного нейрона, в якій активаційна функція є випадковою і залежить від активності нейрона  $z$ . При цьому вихідний сигнал нейрона формується за таким правилом:

$$y = \begin{cases} +1 & \text{з ймовірністю } P(z|y=1); \\ -1 & \text{з ймовірністю } P(z|y=-1), \end{cases} \quad (11.34)$$

Рис. 11.20. Модель  $\Sigma$ - $\Pi$ -нейрона

де  $P(z|y=1) + P(z|y=-1) = 1$ .

Модель такого нейрона зображена на рис. 11.21.

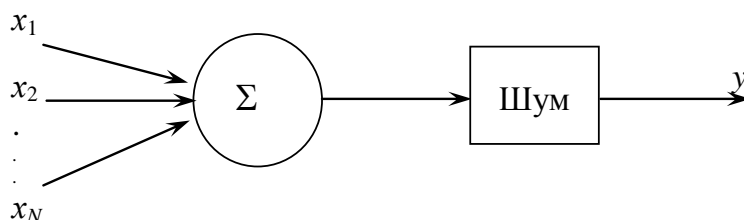


Рис. 11.21. Модель стохастичного нейрона

Так, якщо  $P(z|y=1) = (1 + \exp(-2\alpha z))^{-1}$ , то  $P(z|y=-1) = 1 - P(z|y=1) = \frac{\exp(-2\alpha z)}{1 + \exp(-2\alpha z)}$ , а математичне очікування вихідного сигналу  $\langle y \rangle$  визначається таким чином:

$$\langle y \rangle = 1P(z|y=1) + (-1)P(z|y=-1) = \tanh(\alpha z).$$

Зазначимо, що ця модель є основою машин Больцмана і Коші, а також лежить в основі навчання із підкріпленням. Ці питання більш докладно будуть висвітлені нижче.

### 11.3. Топологія ШНМ

З'єднані між собою нейрони утворюють ШНМ. Таким чином, ШНМ – пара  $(M, V)$ , де  $M$  – множина нейронів;  $V$  – множина зв'язків. Структура мережі задається у вигляді графа, в якому вершини є нейронами, а ребра являють собою зв'язки (з'єднання).

Кожен нейрон мережі має вхідні ланцюги, причому їхня кількість є довільною для кожного нейрона.

У загальному випадку ШНМ складається з декількох шарів, серед яких обов'язково є вхідний, який отримує зовнішні сигнали, вихідний, що відбиває реакцію нейронів на комбінації вхідних сигналів, і в багатшарових ШНМ – приховані шари (рис. 11.22).

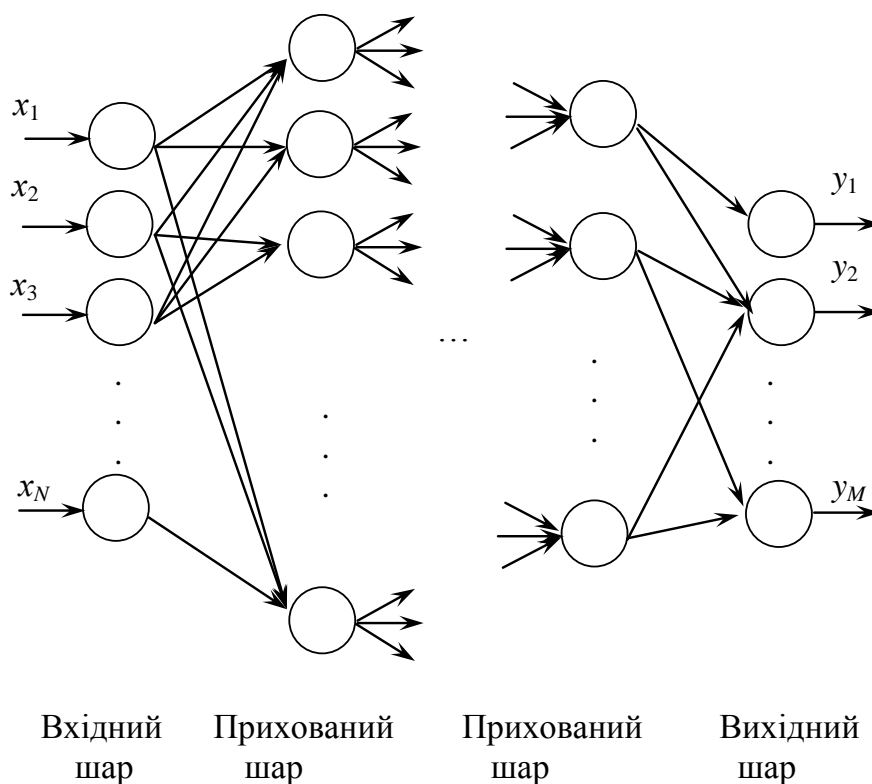


Рис. 11.22. Структура ШНМ

Зв'язки між нейронами задаються у вигляді векторів і матриць. Ваги зручно подавати елементами матриці  $W = [w_{ji}]$  розмірності  $N \times M$ , де  $N$  – кількість входів;  $M$  – кількість нейронів. Елемент  $w_{ji}$  відбиває зв'язок між  $i$ -м та  $j$ -м нейронами. При цьому, якщо

$w_{ji} = 0$  – зв'язок між  $i$ -м й  $j$ -м нейронами відсутній;

$w_{ji} < 0$  – зв'язок, гальмуючий сигнал;

$w_{ji} > 0$  – зв'язок, прискорюючий сигнал (збуджувальний).

Залежно від того, містять ШНМ зворотні зв'язки, або ні, розрізняють такі топології:

- ШНМ без зворотних зв'язків (прямого поширення, *Feed forward*)
  - першого порядку;
  - другого порядку;
- ШНМ зі зворотними зв'язками (зворотного поширення, рекурентні, *Feedback*)
  - з прямими зворотними зв'язками (*direct feedback*);

- з непрямими зворотними зв'язками (*indirect feedback*);
- з латеральними зв'язками (*lateral feedback*);
- повнозв'язні.

### 11.3.1. ШНМ прямого поширення

Дана топологія припускає наявність декількох шарів зі зв'язками між нейронами різних шарів. У мережах першого порядку існують тільки зв'язки між двома сусідніми шарами, тобто між  $i$ -м й  $(i + 1)$ -м шарами. У цьому випадку говорять, що зв'язки ШНМ пошарові. Приклад такої мережі зображено на рис. 11.22. Якщо в мережі цього типу кожен нейрон шару  $i$  пов'язаний з кожним нейроном  $(i + 1)$ -го шару, мережа називається *повнозв'язною прямого поширення*.

У мережах другого порядку поряд зі зв'язками між нейронами сусідніх  $i$ -го та  $(i + 1)$ -го шарів присутні зв'язки між нейронами шарів  $i$ -го й  $(i + l)$ -го, де  $l > 1$ . Такий зв'язок називається «*shortcut*». Приклад такої ШНМ наведено на рис. 11.23.

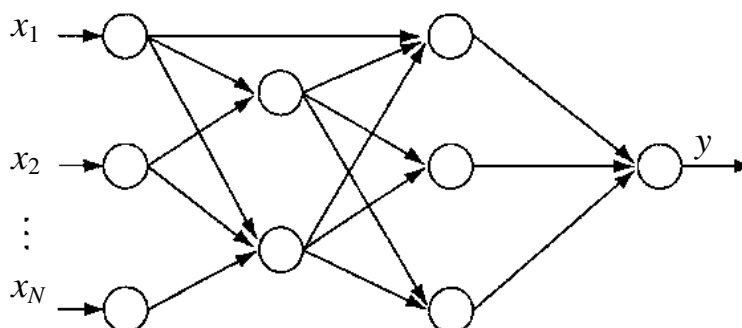


Рис. 11.23. ШНМ прямого поширення другого порядку

Зазначимо, що для мереж прямого поширення матриця зв'язків  $W$  є верхньою трикутною матрицею.

### 11.3.2. ШНМ зворотного поширення

Мережі цього типу припускають наявність зворотних зв'язків як між нейронами різних шарів, так і між нейронами одного шару. Використання мереж зі зворотними зв'язками необхідне в процесі моделювання складних динамічних об'єктів, наприклад об'єктів, що змінюють свій стан при надходженні нових вхідних сигналів. Такі ШНМ можуть мати властивості, подібні до короткочасної людської пам'яті.

У ШНМ із прямими зворотними зв'язками (рис. 11.24) на вхід нейрона деякого  $i$ -то шару подається його вихідний сигнал, тобто даний нейрон підсилює або послаблює сигнал, перетворений його активаційною функцією, завдяки чому досягається його граничний активаційний стан.

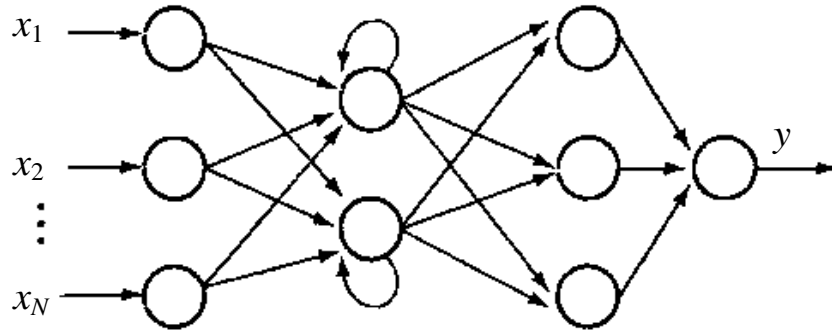


Рис. 11.24. ШНМ із прямими зворотними зв'язками

У ШНМ із непрямими зворотними зв'язками існують зв'язки нейрона  $i$ -го шару з нейронами  $(i - k)$ -го шару  $k > 0$ . При цьому одночасно можуть бути прямі зв'язки цього ж нейрона з нейроном  $(i + l)$ -го шару  $(l > 0)$ . Введення таких зворотних зв'язків необхідно, щоб виділити певну, особливо важливу для даної ШНМ область вхідних сигналів (рис. 11.25).

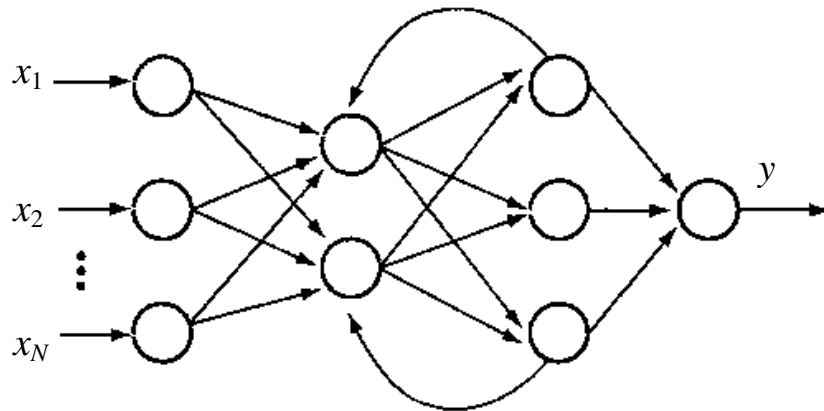


Рис. 11.25. ШНМ із непрямими зворотними зв'язками

ШНМ із латеральними зв'язками має зв'язки між нейронами одного шару (рис. 11.26).

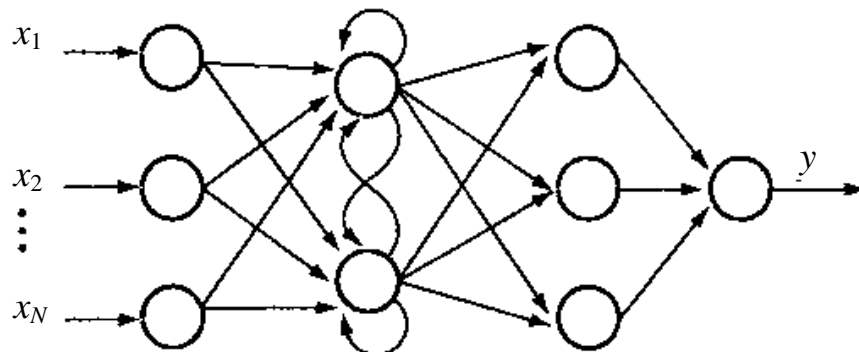


Рис. 11.26. ШНМ із латеральними зв'язками

Такий тип зворотних зв'язків використовується в тому випадку, якщо тільки один нейрон з даної групи нейронів має бути активним. У цьому випадку на вхід кожного нейрона надходять гальмуючий (ослаблюючий, інгібіторний) сигнал від інших нейронів і звичайно збуджувальний (посилуючий, ексгібіторний) сигнал власного зворотного зв'язку. Нейрон із найбільшою активністю (переможець) «пригнічує» інші нейрони. Тому цю топологію називають також топологією мережі «переможець отримує все» (*WTA – Net*).

### 11.3.3 Повнозв'язні ШНМ

Повнозв'язні ШНМ характеризуються наявністю зв'язків між усіма нейронами мережі (рис. 11.27). Цей вид топології відомий також як мережа Гопфілда.

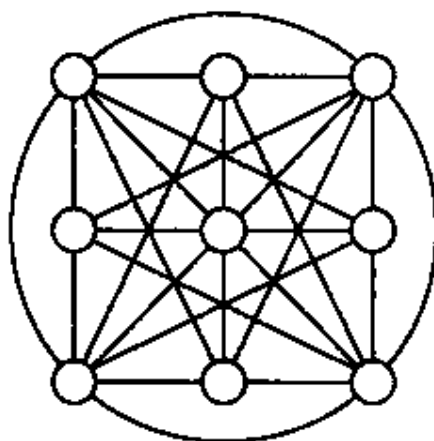


Рис. 11.27. Повнозв'язна ШНМ

Особливістю даної топології є те, що матриця зв'язків  $W$  має бути симетричною з нульовими діагональними елементами.

## 11.4. Навчання ШНМ

Як відомо, перед використанням ШНМ її необхідно навчити. Процес навчання ШНМ складається з підстроювання її внутрішніх параметрів під конкретне завдання. Від якості навчання ШНМ залежить її здатність вирішувати поставлені перед нею завдання.

Алгоритм роботи ШНМ є ітеративним, його кроки називають епохами або циклами. Епоха – одна ітерація в процесі навчання, яка включає пред'явлення всіх прикладів з навчальної множини і, можливо, перевірку якості навчання на контрольній множині.

Процес навчання здійснюється на навчальній вибірці. Навчальна вибірка включає вхідні значення і відповідні їм вихідні значення набору даних. У ході навчання нейронна мережа знаходить деякі залежності вихідних полів від вхід-

них. Складність викликає питання про кількість спостережень у наборі даних. І хоча існують правила, що описують зв'язок між необхідною кількістю спостережень і розміром мережі, їх вірність не доведена.

Кількість необхідних спостережень залежить від складності розв'язуваного завдання. При збільшенні кількості ознак кількість спостережень зростає нелінійно, ця проблема зветься «прокляти розмірності». При недостатній кількості даних рекомендується використовувати лінійну модель.

Існують такі можливості навчання ШНМ:

- зміна конфігурації мережі шляхом утворення нових або виключення деяких існуючих зв'язків між нейронами;
- зміна елементів матриці зв'язку (ваг);
- зміна характеристик нейронів (виду та параметрів активаційної функції, тощо).

Найбільшого поширення сьогодні отримав підхід, при якому структура мережі задається апріорно, а мережа навчається шляхом настроювання матриці зв'язків (вагових коефіцієнтів)  $W$ . Від того, наскільки вдало побудована ця матриця, залежить ефективність даної мережі. У цьому випадку навчання полягає у зміні за певною процедурою елементів матриці  $W$  при послідовному поданні мережі деяких векторів, що навчають.

У зв'язку з цим штучний нейрон може бути представлений таким чином (рис. 11.28).

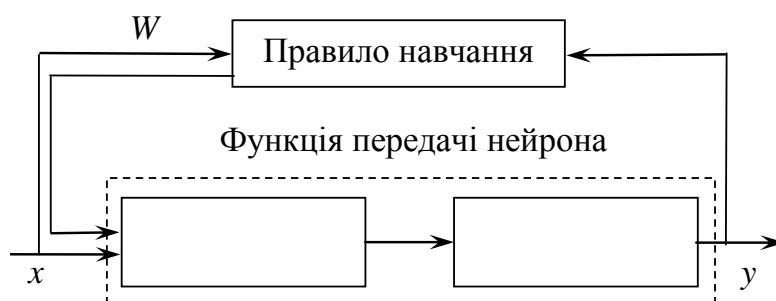


Рис. 11.28. Модель штучного нейрона

В процесі навчання ваги стають такими, що під час надходження вхідних сигналів мережа виробляє відповідні необхідні вихідні сигнали. Розрізняють навчання з учителем і без учителя. Перший тип навчання припускає, що є «учитель», який задає пари – для кожного вхідного вектора необхідний вихід мережі. Для кожного вхідного вектора, що навчає, обчислюється вихід мережі, порівнюється з відповідно необхідним, визначається помилка виходу, на основі якої і коректуються ваги. Пари, що навчають, подаються мережі послідовно і ваги уточнюються доти, поки помилка за такими парами не досягне необхідного рівня.

Більш природним є навчання без учителя, коли мережі подаються тільки вектори вхідних сигналів, і вона сама, використовуючи деякий алгоритм навчання, підстроює б ваги так, щоб при поданні їй досить близьких вхідних век-



торів вихідні сигнали були б однаковими. У цьому випадку в процесі навчання виділяються статистичні властивості множини вхідних векторів, що навчають, і відбувається об'єднання близьких (подібних) векторів у класи. Подання мережі вектора з даного класу викликає її певну реакцію, яка до навчання є непередбаченою. Тому в процесі навчання виходи мережі мають трансформуватися в деяку зрозумілу форму. Це не є серйозним обмеженням, оскільки зазвичай нескладно ідентифікувати зв'язок між вхідними векторами та відповідною реакцією мережі.

Існує ще один вид навчання – з підкріпленням (*reinforcement learning*), при якому також передбачається наявність учителя, що не підказує, однак, мережі правильної відповіді. Учитель тільки повідомляє, правильно чи неправильно відпрацювала мережа поданий образ. На основі цього мережа корегує свої параметри, збільшуючи значення ваг зв'язків, що правильно реагують на вхідний сигнал, і зменшуючи значення інших ваг.

Сьогодні існує велика кількість алгоритмів навчання, зупинимося на найбільш відомих.

#### 11.4.1. Правило навчання Гебба

Більшість сучасних алгоритмів навчання виросло із правила Гебба. Наприкінці 40-х років ХХ ст. Д.О. Гебб теоретично встановив, що асоціативна пам'ять у біологічних системах викликається процесами, які змінюють зв'язки між нервовими клітинами. Відповідно до встановленого ним правила, що називається «правилом Гебба», при одночасній активації (порушенні) двох нейронів синаптична сила (вага їхнього зв'язку) зростає. Таким чином, часто використовувані зв'язки в мережі підсилюються, що пояснює феномен звички і навчання повторенням.

У ШНМ зростання синаптичної сили еквівалентне збільшенню ваги зв'язку між нейронами  $i$  та  $j$  на величину

$$\Delta w_{ji} = \gamma x_i y_j, \quad (11.35)$$

де  $x_i$  – вихід  $i$ -го та вхід  $j$ -го нейронів;  $y_j$  – вихід  $j$ -го нейрона;  $\gamma$  – коефіцієнт, що впливає на швидкість навчання.

У векторному вигляді це правило може бути записане таким чином:  
– для неперервного часу

$$\frac{dw}{dt} = \gamma xy, \quad (11.36)$$

– для дискретного часу

$$w(k+1) = w(k) + \gamma x(k)y(k). \quad (11.37)$$

Правило Гебба використовується у зв'язках асоціативної пам'яті, а також у деяких інших, заснованих на навчанні без учителя (без підкріплення). У мережах асоціативної пам'яті приймають  $y = x$ . У гетероасоціативних мережах  $x$  та  $y$  в загальному випадку відрізняються.

Існують різні варіанти реалізації правила Гебба, наприклад засновані на мінімізації енергетичної або ентропійної функцій.

Так, якщо в якості енергетичної вибрати функцію вигляду

$$I(w) = -\Phi(w^T x) + 0,5 \alpha \|w\|^2, \quad (11.38)$$

де  $\|w\|^2 = \sum_{i=1}^N w_i^2$  – евклідова норма;  $\alpha \geq 0$  – деякий коефіцієнт;  $\Phi(\bullet)$  – диференційована функція така, що

$$y = \frac{d\Phi(w^T x)}{d(w^T x)} = f(w^T x), \quad (11.39)$$

то правило Гебба у векторній формі записується таким чином:

$$\frac{dw}{dt} = \gamma(yx - \alpha w). \quad (11.40)$$

Тут  $\gamma > 0$  – деякий параметр, що впливає на швидкість навчання.

Для випадку дискретного часу правило (11.40) приймає вигляд

$$w > (k + 1) = w(k) + \gamma [y(k)x(k) - \alpha w(k)]. \quad (11.41)$$

Якщо замість фактичного значення реакції нейрона  $y$  в (11.40), (11.41) використовується необхідне значення  $y^*$ , то відповідні алгоритми

$$\frac{dw}{dt} = \gamma(y^* x - \alpha w); \quad (11.42)$$

$$w(k + 1) = w(k) + \gamma [y^*(k)x(k) - \alpha w(k)], \quad (11.43)$$

називають корелятивними правилами навчання.

Використання в якості енергетичного функціоналу, що мінімізується, квадратичного вигляду

$$I(w) = 0,5 \|e\|^2, \quad (11.44)$$

де  $e = x - x^*$  – вектор помилок;  $x^*$  – оцінка вхідного вектора, призводить до правила навчання Ойя.

При цьому передбачається, що, по-перше, вектор ваг нормалізований і, по-друге, нейрон має лінійну активаційну функцію, тобто

$$y = w^T x. \quad (11.45)$$

Оцінка вектора вхідного сигналу є зваженим вектором ваг

$$x^* = wy. \quad (11.46)$$

Саме ж правило навчання Ойя записується таким чином:

– для неперервного часу

$$\frac{dw}{dt} = \gamma(xy - wy^2), \quad (11.47)$$

– для дискретного часу

$$w(k+1) = w(k) + \gamma y(k)[x(k) - w(k)y(k)], \quad (11.48)$$

Під час використання цього правила виникають деякі проблеми. Слід лише зазначити, що це правило досить активно використовувалося в мережах, однак за останні роки виникло багато більш ефективних алгоритмів, що забезпечують значно вищу швидкість навчання.

#### 11.4.2. Дельта-правило

Це важливе правило навчання було запропоновано Б. Уїдроу і М.Е. Гоффом і найбільше відповідає одношаровим ШНМ прямого поширення. Ідея його полягає в тому, що якщо під час навчання мережі можна встановити розбіжність між її бажаною та наявною реакціями, ця розбіжність може бути усунута або зменшена шляхом зміни певним чином вагових коефіцієнтів зв'язку. Для цього й використовується дельта-правило, відповідно до якого зміна ваги зв'язку між  $i$ -м і  $j$ -м нейронами визначається як:

$$\Delta w_{ji} = \gamma x_i (y_j^* - y_j), \quad (11.49)$$

де  $x_i$  – вихід попереднього  $i$ -го нейрона;  $y_j^*$ ,  $y_j$  – бажана та реальна реакції  $j$ -го нейрона, відповідно;  $\gamma$  – коефіцієнт, що впливає на швидкість навчання.

З (11.49) видно, що якщо різниця  $(y_j^* - y_j)$  мала, тобто реакція  $j$ -го нейрона незначною мірою відрізняється від бажаної, зміна ваги зв'язку між цими нейронами також буде незначною.

## 11.4.3. Розширене дельта-правило

Розширене дельта-правило, на відміну від простого, знаходить застосування у багатошарових ШНМ прямого поширення другого порядку. Відповідно до цього правила зміна ваг здійснюється таким чином:

$$\Delta w_{ji} = \gamma x_i \delta_j, \quad (11.50)$$

$$\text{де } \delta_j = \begin{cases} f_j'(x, w)(y_j^* - y_j), & \text{якщо } j \text{ – вихідний нейрон;} \\ f_j'(x, w) \sum_m \delta_m w_{jm}, & \text{інакше.} \end{cases}$$

$f_j'(x, w)$  – похідна активаційної функції, використовується в  $j$ -му нейроні; індекс  $j$  використовується для позначення всіх нейронів наступних шарів, пов'язаних з нейроном  $j$ .

## 11.4.4. Конкуrentне навчання

У цьому виді навчання всі нейрони одного шару є конкуруючими, а перевага віддається тому нейрону, що найбільш сильно реагує на вхідний (дратівний) сигнал, тобто настроюються ваги тільки одного нейрона – нейрона-переможця (*winner-takes-all*).

Правило настроювання ваг звичайно є деякою модифікацією правила Хебба. Початковим значенням вагових коефіцієнтів привласнюються малі, відмінні від нуля та різні значення. При поданні образу, що навчає, реакція одного з нейронів буде найбільш сильною. Його вагові коефіцієнти підсилюються або змінюються таким чином, щоб найповніше відповідати поданому образу, ваги ж інших (неактивних) нейронів або не змінюються, або зменшуються. Процес навчання завершується, коли вага активного нейрона дорівнюватиме загальній сумі ваг нейронів одного шару. Реалізація цього виду навчання багатоваріантна.

## 11.4.5. Стохастичне навчання

Розглянуті вище методи є детерміністськими, в яких на кожному такті за певним алгоритмом відбувається корекція ваг, заснована на використанні значень вхідних і вихідних бажаних і фактичних сигналів.

Стохастичні методи навчання базуються на псевдовипадкових змінах ваг зі збереженням тих змін, які ведуть до поліпшень. Для корекції ваг використовується деяка ймовірнісна функція. Більші первинні і випадкові корекції зі збереженням певних змін ваг поступово зменшують, досягаючи при цьому мети навчання. Це нагадує процес відпалювання металу, коли атоми розплавленого металу, які перебувають у хаотичному русі при його поступовому охолодженні, гублячи енергію, досягають нижчого з можливих енергетичних станів (глоба-

льного мінімуму). Тому для опису цього виду навчання часто використовують термін «імітація відпалювання» (*simulated annealing*).

Таке стохастичне навчання використовується в машинах Больцмана і Коші.

#### 11.4.6. Градієнтні методи навчання

Багато методів навчання засновано на мінімізації деякої цільової (вартісної, енергетичної, тощо) функції  $I$ , що являє собою звичайно деяку опуклу функцію. Якщо використовувати функції активації  $f(\bullet)$  диференційовані, зручно застосовувати *градієнтні методи мінімізації*, У цьому випадку корекція ваг зв'язку між  $i$ -м і  $j$ -м нейронами відбувається за правилом

$$\Delta w_{ij} = -\gamma \nabla_w I(w), \quad (11.51)$$

де  $\gamma$  – коефіцієнт, що впливає на швидкість навчання;

$$\nabla_w I(w) = \frac{\partial I(w)}{\partial w_{ij}}. \quad (11.52)$$

Ці методи найчастіше використовуються при контрольованому навчанні, коли відома необхідна реакція нейронів  $y^*$ .

Більшість градієнтних методів засновано на мінімізації квадратичного функціонала

$$I(w) = 0,5e^2(k) = 0,5(y^*(k) - w^T(k)x(k))^2. \quad (11.53)$$

У цьому випадку

$$\nabla_w I(w) = -e(k)x(k). \quad (11.54)$$

Підстановка (11.54) до (11.51) призводить до алгоритму методу найменших квадратів (МНК):

$$w(k+1) = w(k) + \gamma e(k)x(k). \quad (11.55)$$

Градієнтні методи застосовуються також і для навчання стохастичних нейронів, функціонування яких описується формулою (11.34). У цьому випадку замість критерію (11.53) мінімізується критерій

$$I(w) = 0,5(y^*(k) - \langle y(k) \rangle)^2, \quad (11.56)$$

де  $\langle y(k) \rangle = (+1) P(z(k) | y(k) = 1) + (-1) P(z(k) | y(k) = -1)$  – математичне сподівання виходу мережі.

Якщо

$$P(z(k) | y(k)) = (1 + \exp(-2\alpha z(k)))^{-1}, \quad (11.57)$$

то  $\langle y(k) \rangle = \tanh(\alpha z(k))$  і

$$\nabla_w I(w) = \alpha (y^*(k) - \langle y(k) \rangle) (1 - \langle y^2(k) \rangle) x(k), \quad (11.58)$$

що призводить до градієнтного алгоритму

$$w(k+1) = w(k) + \gamma \alpha (y^*(k) - \langle y(k) \rangle) (1 - \langle y^2(k) \rangle) x(k). \quad (11.59)$$

Як видно, цей алгоритм не відрізняється від градієнтного алгоритму навчання детермінованого нейрона, що має активаційну функцію  $f(z) = \tanh(z)$ .

Очевидно, що властивості (11.55) істотно залежать від вибору коефіцієнта  $\gamma$ . Існують різні рекомендації з вибору  $\gamma$ . Так, у теорії стохастичної апроксимації, що вивчає особливості роботи алгоритмів такого типу за наявності завад вимірів, цей коефіцієнт вибирається змінним і таким, що задовольняє умовам Дворецького:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma(k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \gamma(k) = \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^2(k) < \infty, \quad (11.60)$$

зміст яких полягає в тому, що для забезпечення збіжності послідовності (11.55) у деяку точку  $w^*$  довжина кроку  $\gamma(k)$  має, з одного боку, спадати досить повільно (для забезпечення власне збіжності), а з іншого, – досить швидко (з метою придушення завад). Таким умовам відповідає, наприклад, гармонійний ряд

$$\gamma(k) = \gamma_0 k^{-\alpha}, \quad (11.61)$$

де  $\gamma_0$  – деяка константа,  $0,5 < \alpha \leq 1$ .

У теорії стохастичної апроксимації немає рекомендацій з вибору константи  $\gamma_0$ , крім її позитивності. Теорія оптимальної фільтрації, тісно пов'язана з теорією стохастичної апроксимації, дозволяє вибрати цю константу, що виявляється залежною від статистичних характеристик сигналів і завад. Зокрема, значення  $\gamma_0$  може бути обране з умови

$$0 < \gamma < \frac{2}{\lambda_{\max}} \quad (11.62)$$

або з умови

$$0 < \gamma < \frac{2}{\text{tr}[R_x]}, \quad (11.63)$$

де  $R_x = M \{x x^T\}$  – коваріаційна матриця;  $M\{\bullet\}$  – символ математичного очікування;  $\text{tr}[R_x]$  – слід матриці  $R_x$ .

$$\text{tr}[R_x] = \sum_{i=1}^N \lambda_i = \sum_{i=1}^N r_{i,xx} \geq \lambda_{\max}; \quad (11.64)$$

де  $\lambda_i$  – власні числа матриці  $R_x$ ;  $r_{i,xx}$  – діагональні елементи коваріаційної матриці  $R_x$ ;  $\lambda_{\max}$  – найбільше власне число  $R_x$ .

Вибір коефіцієнта  $\gamma$  у вигляді

$$\gamma(k) = \|x(k)\|^{-2} \quad (11.65)$$

призводить до алгоритму Качмажа, відомому в теорії ШНМ як алгоритм Уїдроу – Гоффа. У теорії оцінювання цей алгоритм називають нормалізованим алгоритмом методу найменших квадратів (МНК).

Найбільш відомим є рекурентний алгоритм МНК (РМНК), що виходить із (11.54) при виборі замість скалярного коефіцієнта  $\gamma(k)$  матричного змінного коефіцієнта  $\Gamma(k)$

$$\Gamma(k) = P(k) [\lambda + x^T(k) P(k) x(k)]^{-1}, \quad (11.66)$$

де  $P^{-1}(k) = \sum_{i=1}^k \lambda^{k-1} x(i) x^T(i)$  – коваріаційна матриця;  $0 < \lambda < 1$  – параметр зважування інформації.

Матриця  $P(k)$  допускає рекурентне обчислення. Тому в остаточному вигляді РМНК із експонентним зважуванням інформації має вигляд

$$w(k+1) = w(k) + \alpha(k) P(k) x(k) e(k); \quad (11.67)$$

$$P(k+1) = \frac{1}{\lambda} [I - \alpha(k) P(k) x(k) x^T(k)] P(k), \quad (11.68)$$

де  $\alpha(k) = [\lambda + x^T(k) P(k) x(k)]^{-1}$ ;  $I$  – одинична матриця.

Використовуваний у (11.67), (11.68) параметр  $\lambda$  забезпечує зважування інформації, тобто надання більшого значення інформації, що надходить знову.

Даний механізм оцінювання важливості інформації особливо ефективний під час настроювання ваг, що змінюються в часі (дослідження нестационарних об'єктів). При  $\lambda = 1$  алгоритм (11.67), (11.68) переходить у РМНК.

Різновидом РМНК є багатокроковий ( $l$ -кроковий) проєкційний алгоритм,

що використовує, на відміну від (11.67) та (11.68), фіксовану кількість інформації та має вигляд:

$$w(k+1) = w(k) + \gamma(k)r_i(k); \quad (11.69)$$

$$r_i(k) = R_{l-1}(k-1)x(k)\Gamma^{-1}(k)e(k) + \\ + (1 - \gamma(k-1))(I - R_l(k-1)x(k)x^T(k)\Gamma^{-1}(k))r_{l-1}(k-1); \quad (11.70)$$

$$R_l(k-l+i) =$$

$$= (I - R_{l-1}(k-l+i-1)x(k-l+i)x^T(k-l+i)\Gamma^{-1}(k-l+i))R_{l-1}(k-l+i-1), \quad (11.71)$$

де  $r_0 = (0 \ 0 \ \dots \ 0)^T$ ;  $R_0 = I$ ;  $i = \overline{1, l}$ ;  $l = \text{const}$  – пам'ять алгоритму (ця величина вибирається меншою, ніж розмірність завдання);  $\gamma_i \in (0, 2)$ .

Використання в (11.69) та (11.71) фіксованої пам'яті робить цей алгоритм особливо привабливим в процесі навчання мереж, параметри яких змінюються в часі.

Якщо нейрони описуються нелінійними активаційними функціями  $f(w, x(k))$ , то, скориставшись розкладанням вихідних сигналів нейронів у ряд Тейлора

$$y(k+1) = f(w(k), x(k+1)) + H^T(k+1)(w^* - w(k)) + \rho(k+1), \quad (11.72)$$

де  $H(k+1)$  – матриця розмірності  $S \times M$  вигляду

$$H(k+1) = \left. \frac{\partial f(w, x(k+1))}{\partial w} \right|_{u^*=u^*(k)}; \quad (11.73)$$

$S$  – розмірність вектора ваг;  $M$  – розмірність вихідного сигналу;  $\rho(k)$  – залишок розкладання, що враховує члени більш високих порядків, можна отримати такий алгоритм навчання:

$$w(k+1) = w(k) + K(k+1)(y^*(k+1) - f(w(k), x(k+1))); \quad (11.74)$$

$$K(k+1) = \frac{1}{\lambda} P(k)H(k+1) \left[ I + \frac{1}{\lambda} H^T(k+1)P(k)H(k+1) \right]^{-1}; \quad (11.75)$$

$$P(k+1) = \frac{1}{\lambda} [I - K(k+1)H^T(k+1)]^{-1}, \quad (11.76)$$

відомий у теорії оцінювання як фільтр Калмана. Матриця  $K(k+1)$ , що обчислюється відповідно до (11.75), називається матрицею посилення Калмана.

Алгоритм навчання (11.67) та (11.68) впливає з (11.74) та (11.76) у процесі використання лінійної апроксимації активаційної функції нейронів.

Якщо вихідний сигнал  $i$ -го нейрона подати у вигляді



$$y_i(k+1) = f(w_i^T(k)x_i(k+1)), \quad (11.77)$$

то може бути отриманий алгоритм навчання його ваг, заснований на розширеному фільтрі Калмана:

$$w_i(k+1) = w_i(k) + K_i(k+1)e_i(k+1); \quad (11.78)$$

$$K_i(k+1) = \frac{1}{\lambda} P_i(k) Z_i(k+1) \left[ I + \frac{1}{\lambda} Z_i^T(k+1) P_i(k) Z_i(k+1) \right]^{-1}; \quad (11.79)$$

$$P_i(k+1) = \frac{1}{\lambda} [I - K_i(k+1) Z_i^T(k+1)] P_i(k), \quad (11.80)$$

де  $Z_i(k+1) = x_i(k+1) \nabla_w f(w_i^T(k)x_i(k+1))$ ;  $\nabla_w f(\cdot) = \frac{\partial f(\cdot)}{\partial w}$ .

Наведені вище алгоритми навчання реалізують методи оптимізації першого порядку, в яких використовується обчислення градієнта функціонала. Серед цих методів найбільшу швидкість збіжності має метод сполучених градієнтів.

Ще більшу швидкість збіжності мають методи другого порядку, що вимагають обчислення других похідних мінімізованого функціонала. Серед таких методів, в першу чергу, слід відзначити метод Ньютонна:

$$w(k+1) = w(k) - H_k^{-1} g_k, \quad (11.81)$$

де  $H_k^{-1}$  – матриця, зворотна матриці Гессе:

$$H_k = \nabla_w^2 I(w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 I(w)}{\partial w_1^2} & \frac{\partial^2 I(w)}{\partial w_1 w_2} & \cdots & \frac{\partial^2 I(w)}{\partial w_1 w_N} \\ \frac{\partial^2 I(w)}{\partial w_2 w_1} & \frac{\partial^2 I(w)}{\partial w_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 I(w)}{\partial w_2 w_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 I(w)}{\partial w_N w_1} & \frac{\partial^2 I(w)}{\partial w_N w_2} & \cdots & \frac{\partial^2 I(w)}{\partial w_N^2} \end{pmatrix}, \quad (11.82)$$

$$g_k = \begin{pmatrix} \frac{\partial I(w)}{\partial w_1} & \frac{\partial I(w)}{\partial w_2} & \cdots & \frac{\partial I(w)}{\partial w_N} \end{pmatrix}^T. \quad (11.83)$$

Ці похідні обчислюються в точці  $w = w(k)$ .

Якщо в якості критерію навчання використовується

$$I(w) = 0,5 \sum_{i=1}^M (y_i^* - y_i)^2 = 0,5 \sum_{i=1}^M e_i^2, \quad (11.84)$$

то

$$g_k = \frac{\partial I(w)}{\partial w} = 0,5 \left[ \frac{\partial \sum_{i=1}^M e_i^2}{\partial w_1} \quad \dots \quad \frac{\partial \sum_{i=1}^M e_i^2}{\partial w_N} \right]^T = \left[ \sum_{i=1}^M e_i \frac{\partial e_i}{\partial w_1} \quad \dots \quad \sum_{i=1}^M e_i \frac{\partial e_i}{\partial w_N} \right] = J^T e, \quad (11.85)$$

де  $J$  – якобіан, що має вигляд

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial e_1}{\partial w_1} & \frac{\partial e_1}{\partial w_2} & \dots & \frac{\partial e_1}{\partial w_N} \\ \frac{\partial e_2}{\partial w_1} & \frac{\partial e_2}{\partial w_2} & \dots & \frac{\partial e_2}{\partial w_N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial e_M}{\partial w_1} & \frac{\partial e_M}{\partial w_2} & \dots & \frac{\partial e_M}{\partial w_N} \end{bmatrix}. \quad (11.86)$$

Оскільки елементи матриці  $H = \nabla_w^2 I(w)$  визначаються за формулою

$$[H]_{l,m} = [\nabla_w^2 I(w)]_{l,m} = \frac{\partial^2 I(w)}{\partial w_l \partial w_m} = \sum_{i=1}^M \left( \frac{\partial e_i}{\partial w_l} \frac{\partial e_i}{\partial w_m} + e_i \frac{\partial^2 e_i}{\partial w_l \partial w_m} \right), \quad (11.87)$$

то з урахуванням (11.82) та (11.86) можна записати

$$H = J^T J + S, \quad (11.88)$$

де  $S = \sum_{i=1}^M e_i \nabla_u^2 e_i$ .

З наближенням до мінімуму елементи матриці  $S$  стають малими, і матриця Гессе може бути апроксимована так:

$$H \approx J^T J. \quad (11.89)$$

Підставляючи (2.89) у (2.81), отримуємо такий алгоритм методу Ньютона:

$$w(k+1) = w(k) - [J_k^T J_k]^{-1} J_k^T e_k, \quad (11.90)$$

де  $e_k = (e_1, e_2, \dots, e_m)^T$ ; індекс  $k = 0, 1, 2, \dots$  означає прискорений машинний час.

Для підвищення обчислювальної стійкості алгоритму навчання замість (11.89) використовують апроксимацію

$$H \approx J^T J + \mu I, \quad (11.91)$$

де  $\mu$  – досить мале додатне число.

Підстановка (11.91) в (11.81) призводить до алгоритму Левенберга – Маркуардта

$$w(k+1) = w(k) - [J_k^T J_k + \mu I]^{-1} J_k^T e_k. \quad (11.92)$$

Ще один метод, що використовує обчислення градієнта і широко застосований у процесі навчання багат шарових ШНМ – метод зворотного поширення помилки (*backpropagation*). Зазначимо, що дельта-правило є оптимальним у певному сенсі для одно шарових ШНМ, оскільки з його допомогою визначається вагова матриця, що точно відтворює реакцію нейрона у випадку лінійно незалежних вхідних векторів. У багат шарових ШНМ це правило не застосовується, оскільки не зрозуміло, яким чином настроювати вагові коефіцієнти нейронів прихованих шарів, які б зменшували помилку вихідного сигналу мережі. Ця проблема називається «*credit assignment*-проблемою» і вирішується за допомогою алгоритму зворотного поширення помилки. Цей алгоритм може бути застосований до ШНМ, що має будь-яку кількість прихованих шарів. Відповідно до цього алгоритму шляхом мінімізації вихідної помилки спочатку настроюються ваги останнього (вихідного) шару, потім попереднього і т.д. до вхідного шару. Однак, якщо дельта-правило гарантує збіжність процесу навчання, то алгоритм зворотного поширення помилки такої гарантії не дає, і навчання може застрягнути в одному з локальних мінімумів.

#### 11.4.7. Навчання з підкріпленням

Цей вид навчання також заснований на оптимізації деякого критерію. У випадку навчання з підкріпленням також присутній учитель або зовнішній арбітр, що дає лише вказівку про зменшення або збільшення значень параметрів мережі. Оскільки для забезпечення адаптації мережі у всьому заданому просторі сигналів необхідні випадкові вихідні сигнали, то для настроювання мережі звичайно використовують алгоритми, застосовувані для навчання стохастичних нейронів, наприклад, алгоритм навчання з підкріпленням, аналогічний (11.55), та використовують для настроювання мережі послідовність навчальних пар вигляду  $\{x(k), r(k)\}$ , де  $x(k)$  – вектори вихідних сигналів, а  $r(k) \in \{-1, 1\}$  – вказівки вчителя ( $r(k) = 1$  свідчить про правильний напрямок у зміні ваг і про необхідність збільшення їхнього значення;  $r(k) = -1$  сигналізує про помилковий напрямок і про необхідність зменшення значення ваг). У цьому алгоритмі, на відміну від (11.55), використовується змінний коефіцієнт навчання  $\alpha(r(k))$

$$w(k+1) = w(k) + \alpha(r(k)) [y^*(k) - \langle y(k) \rangle] [1 - \langle y^2(k) \rangle] x(k), \quad (11.93)$$

$$\text{де } \alpha(r(k)) = \begin{cases} \alpha^+ & \text{якщо } r(k) = +1 \\ \alpha^- & \text{якщо } r(k) = -1 \end{cases}, \quad y^*(k) = \begin{cases} y(k) & \text{якщо } r(k) = +1 \\ -y(k) & \text{якщо } r(k) = -1 \end{cases}, \\ \alpha^+ \gg \alpha^- > 0.$$

Вибір  $\alpha^+ \gg \alpha^-$  служить для забезпечення швидкого навчання і повільного «забування».

Модифікований алгоритм (11.78) має вигляд:

$$w(k+1) = w(k) + \alpha(r(k))[r(k)(y^*(k) - \langle y(k) \rangle) - (1-r(k))(y(k) + \langle y^2(k) \rangle)]x(k), \quad (11.94)$$

де  $r(k) \in [0,1]$ .

## 11.5. Повторне навчання

Ремонтопридатність – властивість об'єкта, що полягає в пристосованості до підтримки і відновлення працездатного стану шляхом технічного обслуговування та ремонту. Топологічно подібні нейронні мережі можуть служити в якості морфологічних моделей пошкоджень, а їхнє повторне навчання – моделю ремонту та відновлення моделюємих об'єктів.

### 11.5.1. Вплив повторного навчання на відмовостійкість НМ

При тривіальному використанні ШНМ користувач повинен сам визначити архітектуру мережі, кількість шарів і кількість нейронів у кожному шарі. При використанні топологічно подібних ШНМ ці параметри у значній мірі диктує об'єкт, що моделюється. У такому випадку в ШНМ може виявитися неоптимальна (найчастіше надлишкова) кількість елементів – нейронів і зв'язків між ними. Така надмірність може, у першу чергу, негативно відбитися на навчанні НМ, оскільки при навчанні часто виникають серйозні труднощі, названі проблемою перенавчання (*overfitting*): зайва точна відповідність ШНМ конкретному набору навчальних прикладів, при якому мережа втрачає здатність до узагальнення. Перенавчання виникає у випадку занадто довгого навчання, недостатньої кількості навчальних прикладів або, як у нашому випадку, при надто ускладненій структурі ШНМ.

З перших кроків навчання відбувається зменшення помилки. На наступних кроках з метою зменшення помилки (цільової функції) параметри підбудовуються під особливості навчальної множини. Однак при цьому відбувається «підстроювання» не під загальні закономірності ряду, а під особливості його частини – навчальної підмножини. При цьому точність прогнозу зменшується.

Один з варіантів боротьби з перенавчанням мережі – розподіл навчальної вибірки на дві множини (навчальну і тестову). На навчальній множині відбувається навчання ШНМ. На тестовій множині здійснюється перевірка побудованої моделі. Ці множини не повинні перетинатися.

При навчанні з кожним кроком параметри (але не структура!) моделі змінюються, однак постійне зменшення значення цільової функції помилки навчання відбувається саме на навчальній множині. При розбивці множини на дві

спостерігається зміна помилки в роботі ШНМ на тестовій множині паралельно зі спостереженнями над навчальною множиною. Деяка кількість кроків помилки зменшується на обох множинах. Однак на певному кроці помилка на тестовій множині починає зростати, при цьому помилка на навчальній множині продовжує зменшуватися. Цей момент вважається границею (кінцем) реального або справжнього навчання, з нього й починається перенавчання (рис. 11.29).

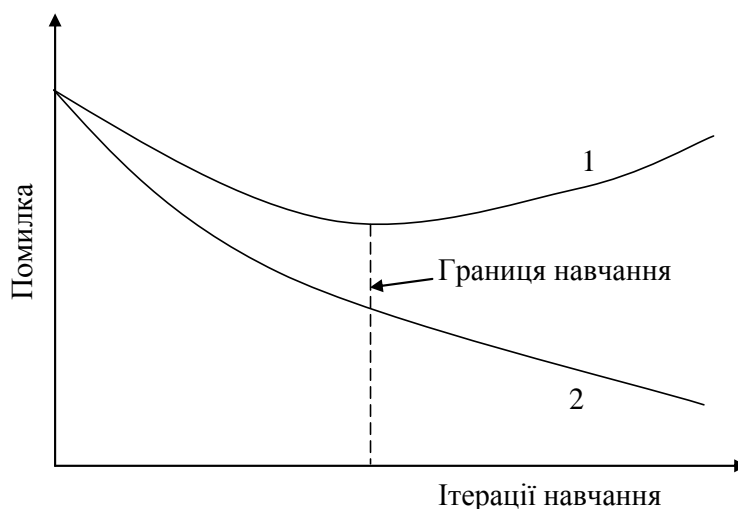


Рис. 11.29. До визначення моменту переходу від навчання до перенавчання:  
 1 – помилка на тестовій множині навчальної вибірки;  
 2 – помилка на навчальній множині навчальної вибірки

При топологічному моделюванні механічних складних конструкцій за допомогою ШНМ передбачається, що вихідна «неушкоджена» нейронна мережа навчена виконанню деякої процедури, наприклад розпізнаванню образів або прогнозуванню. При такому виді використання ШНМ наявна надмірність в неушкодженій ШНМ усувається по мірі внесення в ШНМ ушкоджень.

Тут необхідно розрізняти дві ситуації, в яких можуть виявитися топологічно подібні одна одній ШНМ:

- ШНМ навчена (можливо, з перенавчанням) раніше, причому структура її з моменту закінчення навчання до даного моменту не змінилася;
- ШНМ навчена (можливо, з перенавчанням) раніше, але структура її з моменту закінчення навчання до даного моменту змінилася в результаті «ушкоджень».

В принципі, спостерігаючи поточний стан НМ, тобто її структуру та значення вагових коефіцієнтів на вході всіх нейронів, не можна зробити будь-який висновок про її «історію». Із цього випливає наступне твердження.

**Твердження 11.1.** *Коли мова йде про «ШНМ, що ушкоджується» у процесі моделювання ШНМ, тільки за її описом на теперішній момент (структура, параметри) неможливо визначити, була ШНМ ушкоджена після її навчання чи ні.*

Таким чином, присутня парадоксальна ситуація: ушкодження ШНМ знижує її надмірність (1, рис. 11.30) (позитивне явище), але при цьому втрачається

здатність до роботи внаслідок того, що навчання зазнала неушкоджена, тобто фактично зовсім інша ШНМ (2, рис. 11.30).

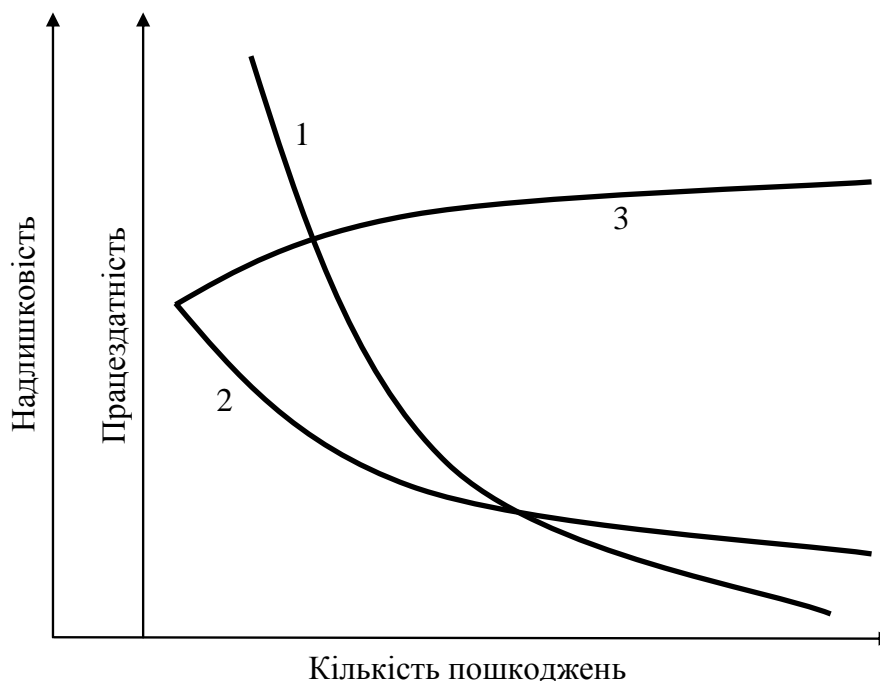


Рис. 11.30. Вплив кількості ушкоджень на зменшення надмірності (1) і падіння працездатності НМ, що не зазнають (2) повторного навчання, та що зазнають повторного навчання (3)

Внаслідок того, що структура ШНМ при такому способі топологічного моделювання жорстко зв'язана зі структурою СТС і її відновити неможливо, для розв'язку цієї проблеми ШНМ можна піддавати новим циклам навчання по мірі її ушкодження. У зв'язку з тим, що термін «перенавчання» уже зайнятий і несе зовсім інше навантаження, назвемо такий процес «повторним навчанням». Фактично, втрата працездатності наступає не від ушкоджень, а від «відходу» від тієї структури, яка була навчена! Якби зміна структури на кожному кроці супроводжувалася повторним навчанням, то збільшення ушкоджень за рахунок зниження надмірності призводило б до поліпшення працездатності, природно, до певних меж.

Повторне навчання «ушкодженої» мережі робить її знову «цілою», але з меншою кількістю нейронів і зв'язків між ними в порівнянні з початковою. Таким чином, регулярне повторне навчання по мірі ушкодження сприяє до певної межі збереженню працездатності ШНМ при таких рівнях ушкоджень, за яких не навчена повторно мережа вже непрацездатна.

Нехай у результаті експерименту встановлено, що фрагмент «хмари» точок для  $N = 40$ , виглядає на ділянці від  $n = 0$  до  $n = 20$  так, як це представлено на рис. 11.31 (крива 1).

Можна припустити, що після повторного навчання ймовірність відмови знову стане нульовою. Далі, при збільшенні кількості ушкоджених нейронів статистична оцінка ймовірності знову почне зростати (2, рис. 11.31). Після

наступного повторного навчання оцінка знову стане нульовою, знову почне рости (3, рис. 11.31) і т.д. доти, доки нейронів не залишиться настільки мало, що повторне навчання перестане відновлювати працездатність мережі.

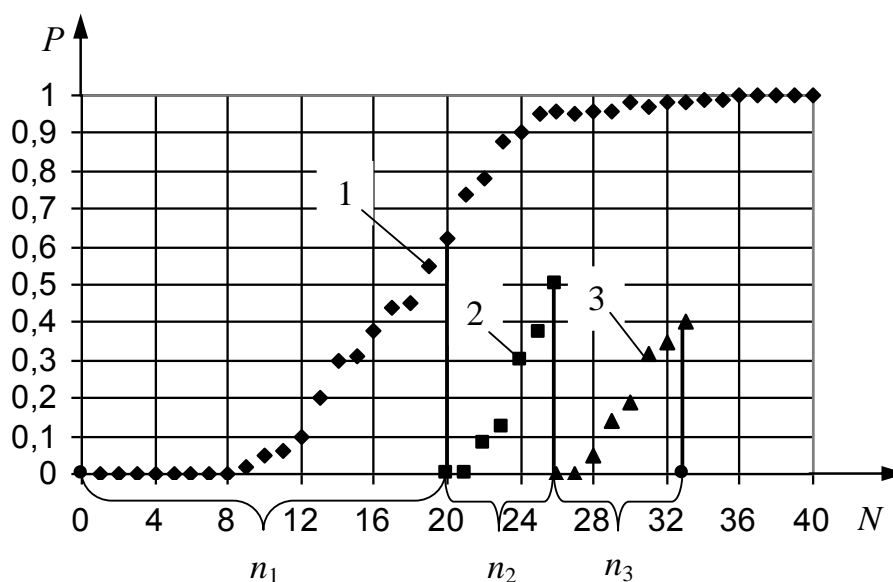


Рис. 11.31. «Хмара» точок при випробуваннях ШНМ без повторного навчання (1) і з повторним навчанням (2)

Очевидно, розташування точок на ділянках 1, 2 і 3 (рис. 11.33) залежить не тільки від кількості «ушкоджених» нейронів, але й від кількості неушкоджених, що залишилися після чергової ітерації повторного навчання. Тому загальний вираз для функцій, що апроксимують ці ділянки має вигляд:

$$\begin{cases} P_1 = f_1(n, N_{20}); & n = 0, 1, 2, \dots \\ P_2 = f_2(n, N_{21}); & n = 0, 1, 2, \dots \\ \dots \\ P_I = f_I(n, N_{2(I-1)}); & n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (11.94)$$

Або в загальному вигляді:

$$P_i = f_i(n, N_{2(i-1)}); \quad 0 \leq i \leq I; \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (11.95)$$

де  $i$  – послідовний номер повторного навчання;  $I$  – загальна кількість повторних навчань;  $N$  – вихідна кількість неушкоджених нейронів другого шару  $N_{2(i-1)}$  – кількість неушкоджених нейронів другого шару тришарової ШНМ, що залишилися після  $(i-1)$ -го повторного навчання:

$$N_{2(i-1)} = N_{20} - \sum_{j=1}^i (n_j - n_{j-1}). \quad (11.96)$$

Підставляючи (11.96) в (11.95), одержимо:

$$P_i = f_i[n, N_0 - \sum_{j=1}^i (n_j - n_{j-1})]; \quad 0 \leq i \leq I; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (11.97)$$

Система рівнянь (11.97) містить дві компоненти: статистичну, що визначає вигляд функції  $f_i[n, N_0 - \sum_{j=1}^i (n_j - n_{j-1})]$ , і призначувану проектувальником послідовність повторних навчань  $n_j$ .

Перший компонент визначається в кожному випадку експериментально так, як це описано в попередніх розділах, – шляхом апроксимації функцією  $f_i[\cdot]$  «хмари» точок.

Зі сказаного можна зробити висновок про те, що повторні навчання можуть служити інструментом підвищення відмовостійкості ШНМ. Оскільки відмовостійкість – інтегральний показник, що залежить від двох параметрів: моменту початку збоїв у роботі і тривалості (уздовж осі кількості ушкоджень) нестійкого стану працездатності ШНМ, розглянемо, як впливають на них повторні навчання.

Очевидно, що повторне навчання після кожного одиничного ушкодження не вирішує завдання підвищення відмовостійкості, оскільки завжди наступає момент, коли після чергового ушкодження система відмовляє відразу, тобто відмовостійкість стає рівною нулю. Звідси випливає висновок, що клас відмовостійкості при збільшенні кількості повторних навчань повинен проходити через максимум.

Вплив послідовності повторних навчань на працездатність ШНМ було досліджено експериментально. Для цього в середовищі «ШНМ, що ламається» була побудована мережа прямого поширення, в якій варіювали наступні параметри (табл. 11.1).

Таблиця 11.1

Параметри, які варіювалися при дослідженні впливу повторного навчання на відмовостійкість штучних нейронних мереж

Параметр	Діапазон зміни
Кількість нейронів другого шару, шт	20 – 60
Кількість повторних навчань, шт.	1 – 20
Крок повторного навчання, ітерацій	1 – 5
Глибина відновлення, %	0 – 100



Результати експериментів у балах відмовостійкості обчислювали апроксимацією статистичної оцінки багаточленом (рис. 11.32 – 11.35).

При варіюванні відповідного параметра інші фіксувалися на наступному рівні:

- кількість нейронів другого шару, 40 шт;
- кількість повторних навчань, 7 шт;
- крок повторного навчання, 3 ітерації;
- глибина відновлення, 50 %

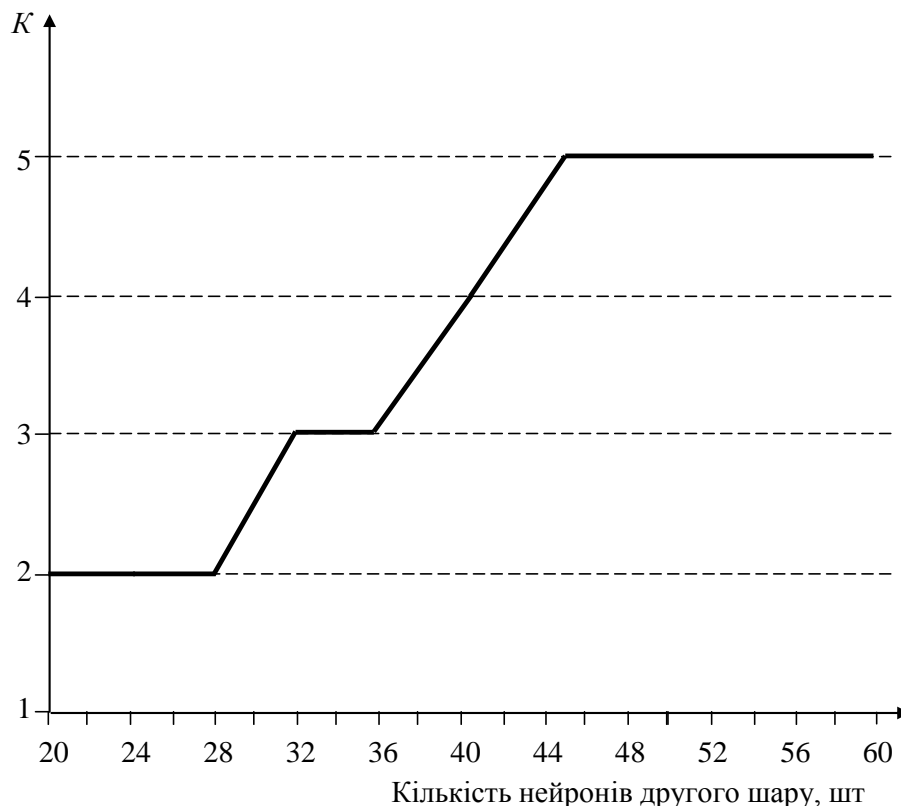


Рис. 11.32. Вплив кількості нейронів другого шару на клас відмовостійкості ШНМ

### 11.5.2. Механічний аналог повторного навчання ШНМ

Тверда «прив'язка» структури ШНМ до структури складної технічної системи (СТС), що моделюється, залишає можливість відновлення структури ушкодженої ШНМ тільки при відповідному топологічно подібному відновленні (ремонті) СТС. Таким чином, оскільки механічним аналогом повторного навчання ШНМ є ремонт технічних об'єктів, усе сказане можна поширити на проблему організації ремонтних робіт. Зокрема, мова йде про оптимізацію кількості та строків планових ремонтів, а також про проектування зміни ваг на входах нейронів при повторному навчанні на зміну конструкції відремонтованого об'єкта. У цьому аспекті метод топологічної аналогії СТС і ШНМ може бути використаний і при оцінці ремонтпридатності проєктованих систем.

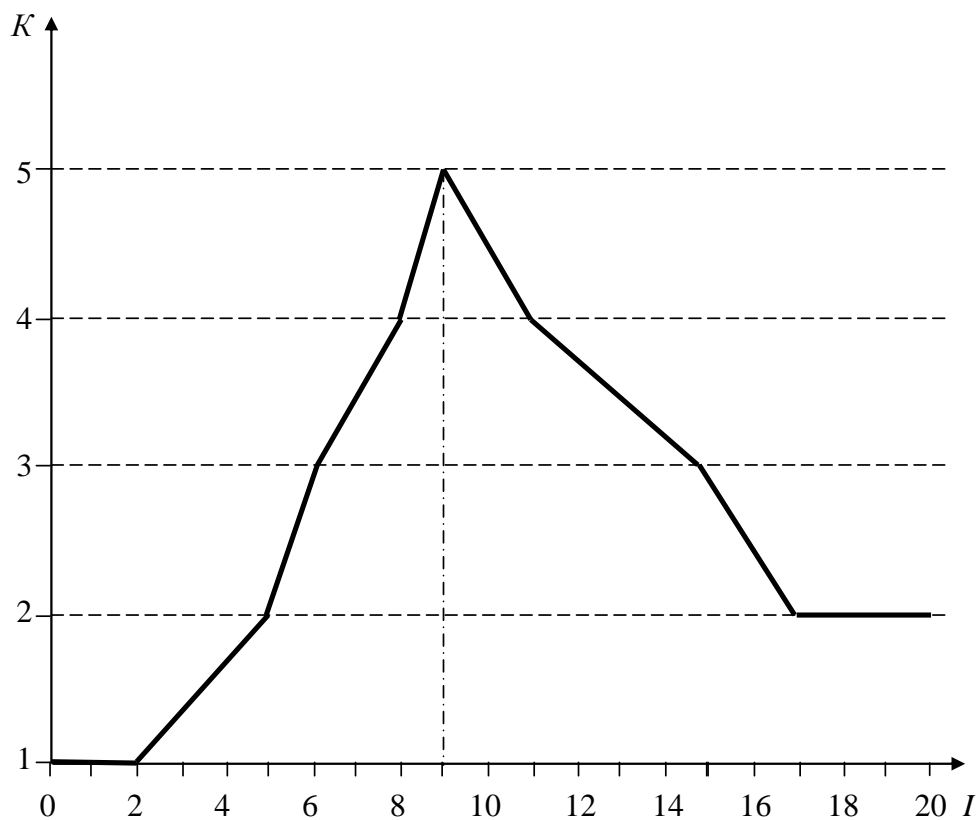


Рис. 11.33. Вплив кількості повторних навчань на клас відмовостійкості ШНМ

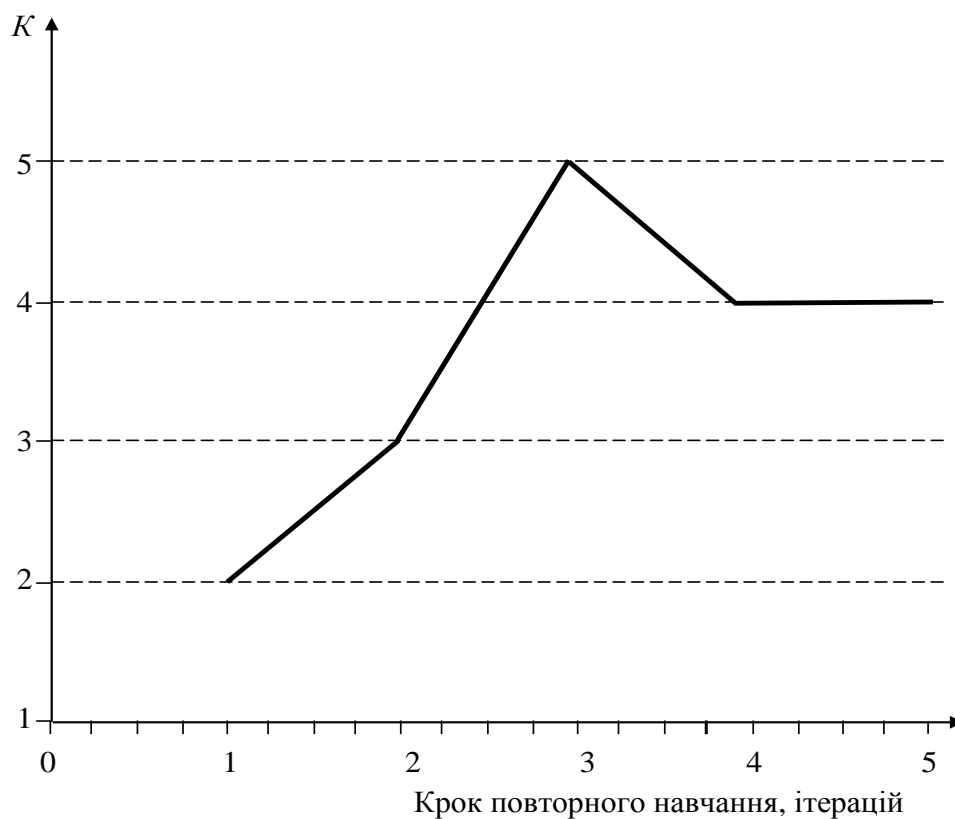


Рис. 11.34. Вплив кроку повторного навчання на клас відмовостійкості ШНМ

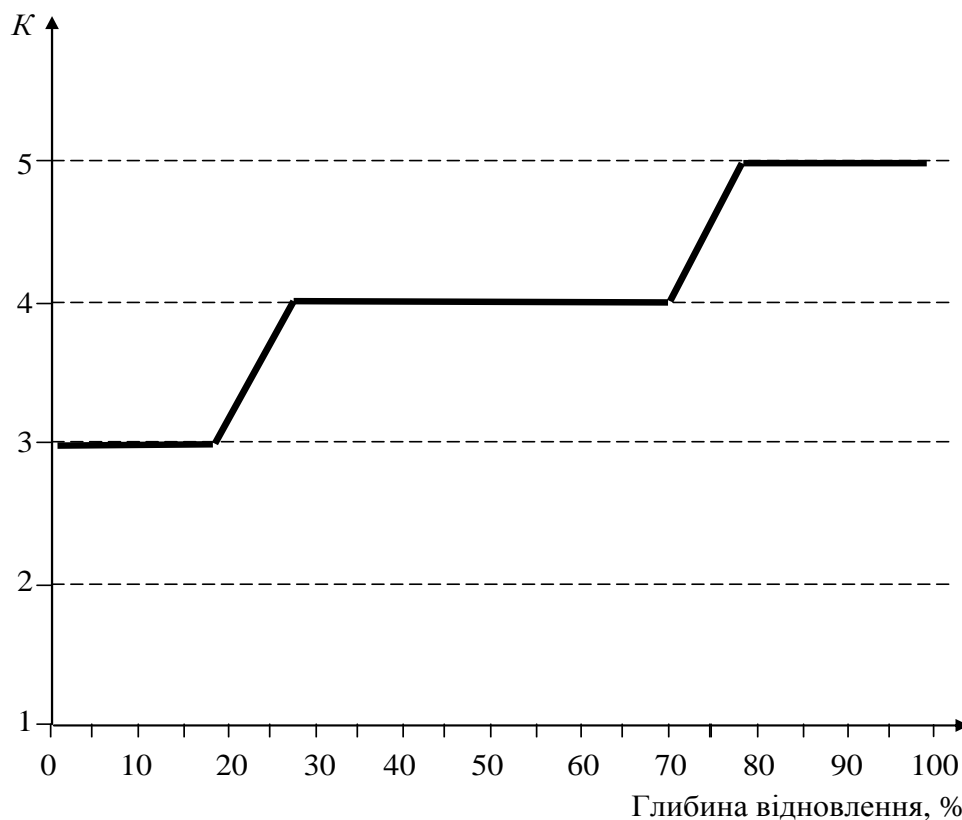


Рис. 11.35. Вплив глибини відновлення на клас відмовостійкості ШНМ

Ремонтопридатність – ця властивість об'єкта, що полягає в пристосованості до підтримки та відновлення працездатного стану шляхом технічного обслуговування і ремонту. Ремонтопридатний виріб повинен мати відповідну конструкцію, бути пристосованим до контролю працездатності за всіма основними параметрами, демонтажу за відмови і монтажу працездатного устаткування.

Близьким до ремонтпридатності поняттям є відновлюваність. Відновлення – ця подія, що полягає в переході об'єкта з непрацездатного стану до працездатного в результаті усунення відмови шляхом перебудови (реконфігурації) структури, ремонту або заміни частин, що відмовили. Цим же терміном позначають і процес переведення об'єкта з непрацездатного стану в працездатний.

Відновлюваність залежить не тільки від пристосованості СТС до попередження, виявлення і усунення відмов, але й від підготовленості обслуговуючого персоналу, від організаційно-технічних заходів щодо обслуговування та постачання системи, від зовнішніх умов функціонування.

Ремонтопридатна система стає відновлюваною, якщо в процесі її роботи допускаються вимушені перерви в роботі, є необхідна контрольновимірвальна апаратура, запасні частини та обслуговуючий персонал відповідної кваліфікації.

Зі сказаного випливає, що не кожний ремонтпридатний виріб є відновлюваним. Більше того, той самий виріб у різних ситуаціях може бути або відновлюваним, або невідновлюваним.

З іншого боку, не кожний відновлюваний виріб ремонтпридатний. Прикладом може служити виріб, в якому відмова виникає внаслідок різкого погіршення умов функціонування. Його працездатність відновлюється без втручання персоналу відразу ж після повернення до нормальних умов функціонування. Працездатність може відновлюватися і шляхом реконфігурації технічних і програмних засобів без проведення ремонту або заміни модуля, що відмовив.

Час, що витрачається на відновлення працездатності об'єкта, називають часом відновлення. Він складається із часу виявлення відмови, часу його локалізації, часу усунення відмови шляхом ремонту або заміни несправних частин на запасні, часу налагодження та передпускової перевірки працездатності.

Якщо продовжити в цьому сенсі аналогію між топологічно подібними СТС і ШНМ, то можна стверджувати, що механічним аналогом повторного навчання ШНМ є:

- відновлення елементів системи, топологічно подібне ШНМ, яка моделює працездатність;
- зміна параметрів, що залишилися працездатними, відновлених елементів і зв'язків між ними відповідно до зміни параметрів елементів і зв'язків ШНМ (наприклад, вагових коефіцієнтів на входах нейронів) після відновлення й повторного навчання (рис. 11.36).

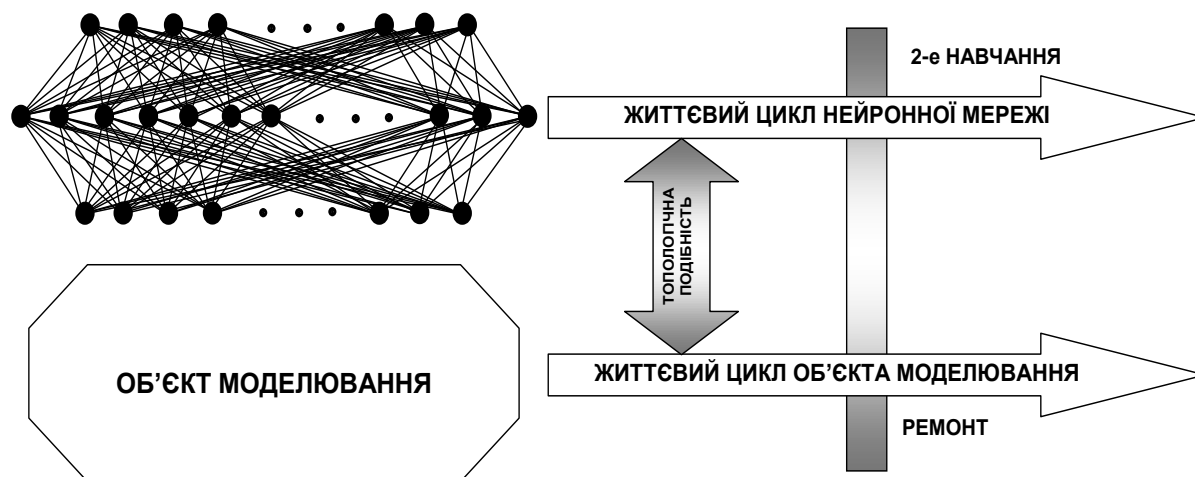


Рис. 11.36. Заснована на топологічній подібності еквівалентність між повторним навчанням ШНМ і ремонтом технічного об'єкта

Експериментально встановлена кореляційна залежність між відмовостійкістю повторно навчених ШНМ і відмовостійкістю перепроєктованих механічних конструкцій.

### 11.6. Питання до самоконтролю

1. Основні поняття штучних нейронних мереж. Як вони пов'язані із властивостями природної нейронної мережі?
2. Наведіть структуру штучного нейрона. До об'єкта якого класу він відноситься: механічний, математичний, хімічний, біологічний?
3. Що таке функція активації нейрона? Що, як та з якою метою вона активує?
4. Надайте перелік моделей штучних нейронів.
5. Властивості та області застосування формальної моделі нейрона Маккаллоха – Піттса.
6. Властивості та області застосування моделей нейронів Адаліни та Фукушімі.
7. Властивості та області застосування моделей штучного нейронів Гопфілда та Гроссберга.
8. В чому полягає узагальнена модель нейрона?
9. Властивості та області застосування моделей  $\Sigma$ - $\Pi$ -нейрона та стохастичного нейрона.
10. Варіанти відомих топологій штучних нейронних мереж. Їхні недоліки та переваги.
11. Властивості та області застосування штучних нейронних мереж прямого поширення.
12. Властивості та області застосування штучних нейронних мереж зворотного поширення.
13. Властивості та області застосування повнозв'язаних штучних нейронних мереж.
14. Що відрізняє нейронні мережі як інтелектуальні системи? Навчання штучних нейронних мереж.
15. Правило навчання Гебба (корелятивне, співвідносне навчання).
16. Дельта-правило та розширене дельта-правило.
17. Як здійснюється конкурентне навчання штучних нейронних мереж?
18. Як здійснюється стохастичне навчання штучних нейронних мереж?
19. Градієнтні методи навчання.
20. Навчання з підкріпленням.
21. Повторне навчання ШНМ як модель ремонту та відновлення технічних систем.

## Розділ 12 ЕВОЛЮЦІЙНІ МОДЕЛІ\*

### 12.1. Метод класичного генетичного алгоритму

Оптимізація є найважливішим етапом розв'язку завдань моделювання. Основні труднощі застосування класичних методів оптимізації нелінійних функцій пов'язані із проблемами локального екстремуму (рис. 12.1) і «прокляття розмірності» (рис. 12.2).

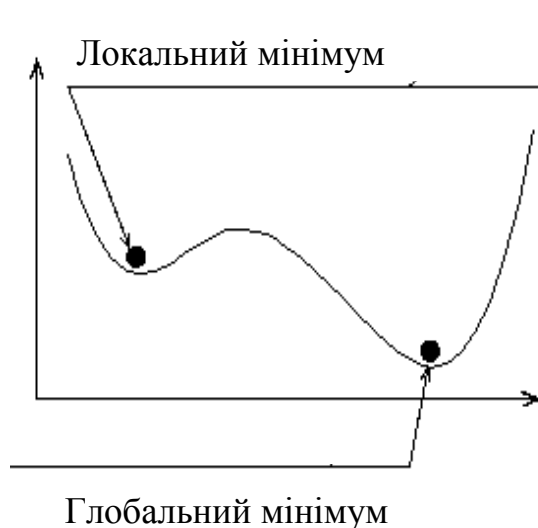


Рис. 12.1. Проблема локального екстремуму

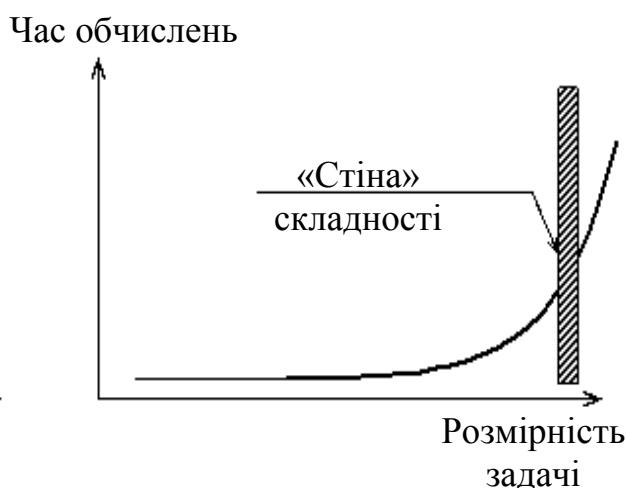


Рис. 12.2. Проблема «прокляття розмірності»

Спроби подолання зазначених проблем привели до створення теорії генетичних алгоритмів (ГА), які «вирощують» оптимальний розв'язок шляхом схрещування вихідних варіантів з наступною селекцією за деяким критерієм.

Нехай задана функція

$$z = z(x, y), \quad (12.1)$$

що описує деякий об'єкт, про який відомо, що вона гладка, неперервна на  $0 \leq x \leq x_{max}$  і  $0 \leq y \leq y_{max}$ , а також має в цій області два максимуми (рис. 12.3).

Сформулюємо завдання оптимізації, в якому функція (12.10) виступає в якості цільової:

\* В розділі використані матеріали монографії О.П. Ротштейна «Интеллектуальные технологии идентификации: нечеткие множества, генетические алгоритмы, нейронные сети»

$$\max_{x,y}\{z(x,y)\}, \quad (12.2)$$

тобто потрібно знайти такі значення аргументів  $x$  і  $y$ , які доставляють максимум функції  $z$ .

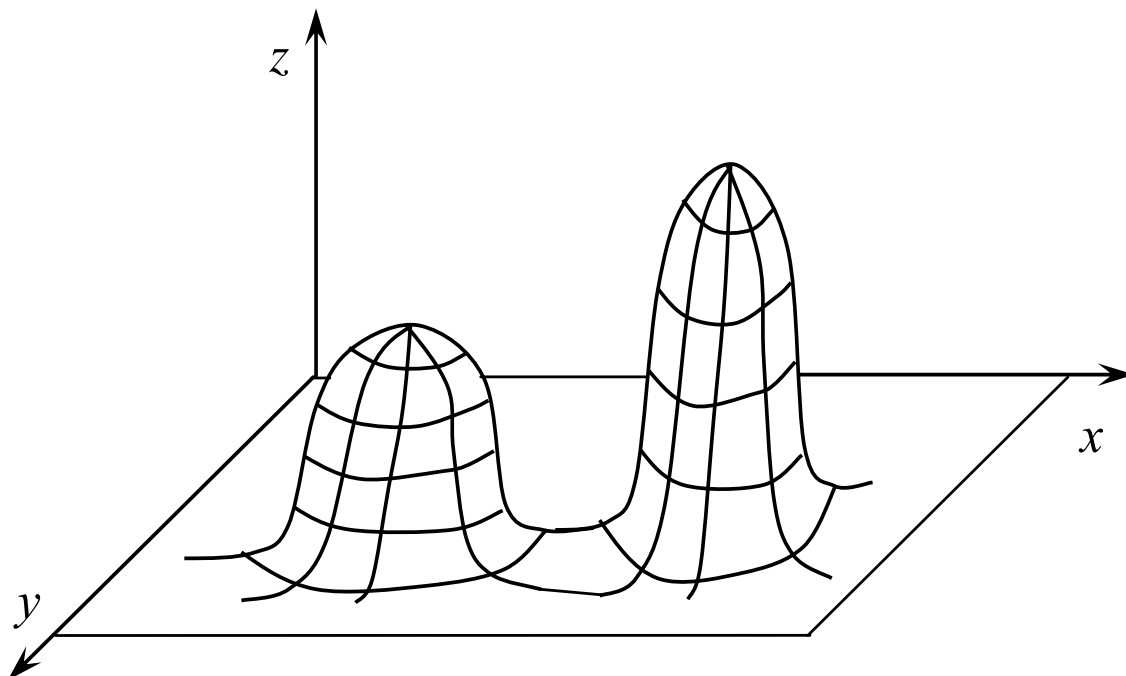


Рис. 12.3. Графік функції (12.1)

Для розв'язання цього завдання застосуємо метод генетичного алгоритму (ГА), оскільки функція (12.1), як впливає із рис. 12.3, багатоекстремальна.

Відомо, що будь-який об'єкт (спосіб, обладнання, речовина) можна представити набором своїх ознак або *фенотипом*, який фактично визначає, чим є цей об'єкт у реальному світі.

У біологічних системах, що зазнають еволюції за дарвінівським принципом (розмноження – передача генів – природний добір), об'єкт, крім фенотипу, може бути описаний ще й *генотипом*, який містить усю інформацію про об'єкт на рівні хромосомного набору.

При цьому кожний ген, тобто елемент інформації генотипу, має своє відбиття у фенотипі. Використовуючи цю інформацію, природа вирішує найбільше завдання оптимізації – вибір і збереження кращих, з деяких міркувань, біологічних особин.

В еволюційній математиці для розв'язання задач оптимізації методом класичного ГА, насамперед, необхідно представити кожну ознаку об'єкта у формі, що підходить для використання в цьому методі. Все подальше функціонування механізмів ГА проводиться на рівні генотипу і дозволяє обійтися без інформації про внутрішню структуру об'єкта, що й обумовлює його широке застосування.

У різновиді класичного ГА, що найчастіше зустрічається, для представлення генотипу об'єкта застосовуються бітові рядки. При цьому кожному атри-

буту об'єкта у фенотипі відповідає один ген у генотипі об'єкта. Ген є бітовим рядком, найчастіше фіксованої довжини, який представляє значення цієї ознаки.

### 12.1.1. Переваги генетичних алгоритмів

Існують дві головні переваги генетичних алгоритмів перед класичними оптимізаційними методиками:

1) ГА не має значних математичних вимог до видів цільових функцій і обмежень. Дослідник не повинен спрощувати модель об'єкта, втрачаючи її адекватність і штучно домагаючись можливості застосування доступних математичних методів; при цьому можуть використовуватися найрізноманітніші цільові функції та види обмежень (лінійні і нелінійні), визначені на дискретних, безперервних і змішаних універсальних множинах;

2) при використанні класичних покрокових методик глобальний оптимум може бути знайдений тільки в тому випадку коли проблема має властивість опуклості; у той же час еволюційні операції генетичних алгоритмів дозволяють ефективно відшукувати глобальний оптимум.

### 12.1.2. Термінологія

Оскільки ГА виходять як із природничих наук (генетика), так і з комп'ютерних наук, то використовується термінологія є певним сплавом природного і штучного. Відповідність термінів, що відносяться до ГА, і тих, які відносяться до розв'язку оптимізаційних проблем, наведена в табл. 12.1.

Таблиця 12.1

Основні терміни теорії ГА

	Генетичний алгоритм	Пояснення
1	Хромосоми	Рішення (код)
2	Ген (декілька біт)	Частина рішення
3	Локус (місце розташування)	Позиція гена в хромосомі
4	Алель	Значення гена
5	Фенотип	Розкодоване рішення
6	Генотип	Закодоване рішення

### 12.1.3. Принципи побудови генетичних алгоритмів

ГА можна розглядати як один з різновидів випадкового пошуку, який заснований на механізмах, що нагадують природний добір і розмноження.

На відміну від існуючих методик, ГА починає роботу з деякого випадкового набору розв'язків, який називається популяцією. Кожний елемент із популяції називається хромосоною і є деяким розв'язком проблеми в першому набли-



женні. Хромосома є рядком символів деякої природи, не обов'язково бінарних. Хромосоми еволюціонують протягом певної кількості ітерацій, що носять назву поколінь (або генерацій). У ході кожної ітерації хромосома оцінюється з використанням деякої міри відповідності (англ. *fitness function*), яку називають функцією відповідності. Для створення наступного покоління нові хромосоми (нащадки), формуються або шляхом схрещування (англ. *crossover*) двох хромосом – батьків з поточної популяції, або шляхом випадкової зміни (мутації) однієї хромосоми. Нова популяція формується шляхом:

- а) вибору згідно з функцією відповідності деяких батьків і нащадків;
- б) видалення особин, що залишилися, для того, щоб зберігати постійним розмір популяції.

Хромосоми з більшою функцією відповідності мають більше шансів бути обраними (вижити). Після декількох ітерацій алгоритм сходиться до кращої хромосоми, яка є або оптимальним, або близьким до оптимального розв'язком.

Нехай  $P(t)$  і  $C(t)$  є батьками і нащадками з поточної генерації. Загальна структура генетичного алгоритму має вигляд (рис. 12.4).

Таким чином, використовуються два види операцій:

- генетичні операції: схрещування й мутація;
- еволюційна операція: вибір.

Генетичні операції нагадують процес спадкування генів при створенні нового нащадка в кожній генерації. Еволюційна операція, що здійснює перехід від однієї популяції до наступної, нагадує процес Дарвінівської еволюції.

#### 12.1.4. Визначення фенотипу об'єкта за його генотипом

Таким чином, для того, щоб визначити фенотип об'єкта (тобто значення ознак, що описують об'єкт) необхідно знати тільки значення генів, відповідних до цих ознак, тобто генотип об'єкта. Сукупність генів, що описують генотип об'єкта, є хромосомою. У ГА хромосома – це бітовий рядок фіксованої довжини. При цьому кожній ділянці рядка відповідає ген. Довжина генів всередині хромосоми може бути однаковою або різною. Найчастіше застосовують гени однакової довжини (рис. 12.5).

#### 12.1.5. Кодування «ознака – ген»

Розглянемо приклад хромосоми та інтерпретації її значення. У прикладі 12.1 в об'єкта є 2 ознаки, закодуємо кожну геном довжиною в 8 елементів.

Розділимо інтервали  $0 \leq x \leq x_{max}$  і  $0 \leq y \leq y_{max}$  на 8 рівних частин кожний і пронумеруємо їх числами від 1 до 8. Таким чином, неперервні координати  $x$  і  $y$  будуть замінені дискретними десятковими номерами (кодами) тих частин, у які ці координати потрапляють.

Далі виконаємо перетворення окремих тетрад десяткових кодів за допомогою коду Грея (табл. 12.2).

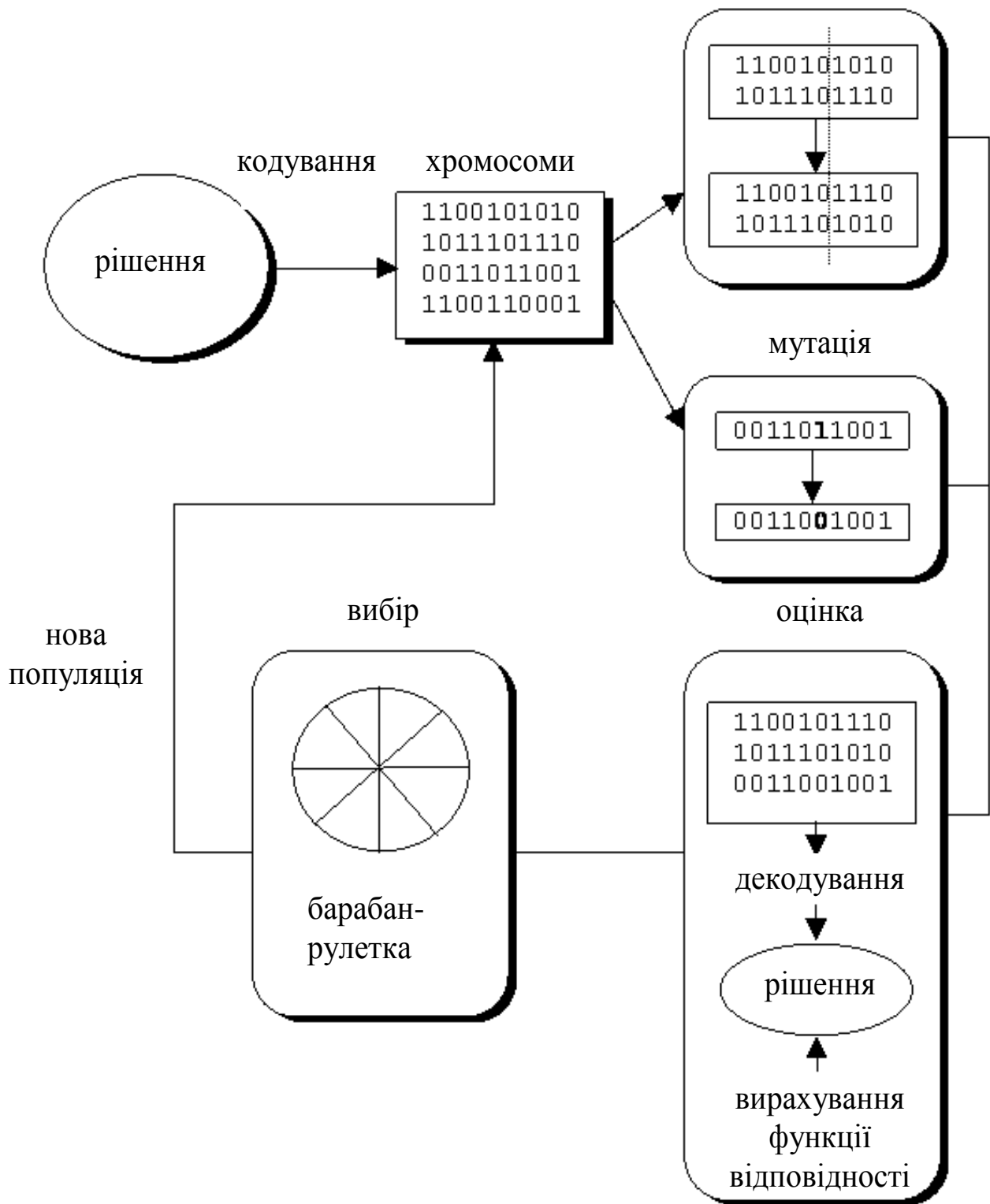


Рис. 12.4. Узагальнена структура генетичного алгоритму

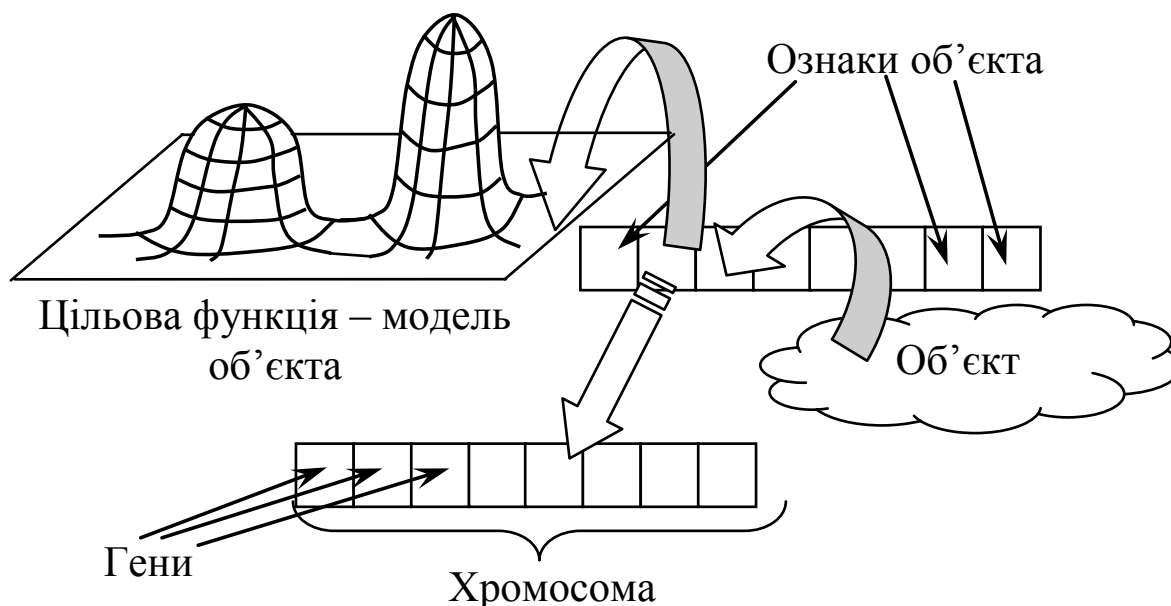


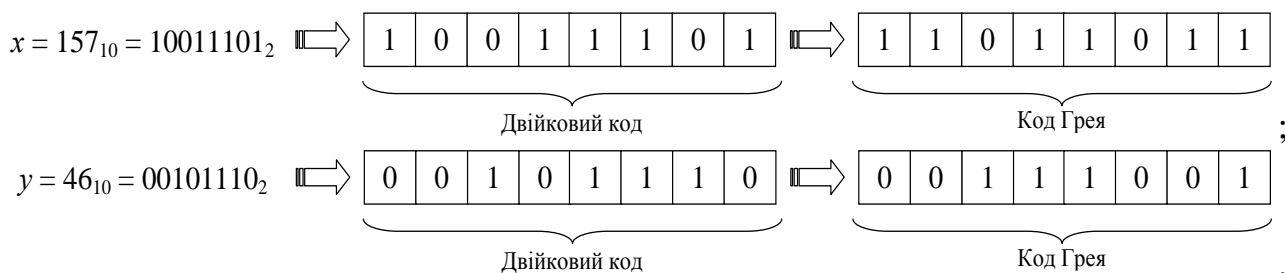
Рис. 12.5. Схема до перетворення фенотипу об'єкта в його генотип у ГА

Таблиця 12.2

Переклад десяткових кодів у код Грея

Двійкове кодування			Кодування за кодом Грея		
Десятковий код	Двійковий код	Шістнадцятковий код	Десятковий код	Двійковий код	Шістнадцятковий код
0	0000	0	0	0000	0
1	0001	1	1	0001	1
2	0010	2	3	0011	3
3	0011	3	2	0010	2
4	0100	4	6	0110	6
5	0101	5	7	0111	7
6	0110	6	5	0101	5
7	0111	7	4	0100	4
8	1000	8	12	1100	C
9	1001	9	13	1101	D
10	1010	A	15	1111	F
11	1011	B	14	1110	E
12	1100	C	10	1010	A
13	1101	D	11	1011	B
14	1110	E	9	1001	9
15	1111	F	8	1000	8

Приведемо приклад такого кодування для хромосоми, що відповідає точці з координатами:  $x = 15710$  і  $y = 4610$ :



Тоді довжина хромосоми, складеної із двох генів, буде дорівнювати  $2 \times 8 = 16$  біт:



### 12.1.6. Декодування «ген – ознака»

У практичних застосуваннях генетичних алгоритмів необхідність перетворювати значення ознаки в значення гена виникає рідко – тільки при попередній обробці. На практиці набагато частіше має місце зворотне завдання, коли за значенням гена необхідно визначити значення відповідної йому ознаки.

Завдання декодування значення генів, яким відповідають *цілочисельні* ознаки, тривіальне.

При кодуванні ознак, яким відповідають *числа із плаваючою точкою*, також використовують бітове представлення. Такий варіант має ті ж недоліки, що й для цілих чисел.

Тому на практиці звичайно застосовують наступну послідовність дій:

- розбивають весь інтервал допустимих значень ознаки на ділянки з необхідною точністю;
- приймають значення гена як ціле число, що визначає номер інтервалу (використовуючи код Грея);
- у якості значення параметра приймають число, що є серединою цього інтервалу.

При кодуванні *нечислових даних* необхідно попередньо перетворити їх у числа.

Після декодування кожна конкретна хромосома є однією точкою в області  $0 \leq x \leq x_{max}$  і  $0 \leq y \leq y_{max}$  площини  $xOy$  (рис. 12.6).

## 12.2. Стратегія ГА та основні генетичні оператори

Як відомо, у теорії еволюції важливу роль відіграє спосіб, яким ознаки батьків передаються нащадкам. У генетичних алгоритмах за передачу нащадкам ознак батьків відповідає оператор, який називається *схрещуванням* (його також називають «кросовер» або «кросинговер»).

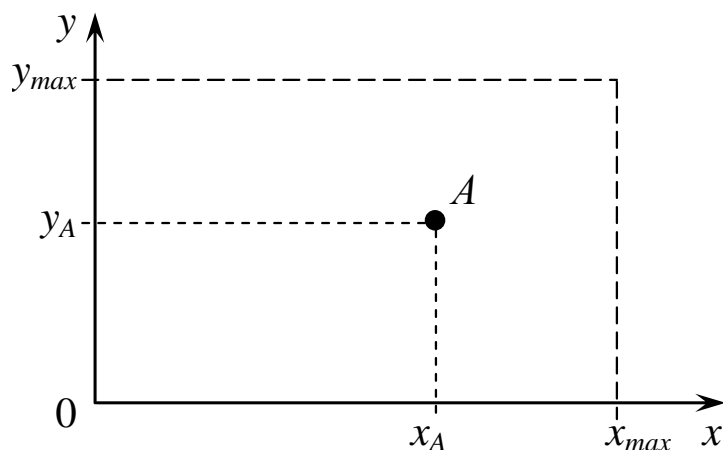


Рис. 12.6. Геометричне представлення хромосоми  $A$ , що складається із двох генів

Схрещування є головною генетичною операцією. Ця операція виконується над двома хромосомами-батьками і створює нащадків шляхом комбінування особливостей обох батьків. Приведемо найпростіший приклад схрещування. На початку виберемо деяку випадкову точку (точка схрещування – англ. *cut-point*), після цього створимо хромосому-нащадок шляхом комбінування сегмента першого батька, що розміщений ліворуч від обраної точки схрещування, із сегментом другого батька, що розміщений праворуч від точки схрещування (рис. 12.7).

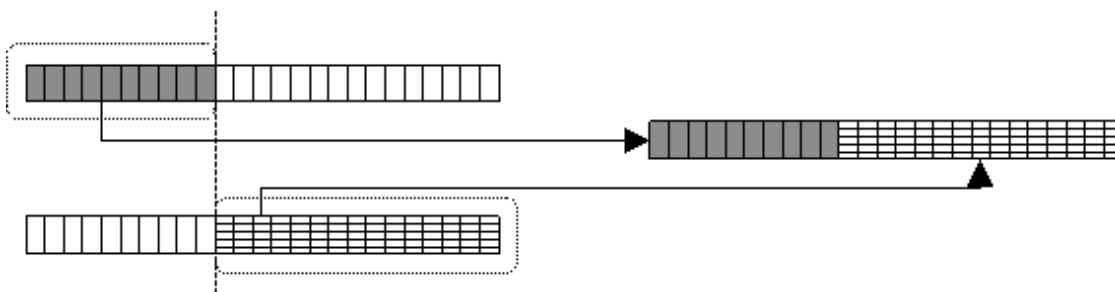


Рис. 12.7. Операція схрещування

Цей метод працює дуже добре, якщо хромосоми представлені у вигляді бітових рядків. Крім того продуктивність усього генетичного алгоритму, в першу чергу, залежить від продуктивності використовуваної операції схрещування. Частка отриманих на кожній ітерації нащадків називається *коефіцієнтом схрещування* ( $p_c$ ). Добуток  $p_c \times \text{розмір\_популяції}$  показує кількість нащадків. Велике значення цього коефіцієнта дозволяє досліджувати більше областей простору пошуку (або простору розв'язків) і зменшує шанс влучення в локальний мінімум. Але якщо значення  $p_c$  занадто велике, то це призведе до великих витрат часу обчислень на дослідження безперспективних областей.

Діє він наступним чином:

– з популяції вибираються дві особини, які будуть батьками;

- створюються хромосоми цих особин;
- визначається (звичайно, випадковим чином) точка схрещування;
- нащадок визначається як конкатенація частин першого й другого батька.

Розглянемо приклад функціонування цього оператора. Допустимо, розрив відбувається після 5-го біта хромосоми, тоді:



Потім з ймовірністю 0,5 визначається одна з результуючих схрещених хромосом як нащадок.

Наступний генетичний оператор призначений для того, щоб підтримувати різноманітність особин популяції, оскільки різноманітність підвищує ефективність роботи ГА, зокрема, покращує збіжність алгоритму й прискорює його роботу. Він називається оператором *мутації*.

Мутація – це фонові операція, що робить випадкову зміну в різних хромосомах.

Найпростіший варіант мутації полягає у випадковій зміні одного або більш генів. У ГА мутація відіграє важливу роль для:

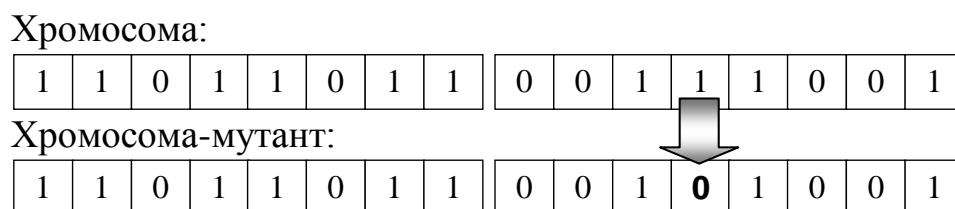
- відновлення генів, що випали з популяції в ході операції вибору, так що вони можуть бути випробувані в нових комбінаціях;
- формування генів, які не були представлені в початковій популяції.

Інтенсивність мутацій визначається *коефіцієнтом мутацій* ( $p_m$ ). Він дорівнює частці генів, що зазнають мутації на даній ітерації, по відношенню до їхньої загальної кількості.

Занадто мале значення цього коефіцієнта приводить до того, що багато генів, які могли б бути корисними, ніколи не будуть розглянуті. У той же час, занадто велике значення коефіцієнта  $p_m$  призведе до більших випадкових збурювань. Нащадки перестануть бути схожими на батьків і алгоритм втратить можливість навчатися, зберігаючи спадкоємні ознаки.

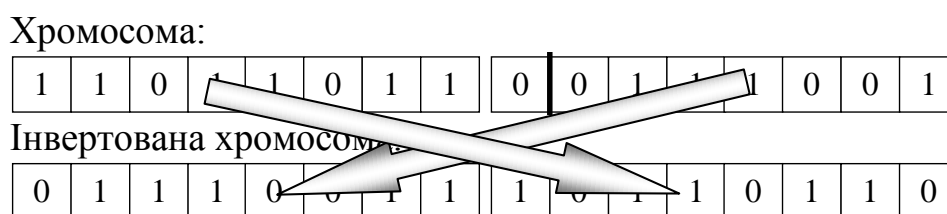
При використанні даного оператора деякі біти в хромосомі з певною ймовірністю інвертуються. У деяких реалізаціях алгоритму оператор мутації є інверсією тільки одного випадково обраного біта хромосоми.

Розглянемо приклад функціонування цього оператора. Припустимо, мутує дванадцятий біт хромосоми, тоді:



Крім того, використовується ще й так званий оператор *інверсії*, який полягає в тому, що хромосома ділиться на дві частини, і потім ці частини міняються місцями.

Схематично дію цього оператора можна представити таким чином:



Для функціонування генетичного алгоритму досить перерахованих генетичних операторів, але на практиці застосовують ще й деякі додаткові оператори або модифікації цих двох операторів. Наприклад, кросовер може бути не одноточковим (як було описано вище), а багатоточковим, коли формується кілька точок розриву (найчастіше дві).

### 12.2.1. Схема функціонування класичного ГА

Розглянемо послідовність функціонування ГА в його класичному варіанті.

1. Ініціювати початковий момент часу  $t = 0$ . Випадковим чином сформувати початкову популяцію, що складається з  $k$  особин.  $B_0 = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ .

2. Обчислити пристосованість кожної особини  $FA_i = fit(A_i)$ ,  $i = 1 \dots k$  і популяції в цілому  $F_t = fit(B_t)$  (її іноді називають терміном фітнес). Значення цієї функції визначає наскільки добре підходить особина, описана даною хромосомою, для розв'язання завдання.

3. Вибрати особину  $A_c$  з популяції.  $A_c = Get(B_t)$ .

4. З певною ймовірністю (ймовірністю кросовера  $P_c$ ) вибрати другу особину з популяції  $A_{c1} = Get(B_t)$  і виконати оператор кросовера  $A_c = Crossing(A_c, A_{c1})$ .

5. З певною ймовірністю (ймовірністю мутації  $P_m$ ) виконати оператор мутації  $A_c = mutation(A_c)$ .

6. З певною ймовірністю (ймовірністю інверсії  $P_i$ ) виконати оператор інверсії  $A_c = inversion(A_c)$ .
7. Помістити отриману хромосому в нову популяцію  $insert(B_{t+1}, A_c)$ .
8. Виконати операції, починаючи з пункту 3,  $k$  раз.
9. Збільшити номер поточної епохи  $t = t + 1$ .
10. Якщо виконалася умова зупинки, то завершити роботу, інакше – перехід на крок 1.

Схема алгоритму класичного ГА для розглянутого прикладу наведена на рис. 12.8.

Найбільшу роль в успішному функціонуванні алгоритму відіграє етап добору батьківських хромосом на кроках 3 і 4. При цьому можливі різні варіанти. Найчастіше використовується метод відбору, який називається «рулетка».

При використанні такого методу ймовірність вибору хромосоми визначається її пристосованістю, тобто  $P_{get}(A_i) \sim Fit(A_i)/Fit(B_t)$ . Використання цього методу призводить до того, що ймовірність передачі ознак більш пристосованими особинами нащадкам зростає.

Інший метод, який часто використовується, – турнірний відбір. Він полягає в тому, що випадково вибирається кілька особин з популяції (звичайно 2) і переможцем вважається особина з найбільшою пристосованістю. Крім того, у деяких реалізаціях алгоритму застосовується так звана стратегія елітизму, яка полягає в тому, що особини з найбільшою пристосованістю гарантовано переходять у нову популяцію.

Використання елітизму звичайно дозволяє прискорити збіжність генетичного алгоритму. Недолік використання стратегії елітизму – підвищується ймовірність потрапляння алгоритму в локальний мінімум.

Інший важливий момент – визначення критеріїв зупинки. Звичайно в цій якості застосовуються або обмеження на максимальне число епох функціонування алгоритму, або визначення його збіжності, наприклад, шляхом порівняння пристосованості популяції на декількох епохах і зупинки при стабілізації цього параметра.

### 12.2.2. Стратегії пошуку

Пошук є одним з найбільш універсальних методів знаходження розв'язку для випадків, коли апріорі не відома послідовність кроків, що веде до оптимуму.

Існують дві пошукові стратегії: експлуатація найкращого розв'язку і дослідження простору розв'язків. Градієнтний метод – приклад стратегії, яка вибирає найкращий розв'язок для можливого покращення, ігноруючи в той же час дослідження всього простору пошуку. Випадковий пошук – приклад стратегії, яка, навпаки, досліджує простір розв'язків, ігноруючи дослідження перспективних областей пошукового простору.

Генетичний алгоритм – це клас пошукових методів загального призначення, які комбінують елементи обох стратегій.



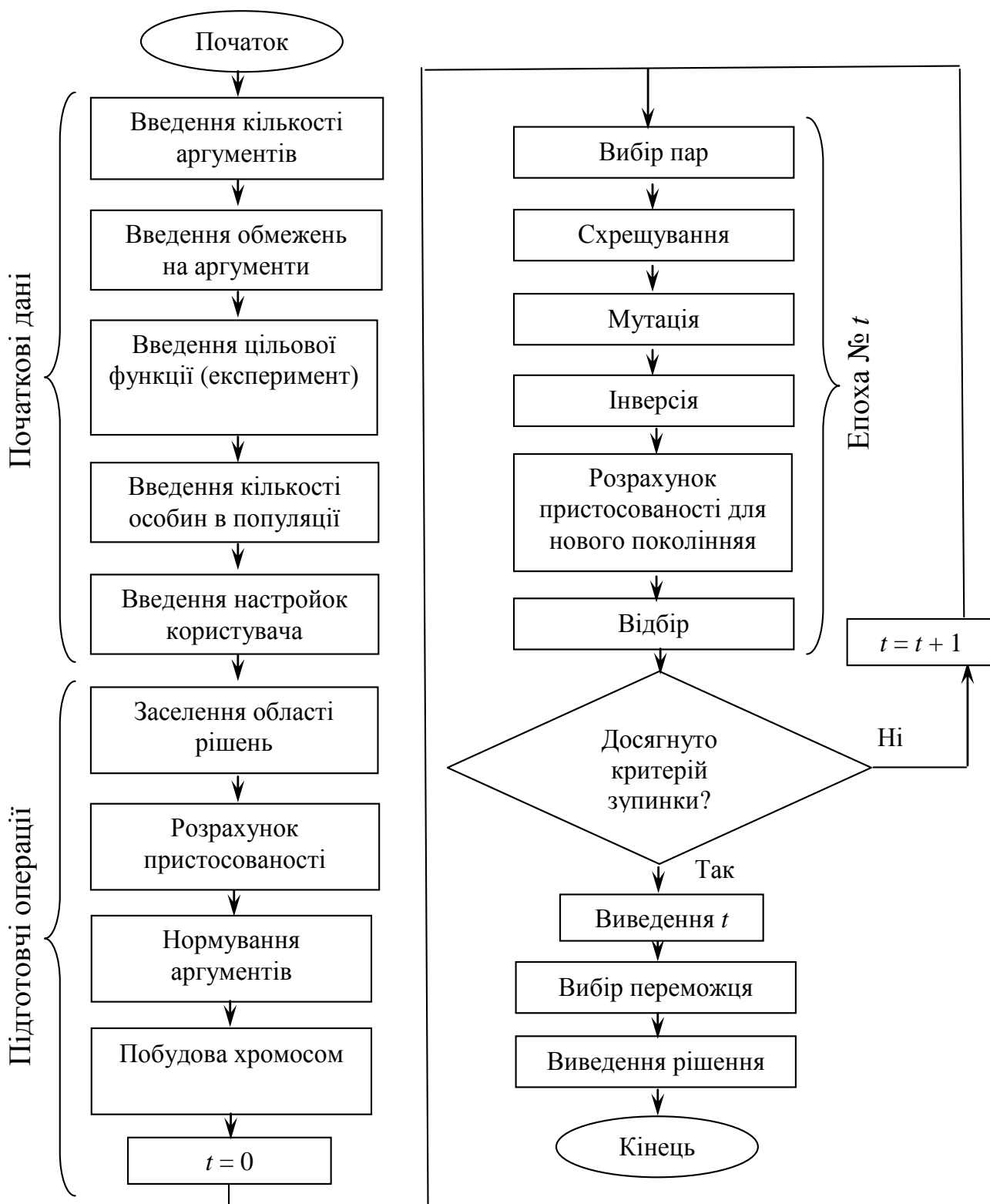


Рис. 12.8. Схема алгоритму класичного ГА

Використання цих методів дозволяє втримувати прийнятний баланс між дослідженням і експлуатацією найкращого розв'язку. На початку роботи генетичного алгоритму популяція випадкова і має різноманітні елементи. Тому оператор схрещування здійснює велике дослідження простору розв'язків. З ростом

значення функції відповідності одержуваних розв'язків оператор схрещування забезпечує дослідження околиць кожного з них. Інакше кажучи, тип пошукової стратегії (експлуатація найкращого розв'язку або дослідження області розв'язків) для оператора схрещування визначається різноманітністю популяції, а не самим цим оператором.

### 12.2.3. Відмінність від класичного пошуку

Загалом, алгоритм розв'язку оптимізаційних проблем є послідовністю обчислювальних кроків, які асимптотично сходяться до оптимального розв'язку. Більшість класичних методів оптимізації генерують детерміновану послідовність обчислень, що базується на градієнті або похідній цільової функції більш високого порядку. Ці методи застосовуються до однієї вихідної точки пошукового простору. Потім розв'язок поступово поліпшується в напрямку найшвидшого росту або убуття цільової функції. При такому поточковому підході існує небезпека влучення в локальний оптимум.

Генетичний алгоритм здійснює одночасний пошук за багатьма напрямками шляхом використання популяції можливих розв'язків. Перехід від однієї популяції до іншої дозволяє уникнути влучення в локальний оптимум. Популяція перетерплює щось на зразок еволюції: у кожному поколінні відносно добрі розв'язки репродукуються, у той час як відносно погані відмирають.

ГА використовують імовірнісні правила для визначення репродуцьованої або знищеної хромосоми, щоб направити пошук до областей імовірного покращення цільової функції.

## 12.3. Приклади генетичної оптимізації

Пояснимо, як працює генетичний алгоритм на простих прикладах.

**Приклад 12.1.** Завдання оптимізації. Розглянемо нелінійну цільову функцію з обмеженнями:

$$f(x_1, x_2) = (-2x_2^3 + 6x_2^2 + 6x_2 + 10) \cdot \sin(\ln(x_1)e^{x_2}), \quad (12.3)$$

$$0,5 \leq x_1 \leq 1,1, \quad 1,0 \leq x_2 \leq 4,6.$$

Потрібно знайти:  $\max_{x_1, x_2} f(x_1, x_2)$

Поверхня цільової функції показана на рис. 12.9.

**Кодування.** Для реалізації генетичного алгоритму необхідно закодувати оптимізуємі параметри у двійкові рядки. Довжина рядка залежить від необхідної точності. Наприклад, нехай змінна  $x_j$  має інтервал зміни  $[a_j, b_j]$ , і необхідна точність – п'ять знаків після коми. У цьому випадку інтервал зміни змінної  $x_j$  повинен бути розбитий як мінімум на  $(b_j - a_j) \cdot 10^5$ , квантів. Необхідну кількість бітів  $m_j$  знаходимо за формулою:

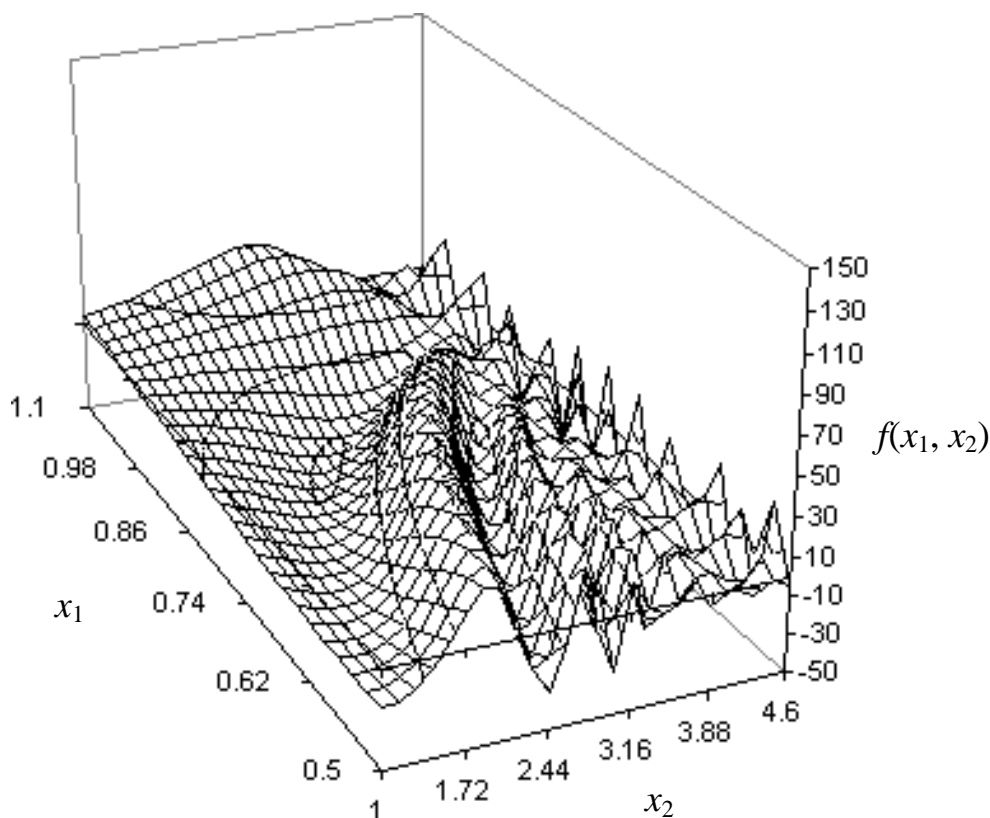


Рис. 12.9. Графік цільової функції

$$2^{m_j-1} < (b_j - a_j) \cdot 10^5 \leq 2^{m_j} - 1. \quad (12.4)$$

Зворотнє перетворення рядка бітів у дійсне значення змінної  $x_j$  виконується за формулою:

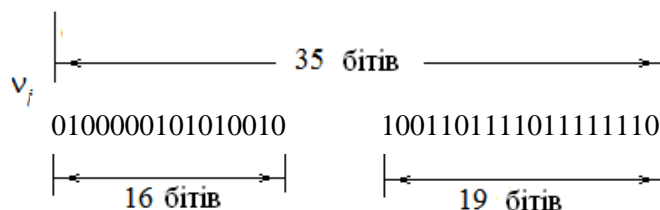
$$x_j = a_j + \text{десятичне\_число}(\text{рядок\_бітів } j) \frac{b_j - a_j}{2^{m_j} - 1}, \quad (12.5)$$

де *десятичне\_число (рядок\_бітів j)* – десятичне значення, закодоване в бінарному рядку *рядок\_бітів j*.

Припустимо, що необхідна точність становить 5 знаків після коми. Знайдемо кількість бітів, необхідних для кодування змінних  $x_1$  і  $x_2$ :

$$\begin{aligned} (1.1 - 0.5) \times 100,000 &= 60,000 \\ 2^{15} < 60,000 < 2^{16} - 1, \quad m_1 &= 16 \\ (4.6 - 1.0) \times 100,000 &= 360,000 \\ 2^{18} < 360,000 < 2^{19} - 1, \quad m_2 &= 19 \\ m &= m_1 + m_2 = 16 + 19 = 35. \end{aligned}$$

Сумарна довжина хромосоми становить 35 бітів, які можна представити таким чином



Відповідні значення змінних  $x_1$  і  $x_2$ :

	Двійкове число	Десяткове число
$x_1$	0100000101010010	16722
$x_2$	1001101111011111110	319230

$$x_1 = 0.5 + 16722 \frac{1.1 - 0.6}{2^{16} - 1} = 0.65310, \quad (12.6)$$

$$x_2 = 1.0 + 319230 \frac{4.6 - 1.0}{2^{19} - 1} = 3.19198. \quad (12.7)$$

Вихідна популяція генерується випадково:

$v_1 = [01000001010100101001101111011111110]$   
 $v_2 = [10001110101110011000000010101001000]$   
 $v_3 = [11111000111000001000010101001000110]$   
 $v_4 = [01100110110100101101000000010111001]$   
 $v_5 = [00000010111101100010001110001101000]$   
 $v_6 = [10111110101011011000000010110011001]$   
 $v_7 = [00110100010011111000100110011101101]$   
 $v_8 = [11001011010100001100010110011001100]$   
 $v_9 = [01111110001011101100011101000111101]$   
 $v_{10} = [01111101001110101010000010101101010]$

Відповідні значення змінних  $x_1$  і  $x_2$  мають вигляд:

$v_1 = [x_1, x_2] = [0.653097, 3.191983]$   
 $v_2 = [x_1, x_2] = [0.834511, 2.809287]$   
 $v_3 = [x_1, x_2] = [1.083310, 2.874312]$   
 $v_4 = [x_1, x_2] = [0.740989, 3.926276]$   
 $v_5 = [x_1, x_2] = [0.506940, 1.499934]$   
 $v_6 = [x_1, x_2] = [0.946903, 2.809843]$   
 $v_7 = [x_1, x_2] = [0.622600, 2.935225]$   
 $v_8 = [x_1, x_2] = [0.976521, 3.778750]$   
 $v_9 = [x_1, x_2] = [0.795738, 3.802377]$   
 $v_{10} = [x_1, x_2] = [0.793504, 3.259521]$

Оцінка функції відповідності хромосоми виконується в три кроки.

1. Перетворити генотип хромосоми у фенотип. Це означає перетворення двійкового рядка у відповідне дійсне значення

$$x^k = (x_1^k, x_2^k), \quad k = 1, 2, \dots, pop\_size,$$

де  $pop\_size$  – число варіантів у вихідній популяції.

2. Обчислити цільову функцію  $f(x_k)$ .

3. Перетворити цільову функцію в значення функції відповідності. Для розв'язуваного завдання оптимізації функція відповідності еквівалентна цільовій функції  $eval(v_k) = f(x_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, pop\_size$ .

Функція відповідності відіграє роль середовища і оцінює хромосоми за ступенем їх пристосованості до виконання критерію оптимізації.

Значення функцій відповідності вищенаведених хромосом наступні:

$$\begin{aligned} eval(v_1) &= f(0.653097, 3.191983) = 20.432394 \\ eval(v_2) &= f(0.834511, 2.809287) = -4.133627 \\ eval(v_3) &= f(1.083310, 2.874312) = 28.978472 \\ eval(v_4) &= f(0.740989, 3.926276) = -2.415740 \\ eval(v_5) &= f(0.506940, 1.499934) = -2.496340 \\ eval(v_6) &= f(0.946903, 2.809843) = -23.503709 \\ eval(v_7) &= f(0.622600, 2.935225) = -13.878172 \\ eval(v_8) &= f(0.976521, 3.778750) = -8.996062 \\ eval(v_9) &= f(0.795738, 3.802377) = 6.982708 \\ eval(v_{10}) &= f(0.793504, 3.259521) = 6.201905. \end{aligned}$$

Очевидно, що хромосома  $v_3$  найбільш сильна, а хромосома  $v_6$  найбільш слабка.

**Відбір.** Найбільше поширення на практиці одержав підхід, називаний колесо рулетки (від англ. *roulette wheel*). Згідно із цим підходом добір здійснюється на основі деякої функції розподілу, яка будується пропорційно обчисленим функціям відповідності згенерованих варіантів-хромосом. Колесо рулетки може бути сконструйоване таким чином.

1. Обчислюємо значення функції відповідності  $eval(v_k)$  для кожної хромосоми  $v_k$ :

$$eval(v_k) = f(x_k), \quad k = 1, 2, \dots, pop\_size. \quad (12.8)$$

2. Обчислюємо загальну функцію відповідності популяції:

$$F = \sum_{k=1}^{pop\_size} \left( eval(v_k) - \frac{\min_{j=1, pop\_size} \{eval(v_j)\}}{pop\_size} \right). \quad (12.9)$$

3. Обчислюємо ймовірність добору  $p_k$  для кожної хромосоми  $v_k$ :

$$p_k = \frac{eval(v_k) - \min_{j=1, pop\_size} \{eval(v_j)\}}{F}, k = 1, 2, \dots, pop\_size. \quad (12.10)$$

4. Обчислюємо сукупну ймовірність  $q_k$  для кожної хромосоми  $v_k$ :

$$q_k = \sum_{j=1}^k p_j, k = 1, 2, \dots, pop\_size. \quad (12.11)$$

Процес добору починається з обертання колеса  $pop\_size$  раз; при цьому щораз вибирається одна хромосома за алгоритмом:

- генеруємо випадкове число  $r$  з інтервалу  $[0, 1]$ ;
- якщо  $r \leq q_1$ , то вибираємо першу хромосому  $v_1$ ; інакше вибираємо  $k$ -у хромосому  $v_k$  ( $2 \leq k \leq pop\_size$ ) таку, що  $q_{k-1} < r \leq q_k$ .

Загальна функція відповідності  $F$  усієї популяції:

$$F = \sum_{k=1}^{10} \left( eval(v_k) - \min_{j=1,10} \{eval(v_j)\} \right) = 242.208919. \quad (12.12)$$

Ймовірність добору  $p_k$  для кожної хромосоми  $v_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 10$ ) дорівнює:

$$p_1 = 0.181398, p_2 = 0.079973, p_3 = 0.216681, p_4 = 0.087065, p_5 = 0.086732, \\ p_6 = 0.000000, p_7 = 0.039741, p_8 = 0.059897, p_9 = 0.125868, p_{10} = 0.122645.$$

Сукупні ймовірності  $q_k$  для кожної хромосоми  $v_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 10$ ) дорівнюють:

$$q_1 = 0.181398, q_2 = 0.261370, q_3 = 0.478052, q_4 = 0.565117, q_5 = 0.651849, \\ q_6 = 0.651849, q_7 = 0.691590, q_8 = 0.751487, q_9 = 0.877355, q_{10} = 1.000000.$$

Тепер можна обертати колесо рулетки 10 раз і щораз відібрати одну хромосому для нової популяції. Допустимо, що випадкова послідовність 10 чисел з інтервалу  $[0, 1]$  має вигляд:

$$\begin{array}{cccccc} 0,301431 & 0,322062 & 0,766503 & 0,881893 & 0,350871 & 0,583392 \\ & 0,177618 & 0,343242 & 0,032685 & 0,197577 & \end{array}$$

Перше число  $r_1 = 0.301431$  більше за  $q_2$  і менше ніж  $q_3$ . Це означає, що відбирається хромосома  $v_3$ . Друге число  $r_2 = 0.322062$  також більше за  $q_2$  і менше ніж  $q_3$ . Значить знову відбираємо хромосому  $v_3$  для нової популяції; і т.д. Нарешті, одержимо нову популяцію, що складається з таких хромосом:

$$\begin{array}{l} v'_1 = [111110001110000010000101010010001110] (v_3) \\ v'_2 = [111110001110000010000101010010001110] (v_3) \\ v'_3 = [110010110101000011000101100110011100] (v_8) \\ v'_4 = [01111110001011101100011101000111101] (v_9) \\ v'_5 = [111110001110000010000101010010001110] (v_3) \\ v'_6 = [01100110110100101101000000010111001] (v_4) \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 v'_7 &= [01000001010100101001101111011111110] (v_1) \\
 v'_8 &= [11111000111000001000010101001000110] (v_3) \\
 v'_9 &= [01000001010100101001101111011111110] (v_1) \\
 v'_{10} &= [10001110101110011000000010101001000] (v_3).
 \end{aligned}$$

**Схрещування.** Для схрещування хромосом будемо використовувати метод з однієї точкою обміну. У відповідності із цим методом, випадково вибирається одна точка, щодо якої міняються місцями частини хромосоми батьків. Для прикладу розглянемо схрещування двох хромосом, для яких була випадково обрана точка обміну після 17-го гена:

$$\begin{array}{c}
 \downarrow \\
 v_1 = [11111000111000001000010101001000110] \\
 v_2 = [10001110101110011000000010101001000]
 \end{array}$$

В результаті обміну частин батьківських хромосом виходять наступні хромосоми-нащадки:

$$\begin{array}{c}
 v_1 = [11111000111000001000000010101001000] \\
 v_2 = [10001110101110011000010101001000110]
 \end{array}$$

Нехай імовірність схрещування  $p_c = 0,25$ , тобто в середньому 25% хромосом піддалися схрещуванню.

Припустимо, що згенерована послідовність випадкових чисел:

$$\begin{array}{ccccc}
 0.625721 & 0.266823 & 0.288644 & 0.295114 & 0.163274 \\
 0.567461 & 0.085940 & 0.392865 & 0.770714 & 0.548656.
 \end{array}$$

Це означає, що хромосоми  $v'_5$  і  $v'_7$  вибираються для схрещування. Після цього ми генерується випадкове ціле число  $pos$  (позиція) із проміжку  $[1, 34]$  (оскільки загальна довжина хромосоми дорівнює 35) і вважаємо його точкою обміну хромосом або, інакше кажучи, точкою схрещування. Припустимо, що було згенеровано число  $pos$  рівне 1, тобто хромосоми-батьки обмінюються частинами після першого біта, і з'являться наступні хромосоми-нащадки:

$$\begin{array}{c}
 \downarrow \\
 v'_5 = [11111000111000001000010101001000110] \\
 v'_7 = [01000001010100101001101111011111110] \\
 \Downarrow \\
 v'_5 = [11000001010100101001101111011111110] \\
 v'_7 = [01111000111000001000010101001000110]
 \end{array}$$

**Мутація.** Мутація полягає в зміні однієї або більшої кількості генів з ймовірністю, яка дорівнює коефіцієнту мутації. Допустимо, що 18-й ген хромосоми  $v'_1$  зазнає мутації. Оскільки маємо справу з бінарними рядками, то мутація полягає в інверсії відповідного біта:

$$v'_1 = 1111000111000001000010101001000110]$$



$$v'_1 = 1111000111000001100010101001000110]$$

Задамо коефіцієнту мутації значення  $p_m = 0,01$ , так що в середньому 1% усіх бітів популяції піддається операції мутації. Число бітів у всій популяції становить  $m \text{ pop\_size} = 35 \cdot 10 = 350$  бітів. Тому, в середньому, в кожному поколінні мутує 3 – 4 біта. Кожний біт має однаковий шанс піддатися мутації. Таким чином, необхідно згенерувати послідовність випадкових чисел  $r_k$  ( $k = 1, 350$ ) з інтервалу  $[0, 1]$ . Припустимо, що мутують наступні гени:

Позиція біта в популяції	Номер хромосоми	Позиція біта в хромосомі	Випадкове число $r_k$
111	4	6	0.009857
172	5	32	0.003113
211	7	1	0.000946

Після мутації одержуємо наступну популяцію:

$$\begin{aligned} v'_1 &= [11111000111000001000010101001000110] \\ v'_2 &= [11111000111000001000010101001000110] \\ v'_3 &= [11001011010100001100010110011001100] \\ v'_4 &= [01111010001011101100011101000111101] \\ v'_5 &= [11000001010100101001101111011110110] \\ v'_6 &= [01100110110100101101000000010111001] \\ v'_7 &= [11111000111000001000010101001000110] \\ v'_8 &= [11111000111000001000010101001000110] \\ v'_9 &= [01000001010100101001101111011111110] \\ v'_{10} &= [10001110101110011000000010101000000]. \end{aligned}$$

Відповідні десяткові значення змінних  $x_1$  і  $x_2$  та значення функції відповідності мають вигляд:

$$\begin{aligned} f(1.083310, 2.874312) &= 28.978472 \\ f(1.083310, 2.874312) &= 28.978472 \\ f(0.976521, 3.778750) &= -8.996062 \\ f(0.786363, 3.802377) &= 9.366723 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
f(0.953101, 3.191928) &= -23.229745 \\
f(0.740989, 3.926276) &= -2.415740 \\
f(1.083310, 2.874312) &= 28.978472 \\
f(1.083310, 2.874312) &= 28.978472 \\
f(0.653097, 3.191983) &= 20.432394 \\
f(0.834511, 2.809232) &= -4.138564.
\end{aligned}$$

Таким чином, завершено одну ітерацію генетичного алгоритму.

Виконавши багато ітерацій, одержимо найкращу хромосому в 419-му поколінні:

$$\begin{aligned}
v^* &= [01000011000100110110010011011101001], \\
eval(v^*) &= f(0.657208, 2.418399) = 31.313555 \\
x_1^* &= 0.657208 \qquad x_2^* = 2.418399 \\
f(x_1^*, x_2^*) &= 31.313555.
\end{aligned}$$

#### 12.4. Багатоцільова оптимізація

Досить часто в реальних ситуаціях якість експлуатації досліджуваного об'єкта або системи оцінюється не єдиним критерієм чи показником якості, а сукупністю критеріїв, які можуть бути однаково значимими. Такий підхід у двомірній постановці призводить до завдання оптимізації з векторною цільовою функцією:

$$\mathbf{Z}(x, y) = \{z_1(x, y), z_2(x, y)\}, \quad (12.13)$$

яка повинна певним чином трактуватися.

Як правило, відносна значимість цих цілей, загалом, невідома доти, доки не будуть визначені всі основні властивості системи й не будуть повністю визначені всі можливі взаємозв'язки. При зростанні кількості можливих цілей, взаємозв'язки утворюють складну структуру і їх стає важче ідентифікувати. У цьому випадку багато залежить від інтуїції дослідника і його вміння точно виражати ті або інші переваги в процесі оптимізації. Таким чином, стратегія побудови багатокритеріальної оптимізації полягає, насамперед, у здатності адекватно визначити постановку завдання так, що б це завдання допускало розв'язок, а також представити необхідні переваги у вигляді числових залежностей, зберігши при цьому реальність самого завдання.

Всяка складна система складається з окремих більш простих підсистем (елементів). Тому, природно, вирішуючи задачу багатоцільової оптимізації для системи в цілому, розроблювач неминуче повинен ставити та вирішувати задачі багатоцільової оптимізації для окремих її підсистем. При цьому повинна здійснюватися координація (взаємне узгодження) критеріїв оптимальності підсистем відповідно до їхнього призначення і зв'язків, що існують між підсистемами.

Сукупність показників якості системи можна розглядати як вектор, тому

багатоцільову оптимізацію називають також векторною. Теорія векторної оптимізації безупинно розвивається. Зростає кількість робіт прикладного характеру, виконаних з використанням методів і алгоритмів багатоцільової оптимізації.

### 12.4.1. Компромісні розв'язки

При розробці нових технологічних процесів, їх апаратного оформлення та відповідних систем автоматичного управління враховуються численні якісні показники. Кожний з них намагаються оцінити кількісно за допомогою обраного (локального) критерію оптимальності. В реальних задачах не вдається досягти одночасно екстремальних значень усіх розглянутих критеріїв оптимальності, оскільки ці екстремуми відповідають різним точкам простору незалежних змінних, які варіюються в процесі оптимізації. Отже, розв'язок задачі багатокритеріальної оптимізації є деяким компромісом між окремими критеріями оптимальності. Обґрунтування принципу цього компромісу і становить одну з основних концептуальних труднощів проблеми векторної оптимізації.

Для наочного представлення компромісних розв'язків розглянемо задачу оптимізації з двома критеріями якості  $f_1$  і  $f_2$ . Якщо кожний з них є неперервною функцією незалежних змінних  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , що змінюються в деякій області простору, то існує деяка область  $Q$  відповідних значень критеріїв оптимальності (рис. 12.10).

Кожному набору окремих критеріїв  $f_1$  і  $f_2$  відповідає певна точка області  $Q$ .

Для визначеності будемо вважати, що бажано збільшити значення кожного з розглянутих критеріїв. Якщо це не так, то знак відповідного критерію слід змінити на зворотний.

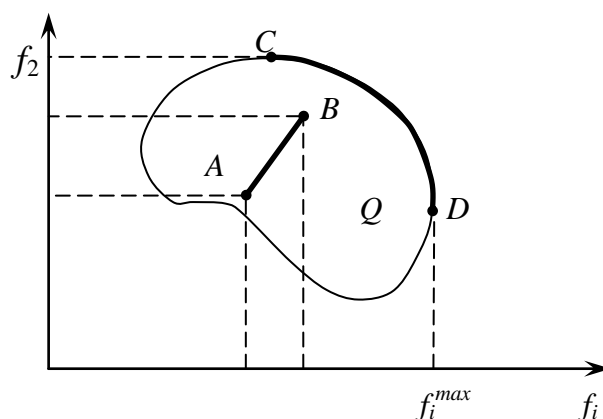


Рис. 12.10. Область можливих розв'язків  $Q$  і множина компромісів  $CD$

Візьмемо точки  $A$  і  $B$  всередині області можливих розв'язків  $Q$  (рис. 12.10). Очевидно, у точці  $B$  обидва критерії  $f_1$  і  $f_2$  мають більші значення, ніж в точці  $A$ . Отже, розв'язок загальної задачі в точці  $B$  має бути кращим за розв'язок у точці  $A$ . Процес покращення розв'язків можна продовжити, рухаючись у тому ж напрямку до границі області, де це покращення припиняється. Максимальні зна-

чення критеріїв  $f_1$  і  $f_2$  досягаються в точках  $D$  і  $C$  відповідно.

Точки, що належать лінії  $CD$ , мають особливу властивість: рухаючись вздовж лінії  $CD$ , не можна покращити значення одного із критеріїв, не погіршивши при цьому значення іншого критерію. Множину точок, що утворюють лінію  $CD$ , в такому випадку, називають множиною компромісних розв'язків, або множиною компромісів.

Розв'язки, що відповідають множині компромісів, прийнято називати ефективними. Легко переконатися в тому, що до множини компромісів можуть належати лише точки на границі області можливих розв'язків  $Q$ . Сукупність критеріїв, які відповідають будь-якій точці, що лежить усередині цієї області, може бути покращена шляхом руху до границі.

Якщо відома вся область допустимих розв'язків, то найчастіше можна відразу вказати множину компромісів. Очевидно, труднощі виникають тоді, коли область  $Q$  не можна описати аналітично, а множину компромісів визначають поточною за допомогою методів пошуку.

#### 12.4.2. Основні поняття та визначення

Для розв'язку задач багатоцільової оптимізації повинні бути забезпечені певні умови. Зокрема, повинна бути надана можливість змінювати в певних межах незалежні змінні якості, що впливають на критерії.

Будь-яка незалежна змінна величина, яку можна змінювати в деяких межах і яка впливає на всі критерії якості або тільки на деякі з них, прийнято називати управляємою змінною (або управлінням). Ця термінологія в певному сенсі співзвучна термінології з теорії управління. Вона підкреслює, що процес багатоцільової оптимізації має деяку подібність із процесом управління системою.

Сукупність усіх управляємих змінних можна розглядати як вектор управління. Йому ставиться у відповідність точка  $n$ -мірного простору управлінь.

Множина допустимих значень управляємих змінних називається областю управління. Вона характеризує ту частину простору управлінь, де перебувають усі реалізовані управління. Ця область може бути як зв'язаною, так і незв'язаною. В окремому випадку вона може складатися з окремих ізольованих точок.

Простір цілей (або цільовий простір) – це простір, координатами якого є значення всіх розглянутих критеріїв якості.

Областю цілей (або цільовою областю) називається множина точок у просторі цілей, де лежать усі можливі значення векторів мети.

Залежність критеріїв якості від управляємих змінних є деяким відображенням простору управлінь на простір цілей. При цьому кожній точці області цілей відповідає одна або кілька точок простору управлінь. Це значить, що один і такий же самий результат (та сама цільова точка) може бути досягнутий за допомогою різних комбінацій значень управляючих величин.

Ефективною множиною компромісів називається множина всіх цільових точок, які не можна далі рівномірно (тобто одночасно за всіма критеріями) покращити в рамках наявних можливостей управління. Таким чином, до цієї мно-

жини відносяться всі точки, які не можна порівняти одну з одною в понятті покращення або погіршення ефекту управління.

Як відомо, скалярні величини можна легко впорядкувати шляхом попарного порівняння їх значень. Проблема порівняння векторних величин набагато складніша.

Якщо для цієї мети скористатися «довжиною» вектора (нормою), то по суті задача зведеться до порівняння скалярних величин.

Якщо ж при порівнянні, як це потрібно в багатоцільовій оптимізації, потрібно порівнювати окремі компоненти векторів, то зробити однозначний висновок можна лише тоді, коли всі без винятку компоненти одного вектора більші (або менші) відповідних компонентів іншого вектора.

Коли деякі компоненти одного вектора менші, а інші – більші за відповідні компоненти іншого вектора, то ці вектори вважаються непорівнянними між собою. Така ситуація має місце в множині компромісів.

### 12.4.3. Узагальнена цільова функція

Для розв'язання задачі можна скористатися наступними узагальненими критеріями оптимізації:

$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^m W_i^* \left[ \frac{R_i^* - R_i}{R_i^*} \right]. \quad (12.14)$$

Тут  $R_i^*$  – найкраще значення цільової функції, знайдене при розв'язанні задачі безкомпромислої оптимізації;  $W_i^*$  – ваговий коефіцієнт, що враховує важливість  $i$ -го критерію.

При цьому:

$$\sum_{i=1}^m W_i = 1. \quad (12.15)$$

Існує й інша можливість:

$$\Phi(X) = \sqrt[m]{\eta_1^{\alpha_1} \cdot \eta_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot \eta_m^{\alpha_m}} \quad (12.16)$$

$$\text{Тут } \eta_i = \frac{K_i (R_i - R_i^*)}{R_{\max j} - R_{\min j}}; \quad K_i = \begin{cases} +1 & \text{для пошуку мінімуму} \\ -1 & \text{для пошуку максимуму} \end{cases}; \quad \alpha_i = \frac{1}{W_i}.$$

При цьому виконується співвідношення (12.15).

## 12.4.4. Визначення коефіцієнтів ваги параметрів

Важливим елементом при такій оптимізації є призначення коефіцієнтів ваги кожному параметру. Розповсюджений метод – визначення коефіцієнтів ваги за допомогою експертів, який є, по суті, звичайним обговоренням, з тою лише різницею, що свою думку експерти виражають не словами, а числами.

Для визначення впливу коефіцієнтів ваги на результат розв'язку задачі можна вирішувати її при різних значеннях цих коефіцієнтів.

Методи експертних оцінок широко поширені в спорті, наприклад, у фігурній катанні, гімнастиці. Немає підстави вважати неприйнятною колективну думку фахівців і при прийнятті оптимальних розв'язків.

Запропоновано досить багато методів визначення експертних оцінок. Розглянемо три з них.

## 12.4.5. Безпосереднє призначення коефіцієнтів ваги

При безпосередньому призначенні коефіцієнтів ваги  $i$ -тий експерт оцінює порівняльну важливість розглянутих параметрів, які будуть входити в цільову функцію. Кожний  $i$ -ий експерт для кожного  $k$ -го параметра повинен призначити коефіцієнт ваги  $\alpha_{ik}$  таким, щоб сума всіх коефіцієнтів ваги, призначених одним експертом для різних параметрів, дорівнювала одиниці:

$$\sum_{i=1}^k W_{ik} = 1 ; \quad i = \overline{1, n} , \quad (12.17)$$

де  $n$  – кількість експертів. Алгоритм методу.

1. Визначити кількість параметрів  $K$ , які будуть включені в цільову функцію.
2. Зробити таблицю за формою, яку називають базовою.

Експерт	Параметри			Сума
	А	В	С	
1	0,5	0,2	0,3	1
2	0,5	0,3	0,2	1
3	0,2	0,4	0,4	1
4	0,2	0,3	0,5	1
5	0,4	0,2	0,4	1
6	0,3	0,4	0,3	1
7	0,3	0,3	0,4	1
8	0,5	0,2	0,3	1
Середнє значення коефіцієнта ваги	0,363	0,288	0,35	
Середньоквадратичне відхилення	0,119	0,049	0,06	
Дисперсія	0,015	0,006	0,008	

3. Визначити коефіцієнт варіабельності:

$$v = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij}^2} \quad (12.18)$$

Значення коефіцієнта варіабельності показує величину розкиду експертних оцінок. При  $v < 0,2$  оцінки експертів можна вважати погодженими. У випадку  $v > 0,2$  доцільно провести з експертами змістовне обговорення важливості оцінюваних параметрів, після чого повторити експертизу. При збереженні величини розкидування доцільно враховувати імовірнісний характер експертних оцінок за методами, які наведені нижче.

Як показує досвід, задоволення експертами вимоги (12.17) при  $K > 3$ , викликає труднощі.

Для того щоб уникнути виконання цієї вимоги, можна коефіцієнти ваги визначати і іншими методами, які розглянуто нижче.

#### 12.4.6. Оцінка важливості параметрів у балах

При оцінці важливості параметрів у балах кожний експерт оцінює параметри за десятибальною системою. При цьому оцінка, яка призначається кожним експертом кожному параметру, не пов'язана з оцінками, які він же призначає іншим параметрам. Наприклад, усім параметрам можна призначати однакову оцінку. Визначення експертних оцінок у балах проводиться за таким алгоритмом: складається таблиця, в яку вносяться оцінки всіх параметрів у балах, зроблені кожним експертом; переходять від оцінок параметрів у балах до значень коефіцієнтів ваги, сума яких для всіх параметрів дорівнює одиниці в кожного експерта.

Експерт	Оцінка в балах				Сума	Експерт	Параметри			
	А	Б	В	Г			А	Б	В	Г
1	6	7	5	7	25	1	0,24	0,28	0,2	0,28
2	10	8	4	9	31	2	0,32	0,26	0,13	0,29
3	5	7	6	8	26	3	0,19	0,27	0,23	0,31
4	8	6	4	8	24	4	0,25	0,32	0,18	0,25
5	8	6	4	6	24	5	0,33	0,25	0,17	0,25
						Коеф.ваги	0,27	0,28	0,18	0,28

Якщо при  $k > 3$  одночасна оцінка всіх параметрів викликає ускладнення, їх можна оцінювати ще одним методом, який називається методом парних порівнянь. Цей метод реалізується за допомогою наступного алгоритму.

1. Визначається кількість оцінюваних параметрів  $k$  і кількість експертів  $n$ . Нехай вони становлять  $k = 5$ ;  $n = 4$ .

2. Для кожного експерта складається окрема таблиця.

У цій таблиці експерт приводять оцінку парних порівнянь: якщо  $k$ -ий параметр важливіше  $j$ -го, то в ячейці, що належить  $k$ -му рядку і  $j$ -му стовпцю, вказується 1, інакше – 0.

Приклад заповнення такої таблиці першим експертом наведений нижче. З неї видно, що за оцінкою цього експерта параметр А менш важливий, ніж параметр Б і Д, але важливіший за В і Г.

Параметри	Параметри					Сума
	А	Б	В	Г	Д	
А		0	1	1	0	2
Б	1		0	1	0	2
В	0	1		0	0	1
Г	0	0	1		1	2
Д	1	1	1	0		3
						10

Далі складається підсумкова таблиця всіма експертами.

Експерт	Параметри					Сума
	А	Б	В	Г	Д	
1	0,20	0,20	0,10	0,20	0,30	1
2	0,25	0,15	0,15	0,25	0,20	1
3	0,20	0,30	0,20	0,10	0,15	1
4	0,25	0,15	0,25	0,15	0,20	1
Коеф. ваги						

#### 12.4.7. Принципи рівномірності

У загальному випадку він полягає в прагненні до рівномірного підвищення якості об'єкта, який оптимізується за всіма нормованими критеріями.

Цей принцип має кілька різновидів.

1. Принцип рівності нормованих критеріїв. За цим принципом найкращим компромісним розв'язком  $x^*$  є такий, при якому досягається рівність усіх нормованих критеріїв, тобто  $f_1(x^*) = f_2(x^*) = \dots = f_n(x^*)$ . Іноді цей принцип є надмірно жорстким. Він може приводити до ситуацій, коли розв'язок задачі знаходиться поза зоною компромісу або відсутній.

2. Принцип квазірівності. За цим принципом ідея рівностей окремих критеріїв реалізується приблизно з точністю до деякої величини  $\epsilon$ . Розв'язок вважається найкращим, якщо значення окремих нормованих критеріїв відрізняються один від одного не більш, ніж на  $\epsilon$ .

3. Принцип «слухної поступки». За цим принципом розрізняють абсолютну і відносну поступки. Абсолютною вважається така поступка, при якій сумарний абсолютний рівень зниження одного або декількох критеріїв не переви-

щує сумарного абсолютного рівня підвищення інших критеріїв. Аналогічно формулюється принцип відносної «слушної поступки».

#### 12.4.8. Принцип послідовної «поступки»

Припустимо, що часткові критерії оптимальності ранжирувані в порядку зменшення їх важливості. Для визначеності будемо вважати, що кожний з них потрібно максимізувати.

Процедура побудови компромісного розв'язку зводиться до знаходження розв'язку, що приводить в максимум головний критерій оптимальності  $f_1$ . Потім призначається, виходячи із практичних міркувань і точності, з якою відомі вихідні дані, деяка «поступка»  $df_1$ , яку можна допустити, щоб перетворити на максимум другий критерій  $f_2$ . Далі накладаємо на критерій  $f_i$  обмеження, щоб він був не менше, ніж  $f_1(x^*) - df_1$ . При такому обмеженні шукаємо розв'язок, що приводить в максимум критерій  $f_2$ . Потім призначається поступка для критерію  $f_2$ , і т.д.

Такий спосіб знаходження компромісного розв'язку відразу показує, ціною якої «поступки» в одному окремому критерії здобувається виграш в іншому.

На практиці використовуються й інші схеми компромісів.

#### 12.4.9. Використання множників Лагранжа

При розв'язанні задач векторної оптимізації зазвичай спочатку шукають множину ефективних рішень, які не покращуються (множину Парето), потім для прийняття заключного рішення використовують відповідну схему компромісу.

Складність розв'язку задачі залежить від того, чи відома аналітична залежність узагальненого критерію оптимальності від окремих критеріїв, чи вона повинна бути знайдена за допомогою чисельного експерименту на ЕОМ.

Якщо функціональна залежність узагальненого критерію від окремих критеріїв встановлена, то для розв'язку задачі можна використовувати метод невідзначених множників Лагранжа.

Розглянемо наступну задачу векторної оптимізації:

$$f_i \text{ opt} = \min f_i(x), i = 1, k. \quad (12.19)$$

Метод  $\epsilon$ -обмежень припускає видозміну постановки цієї задачі:

$$f_1 \text{ opt} = \min f_1(x), \quad (12.20)$$

Для розв'язку задачі складається функція Лагранжа

$$L = f_1(x) + \sum_{i=2}^k \lambda(f_i(x) - e_i), \quad (12.21)$$



де  $\lambda$  – невизначені множники Лагранжа;  $e_i$  – максимальні припустимі (граничні) значення критеріїв оптимальності, крім першого.

Розглянемо два приклади використання цього методу.

Приклад 12.2. В цій задачі використовуються два критерії оптимальності і дві управляемі незалежні змінні

$$\min \begin{cases} f_1(x_1, x_2) \equiv (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 4)^2 + 5 \\ f_2(x_1, x_2) \equiv (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 10)^2 + 6 \end{cases} \quad (12.22)$$

*Розв'язок.*

Перша фаза розв'язку полягає в перетворенні початкової постановки задачі:  $\min f_1(x_1, x_2)$  з врахуванням обмеження  $f_2(x_1, x_2) \leq e_2$ .

Побудуємо функцію Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \lambda_2) = f_1(x_1, x_2) + \lambda_2(f_2(x_1, x_2) - e_2). \quad (12.23)$$

Підставляючи в неї вираз для  $f_1$  і  $f_2$ , одержимо

$$L(x_1, x_2, \lambda_2) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 4)^2 + 5 + \lambda_2[(x_1 - 6)^2 + (x_2 - 10)^2 + 6 - e_2], \quad (12.24)$$

тут  $\lambda_{12}$  – невизначений множник Лагранжа.

Знайдемо часткові похідні від функції Лагранжа за всіма аргументами і прирівняємо їх до нуля:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2(x_1 - 2) + 2\lambda_2(x_1 - 6) = 0; \quad (12.25)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2(x_2 - 4) + 2\lambda_2(x_2 - 10) = 0; \quad (12.26)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = [(x_1 - 6)^2 + (x_2 - 10)^2 + 6 - e_2] = 0. \quad (12.27)$$

Розв'язавши систему, одержимо співвідношення

$$\lambda_2 = \frac{x_1 - 2}{6 - x_1} = \frac{x_2 - 4}{10 - x_2}. \quad (12.28)$$

З виразу для  $\lambda_{12}$  одержимо співвідношення

$$x_2 = 1,5x_1 + 1. \quad (12.29)$$

На рис. 12.11 зображена множина компромісів. Вона є відрізком прямої лінії. Лінії постійного рівня кожного із критеріїв оптимальності є колами. Відзначимо, що отриманий розв'язок не залежить від введеного обмеження. На рис. 12.12 показана множина компромісів у цільовому просторі.

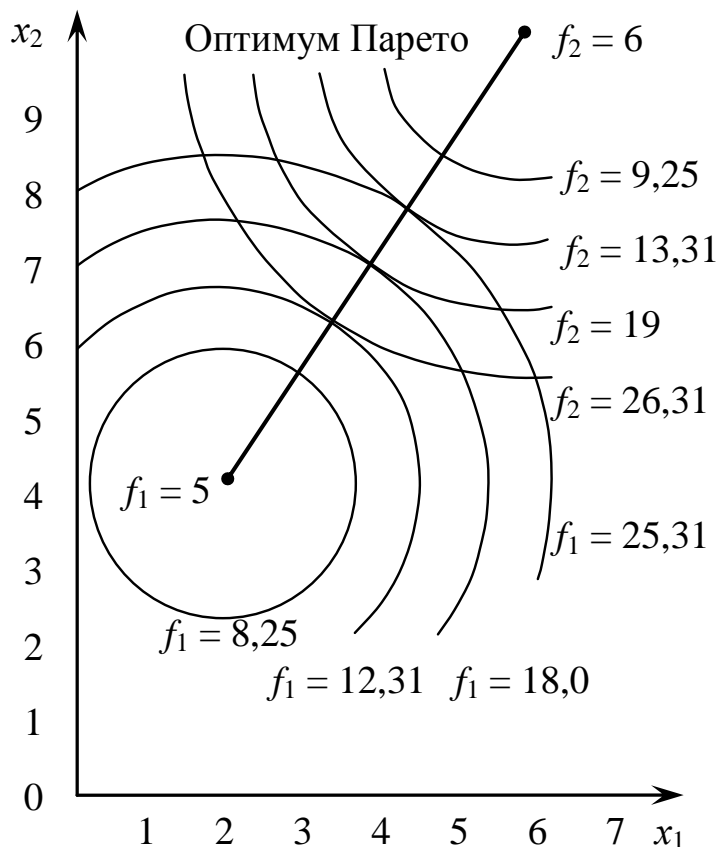


Рис. 12.11. Непокращувані (парето-оптимальні) рішення в просторі

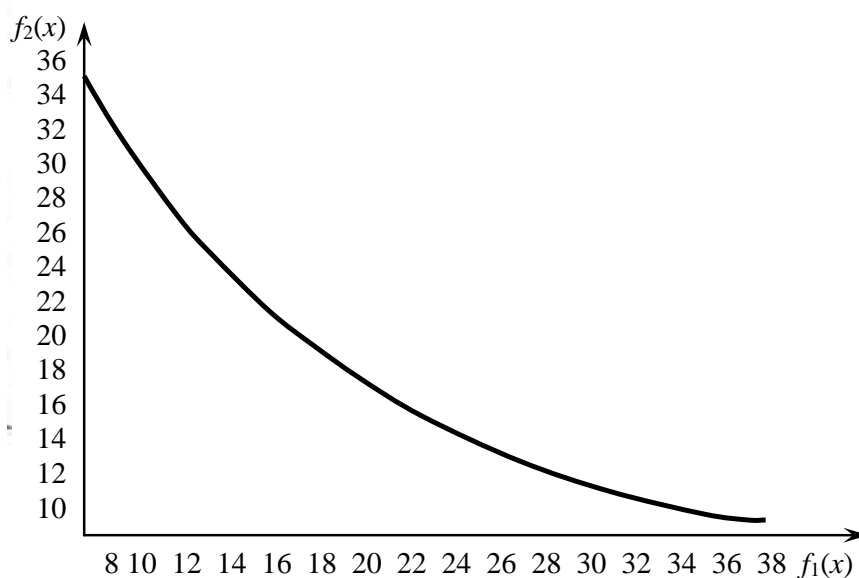


Рис. 12.12. Ефективна множина компромісів у цільовому просторі

Чисельні результати розв'язку цієї задачі представлені в табл. 12.3.

Таблиця 12.3

$x_1$	$x_2$	$f_1$	$f_2$	$\lambda_{12}$
2,0	4,00	5,00	58,00	0
2,5	4,75	5,81	45,81	0,14
3,0	5,50	8,25	35,25	0,33
3,5	6,25	12,31	26,31	0,60
4,0	7,00	18,00	19,00	1,00
4,5	7,75	25,31	13,31	1,67
5,0	8,5	34,25	9,25	3,00
5,5	9,25	44,81	6,81	7,00
6,0	10,00	57,00	6,00	

Множник Лагранжа  $\lambda_{12}$  є функцією  $f_1$  і  $f_2$ . Це, зокрема, видно на рис. 12.13.

У даному простому прикладі розв'язок отриманий у замкненій формі. У задачах великої розмірності, коли одержати замкнену форму неможливо, розв'язок шукають шляхом варіювання  $e$ .

Перейдемо тепер до більш складної задачі, в якій розглядаються дві керувані змінні і три локальні критерії оптимальності.

Приклад 12.3. Математичне формулювання задачі має такий вигляд:

$$\min_{x_1, x_2} \begin{cases} f_1(x_1, x_2) \equiv (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 4)^2 + 5 \\ f_2(x_1, x_2) \equiv (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 10)^2 + 6 \\ f_3(x_1, x_2) \equiv (x_1 - 10)^2 + (x_2 - 15)^2 + 10 \end{cases} \quad (12.30)$$

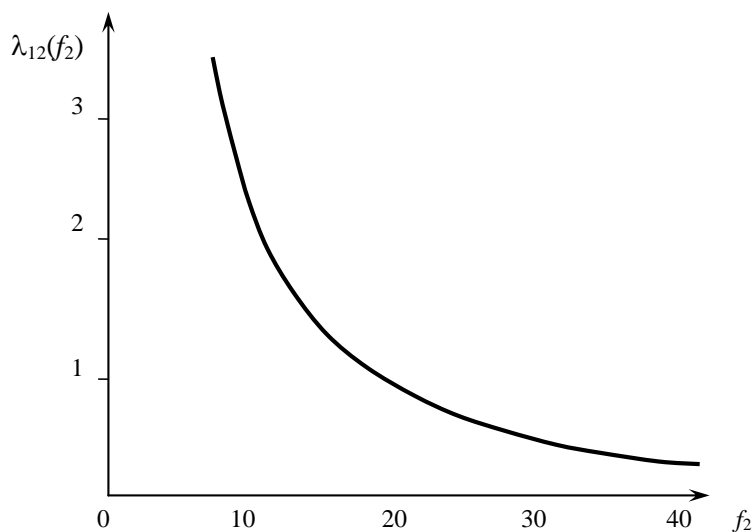


Рис. 12.13. Множник Лагранжа як функція критерію оптимальності  $f_2$

Розв'язок.

Перепишемо задачу у формі  $\epsilon$ -обмежень:  $\min_{x_1, x_2} f_1(x_1, x_2)$  з врахуванням  $f_2(x_1, x_2) \leq \delta_2$ ,  $f_3(x_1, x_2) \leq \delta_3$ . Функція Лагранжа має вигляд:

$$L(x_1, x_2, \lambda_2, \lambda_3) = f_1(x_1, x_2) + \lambda_2(f_2(x_1, x_2) - e_2) + \lambda_3(f_3(x_1, x_2) - e_3). \quad (12.31)$$

Підставляючи сюди вираз для  $f_1(x_1, x_2)$ ,  $f_2(x_1, x_2)$ ,  $f_3(x_1, x_2)$  і використовуючи метод невизначених множників Лагранжа, одержуємо:

$$\lambda_2 = \frac{11x_1 - 8x_2 + 10}{-5x_1 + 4x_2 - 10}; \quad (12.32)$$

$$\lambda_3 = \frac{-6x_1 + 4x_2 - 4}{-5x_1 + 4x_2 - 10}. \quad (12.33)$$

Помітимо, що функція  $f_1(x_1, x_2)$  не обов'язково повинна бути «основною», а функції  $f_2(x_1, x_2)$ ,  $f_3(x_1, x_2)$  повинні виконувати роль обмежень.

Розглянута задача може бути записана в іншому вигляді, наприклад:  $\min_{x_1, x_2} f_2(x_1, x_2)$  з урахуванням обмежень  $f_1(x_1, x_2) \leq \delta_2$

Функція Лагранжа для задачі, записаної в такій формі, має вигляд:

$$L(x_1, x_2, \lambda_2, \lambda_3) = f_2(x_1, x_2) + \lambda_2(f_1(x_1, x_2) - e_1) + \lambda_3(f_3(x_1, x_2) - e_3). \quad (12.34)$$

Вирішуючи цю задачу за допомогою методу невизначених множників Лагранжа, одержимо:

$$\lambda_1 = \frac{-5x_1 + 4x_2 - 10}{11x_1 - 8x_2 + 10}; \quad (12.35)$$

$$\lambda_3 = \frac{-6x_1 + 4x_2 - 4}{11x_1 - 8x_2 + 10}. \quad (12.36)$$

Результати розв'язку розглянутої задачі наведені в табл. 12.4.

Таблиця 12.4

$x_1$	$x_2$	$f_1(x_1, x_2)$	$f_2(x_1, x_2)$	$f_3(x_1, x_2)$	$\lambda_1$	$\lambda_3$
4	6,88	17,29	19,73	111,93	0,42	0,19
5	8,25	32,00	10,06	80,56	0,50	0,50
6	9,63	52,70	6,14	54,84	0,70	1,00
7	11,00	79,00	8,00	35,00	1,00	2,00
8	12,38	111,22	15,66	20,86	2,17	5,17

## 12.5. Метод комплексного генетичного алгоритму

Проаналізуємо, як завдання багатоцільової оптимізації систем впливає на основні оператори та алгоритми класичного ГА при його модернізації до комплексного генетичного алгоритму (КГА).

Розглянемо для прикладу деякий моделює мий об'єднаний технологічний процес (ОТП), який складається з окремих елементарних технологічних процесів (ЕТП).

Запишемо функцію (12.13) для двох окремих ЕТП, що входять до системи:

$$z_1 = z_1(x_1, y_1), \quad (12.37)$$

$$z_2 = z_2(x_2, y_2). \quad (12.38)$$

Конкуренція цілей полягає в тому, що вони зв'язані значеннями загальних аргументів, «перетягуючи» їх на себе, – кожна прагне підтягти аргументи до «свого» оптимуму, погіршуючи ситуацію в іншому. Введемо наступну класифікацію конкуренції:

– *відсутність* конкуренції означає, що в обох цільових функціях усі аргументи незалежні;

– *м'яка* конкуренція означає, що в обох цільових функціях узагальнена частина аргументів, інші незалежні;

– *жорстка* конкуренція означає, що в обох цільових функціях узагальнені всі аргументи.

При проектуванні систем багатокритеріальність мети виникає тоді, коли компонентами (12.13) стають показники якості окремих підсистем. Ресурси, за які вони конкурують, – це пари конкретних значень загальних аргументів  $x$  і  $y$ , оскільки, у загальному випадку:

$$\max_{x_1, y_1} \{z_1(x_1, y_1)\} \neq \max_{x_2, y_2} \{z_2(x_2, y_2)\}. \quad (12.39)$$

При проектуванні класів ОТП зі своїми функціями якості  $z_1, z_2$  і з різним ступенем узагальнення аргументів необхідно вирішувати різні завдання багатоцільової оптимізації.

**1. Клас послідовних ОТП без узагальнених параметрів.** Якщо ОТП послідовний, то споживчу цінність представляє тільки якість після останнього ЕТП  $z_2$ , – перший «вкладений» у нього опосередковано – у вигляді «матрьошки»:

$$\max_{x, y} \{z_2(x_2, y_2, \max_{x, y} \{z_1(x_1, y_1)\})\}. \quad (12.40)$$

**2. Клас послідовних ОТП із узагальненими параметрами.** У цьому випадку «матрьошка» (12.39) спрощується, оскільки один з аргументів у цільових функціях узагальнений, наприклад, по  $y$ :

$$\max_{x,y} \{z_2(x_2, y, \max_{x,y} \{z_1(x_1, y)\})\}. \quad (12.41)$$

**3. Клас ОТП із частковим розпаралелюванням без узагальнених параметрів** приводить до завдання:

$$\max_{x,y} \{z_1(x_1, y_1)\}; \quad (12.42)$$

$$\max_{x,y} \{z_2(x_1, y_1, x_2, y_2)\}. \quad (12.43)$$

**4. Клас ОТП із частковим розпаралелюванням з узагальненими параметрами** приводить до завдання:

$$\max_{x,y} \{z_1(x_1, y)\}; \quad (12.44)$$

$$\max_{x,y} \{z_2(x_1, x_2, y)\}. \quad (12.45)$$

**5. Клас ОТП із повним розпаралелюванням без узагальнених параметрів** характеризується тим, що завдання оптимізації розпадається на дві самостійні, розв'язок кожної з яких тривіальний:

$$\max_{x_1, y_1} \{z_1(x_1, y_1)\}; \quad (12.46)$$

$$\max_{x_2, y_2} \{z_2(x_2, y_2)\}. \quad (12.47)$$

**6. Клас ОТП із повним розпаралелюванням з узагальненими параметрами** характеризується тим, що у двох ЕТП  $y$  є загальним, а компоненти аргументу  $x$  можуть відрізнятися один від одного. Тут окремі вирази (12.46) і (12.47) повинні розглядатися у вигляді системи:

$$\begin{cases} \max_{x_1, y} \{z(x_1, y)\}; \\ \max_{x_2, y} \{z(x_2, y)\}, \end{cases} \quad (12.48)$$

розв'язок якої при оптимізації параметрів ОТП такого класу може бути здійснений тільки спільно.

Узагальнимо сказане для прикладу трьох цільових функцій (трьох ЕТП в ОТП) (табл. 12.5).

### 12.5.1. Перетворення фенотипу в генотип

Виберемо в якості прикладу ОТП із повним розпаралелюванням і узагальненими параметрами. ОТП складається із двох ЕТП і є розгортанням двох співвісних внутрішніх отворів за допомогою східчастої розгортки. Нехай передатною функцією «параметри процесу  $\rightarrow$  якість» буде вираз:

Постановка завдання багатоцільової оптимізації ОТП різних класів

ОТП	ОП	Схема ОТП	Завдання оптимізації	КГА
1	2	3	4	5
Послідовні	Немає		$\max_{x,y} \{z_2(x_2, \theta_2, \max_{x,y} \{z_1(x_1, \theta_1)\})\}.$	—
	Є		$\max_{x,y} \{z_2(x_2, \theta, \max_{x,y} \{z_1(x_1, y)\})\}.$	—
Із частковим розпаралелюванням	Немає		$\max_{x,y} \{z_1(x_1, \theta_1)\};$ $\max_{x,y} \{z_2(x_1, \theta_1, x_2, \theta_2)\}$	—
	Є		$\max_{x,y} \{z_1(x_1, y)\};$ $\max_{x,y} \{z_2(x_1, x_2, y)\}.$	—
З повним розпаралелюванням	Немає		$\max_{x_1, y_1} \{z_1(x_1, y_1)\};$ $\max_{x_2, y_2} \{z_2(x_2, y_2)\}.$	+
	Є		$\begin{cases} \max_{x_1, y} \{z(x_1, y)\}; \\ \max_{x_2, y} \{z(x_2, y)\}. \end{cases}$	+

$$R_a = f(\omega, Z), \quad (12.49)$$

де:  $R_a$  – шорсткість обробленої поверхні;  $\omega$  – кутова швидкість обертання розгортки;  $Z$  – кількість зубів розгортки.

Звернімо увагу на те, що загальним параметром (ознакою фенотипу) для обох ЕТП є кутова швидкість обертання розгортки. Фенотип, як впливає із (12.49), представлений тут двома ознаками: кількістю зубів розгортки  $Z$  і кутовою швидкістю її обертання  $\omega$ . Величина  $Z$  в обох розгорненнях може відрізнятися, а величина  $\omega$  – ні.

Геометричне представлення хромосоми довільної особини  $A$ , однозначно обумовленої двома незалежними  $Z_{1A}$  і  $Z_{2A}$  і одною узагальненою  $\omega$  ознакою, із парної загальної кількості особин  $N$ , розміщених в області  $0 \leq Z \leq Z_{max}$ ;  $0 \leq \omega \leq \omega_{max}$ , наведено на рис. 12.14.

КГА, так само, як і класичний ГА, починається з введення вихідних даних.

Тут відмінність від ГА полягає в тому, що цільових функцій більше, ніж одна, і всі вони повинні бути відомі (наприклад, у результаті експерименту) до початку роботи КГА.

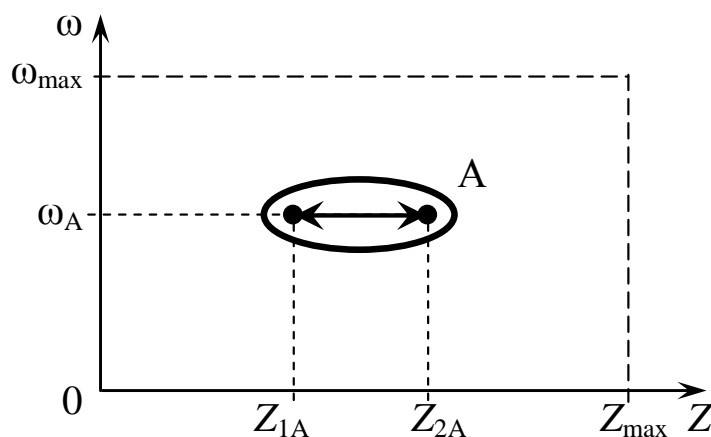


Рис. 12.14. Геометричне представлення особини  $A$ , що складається із двох незалежних і однієї узагальненої ознаки

### 12.5.2. Схрещування

Відмінність схрещування в КГА від схрещування в ГА полягає в двох компонентах:

- спочатку розраховуються цільові функції для всієї популяції, а потім їх значення поєднуються в значення функції пристосованості  $P$ ;
- у новому методі – особливі, комплексні хромосоми, які будуються за розробленими правилами. Схема формування хромосоми ОТП, що складається із двох ЕТП, з узагальненим параметром  $\omega$  наведена на рис. 12.15.

Усього формується  $N$  хромосом, зображених на рис. 12.15 в, – по кількості особин-батьків нульового покоління.



Далі починається основна частина КГА, коли в циклі об'єкт проживає  $T$  епох до завершення процесу оптимізації. Протягом нульової епохи (номер епохи  $t = 0; t \in T$ ) спочатку здійснюється схрещування, яке складається із чотирьох операторів: вибору пари, власне схрещування (кросовера), мутації та інверсії.

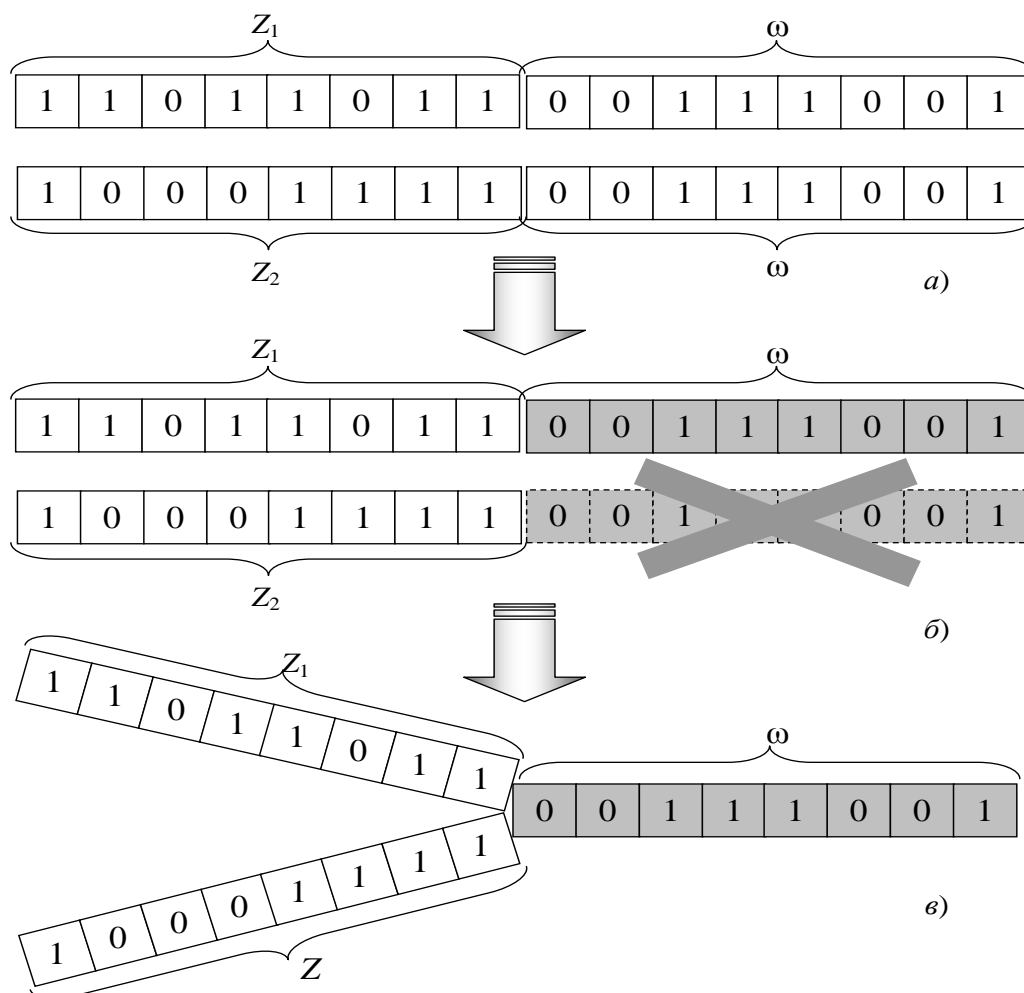


Рис. 12.15. Схема формування хромосоми ОТП із узагальненим параметром  $\omega$ :  
 а – формування хромосом окремих ЕТП;  
 б – виключення повторюваного в обох хромосомах гена;  
 в – конкатенація індивідуальних і узагальненого генів у єдину хромосому

Пари особин  $A_1$  і  $A_2$  (рис. 12.16 а) підбираються для схрещування з  $N$  відповідно до настроювань користувача (наприклад, випадково).

Механізм схрещування хромосом особин  $A_1$  і  $A_2$  наведений на рис. 12.16 б. Спочатку звичайним для ГА способом виконується оператор кросовера для узагальненої частини хромосом батьків. При цьому виходить узагальнена частина хромосоми нащадка.

Далі в такий же спосіб схрещують окремо індивідуальні частини хромосом особин  $A_1$  і  $A_2$ . Конкатенацією отриманих фрагментів одержують нову повну хромосому. До окремих її частин застосовують оператори мутації і (якщо необхідно) інверсії, після чого хромосома нащадка готова (рис. 12.16 б).

Далі  $N$  хромосом батьків і  $N/2$  хромосом нащадків зазнають добору за ве-

личною функції  $P$ . У цьому випадку функція  $P$  є, по суті, звертанням компонент багатоцільового показника якості  $R_a\{R_{a1}, R_{a2}\}$  і перетворенням їх в сукупності у скалярний цільовий показник.

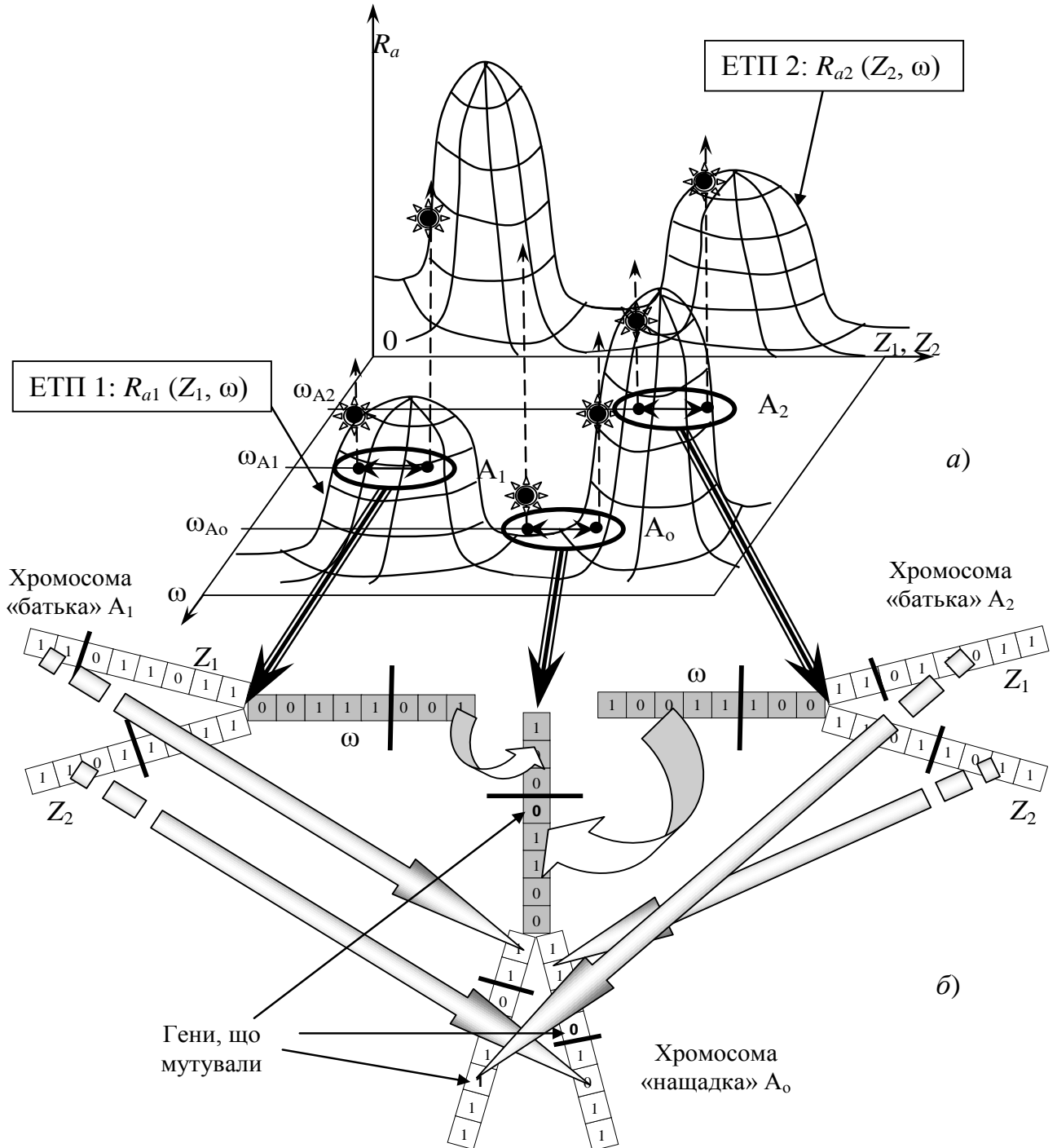


Рис. 12.16. Схема процесу схрещування в методі КГА:  
 а – фенотип ОТП; б – генотип ОТП

Вибір виду цієї функції є настроюванням користувача КГА і надає йому широкі можливості: лінійні, мінімізаційні, максимізаційні, добутку й функції Кобба-Дугласа та ін., виходячи із принципів домінантності, Парето, Слейтера, Джеррі, рівності, ефективності, тощо.

По закінченні добору з  $1,5 N$  особин залишають  $N$  кращих за значенням  $P$ , інші  $0,5 N$  знищуються (стираються), і на цьому поточна епоха процесу оптимізації завершується.

### 12.5.3. Розрахунки пристосованості та вибір

До настроювань користувача віднесемо наступні змінні в структурі та параметрах КГА:

- кількість особин у популяції;
- метод заселення області рішень на нульовому етапі;
- функція пристосованості  $P$ ;
- спосіб нормування аргументів;
- структура і довжина хромосоми;
- метод добору пари;
- кількість і місце розташування точок схрещування;
- кількість і місце розташування точок, що мутують;
- необхідність і методика інверсії;
- критерій зупинки.

### 12.5.4. Критерій зупинки

Критерієм загальної зупинки є відсутність збільшення всіх значень функції  $P$  для всіх особин поточної і передостанньої популяції після чергової епохи, що брали участь у роботі алгоритму. Така зупинка вважається штатною для алгоритму, оскільки в цьому випадку він сходиться, сходиться на оптимумі і сходиться за прийнятний час.

Якщо ні, то необхідно міняти настроювання користувача.

### 12.5.5. Загальний алгоритм методу КГА

Схема комплексного генетичного алгоритму оптимізації ОТП виглядає так (рис. 12.17).

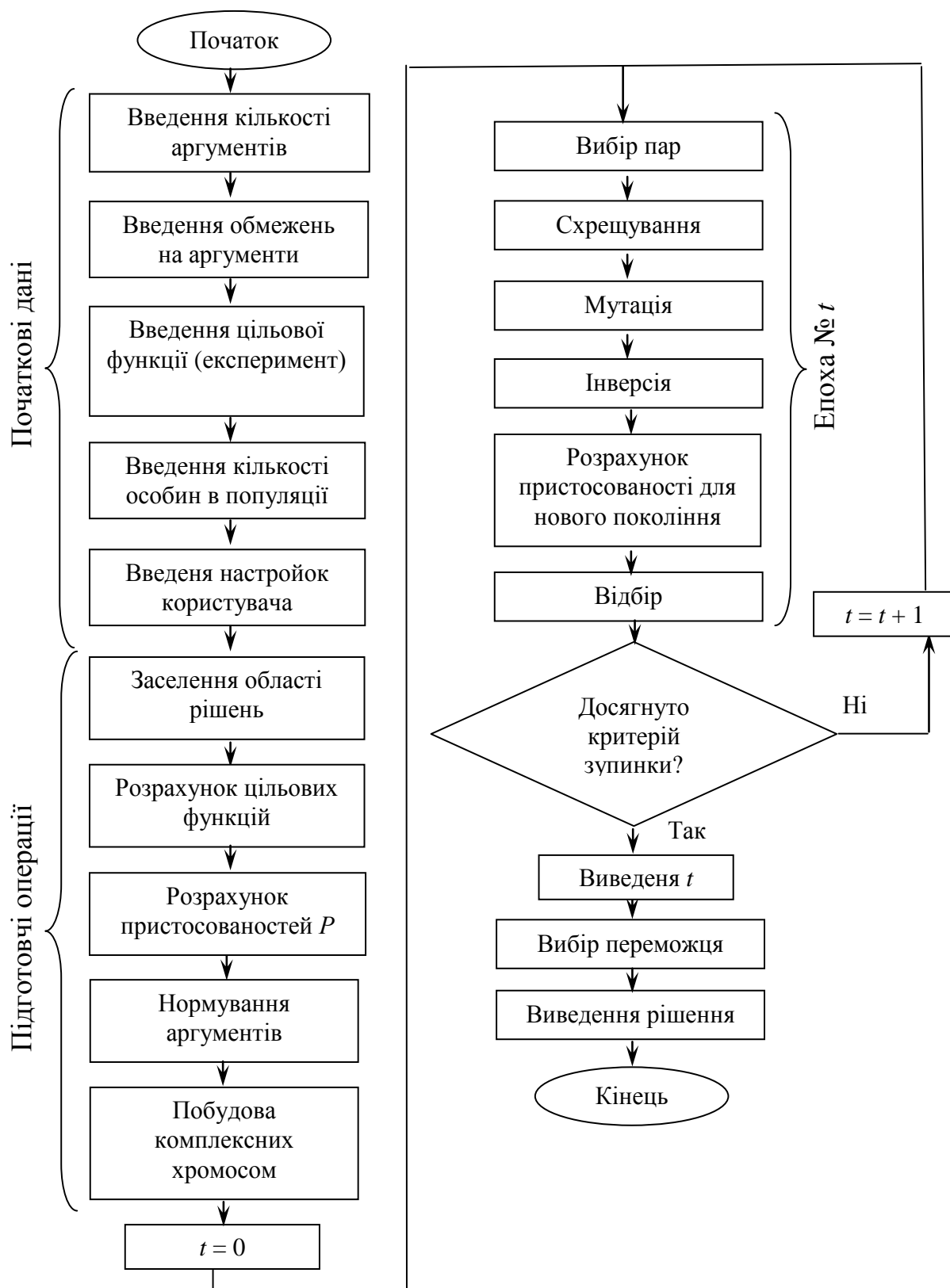


Рис. 12.17. Схема комплексного генетичного алгоритму оптимізації ОТП

## 12.6. Питання до самоконтролю

1. Які завдання розв'язуються за допомогою генетичного алгоритму?
2. Що таке «фенотип» та «генотип» і який існує між ними зв'язок?
3. Які переваги та за рахунок чого має генетичний алгоритм над іншими методами оптимізації?
4. Основні терміни теорії генетичних алгоритмів. Чому вони схожі на біологічні терміни?
5. В чому полягають основні принципи побудови генетичних алгоритмів?
6. Кодування ознак при переході від фенотипу до генотипу. Що таке код Грея?
7. Як виконується операція схрещування та які особливості її виконання?
8. Як виконується підбір пар для схрещування? Переваги та недоліки різних методів підбору.
9. Як виконуються оператори мутації та інверсії? Навіщо вони потрібні в генетичному алгоритмі?
10. Опишіть схему функціонування класичного генетичного алгоритму.
11. Що є критерієм зупинки роботи генетичного алгоритму?
12. Сходимість генетичного алгоритму.
13. Наведіть приклад багатоекстремальної функції. Чому саме до неї вигідно застосовувати генетичні алгоритми оптимізації?
14. Що таке багатоцільова оптимізація і який основний недолік цього процесу? Методи боротьби з ним.
15. Наведіть приклади об'єктів оптимізації, моделювання яких зводиться до розв'язання багатоцільової задачі.
16. В чому полягає особливість комплексного генетичного алгоритму?
17. Як виглядає зіркоподібна хромосома методу КГА та як її скласти?
18. Процес схрещування зіркоподібних хромосом в методі КГА.
19. Загальна схема комплексного генетичного алгоритму.
20. Чому методи генетичних алгоритмів відносяться до еволюційних методів оптимізації?

## ЗАКЛЮЧЕННЯ

Підручник «Математичні методи моделювання» за своїм змістом повністю включає завдання Учбової програми однойменної дисципліни в частинах лекційного навантаження та самостійної роботи студентів.

Автори планують також видання для цієї дисципліни збірника завдань для практичних робіт.

Підручник побудовано на вибраних матеріалах:

– широкої мережі фундаментальних та прикладних робіт з математичного моделювання;

– монографій С.О. Балана, Т.П. Становської та О.Л. Становського «Проектирование и управление в машиностроении», Л.Г. Раскіна та О.В. Сірої «Нечеткая математика. Основы теории. Приложения», О.П. Ротштейна «Интеллектуальные технологии идентификации: нечеткие множества, генетические алгоритмы, нейронные сети»;

– навчального посібника О.Г. Руденко та Є.В. Бодянського «Штучні нейронні мережі»;

– захищених кандидатських дисертацій С.О. Балана, О.Є. Гончарової, О.Є. Плачинди, Т.П. Становської, Х. Ягхі, виконаних в Одеському національному політехнічному університеті;

– сучасних електронних ресурсів;

– власних наукових робіт авторів, виконаних в Одеському національному політехнічному університеті.

## ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

### Основна

1. Абрамов О.В. Прогнозирование состояния технических систем / О.В. Абрамов, А.Н. Розенбаум. – М.: Наука, 1990. – 126 с.
2. Балан С.А. Проектирование и управление в машиноведении / С.А. Балан, Т.П. Становская, А.Л. Становский. – Одесса: Астропринт, 2002. – 376 с.
3. Бате К. Численные методы анализа и метод конечных элементов / К. Бате, Р. Вилсон. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.
4. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1982. – 336 с.
5. Бреббия К. Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, П. Вршебел. – М.: Мир, 1987. – 524 с.
6. Бубняк Т.І. Вища математика. Навчальний посібник. – Львів: Новий світ – 2000. – 436 с.
7. Будак Б.М. Сборник задач по математической физике / Б.М. Будак, А.А. Самарский, А.Н. Тихонов. – М.: Наука, 1980. – 686 с.
8. Бурьшкин М.Л. Эффективные методы и программы расчета на ЭВМ симметричных конструкций / М.Л. Бурьшкин, В.Н. Гордеев. – К.: Будівельник, 1984. – 120 с.
9. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
10. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.
11. Вентцель Е.С. Исследование операций. – М.: Сов. радио, 1972. – 551 с.
12. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. – М., 1967.
13. Владимиров В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров, В.В. Жаринов. – Физматлит, 2004.
14. Воронов А.А. Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. – М.: Наука, 1979. – 336 с.
15. Галушкин А.И. Теория нейронных сетей. – М.: ИПРЖР, 2000. – 416 с.
16. Гащук П.М. Лінійні моделі дискретно–неперервних механічних систем / П.М. Гащук, Л.- М. М. Зорій. – Львів: Українські технології, 1999. – 372 с.
17. Гильде В. Зеркальный мир. – М.: Мир, 1982. – 120 с.
18. Горбатов В.А. Основы дискретной математики: Уч. пособие для студентов вузов. – М.: Высш. шк., 1986. – 311 с.
19. Дияконів, В. П. Нові інформаційні технології: Уч. посібник. Ч. 3. Основи математики й математичне моделювання / В. П. Дияконів, И. В. Абраменкова, А. А. Пеньків. – Смоленськ: СГПУ, 2003. – 192 с.

20. Карслоу Г. С. Теория теплопроводности. – М.: Приор, 2002.
21. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М.: Высш. Шк., 1985. – 480 с.
22. Корячко В.П. Теоретические основы САПР / В.П. Корячко, В.М. Курейчик, И.П. Норенков // М.: Энергоатомиздат, 1987. – 400 с.
23. Кузнецов О.П. Дискретная математика для инженера / О.П. Кузнецов, Г.М. Адельсон–Вельский. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 480 с.
24. Ли К. Основы САПР (CAD/CAM/CAE). – СПб.: Питер, 2004. – 560 с.
25. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высш. школа, 1967. – 600 с.
26. Минюк С.А. Дифференциальные уравнения и экономические модели. Учебное пособие / С.А. Минюк, Н.С. Березкина. – Минск: Выш. школа, 2007. – 141 с.
27. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. Учебное пособие. – М.: Наука, 1983. 424 с.
28. Оборський Г.О. Моделювання та забезпечення надійності технічних систем і технологічних процесів. – Одеса: ОДПУ, 1997. – 137 с.
29. Оре О. Теория графов. – М.: Наука, 1980. – 366 с.
30. Оробей В.Ф. Метод граничных интегральных уравнений в расчётах линейных систем / В.Ф. Оробей, А.Ф. Дашенко, Н.Н. Андриенко. – К.: Наукова думка, 1995. – 388 с.
31. Петровский И. Г. Лекции по теории интегральных уравнений. – М., 1999.
32. Пехович А.И. Расчёты теплового режима твёрдых тел / А.И. Пехович, В.М. Жидких. – Л.: Энергия, 1976. – 352 с.
33. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инженерно-технических задач. – М.: Просвещение, 1962. – 184 с.
34. Раскин Л.Г. Нечеткая математика. Основы теории. Приложения / Л.Г. Раскин, О.В. Серая. – Харьков: Парус, 2008. – 352 с.
35. Ротштейн А.П. Интеллектуальные технологии идентификации: нечеткие множества, генетические алгоритмы, нейронные сети. – Винница: УНИВЕРСУМ-Винница, 1999. – 320 с.
36. Самарский А.А. Математическое моделирование / А.А.Самарский, А.П. Михайлов. – М.: Физматлит, 2002. – 320 с.
37. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера. – К.: Техника, 1975. – 768 с.
38. Смирнов В.И. Курс высшей математики. В 4-х томах. – М.: Наука, 1981. 655 с.
39. Советов Б. Я., Яковлев С. А. Моделирование систем. – М.: Высш. шк., 2001. – 343 с.
40. Тёмкин А.Г. Обратные методы теплопроводности. – М.: Энергия, 1973. – 464 с.
41. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики. Учебное пособие / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 735 с.



42. Усов А.В. Моделирование систем с распределенными параметрами / А.В. Усов, А.Н. Дубов, Д.В. Дмитришин. – Одесса: Астропринт, 2003. – 682 с.
43. Усов А.В. Вероятностно-статистическое моделирование технико-экономических систем / А.В. Усов, А.М. Третьяк, А.П. Коновалов, К.А. Дубров. – Одесса: Астропринт, 2003. – 224 с.
44. Хемминг Р.В. Численные методы для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1972. – 400 с.
45. Эндриус Дж. Математическое моделирование / Дж. Эндриус, Р. Мак-Лоун. – М.: Мир, 1979.

### Додаткова

46. Аведьян Э.Д. Алгоритмы настройки многослойных нейронных сетей // Автоматика и телемеханика. – 1995. – № 4. – С. 106 – 118.
47. Алифанов О.М. Идентификация процесса теплообмена летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1979. – 216 с.
48. Алон Н. Вероятностный метод / Алон Н., Спенсер Дж. – М.: Бином, 2007. – 302 с.
49. Алфутов Н.А. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов / Н.А. Алфутов, П.А. Зиновьев, Б.Г. Попов. – М.: Машиностроение, 1984. – 264 с.
50. Амосов А.А. Вычислительные методы для инженеров / А.А. Амосов, Ю.А. Дубинский, Н.В. Копченова. – М.: Высшая школа, 1994. – 544 с.
51. Антонов А.В. Системный анализ: Учеб. для вузов. – М.: Высшая школа, 2004. – 454 с.
52. Арнольд В.И. «Жесткие» и «мягкие» математические модели. – М.: МЦНМО, 2000. – 32 с.
53. Арсенин В.Я. Некорректно поставленные задачи / В.Я. Арсенин, А.Н. Тихонов // Энциклопедия кибернетики. – 1975. – Т. 2. – С. 76 – 78.
54. Артюхин Е.А. Определение коэффициента температуропроводности по данным эксперимента. – Инж.-физ. журн., 1975, 29, № 1. – С. 87 – 90.
55. Бекшаев С.Я. Применение обобщённых координат в расчетах симметричных механических систем // Механика симметричных неоднородных сред и её приложения. – Одесса: ОГАСА, 1997. – С. 18 – 26.
56. Белов В.В. Теория графов / В.В. Белов, В.М. Воробьев, В.Е. Шаталов. – М.: Высшая школа, 1976. – 392 с.
57. Белоусов А.И. Дискретная математика / Белоусов А.И., Ткачев С.Б. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 744 с.
58. Биркгоф Г. Теория структур. – М.: Иностранная литература, 1952. – 407 с.
59. Боголюбов А.Н. Основы математического моделирования. – М. Наука, 1994. – 146 с.
60. Богоявленский О.И. Методы качественной теории динамических си-

стем в астрофизике и газовой динамике. – М.: Наука, 1980. – 320 с.

61. Бондаренко Б.А. Базисные системы полиномиальных и квазиполиномиальных решений уравнений в частных производных. – Ташкент: ФАН, 1987. – 148 с.

62. Булинелий А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. – М.: Физ.мат.лит., 2005. – 394 с.

63. Буришкін М.Л. Проблеми врахування симетрії у дискретних методах механіки. Підсумки та перспективи досліджень / М.Л. Буришкін, В.П. Крижанівський // Механика симметричных неоднородных сред и её приложения. – Одесса: ОГАСА, 1997. – С. 6 – 9.

64. Бурьшкин М.Л. Об учёте симметрии в расчётах стержневых конструкций / М.Л. Бурьшкин, В.А. Семёнов // Динамика и прочность машин. – Харьков, 1974. – Вып. 19. – С. 133 – 141.

65. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем // М.: Наука, 1978. – 400 с.

66. Вагнер Г. Основы исследования операций. Том I. – М.: Мир, 1972. – 336 с.

67. Вагнер Г. Основы исследования операций. Том II. – М.: Мир, 1969. – 495 с.

68. Вагнер Г. Основы исследования операций. Том III. – М.: Мир, 1973. – 504 с.

69. Вапник В.Н., Червоненкис А.Я. Теория распознавания образов. – М.: Наука, 1994. – 409 с.

70. Верлань А.Ф. Системы искусственного интеллекта. Методическое пособие / А.Ф. Верлань, И.А. Чмырь, А.Р. Ахатов, О.Ж. Бобомурадов – Самарканд: СамГУ, 2009. – 121 с.

71. Вороновский Г.К. Генетические алгоритмы, искусственные нейронные сети и проблемы виртуальной реальности / Г.К. Вороновский, К.В. Махотило, С.Н. Петрашев, С.А. Сергеев. – Харьков: Основа, 1997. – 212 с.

72. Гилл Ф. Практическая оптимизация / Ф Гилл., У Мюррей., М. Райт. – М.: Мир, 1985. – 509 с.

73. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1999. – 432 с.

74. Гнеденко Б.Д. Курс теорії ймовірностей. – М.: Наука, 2009. – 423 с.

75. Говорухин В. Компьютер в математическом исследовании. – М.: Наука, 2001. – 633 с.

76. Горбань А.Н. Обучение нейронных сетей. – М.: СП ПараГраф, 1991. – 320 с.

77. Гордеев В.Н. Использование симметрии при создании конструктивных форм // Механика симметричных неоднородных сред и её приложения. – Одесса: ОГАСА, 1997. – С. 50 – 55.

78. Гусев А.С. Расчет конструкций при случайных воздействиях / А.С. Гусев, В.А. Светлицкий. – М.: Машиностроение, 1984. – 240 с.

79. Джеффри Е. Хинтон. Как обучаются нейронные сети // В мире науки. –

1992. – № 11 – 12. – С. 103 – 110.

80. ДСТУ 2860-94. Надійність техніки. Терміни та визначення. – Чинний від 01.01.1996. – К.: Держстандарт України. – 41 с.

81. Дьяконов В.П. Новые информационные технологии: Учебное пособие. Часть 3. Основы математики и математическое моделирование / В.П. Дьяконов, И.В. Абраменкова, А.А. Пеньков. – Смоленск: СГПУ, 2003. – 192 с.

82. Емельянов В.В., Курейчик В.В., Курейчик В.М. Теория и практика эволюционного моделирования. – К.: Физматлит, 2003. – 432 с.

83. Еременко С.Ю. Методы конечных элементов в механике деформируемых тел. – Харьков: Основа, 1991. – 272 с.

84. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.

85. Золотаревский В.С. Механические свойства металлов. – М.: Metallurgy, 1983. – 352 с.

86. Иберпа К. А. Факторный анализ. – М.: Мир, 1983-2. – 376 с.

87. Иванов А.Е. Виртуальная реальность // История философии. Энциклопедия. – Минск, 2002. – С. 183 – 186.

88. Иванов Б.Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы: Уч. пособие. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002 – 288 с.: ил.

89. Извачков Ю.С., Петров В.Н. Информационные системы. Спб.: Питер, 2005. – 656 с.

90. Йореско К.Г. Факторный анализ методами наименьших квадратов и максимального правдоподобия // Статистические методы для ЭВМ. – М.: Наука, 1986. – С. 136 – 169.

91. Касаткіна Н.В. Інформаційні системи та їх застосування / Н.В. Касаткіна, Л.А. Пономаренко, В.О. Філатов. – К.: ПП «Аверс», 2008. – 142 с.

92. Когаловский М.Р. Перспективные технологии информационных систем. – М.: ДМК Пресс, 2003. – 288 с.

93. Коздоба Л.А. Методы решения обратных задач теплопереноса / Л.А. Коздоба, П.Г. Круковский. – К.: Наукова думка, 1982. – 360 с.

94. Кострова Г.В. САПР об'єктів машинобудування: Навч. посібник / Г.В. Кострова, О.С. Савельева, О.Л., Становський. – К.: ІЗМН, 1998. – 192 с.

95. Крупский В. Н. Введение в сложность вычислений. – М.: Факториал, 2006. – 123 с.

96. Кузнецов Е.С. Техническая эксплуатация автомобилей / Е.С. Кузнецов, В.П. Воронов, А.П. Болдин и др. – М.: Транспорт, 1991. – 413 с.

97. Кузьмин М.П. Электрическое моделирование нестационарных процессов теплообмена. – М.: Энергия, 1974. – 416 с.

98. Кускова Т.В. Численное исследование двумерных течений вязкой несжимаемой жидкости // Некоторые применения метода сеток в газовой динамике. – М., 1971. – Вып. 3. – С. 77 – 83. 36.

99. Куссуль Э.М. Ассоциативные нейрореподобные структуры. – К.: Техніка, 1992. – 210 с.

100. Левин С.Ф. Статистический анализ систем обеспечения эксплуатации

технических объектов – М.: АН СССР, 1989. – 248 с.

101. Лескин А.А. Сети Петри в моделировании и управлении / А.А. Лескин, П.А. Мальцев, А.М. Спиридонов. – Л.: Наука, 1989. – 133 с.

102. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.

103. Любарский Г.Я. Теория групп и ее применение в физике. – М.: ГТГИ. – 1957.

104. Ляшко И.И. Методы вычислений (Численный анализ. Методы решения задач математической физики) / И.И. Ляшко, В.Л. Макаров, А.А. Скоробогатко. – К.: Вища школа, 1977. – 408 с.

105. Малинецкий Г.Г. Математические основы синергетики. Хаос, структуры, вычислительный эксперимент, 2008. – 347 с.

106. Масалович А.И. От нейрона к нейрокомпьютеру // Журнал доктора Добба. – 1992. – № 1. – С. 20 – 23.

107. Математическая энциклопедия, Том 3, – М.: Советская энциклопедия, 1992. – 1182 с.

108. Мкртчян С.О. Нейроны и нейронные сети. – М.: Энергия, 1989. – 178 с.

109. Молчанов И.Н. Основы метода конечных элементов / И.Н. Молчанов, Л.Д. Николенко. – К.: Наукова думка, 1989. – 272 с.

110. Нейрокомпьютеры и интеллектуальные роботы / Под ред. Н.М. Амосова. – К.: Наукова думка, 1991. – 272 с.

111. Нечёткие множества и теория возможностей. Последние достижения. – М.: Радио и связь, 1986. – 405 с.

112. Никитенко Н. И. Исследование процессов тепло- и массообмена методом сеток. – Киев : Наук. думка, 1978. – 212 с.

113. Никитенко Н. И. Теория тепломассопереноса. – К.: Наукова думка, 1983. – 352 с.

114. Никитенко Н.И. Сопряжённые и обратные задачи тепломассопереноса. – К.: Наукова думка, 1988. – 240 с.

115. Новиков В.В. Математическое моделирование профиля равного сопротивления / В.В. Новиков, В.Г. Максимов, С.А. Балан, О.Е. Гончарова // Оптимизация в материаловедении. – Одесса: АстроПринт, 1999. – С. 151.

116. Ногин В. Д. Принятия решений в многокритериальной среде. – М.: Физ.мат.лит., 2005. – 170 с.

117. Норри Д. Введение в метод конечных элементов / Д. Норри, Т. Фриз. – М.: Мир, 1981. – 304 с.

118. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – М.: Мир, 1976. – 464 с.

119. Омельченко К.Г. Решение обратной задачи нелинейной теплопроводности по определению теплофизических характеристик / К.Г. Омельченко, В.Г. Пчёлкина. – Инж.-физ. журн., 1975, 29, № 1. – С. 95 – 98.

120. Панкратов Н.М. Ускоренные испытания мобильных машин и их элементов / Н.М. Панкратов, Н.Д. Боровский. – Одесса: Черноморье, 1998. – 198 с.

121. Печат А. Нечёткое моделирование и управление. – М.: БИНОМ, 2009. – 797 с.
122. Писаренко Г.С. Сопротивление материалов / Г.С. Писаренко, В.А. Агарев, А.Л. Квитка и др. – К.: Вища шк., 1986. – 775 с.
123. Писаренко Г.С., Можаровский Н.С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. Справочное пособие. – К.: Наук. думка, 1981. – 496 с.
124. Попырин Л. С. Математическое моделирование и оптимизация теплоэнергетических установок. – М.: Энергия, 1978. – 416 с.
125. Растрингин Л.А. Адаптация сложных систем. Рига: Знатьне, 1981. – 375 с.
126. Расчеты на прочность деталей машин: Справочник / И.А. Биргер и др. – М.: Машиностроение, 1979. – 702 с.
127. Рихтмайер Р. Разностные методы решения краевых задач / Р. Рихтмайер, К. Мортон. – М.: Мир, 1972. – 420 с.
128. Ромалис Н.Б., Тамуж В.П. Разрушение структурно-неоднородных тел. – Рига, 1989. – 224 с.
129. Ротштейн О.П. Застосування нейронних мереж для ідентифікації нелінійних залежностей / О.П. Ротштейн, Ю.І. Мітюшкін // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – 1998. – № 3. – С. 9 – 15.
130. Савула Я.Г. Метод скінченних елементів / Я.Г. Савула, Г.А. Шинкаренко. – Львів: Вид-во Львівського університету, 1976. – 242 с.
131. Сазанов А.А. Четырёхмерная модель мира по Минковскому. – М.: URSS, 2009. – 283 с.
132. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
133. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
134. Словарь по кибернетике / Под ред. В.С. Михалевича. – 2-е изд. – К.: Гл. ред. УСЭ им. М.П. Бажана, 1989. – 751 с.
135. Соколов Е.Н. Нейроинтеллект: от нейрона к нейрокомпьютеру / Е.Н. Соколов, Г.Г. Вайтнявичус. – М.: Наука, 1989. – 283 с.
136. Таненбаум Э., Степ М. Распределенные системы. Принципы и парасигмы. – М.: Мир, 2003. – 893 с.
137. Татт У. Теория графов: Пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 424 с.
138. Теребушко О.И. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
139. Тимошенко С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
140. Тихонов А.Н. Обратные задачи теплопроводности. – Инж.-физ. журн., 1975. – 39. – № 1. – С. 7 – 12.
141. Трудоношин В.А. Математические модели технических объектов / В.А. Трудоношин, И.В. Пивоварова // САПР: В 9 кн. Кн. 4. – М.: Высшая школа, 1986. – 160 с.
142. Уоссермен Ф. Нейрокомпьютерная техника: Теория и практика. – М.:

Мир, 1992.

143. Успенский В.А. Некоторые приложения механики к математике. – М.: Физматлит, 1958. – 49 с.

144. Фёдоров Е.С. Симметрия и структура кристаллов. – М.: АН СССР, 1949. – 631 с.

145. Физический энциклопедический словарь. Т. 3. Максвелла теорема. – М.: Советская энциклопедия, 1963. – 123 с.

146. Чернавский Д.С. Синергетика и информация. Динамическая теория информации. – М.: URSS, 2004. – 287 с.

147. Чмирь И.А. Объектно-ориентированное моделирование / И.А. Чмирь, А.Ф. Верлань. – Одесса: НАДУ, 2005. – 243 с.

148. Шпур Г.Н. Автоматизированное проектирование в машиностроении / Г.Н. Шпур, Ф.Л. Краузе. – М.: Машиностроение, 1988. – 648 с.

149. Шубников А.В. Симметрия в науке и искусстве / А.В. Шубников, В.А. Копчик. – М.: Наука, 1972. – 354 с.

150. Шуп Т. Решение инженерных задач на ЭВМ. Практическое руководство. – М.: Мир, 1982. – 238 с.

151. Эллиот Дж. Симметрия в физике. Т. 1 / Дж. Эллиот, П. Добер. – М.: Мир, 1983. – 368 с.

## АЛФАВІТНИЙ ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

**а**декватність 7  
аналіз концентраційного стану 160  
— НДС 145  
— розмірності 9  
— термічного стану 160  
аналітичні методи 8  
асимптотичні моделі 12

**б**агатоцільова оптимізація 461  
бінарні операції над нечіткими множинами 361

**в**икористання фрагментів структур 268  
випадкові процеси 300  
віртуальний скінченний елемент 221  
віртуальні моделі 183  
— об'єкти 183  
— — багатовимірні 200  
— — двовимірні 183

**г**ексаедральні ізопараметричні елементи 94  
генотип 445  
графи гамільтонові 256  
— ейлерові 256  
графічні методи 8

**д**едукція 12  
декодування «ген – ознака» 448  
дельта-правило розширене 424  
дерева 257  
детерміновані змінні 13  
динаміка відновлюваних систем 279

динамічна система 16  
дискретизація двовимірного простору 79  
— одновимірного простору 68  
— простору-часу 68  
— тривимірного простору 90  
— часу 97  
диференціальне рівняння теплопровідності 44  
— — гіперболічного типу 59  
— — еліптичного типу 61  
— — параболічного типу 42  
дослідження граничних випадків 10  
досяжність та зв'язність 255

**е**волюційні моделі 442  
еквівалентне перетворення 268

**і**зоморфізм графів 258  
ізопараметричні елементи 75  
індукція 12  
інтелектуальні моделі 334

**к**ількість змінних 18  
класифікація симетрії 105  
кодування «ознака – ген» 445  
коефіцієнт ваги параметрів 465  
компромісні розв'язки 462  
крайова задача 27  
критична точка 16

**л**інійні диференціальні рівняння 25  
лінійність 18

**М**арковські ланцюги 304  
— моделі дискретних систем 301  
— — надійності 300  
— — приховані 328  
— процеси 300  
— — з дискретним часом 304  
— — з неперервним часом 312  
математичні моделі 6  
матриці графів 252  
матриця фундаментальна 26  
метод апроксимації 9  
— варіаційний 19  
— віртуального об'єкта 205  
— класичного генетичного алгоритму 442  
— еквівалентних перетворень 9  
— інтегральних перетворень 18, 48  
— — рівнянь 19  
— ітераційний 9  
— скінченно-різницевий 9  
— комплексного ГА 473  
— перетворення координат 18  
— поділу змінних 18  
— прямий (точний) 9  
— розкладання по власних функціях 19  
— скінченних елементів 52  
— статистичних випробувань 9  
— функцій Гріна 19  
механічний аналог повторного навчання 437  
множники Лагранжа 468  
моделі замкнутих систем 36  
— робочих процесів 35  
— у вигляді графів 251  
— у вигляді ДУЧП 42  
— штучних нейронів 400  
моделювання працездатності 321  
модель нейрона узагальнена 413

**Н**авчання стохастичне 424  
— дельта-правило 423  
— конкурентне 424  
— градієнтні методи 425  
— з підкріпленням 431  
— повторне 432  
— правило Гебба 421  
нагромадження ушкоджень 224  
нейрон  $\Sigma$ - $\Pi$  414  
— Гопфілда 410  
— Гроссберга 411  
— Маккаллоха – Піттса 407  
— стохастичний 414  
— Фукушіми 409  
нейронні мережі 400  
немарковські моделі 325  
нестационарні моделі 7  
нечіткі величини, числа та інтервали 387  
— відношення 369  
— відношення переваги 383  
— множини 334  
— моделі 334  
— оператори 359

**О**б'єкт та модель 10  
Однорідність 18  
операції над нечіткими множинами 359  
операції над нечіткими числами 388

**П**еревірка замкнутості 10  
— коректності 10  
— порядків 10  
перетворення моделей 101  
побудова структурної моделі 261  
порядок рівняння 18  
— системи 21  
потенційність 7  
принцип агрегування 8  
— взаємності 142



— еквівалентності 139  
— здійснюваності 7  
— інформаційної достатності 7  
— множинності моделей 7  
— послідовної «поступки» 468  
— рівномірності 467  
— симетрії 101  
— суперпозиції 128  
програмні управління 36  
просторові елементи ермітова типу  
96  
простота 7  
процеси загибелі  
та розмноження 315  
пружні системи 31  
пряме спостереження 12

**Р**івність і домінування нечітких  
множин 359  
рівняння динаміки 31  
— режимів 30  
— систем управління 30  
різницеві системи 28

**С**иметрія скінченних  
елементів 112  
синергетичне поєднання 321  
системи лінійні 23  
скінченні елементи ермітова типу  
73  
— — — — двомірні 89  
— — лагранжевого типу 68  
складність 7  
стабілізація програмних рухів 39  
стаціонарні моделі 7  
стійкість за Ляпуновим 39  
стратегії пошуку в генетичному  
алгоритмі 452  
структура штучного нейрона 400  
структурна стійкість 15

**Т**еорія теплопровідності 42  
тетраедральні елементи 90  
технологія моделювання 8  
топология штучних нейронних  
мереж 415  
трикутні елементи 79

**У**нарні операції над нечіткими  
множинами 360

**Ф**еноменологічні моделі 12  
фенотип 445  
фізичні моделі 6  
форма Коші 21  
функція активації 401  
— належності 342

**Ц**икли 257  
цільова функція  
узагальнена 464

**Ч**исельний метод  
визначення теплофізичних  
характеристик 178  
— — розрахунку НДС 153  
чисельні методи 8, 19  
— — рішення зворотних задач  
тепломасопереносу 171  
— — — прямих задач  
тепломасопереносу 160

**Ш**тучні нейронні  
мережі 415  
— — — навчання 419  
— — — повнозв'язні 419  
— — — прямого поширення 417

## ЗМІСТ

Стор.

ПЕРЕДМОВА РЕДАКТОРА .....	3
<b>ЧАСТИНА I. АНАЛІТИЧНІ МОДЕЛІ.....</b>	<b>6</b>
Розділ 1. ЗАГАЛЬНІ ПИТАННЯ ТЕОРІЇ МОДЕЛЮВАННЯ .....	6
1.1. Основні поняття моделювання .....	6
1.1.1. Основні види моделей та їх властивості .....	6
1.1.2. Мета, принципи та технологія моделювання .....	7
1.1.3. Поняття об'єкта та його моделі .....	10
1.2. Класифікація моделей. Роль моделювання в пізнавальній діяльності .....	12
1.3. Приклади математичних моделей. Форми їх представлень .....	13
1.4. Структурна стійкість математичних моделей .....	15
1.5. Диференціальні рівняння математичної фізики для моделювання технічних систем .....	17
1.6. Питання до самоконтролю .....	20
Розділ 2. МОДЕЛІ У ВИГЛЯДІ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ .....	21
2.1. Загальні поняття .....	21
2.2. Лінійні системи .....	23
2.3. Крайова задача .....	27
2.4. Різницеві системи .....	28
2.5. Рівняння систем управління .....	30
2.6. Розрахункові схеми пружних систем .....	31
2.7. Приклад складання рівнянь .....	33
2.8. Математичні моделі пружних систем .....	34
2.9. Математичні моделі замкнених технологічних систем.....	35
2.10. Програмні управління .....	36
2.10.1. Стійкість за Ляпуновим програмних рухів .....	38
2.10.2. Стабілізація програмних рухів .....	39
2.11. Питання до самоконтролю .....	41
Розділ 3. МОДЕЛІ У ВИГЛЯДІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ .....	42
3.1. Диференціальні рівняння параболічного типу .....	42
3.1.1. Деякі питання теорії теплопровідності .....	42
3.1.2. Диференціальне рівняння теплопровідності .....	44
3.1.3. Метод інтегральних перетворень .....	47
3.1.4. Метод скінченних елементів .....	52
3.2. Диференціальні рівняння гіперболічного типу .....	59
3.3. Диференціальні рівняння еліптичного типу .....	61
3.4. Питання до самоконтролю .....	67

<b>ЧАСТИНА II. СКІНЧЕННОЕЛЕМЕНТНІ МОДЕЛІ .....</b>	<b>68</b>
Розділ 4. ДИСКРЕТИЗАЦІЯ ПРОСТОРУ-ЧАСУ .....	68
4.1. Дискретизація одновимірного простору .....	68
4.1.1. Скінченні елементи лагранжевого типу .....	68
4.1.2. Скінченні елементи ермітова типу .....	73
4.1.3. Ізопараметричні елементи .....	75
4.2. Дискретизація двовимірного простору .....	79
4.2.1. Трикутні елементи .....	79
4.2.2. Трикутні і чотирикутні ізопараметричні елементи .....	82
4.2.3. Двовимірні скінченні елементи ермітова типу .....	89
4.3. Дискретизація тривимірного простору .....	90
4.3.1. Тетраедральні елементи .....	90
4.3.2. Гексаедральні ізопараметричні елементи .....	94
4.3.3. Просторові елементи ермітова типу .....	96
4.4. Дискретизація часу .....	97
4.5. Питання до самоконтролю .....	100
Розділ 5. ПЕРЕТВОРЕННЯ МОДЕЛЕЙ .....	101
5.1. Принцип симетрії .....	101
5.1.1. Загальні положення .....	103
5.1.2. Класифікація симетрії .....	105
5.1.3. Опис симетрій скінченних елементів .....	112
5.2. Принцип суперпозиції .....	128
5.2.1. Загальні положення .....	128
5.2.2. Суперпозиція при симетричному розташуванні джерел .....	137
5.3. Принцип еквівалентності .....	139
5.4. Принцип взаємності .....	142
5.5. Питання до самоконтролю .....	144
Розділ 6. ЗАСТОСУВАННЯ СКІНЧЕННОЕЛЕМЕНТНИХ МОДЕЛЕЙ ..	145
6.1. Аналіз напружено-деформованого стану .....	145
6.1.1. Напружено-деформований стан тіла .....	145
6.1.2. Зв'язок між напруженнями і деформаціями .....	150
6.1.3. Чисельний метод розрахунку напружено-деформованого стану .....	153
6.2. Аналіз термічного і концентраційного станів .....	160
6.2.1. Чисельні методи рішення прямих задач тепломасопереносу .....	160
6.2.2. Чисельні методи рішення зворотних задач тепломасопереносу .....	171
6.2.3. Чисельний метод визначення теплофізичних характеристик .....	178
6.3. Питання до самоконтролю .....	182

<b>ЧАСТИНА ІІІ. СТРУКТУРНІ МОДЕЛІ.....</b>	<b>183</b>
Розділ 7. ВІРТУАЛЬНІ МОДЕЛІ .....	183
7.1. Віртуальні об'єкти .....	183
7.1.1. Двовимірні віртуальні об'єкти .....	183
7.1.2. Багатовимірні віртуальні об'єкти .....	200
7.2. Застосування методу віртуального об'єкта .....	205
7.2.1. Розрахунок статично невизначених систем .....	209
7.2.2. Розрахунок оптимальних перетинів .....	217
7.2.3. Віртуальний скінченний елемент .....	221
7.2.4. Моделювання нагромадження ушкоджень .....	224
7.2.5. Розрахунок параметрів управління. ....	241
7.3. Питання до самоконтролю .....	249
Розділ 8. МОДЕЛІ У ВИГЛЯДІ ГРАФІВ .....	251
8.1. Основні визначення .....	251
8.2. Матриці графів .....	252
8.3. Досяжність та зв'язність .....	255
8.4. Ейлерові та гамільтонові графи .....	256
8.5. Деревя та цикли .....	257
8.6. Ізоморфізм графів та проблеми аналітичних методів його виявлення .....	258
8.7. Морфологічні моделі на основі ізоморфних структур .....	261
8.7.1. Експериментально-статистичний метод виявлення ізоморфізму графів .....	261
8.7.2. Методи забезпечення ізоморфності структур .....	263
8.7.3. Приведення структури реального об'єкта до представлення у вигляді графа необхідної форми .....	268
8.7.4. Еквівалентні перетворення моделі механічної конструкції ..	268
8.8. Морфологічні моделі надійності об'єктів із резервованою структурою .....	279
8.8.1. Динаміка відновлюваних систем .....	279
8.8.2. Моделювання працездатності в міру внесення пошкоджень в структуру .....	282
8.9. Питання до самоконтролю .....	297
Розділ 9. МАРКОВСЬКІ МОДЕЛІ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ .....	300
9.1. Марковські процеси .....	300
9.1.1. Поняття випадкового процесу .....	300
9.1.2. Класифікація марковських випадкових процесів .....	301
9.1.3. Марковські процеси з дискретним часом. Марковські ланцюги .....	304
9.1.4. Марковські процеси з неперервним часом (напівмарковські процеси) .....	312
9.2. Процеси загибелі та розмноження .....	315
9.3. Синергетичне поєднання можливостей марковських моделей ..	321
9.4. Немарковські моделі .....	325
9.5. Приховані марковські моделі .....	328
9.6. Питання до самоконтролю .....	333

<b>ЧАСТИНА IV. ІНТЕЛЕКТУАЛЬНІ МОДЕЛІ.....</b>	<b>334</b>
Розділ 10. НЕЧІТКІ МОДЕЛІ .....	334
10.1. Основні поняття та визначення .....	334
10.1.1. Основні визначення .....	334
10.1.2. Основні характеристики нечітких множин .....	338
10.1.3. Основні типи функції належності .....	342
10.1.4. Методи побудови функції належності нечітких множин ..	352
10.2. Операції над нечіткими множинами .....	359
10.2.1. Рівність і домінування нечітких множин .....	359
10.2.2. Унарні операції над нечіткими множинами .....	360
10.2.3. Бінарні операції над нечіткими множинами .....	361
10.2.4. Нечіткі оператори .....	367
10.3. Нечіткі відношення .....	369
10.3.1. Нечіткі відношення і способи їхнього завдання .....	369
10.3.2. Основні характеристики нечітких відношень .....	373
10.3.3. Операції над нечіткими відношеннями .....	375
10.3.4. Відображення нечітких множин .....	378
10.3.5. Властивості бінарних нечітких відношень, заданих на одному універсумі .....	379
10.3.6. Нечіткі відношення переваги .....	383
10.4. Нечіткі величини, числа та інтервали .....	387
10.4.1. Основні визначення .....	387
10.4.2. Операції над нечіткими числами .....	388
10.5. Питання до самоконтролю .....	399
Розділ 11. НЕЙРОННІ МЕРЕЖІ .....	400
11.1. Основні поняття штучних нейронних мереж .....	400
11.1.1. Структура штучного нейрона .....	400
11.1.2. Функція активації .....	401
11.2. Моделі штучних нейронів .....	407
11.2.1. Формальна модель нейрона Маккаллоха – Піттса .....	407
11.2.2. Модель нейрона Фукушіми .....	409
11.2.3. Модель штучного нейрона Гопфільда .....	410
11.2.4. Модель Гроссберга .....	411
11.2.5. Узагальнена модель нейрона .....	413
11.2.6. $\Sigma$ - $\Pi$ -нейрон .....	414
11.2.7. Стохастичний нейрон .....	414
11.3. Топологія ШНМ .....	415
11.3.1. ШНМ прямого поширення .....	417
11.3.2. ШНМ зворотного поширення .....	417
11.3.3. Повнозв'язні ШНМ .....	419
11.4. Навчання ШНМ .....	419
11.4.1. Правило навчання Гебба .....	421
11.4.2. Дельта-правило .....	423
11.4.3. Розширене дельта-правило .....	424

11.4.4. Конкурентне навчання .....	424
11.4.5. Стохастичне навчання .....	424
11.4.6. Градієнтні методи навчання .....	425
11.4.7. Навчання з підкріпленням .....	431
11.5. Повторне навчання .....	432
11.5.1. Вплив повторного навчання на відмовостійкість НМ .....	432
11.5.2. Механічний аналог повторного навчання ШНМ .....	437
11.6. Питання до самоконтролю .....	441
Розділ 12. ЕВОЛЮЦІЙНІ МОДЕЛІ .....	442
12.1. Метод класичного генетичного алгоритму .....	442
12.1.1. Переваги генетичних алгоритмів .....	444
12.1.2. Термінологія .....	444
12.1.3. Принципи побудови генетичних алгоритмів .....	444
12.1.4. Визначення фенотипу об'єкта за його генотипом .....	445
12.1.5. Кодування «ознака – ген» .....	445
12.1.6. Декодування «ген – ознака» .....	448
12.2. Стратегія ГА та основні генетичні оператори .....	448
12.2.1. Схема функціонування класичного ГА .....	451
12.2.2. Стратегії пошуку .....	452
12.2.3. Відмінність від класичного пошуку .....	454
12.3. Приклади генетичної оптимізації .....	454
12.4. Багатоцільова оптимізація .....	461
12.4.1. Компромісні розв'язки .....	462
12.4.2. Основні поняття та визначення .....	463
12.4.3. Узагальнена цільова функція .....	464
12.4.4. Визначення коефіцієнтів ваги параметрів .....	465
12.4.5. Безпосереднє призначення коефіцієнтів ваги .....	465
12.4.6. Оцінка важливості параметрів у балах .....	466
12.4.7. Принципи рівномірності .....	467
12.4.8. Принцип послідовної «поступки» .....	468
12.4.9. Використання множників Лагранжа .....	468
12.5. Метод комплексного генетичного алгоритму .....	473
12.5.1. Перетворення фенотипу в генотип .....	474
12.5.2. Схрещування .....	476
12.5.3. Розрахунки пристосованості та вибір .....	479
12.5.4. Критерій зупинки .....	479
12.5.5. Загальний алгоритм методу КГА .....	479
12.6. Питання до самоконтролю .....	481
 ЗАКЛЮЧЕННЯ .....	 482
ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ .....	483
АЛФАВІТНИЙ ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК .....	491

**Усов А.В., Савельєва О.С., Становська І.І., Перпері А.О.**

М34 Математичні методи моделювання. Підручник / Під ред. О.Л. Становського. – Одеса: ВМВ, 2011. – 500 с.

**ISBN**

У підручнику розглянуті методи та засоби математичного моделювання об'єктів машинобудування (конструкцій, технологічних процесів, тощо). Наведені основні засади побудови та експлуатації аналітичних, скінченноелементних, структурних та інтелектуальних математичних моделей.

Підручник розрахований на студентів і аспірантів вищих технічних навчальних закладів, які навчаються за машинобудівними спеціальностями.

ББК В22  
УДК 51-74: 004.942

*Навчальне видання*

**УСОВ Анатолій Васильович  
САВСЬКА Оксана Степанівна  
СТАНОВСЬКА Іраїда Іванівна  
ПЕРПЕРІ Алла Олександрівна**

**МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ  
Підручник**

Науковий редактор **О. Л. Становський**

Здано у виробництво . Підписано до друку .  
Формат 60×84/16. Папір офсетний. Гарнітура Таймс.  
Друк офсетний. Ум. друк. арк. . Тираж 500 прим.  
Зам. № .

Надруковано з готового макету у друкарні «Апрель»  
СПД Бондаренко М.О.  
м. Одеса, вул. Велика Арнаутська, 60  
т. 0482-33-79-76  
Лицензия на издательскую деятельность ДК № 381 от 26.03.2001 г.  
ООО «ВМВ»  
Украина, 65053, Одесса, пр-т Добровольского, 82-а. Тел. 731-14-87