МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ "ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
Кафедра вищої математики та моделювання систем

КОСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
З КУРСУ

«Вища математика»

Для здобувачів вищої освіти за освітнім ступенем бакалавра за спеціальностями:
– 281 Публічне управління та адміністрування,
– 073 Менеджмент.
Інституту бізнесу, економіки та інформаційних технологій (ІБЕІТ)

Одеса 2022

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ "ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
Кафедра вищої математики та моделювання систем

КОСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
З КУРСУ

«Вища математика»

Для здобувачів вищої освіти за освітнім ступенем бакалавра за спеціальностями:
– 281 Публічне управління та адміністрування,
– 073 Менеджмент.
Інституту бізнесу, економіки та інформаційних технологій (ІБЕІТ)

Затверджено на засіданні
кафедри вищої математики
та моделювання систем
Протокол № 9 від 21.04.22 р.

Одеса 2022

Конспект лекцій по курсу «Вища математика» Для здобувачів вищої освіти за освітнім ступенем бакалавра за спеціальностями: – 281 Публічне управління та адміністрування, – 073 Менеджмент. Інституту бізнесу, економіки та інформаційних технологій (ІБЕІТ) / Укладач: О.В. Жарова. – Одеса: НУ "ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА", 2022 - 123 с.

Укладач: О.В. Жарова, канд. фіз.-мат. наук, доц.

ЗМІСТ

Стор.

МЕТА ТА ЗАВДАННЯ ДИСЦИПЛІНИ, ЇЇ МІСЦЕ І ЗНАЧЕННЯ У НАВЧАЛЬНОМУ ПРОЦЕСІ

Предметом вивчення математики є кількісні відношення та просторові форми дійсного світу. Математичні об’єкти утворюються шляхом ідеалізації властивостей реальних об’єктів та запису цих властивостей формальною мовою.

Метою викладання та вивчення здобувачами даної частини курсу є формування особистості здобувачів, розвиток їх інтелекту та здібностей до логічного і алгоритмічного мислення. Навчити майбутніх фахівців володіти основами математичного апарату, необхідного під час розв'язання та аналізу економічних задач із застосуванням комп'ютерних технологій, підготовка здобувачів до вивчення інших дисциплін, підготовка здобувачів до науково-дослідної роботи; розвиток у здобувачів навичок використання математичних методів досліджених під час підготовки курсових та дипломних робіт; розробка та аналіз математичні моделі тих чи інших економічних процесів та виробити навички математичного дослідження прикладних задач економістів; навчити самостійно користуватися літературою з вищої математики і застосувати її в прикладних задачах економіки та менеджменту.

Для досягнення мети вивчення даної частини курсу здобувачі повинні навчитися використовувати набуті математичні знання під час розв'язання економічних задач; розв’язувати типові математичні задачі з доведенням їх до практичного прийнятного результату з використанням різних обчислювальних засобів; аналізувати одержані результати на їх основі розробляти практичні рекомендації.

Дисципліна “Вища математика” є вихідною дисципліною обов’язковою частини загальної підготовки першого (бакалаврського) рівня. Викладання вищої математики ґрунтується на знаннях, отриманих при вивченні курсі елементарної математики (алгебри, геометрії та початків математичного аналізу), що вивчається в школах, ліцеях, коледжах та інших середніх навчальних закладах.

Курс вищої математики являється базовим в освіті фахівця. Передує вивченню наступних навчальних дисциплін, які використовують апарат вищої математики. Його задача: забезпечити можливість успішного оволодіння фундаментальними та спеціальними дисциплінами, для яких математика являється універсальною мовою. Знання та вміння, отримані при вивченні вищої математики, використовуються при опануванні дисциплін математичного циклу і основних дисциплін циклів природничо-наукової, загальнонаукової та професійної підготовки фахівця: інформаційні системи та технології, статистика, економічна теорія, фінанси, гроші ті кредит, міжнародні економічні відносини, менеджмент, економіка і фінанси підприємства, банківський менеджмент, облік і аудит, маркетинг, зовнішньоекономічна діяльність підприємства, операційний менеджмент, інноваційно-інвестиційна діяльність, комплексний аналіз, теорія організацій, міжнародна статистика.

Дисципліна має націлити майбутніх фахівців на осмислене і творче застосування отриманих знань в їх практичній діяльності.

Програма визначає обсяги компетентностей, які повинен опанувати здобувач відповідно до освітньо-професійної програми, алгоритму вивчення навчального матеріалу дисципліни “Вища математика”, необхідне методичне забезпечення, складові та технологію оцінювання навчальних досягнень.

Розширений план лекцій з дисципліни «Вища математика».

Лекція 1. Поняття матриці. Визначники та їх обчислення. Формули Крамера.

1.1. Матриці (основні поняття).
1.2. Визначники другого, третього порядків, правила їх обчислення.
1.3. Мінори та алгебраїчні доповнення, властивості визначників.
1.4. Визначники вищих порядків.
1.5. Розв’язання квадратних лінійних систем за формулами Крамера.

Лекція 2. Дії над матрицями. Обернена матриця.

2.1. Дії над матрицями (лінійні, множення, транспонування).
2.2. Обернена матриця (означення, обчислення, властивості).
2.3. Матричний запис системи n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими. Розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) матричним способом (за допомогою оберненої матриці).

Лекція 3. Дослідження СЛАР.

3.1. Ранг матриці та різні методи його обчислення.
3.2. Зв'язок розв’язку СЛАР з рангом її матриці. Теорема Кронекера-Капеллі.
3.3. Дослідження лінійних систем.
3.4. Метод Гауса, Жордано-Гауса.

Лекція 4. Комплексні числа та дії над ними.

4.1. Алгебраїчна форма комплексного числа. Зображення комплексних чисел, які задані в алгебраїчній формі, на комплексні площині.
4.2. Дії над комплексними числами, які задані в алгебраїчній формі. Приклади.
4.3. Тригонометрична та показникова форми запису комплексних чисел.
4.4. Дії над комплексними числами, які задані в тригонометричній та в показниковій формі. Формула Муавра. Приклади.

Лекція 5. Елементи векторної алгебри.

5.1. Основні поняття. Лінійні дії над векторами. Проекція вектора на вектор. Базис.
5.2. Скалярний добуток векторів, його властивості та застосування.

Лекція 6. Пряма на площині.

6.1. Рівняння прямої на площині.
6.2. Взаємне розміщення прямих на площині. Основні задачі.

Лекція 7. Криві другого порядку.

7.1.Криві другого порядку: коло, еліпс, гіпербола, парабола (канонічні рівняння, побудова).
7.2.Розв’язання задач.

Лекція 8. Функції однієї змінної, основні поняття. Числові послідовності.

8.1. Числові множини.
8.2. Поняття функції, основні характеристики функції, складна та обернена функції.
8.3. Основні елементарні функції, їх властивості та графіки.
8.4. Поняття числової послідовності.
8.5. Обмежені та монотонні послідовності.

Лекція 9. Границя числової послідовності. Основні теореми о границях числової послідовності. Границя функції.

9.1. Границя послідовності. Приклади збіжних та розбіжних послідовностей.
9.2. Нескінченно мала та нескінченно велика послідовності, зв’язок між ними.
9.3. Основні теореми о границях послідовності.
9.4. Різні означення границі функції у точці.
9.5. Односторонні границі. Границі функції при $x \to \pm\infty$.
9.6. Нескінченно великі та нескінченно малі функції. Приклади.
9.7. Зв'язок між нескінченно великими та нескінченно малими функціями.

Лекція 10. Границя функції (продовження).

10.1. Основні теореми про границі функції.
10.2. Перша та друга важливі (чудові) границі.
10.3. Еквівалентні нескінченно малі функції.
10.4. Застосування співвідношень еквівалентності при обчислені границь функцій.

Лекція 11. Неперервність функцій.

11.1. Неперервність функції у точці, на відрізку.
11.2. Неперервність елементарних функцій.
11.3. Основні властивості функцій, неперервних на відрізку.
11.4. Точки розриву функції та їх класифікація.

Лекція 12. Диференціювання функції однієї змінної. Методи диференціювання.

12.1. Означення похідної. Геометричний зміст похідної. Рівняння дотичної.
12.2. Зв'язок між неперервністю та диференційованістю функції.
12.3. Основні правила та формули диференціювання. Похідна складної та оберненої функцій; похідна функції, заданої неявно; похідна функції, заданої параметрично; логарифмічне диференціювання.
12.4. Таблиця похідних основних елементарних функцій.

**Лекція 13. Диференціал. Похідні та диференціали вищих порядків.
Основні теореми диференціального числення та їх застосування.**

13.1. Диференціал функції. Правила знаходження диференціалів.
13.2. Похідні та диференціали вищих порядків.
13.3. Основні теореми диференціального числення та їх застосування: теорема Ролля, теорема Коші, теорема Лагранжа, теорема Ферма. Геометричний зміст основних теорем диференціального числення.
13.4. Правило Лопіталя.

Лекція 14. Дослідження поведінки функції однієї змінної. Застосування диференціального числення для побудови графіку функції.

14.1. Зростання та спадання функції. Екстремуми функції. Достатні умови існування екстремуму функції.
14.2. Найбільше і найменше значення функції на відрізку.
14.3. Опуклість графіку функції, точки перегину. Необхідна та достатня умови існування точки перегину.
14.4. Асимптоти графіка функції.
14.5. Загальний план повного дослідження функції.
14.6. Приклади побудови графіків функцій.

**Лекція 15. Границя, неперервність, частинні похідні функції декількох змінних (ФДЗ).
Диференціал ФДЗ, похідні вищих порядків. Застосування похідних ФДЗ.
Екстремум ФДЗ.**

15.1. Означення, геометричний зміст ФДЗ, окіл точки.
15.2. Границя, неперервність ФДЗ.
15.3. Частинні прирости та похідні, диференційованість ФДЗ.
15.4. Диференціал ФДЗ, його застосування в наближених обчисленнях
15.5. Повна та частинна похідні складної функції.
15.6. Похідна функції однієї змінної, заданої неявно.
15.7. Похідні вищих порядків.
15.8. Градієнт, похідна за напрямком.
15.9. Рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні.
15.10. Необхідні та достатні умови існування локального екстремуму ФДЗ.
15.11. Необхідні та достатні умови існування умовного екстремуму ФДЗ. Знаходження найменшого та найбільшого значень ФДЗ в обмеженій, замкненій області.

Лекція 1. Поняття матриці. Визначники та їх обчислення. Формули Крамера.

1.1. Основні поняття.
1.2. Визначники другого, третього порядків, правила їх обчислення.
1.3. Мінори та алгебраїчні доповнення, властивості визначників.
1.4. Визначники вищих порядків.
1.5. Розв’язання квадратних лінійних систем за формулами Крамера.

1.1. Основні поняття

Предметом розгляду лінійної алгебри для економістів є насамперед теорія систем лінійних рівнянь, які в загальному вигляді можна подати так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1.1)$$

Система (1.1) називається *системою m лінійних рівнянь з n невідомими (змінними)*, де $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — *невідомі*; a_{ij} $\left(i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n}\right)$ — *коефіцієнти системи рівнянь*; b_i $\left(i = \overline{1, m}\right)$ — *вільні члени, або праві частини системи рівнянь*.

Якщо всі $b_i = 0$ $\left(i = \overline{1, m}\right)$, то система лінійних рівнянь називається *однорідною*.

Розв’язком системи рівнянь (1.1) є множина таких чисел $k_1, k_2, \ldots, k_n$, у результаті підставляння яких замість відповідних невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$ у кожне з рівнянь системи (1.1) останні перетворюються на правильні числові рівності.

Якщо система рівнянь не має жодного розв’язку, вона називається *несумісною*, а якщо має хоча б один розв’язок — *сумісною*. Сумісна система рівнянь називається *визначеною*, якщо вона має єдиний розв’язок, і *невизначеною*, якщо розв’язків більш як один.

Розглянемо математичний об’єкт, пов’язаний із системою рівнянь (1.1).

Означення. *Матрицею* називається прямокутна таблиця чисел, яка має m рядків і n стовпців. Якщо повернутися до системи рівнянь (1.1), то коефіцієнти при невідомих у лівій частині якраз і утворюють таку прямокутну таблицю:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа a_{ij} називаються *елементами матриці*, а запис $m \times n$ означає її *розмір*. Зауважимо, що на першому місці в цьому запису зазначено кількість рядків матриці, а на другому — кількість стовпців. Наприклад, запис розміру матриці 5×3 означає, що в ній п’ять рядків і три стовпці. Якщо кількість рядків матриці дорівнює кількості її стовпців, то матриця називається *квадратною*.

Дві матриці *рівні між собою*, якщо вони мають однаковий розмір і всі їх відповідні елементи рівні між собою.

Елементи з двома однаковими індексами $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots a_{nn}$ утворюють *головну діагональ матриці*. Якщо $a_{ij} = a_{ji}$, то матриця називається *симетричною*.

Квадратна матриця, в якої елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці, а всі інші нулю, називається *одиничною матрицею*:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Коли всі елементи матриці, що містяться по один бік від головної діагоналі, дорівнюють нулю, то матриця *називається трикутною.*

1.2. Визначники другого і третього порядків, їх властивості.

Кожній квадратній матриці можна поставити у відповідність визначник, який складається з тих самих елементів.

$$\Delta(A)=\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Якщо такий визначник відмінний від нуля, то матриця називається *неособливою*, або *невиродженою*. Якщо визначник дорівнює нулю, то матриця *особлива*, або *вироджена*.

Розглянемо спочатку системи рівнянь, в яких кількість невідомих і кількість рівнянь рівні між собою, тобто $m = n$. Нехай, наприклад, $n = m = 2$, тоді маємо систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

Визначником другого порядку називається вираз

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Приклад.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=2\cdot 3-(-1)\cdot 4=10.$$

Якщо $n = m = 3$, то маємо систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими:

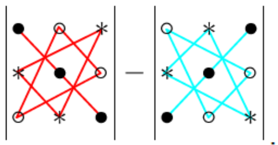
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Визначником третього порядку називається вираз:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}. \qquad (1.2)$$

Для запам'ятовування правила обчислення визначника третього порядку пропонуємо таку схему (правило трикутників):



Позначимо точками елементи визначника, тоді доданки зі знаком «плюс» — це добутки елементів a_{11}, a_{22}, a_{33}, розміщених на *головній діагоналі* визначника, і добутки елементів a_{13}, a_{21}, a_{32} і a_{12}, a_{23}, a_{31}, розміщених у вершинах рівнобедрених трикутників, основи яких паралельні головній діагоналі. Зі знаком «мінус» беруться доданки, що є добутками елементів a_{13}, a_{22}, a_{31}, розміщених на сторонній діагоналі визначника, та у вершинах рівнобедрених трикутників, основи яких паралельні сторонній діагоналі визначника — a_{11}, a_{23}, a_{32} і a_{12}, a_{21}, a_{33}.

Запропонуємо ще одне правило обчислення визначника третього порядку (правило Саррюса).

У початковому визначнику за третім стовпцем запишемо ще раз перший і другий стовпці:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Для знаходження визначника за цим правилом треба утворити зі знаком «плюс» алгебраїчну суму добутків елементів, розміщених на головній діагоналі визначника, і на діагоналях, паралельних їй, а зі знаком «мінус» — добутків елементів, розміщених на сторонній діагоналі, та на діагоналях, паралельних їй.

$$\Delta = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{-} \underbrace{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}}_{+} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Визначник:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

рядки якого є стовпцями попереднього визначника, є *транспонованим* щодо визначника (1.2).

Властивість 1. Визначник не змінюється в результаті транспонування.

З властивості 1 випливає, що будь-яке твердження, котре справджується для рядків визначника, справджується і для його стовпців, і навпаки.

Властивість 2. Якщо один із рядків визначника складається лише з нулів, то такий визначник дорівнює нулю.

Властивість 3. Якщо поміняти місцями будь-які два рядки визначника, то його знак зміниться на протилежний.

Властивість 4. Визначник, який має два однакові рядки, дорівнює нулю.

Властивість 5. Якщо елементи будь-якого рядка визначника помножити на стале число C, то й визначник помножиться на C.

З останньої властивості випливає, що спільний множник елементів рядка можна виносити за знак визначника.

Властивість 6. Визначник, який має два пропорційні рядки, дорівнює нулю.

Властивість 7. Якщо всі елементи будь-якого рядка визначника можна подати у вигляді суми двох доданків, то такий визначник дорівнює сумі двох визначників, у яких елементами цього рядка будуть відповідно перший доданок у першому визначнику і другий доданок у другому визначнику, а решта елементів будуть ті самі, що й у початковому визначнику.

Властивість 8. Визначник не зміниться, якщо до елементів будь-якого рядка додати відповідні елементи довільного іншого рядка, попередньо помножені не деяке число.

1.3. Мінори та алгебраїчні доповнення.

Нехай визначник має n рядків і n стовпців. *Мінором k-го порядку* $k \in [1;\ n-1]$ називається визначник, утворений з елементів, розміщених на перетині будь-яких k рядків і k стовпців визначника. Зрозуміло, що мінор першого порядку — це будь-який елемент визначника.

Приклад. Утворити кілька мінорів другого і один мінор третього порядку такого визначника:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 6 & -7 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$M_2^1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},\ M_2^2 = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 0 & -1 \end{vmatrix},\ M_2^3 = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \ldots,\ M_3^1 = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 2 & -7 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Мінори M_2^1, M_2^2, M_2^3 другого порядку утворюються з елементів, розміщених на перетині першого, другого рядків; першого, другого стовпців; третього, четвертого рядків; першого, третього стовпців; другого, четвертого рядків; третього, четвертого стовпців. Мінор M_3^1 третього порядку утворюється з елементів, розміщених на перетині другого, третього, четвертого рядків і першого, третього, четвертого стовпців.

Верхній індекс означає нумерацію мінорів; нижній індекс — порядок мінора.

Доповняльним мінором для мінора k-го порядку називається такий мінор, який лишається у визначнику після викреслювання тих k рядків і тих k стовпців, на перетині яких містяться елементи, що утворили мінор k-го порядку.

Нехай мінор k-го порядку утворено з елементів, розміщених на перетині $i_1, i_2, \ldots, i_k$ рядків і $j_1, j_2, \ldots, j_k$ стовпців.

Алгебраїчним доповненням до мінора k-го порядку є доповняльний мінор $(n–k)$-го порядку, узятий зі знаком $(-1)^{S_m}$, де $S_m = i_1 + i_2 + \ldots + i_k + j_1 + j_2 + \ldots + j_k$. Якщо сума S_m номерів рядків і стовпців парна, то береться знак «+», якщо непарна — то знак «–».

Далі важливу роль відіграватиме алгебраїчне доповнення до мінора першого порядку. Нехай a_{ij} — будь-який елемент-мінор першого порядку у визначнику n-го порядку, тоді $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{n-1}$ буде алгебраїчним доповненням до мінора a_{ij}. Тут M_{n-1}— доповняльний мінор $(n–1)$-го порядку, утворений викреслюванням i-рядка і j-стовпця в початковому визначнику n-го порядку.

1.4. Визначники вищих порядків.

Означення. *Визначником n-го порядку* називається число Δ, яке дорівнює алгебраїчній сумі добутків елементів будь-якого рядка або стовпця на відповідні їм алгебраїчні доповнення:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{ij}A_{ij} + \ldots + a_{in}A_{in} =$$

$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{ij}A_{ij} + \ldots + a_{nj}A_{nj}. \quad (1.3)$$

Алгебраїчні доповнення, що входять до формули (1.3), за якою обчислюють визначник, є, у свою чергу, мінорами, узятими з відповідними знаками, тобто визначниками $(n–1)$-го порядку. Отже, обчислення визначника n-го порядку зводиться до обчислення n визначників $(n–1)$-го порядку.

Але з формули (1.3) випливає, що за наявності у визначнику нульових елементів відповідні алгебраїчні доповнення обчислювати не потрібно.

Згідно з властивістю 8, яка справджується для визначників будь-якого порядку, можна визначник перетворити так, щоб у його рядках або стовпцях усі елементи, крім одного, дорівнювали нулю. І тоді, розклавши визначник за елементами цього рядка або стовпця, *зведемо задачу знаходження визначника n-го порядку до знаходження* ***одного*** *визначника n–1-го порядку.*

Властивість 9. Сума добутків елементів рядка або стовпця визначника n-го порядку на алгебраїчні доповнення до елементів іншого рядка або стовпця цього самого визначника дорівнює нулю.

1.5. Розв'язання квадратних лінійних систем за формулами Крамера.

Розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1.4)$$

Теорема.

Якщо головний визначник Δ, складений із коефіцієнтів при невідомих системи n лінійних рівнянь з n невідомими (1.4), відмінний від нуля, то така система рівнянь має єдиний розв'язок (сумісна і визначена), який обчислюється за формулами:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ \ldots,\quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

де Δ — головний визначник системи, який утворюється з коефіцієнтів при невідомих у лівій частині системи (1.4);

Δ_j — визначник, який утворюється заміною j-го стовпця в головному визначнику на стовпець вільних членів.

Приклад.

Розв'язати систему лінійних рівнянь за правилом Крамера.

$$\begin{cases} 2x + 7y + z = -17, \\ 7x + 3y + 5z = 8, \\ 3x + 2y + 6z = 9. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему лінійних рівнянь за правилом Крамера. Для цього обчислимо головний визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 7 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot3\cdot6 + 1\cdot7\cdot2 + 7\cdot5\cdot3 - 1\cdot3\cdot3 - 2\cdot5\cdot2 - 7\cdot7\cdot6 =$$
$$= 36 + 14 + 105 - 9 - 20 - 294 = -168.$$

Так як $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок.

Обчислимо додаткові визначники, замінюючи по черзі перший, другий та третій стовбець головного визначника стовбцем вільних елементів:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -17 & 7 & 1 \\ 8 & 3 & 5 \\ 9 & 2 & 6 \end{vmatrix} = (-17)\cdot3\cdot6 + 8\cdot2\cdot1 + 7\cdot5\cdot9 - 1\cdot3\cdot9 - 2\cdot5\cdot(-17) - 8\cdot7\cdot6 =$$
$$= -306 + 16 + 315 - 27 + 170 - 336 = -168;$$
$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -17 & 1 \\ 7 & 8 & 5 \\ 3 & 9 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot8\cdot6 + 7\cdot9\cdot1 + 3\cdot(-17)\cdot5 - 1\cdot8\cdot3 - 2\cdot5\cdot9 - 7\cdot6\cdot(-17) =$$
$$= 96 + 63 - 255 - 24 - 90 + 714 = 504;$$
$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 7 & -17 \\ 7 & 3 & 8 \\ 3 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 2\cdot3\cdot9 + 7\cdot8\cdot3 + 7\cdot2\cdot(-17) - (-17)\cdot3\cdot3 - 2\cdot2\cdot8 - 7\cdot7\cdot9 =$$
$$= 54 + 168 - 238 + 153 - 32 - 441 = -336.$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-168}{-168} = 1;\quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{504}{-168} = -3;\quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-336}{-168} = 2.$$

Отже, {1; –3; 2} – шуканий розв'язок системи лінійних рівнянь.

Лекція 2. Дії над матрицями. Обернена матриця.

2.1. Дії над матрицями (лінійні, множення, транспонування).

2.2. Обернена матриця (означення, обчислення, властивості).

2.3. Матричний запис системи n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) матричним способом (за допомогою оберненої матриці).

2.1. Дії з матрицями.

Сумою матриць одного й того самого порядку $A=(a_{ij})$ і $B=(b_{ij})$ називається матриця $C=A+B$; $C=(c_{ij})$, будь-який елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів матриць A і B: $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$. Наприклад обидві матриці $A=\begin{pmatrix} 5 & -8 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -7 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & -7 & 10 \\ 1 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ мають розмір 3×4, тому за означенням можна утворити їх суму — матрицю

$$C=\begin{pmatrix} 5+0 & -8+1 & 0+2 & 2-1 \\ 4+5 & 3+6 & 1-7 & 2+10 \\ -1+1 & 2-3 & -7+4 & 3+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -7 & 2 & 1 \\ 9 & 9 & -6 & 12 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. *Добутком матриці* $A=(a_{ij})$ *на деяке число* α називається така матриця C, кожен елемент якої c_{ij} утворюється множенням відповідних елементів матриці A на α, $c_{ij}=\alpha a_{ij}$.

Приклад.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ \alpha=-2;\ C=\alpha A=\begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -6 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що для суми матриць і добутку матриць на число виконуються рівності:

1) $A+B=B+A$; 2) $\alpha A=A\alpha$; 3) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$; 4) $(\alpha+\beta)A= \ =\alpha A+\beta A$, 5) $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$.

3. *Добутком матриці* $A=(a_{ij})$ розміру $m\times p$ на матрицю $B=(b_{ij})$ розміру $p\times n$ називається така матриця $C=AB$ розміру $m\times n$, $C=(c_{ij})$, кожний елемент можна знайти за формулою:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ip}b_{pj}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}.$$

Кожний елемент матриці C утворюється як сума добутків відповідних елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B, тобто за схемою:

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} \vdots & b_{1j} & \vdots \\ \vdots & b_{2j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & b_{pj} & \vdots \end{pmatrix}$$

Зазначимо, що в результаті множення дістанемо матрицю розміру $m\times n$.

З означення випливає, що добуток матриць *некомутативний*: $AB\neq BA$.

Приклад.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -11 & 4 & 5 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot 0+(-2)\cdot(-11)+0\cdot(-3) & 1\cdot 1+(-2)\cdot 4+0\cdot(-1) & 1\cdot 0+(-2)\cdot 5+0\cdot 2 \\ 3\cdot 0+5\cdot(-11)+(-3)\cdot(-3) & 3\cdot 1+5\cdot 4+(-3)\cdot(-1) & 3\cdot 0+5\cdot 5+(-3)\cdot 2 \\ 2\cdot 0+0\cdot(-11)+(-1)\cdot(-3) & 2\cdot 1+0\cdot 4+(-1)\cdot(-1) & 2\cdot 0+0\cdot 5+(-1)\cdot 2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 22 & -7 & -10 \\ -46 & 26 & 19 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix};$$

2.2. Обернена матриця.

Означення. Матриця A^{-1} називається ***оберненою матрицею до квадратної невиродженої матриці*** A, якщо виконується співвідношення: $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Нехай дано квадратну матрицю A. Доведемо, що коли $\Delta(A) \neq 0$, існує обернена матриця A^{-1}. Розглянемо матрицю:

$$B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Утворимо добутки AB і BA.

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = C.$$

За правилом множення матриць елементи матриці C знаходимо за формулою:

$$c_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn}. \qquad (1.5)$$

Якщо $i = j$, то згідно з формулою (1.3) маємо: $c_{ii} = \Delta(A)$, тобто знаходимо значення визначника матриці A; якщо $i \neq j$, то вираз (1.5) є сумою добутків елементів i-го рядка визначника на алгебраїчні доповнення, що відповідають j-му рядку цього самого визначника. За властивістю 9 визначників така алгебраїчна сума дорівнює нулю. Отже, $c_{ij} = 0$, якщо $i \neq j$. Матриця C набирає вигляду:

$$C = \begin{pmatrix} \Delta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Delta & \dots & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots & \Delta \end{pmatrix}.$$

Щоб ця матриця стала одиничною, треба помножити її на $\dfrac{1}{\Delta(A)}$.

$$E = \frac{1}{\Delta(A)}C = A\frac{1}{\Delta(A)}B = AA^{-1}.$$

Отже, обернена матриця має вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Доведемо, що для матриці A матриця A^{-1} єдина. Для цього припустимо протилежне. Нехай існує одна матриця C, така що $AC = CA = E$. Тоді

$CAA^{-1} = C(AA^{-1}) = CE = C,$

а водночас

$CAA^{-1} = (CA)A^{-1} = EA^{-1} = A^{-1}$, звідси $C = A^{-1}$.

Доходимо висновку, що початкове припущення неправильне, тобто обернена матриця єдина.

2.3. Матричний запис системи n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) матричним способом (за допомогою оберненої матриці).

Повернемось до системи рівнянь (1.1) і утворимо матриці:

A — коефіцієнтів при невідомих, X — невідомих, B — вільних членів:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Тоді згідно з означенням добутку матриць систему рівнянь (1.1) можна записати в *матричному вигляді:*

$$AX=B, \qquad (1.6)$$

який значно скорочує запис системи рівнянь.

Припустимо, що система складається з *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими, матриця A — квадратна і $\Delta(A)\neq 0$ — матриця невироджена. Тоді для матриці A побудуємо обернену A^{-1} — вона за тих припущень, які щойно зроблено, існує. Помноживши тепер матричну рівність $AX = B$ зліва на матрицю A^{-1}, дістанемо:

$$A^{-1}(AX)=A^{-1}B \Rightarrow \left(A^{-1}A\right)X=A^{-1}B \Rightarrow EX=A^{-1}B,$$

або остаточно $X=A^{-1}B$.

Останній вираз — це розв'язок системи лінійних рівнянь. Зауважимо, що в такому вигляді можна записати розв'язок будь-якого матричного рівняння, якщо матриця A задовольняє умови існування A^{-1}.

Приклад.

Розв'язати систему лінійних рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases} 2x+7y+z=-17, \\ 7x+3y+5z=8, \\ 3x+2y+6z=9. \end{cases}$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}=3\cdot 6-5\cdot 2=18-10=8;$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}=-(7\cdot 6-5\cdot 3)=-(42-15)=-27;$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=7\cdot 2-3\cdot 3=14-9=5;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}=-(7\cdot 6-1\cdot 2)=-(42-2)=-40;$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}=2\cdot 6-1\cdot 3=12-3=9;$$

$$A_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-(2\cdot 2-7\cdot 3)=-(4-21)=17;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=7\cdot 5-1\cdot 3=35-3=32;$$

$$A_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}=-(2\cdot 5-1\cdot 7)=-(10-7)=-3;$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}=2\cdot 3-7\cdot 7=6-49=-43.$$

$$A^{*}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & -40 & 32 \\ -27 & 9 & -3 \\ 5 & 17 & -43 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}A^{*}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}=\frac{1}{-168}\cdot\begin{pmatrix} 8 & 40 & 32 \\ -27 & 9 & -3 \\ 5 & 17 & -43 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -17 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}=\frac{1}{-168}\cdot\begin{pmatrix} 8\cdot(-17)-40\cdot 8+32\cdot 9 \\ (-27)\cdot(-17)+9\cdot 8+(-3)\cdot 9 \\ 5\cdot(-17)+17\cdot 8+(-43)\cdot 9 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{-168}\cdot\begin{pmatrix} -136-320+288 \\ 459+72-27 \\ -85+136-387 \end{pmatrix}=\frac{1}{-168}\cdot\begin{pmatrix} -168 \\ 504 \\ -336 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Лекція 3. Дослідження СЛАР.

3.1. Ранг матриці та різні методи його обчислення.
3.2. Зв'язок розв'язку СЛАР з рангом її матриці. Теорема Кронекера-Капеллі. СЛОР.
3.3. Дослідження лінійних систем. Метод Гауса, Жордано-Гауса.

3.1. Ранг матриці та різні методи його обчислення.

Розглянемо матрицю A розміром $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

і введемо ще одне важливе поняття.

Означення. Рангом матриці A розміром $m \times n$ називається найвищий порядок відмінного від нуля мінора, утвореного з елементів цієї матриці. Зрозуміло, що $rangA = r \le \min(m, n)$, а найбільший можливий ранг матриці може дорівнювати меншому з чисел m і n.

Розглянемо також поняття *обвідного мінора* k-го порядку. Це буде такий мінор $(k+1)$-го порядку, який повністю містить у собі мінор k-го порядку.

Обчислюючи ранг матриці, потрібно переходити від мінорів менших порядків, відмінних від нуля, до мінорів більших порядків. Якщо вже знайдено відмінний від нуля мінор M k-го порядку, то достатньо обчислити лише мінори $(k+1)$-го порядку, що обводять мінор M. Якщо всі вони дорівнюють нулю, то ранг матриці дорівнює k. Якщо серед них знайдеться такий, що відмінний від нуля, то далі для нього будуються обвідні мінори $(k+2)$-го порядку і т. д.

Означення. Елементарними перетвореннями матриці A називаються такі її перетворення:
1) заміна місцями двох рядків або двох стовпців матриці;
2) множення рядка або стовпця матриці на довільне відмінне від нуля число;
3) додавання елементів одного рядка або стовпця до відповідних елементів іншого рядка або стовпця, попередньо помноженого на деяке число.

Теорема. Елементарні перетворення не змінюють рангу матриці.

Далі матриці, які мають рівні ранги, називатимемо *еквівалентними* матрицями. Еквівалентні матриці об’єднуватимемо знаком «~» («тильда»).

3.2. Зв'язок розв’язку СЛАР з рангом її матриці. Теорема Кронекера—Капеллі.

У загальному випадку перш ніж розв’язати систему рівнянь (1.1), важливо знати, чи існують її розв’язки, тобто чи буде вона сумісною. Щоб відповісти на це запитання, розглянемо дві матриці: *головну матрицю A*, складену з коефіцієнтів при невідомих системи рівнянь (1.1), і *розширену матрицю* $\overline{A}$, утворену приєднанням до матриці A стовпця вільних членів:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Теорема Кронекера—Капеллі. Для того щоб система рівнянь (1.1) була сумісною (мала розв’язок), необхідно і достатньо, щоб ранг основної матриці A дорівнював рангу розширеної матриці $\overline{A}$:

$$\boldsymbol{rang(A) = rang(\overline{A}) = r.}$$

З теореми випливає, що в матриці, складеної з коефіцієнтів при невідомих, неодмінно існує мінор r-го порядку, відмінний від нуля, оскільки ранг цієї матриці дорівнює r.

Нехай, наприклад, це мінор, який складено з коефіцієнтів при перших r невідомих. Залишимо доданки з цими невідомими в лівій частині рівняння, а решту доданків перенесемо у праву частину. Усі рівняння системи (1.1) після r-го відкинемо. Тоді система рівнянь набере вигляду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n \end{cases} \qquad (1.8)$$

Невідомі змінні x_1, x_2, ..., x_r називаються *головними невідомими* (*змінними*), а x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n — *вільними невідомими* (*змінними*).

Головний визначник системи рівнянь (1.8) (мінор r-го порядку) відмінний від нуля. За правилом Крамера така система рівнянь має єдиний розв’язок відносно головних невідомих x_1, x_2, ..., x_r.. Зрозуміло, що кожне з головних невідомих можна подати через вільні невідомі. Якщо вільним невідомим не надано конкретних числових значень, маємо так званий *загальний розв’язок* системи рівнянь (1.1). Надавши вільним невідомим деяких числових значень, дістанемо *частинний розв’язок* цієї системи. Зрозуміло, що частинних розв’язків системи в цьому разі безліч. Така система є сумісною, але невизначеною.

Системи лінійних однорідних рівнянь (СЛОР)

Застосуємо здобуті результати для аналізу розв’язків однорідної системи рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (1.9)$$

З теореми Кронекера—Капеллі випливає, що система рівнянь (1.9) завжди сумісна: $rangA = rang\bar{A}$. *Тривіальний розв’язок* $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ завжди існує. Розглянемо матрицю A, складену з коефіцієнтів при невідомих. Нехай її ранг дорівнює r. Якщо $r = n$, то система (1.9) має єдиний розв’язок, і він тривіальний. Якщо $r < n$, то система (1.9) має також розв’язки, відмінні від тривіальних.

Отже, можна сформулювати твердження: *система однорідних лінійних рівнянь (1.9) має нетривіальні розв’язки тоді і тільки тоді, коли* $\boldsymbol{\Delta(A) = 0}$.

Нехай ранг матриці системи рівнянь (1.9) $r < n$. Це означає, що матриця A має мінор r-го порядку, відмінний від нуля. Відповідно до загальної теорії систему рівнянь (1.9) можна переписати у вигляді:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = -a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = -a_{2r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = -a_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n \end{cases} \qquad (1.10)$$

Розглянемо визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{1,r+1} & c_{1,r+2} & \cdots & c_{1n} \\ c_{2,r+1} & c_{2,r+2} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & & & \\ c_{n-r,r+1} & c_{n-r,r+2} & \cdots & c_{n-r,n} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Узявши елементи i-го $(1 \le i \le n-r)$ рядка цього визначника за вільні невідомі і підставивши ці значення в систему (1.10), дістанемо $n-r$ розв’язків системи рівнянь (1.10) у вигляді $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ir}, c_{ir+1}, c_{ir+2}, \ldots, c_{in}$, i = 1, 2,..., $n-r$. Така система розв’язків однорідної системи рівнянь (1.9) називається *фундаментальною системою розв’язків.*

Зауважимо, що будь-який розв’язок системи рівнянь (1.9) можна подати у вигляді лінійної комбінації фундаментальної системи розв’язків.

3.3. Дослідження лінійних систем. Метод Гауса, Жордано-Гауса.

Цей метод пов'язаний із виключенням невідомих із системи рівнянь. Розглянемо систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1.11)$$

Виключимо з усіх рівнянь, крім одного i-го, невідому x_j, вважаючи, що коефіцієнт $a_{ij} \neq 0$. Назвемо цей коефіцієнт *розв'язувальним* елементом. Поділивши почленно все i-те рівняння на a_{ij}, дістанемо:

$$\frac{a_{i1}}{a_{ij}}x_1 + \frac{a_{i2}}{a_{ij}}x_2 + \ldots + x_j + \ldots + \frac{a_{in}}{a_{ij}}x_n = \frac{b_i}{a_{ij}} \qquad (1.12)$$

Тепер помножимо рівняння (1.12) на $-a_{1j}$ і додамо до першого рівняння системи (1.11), далі помножимо на $-a_{2j}$ і додамо до другого рівняння системи і т. д.

Після того як помножимо (1.12) на $-a_{mj}$ і додамо до останнього рівняння системи, дістанемо:

$$\begin{cases} (a_{11} - \frac{a_{i1}}{a_{ij}}a_{1j})x_1 + (a_{12} - \frac{a_{i2}}{a_{ij}}a_{1j})x_2 + \ldots + 0 + \ldots + \ldots + (a_{1n} - \frac{a_{in}}{a_{ij}}a_{1j})x_n = b_1 - \frac{b_i}{a_{ij}}a_{1j} \\ (a_{21} - \frac{a_{i1}}{a_{ij}}a_{2j})x_1 + (a_{22} - \frac{a_{i2}}{a_{ij}}a_{2j})x_2 + \ldots + 0 + \ldots + (a_{2n} - \frac{a_{in}}{a_{ij}}a_{2j})x_n = b_2 - \frac{b_i}{a_{ij}}a_{2j} \\ \ldots \\ \frac{a_{i1}}{a_{ij}}x_1 + \frac{a_{i2}}{a_{ij}}x_2 + \ldots + x_j + \ldots + \frac{a_{in}}{a_{ij}}x_n = \frac{b_i}{a_{ij}} \\ \ldots \\ (a_{m1} - \frac{a_{i1}}{a_{ij}}a_{mj})x_1 + (a_{m2} - \frac{a_{i2}}{a_{ij}}a_{mj})x_2 + \ldots + 0 + \ldots + (a_{mn} - \frac{a_{in}}{a_{ij}}a_{mj})x_n = b_m - \frac{b_i}{a_{ij}}a_{mj} \end{cases} \qquad (1.13)$$

У системі рівнянь (1.13) невідома x_j входить тільки до i-го рівняння. Перезначимо коефіцієнти при невідомих і праві частини системи (1.13) так: $b_{11} = a_{11} - \frac{a_{i1}}{a_{ij}}a_{1j}$, $b_{12} = a_{12} - \frac{a_{i1}}{a_{ij}}a_{1j}, \ldots,$ $b_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{ij}}$, …, $b_{kl} = a_{kl} - \frac{a_{il}}{a_{ij}}a_{kj}$, …, $b_{mn} = a_{mn} - \frac{a_{in}}{a_{ij}}a_{mj}$, $b_k^* = b_k - \frac{b_i}{a_{ij}}a_{kj}$.

Тоді система (1.13) набере вигляду:

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + 0 + \ldots + b_{1n}x_n = b_1^* \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \ldots + 0 + \ldots + b_{2n}x_n = b_2^* \\ \ldots \\ b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \ldots + x_j + \ldots + b_{in}x_n = b_i^* \\ \ldots \\ b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 + \ldots + 0 + \ldots + b_{mn}x_n = b_m^* \end{cases} \qquad (1.14)$$

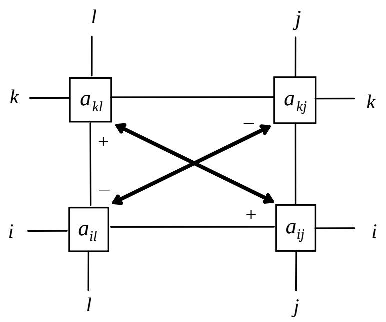
Перехід від системи рівнянь (1.11) до системи рівнянь (1.14) називається *кроком перетворення методу Жордана—Гаусса*.

Розглянемо вираз для коефіцієнта b_{kl} системи рівнянь (1.14) докладніше:

$$b_{kl} = \frac{a_{kl}a_{ij} - a_{il}a_{kj}}{a_{ij}}, \qquad (1.15)$$

$$k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m;$$
$$l = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Утворюється він за такою схемою:



Щоб знайти новий коефіцієнт, який міститься на перетині k-го рядка і l-го стовпця, будуємо визначник другого порядку з чотирьох елементів, які містяться на перетині i-го і k-го рядків та l-го і j-го стовпців і обчислюємо його. Поділивши здобуте значення визначника на розв'язувальний елемент a_{ij}, дістанемо новий коефіцієнт b_{kl}. Зауважимо, що за наведеною схемою (на відміну від схеми для знаходження визначника другого порядку) добуток $a_{ij}a_{kl}$ завжди береться зі знаком «+», де б не містилися ці елементи — на головній чи сторонній діагоналі визначника.

Вираз b_{kl} спрощується, якщо a_{ij}=1. Отже, коли в рівнянні є коефіцієнти, що дорівнюють одиниці, їх доцільно брати за розв'язувальні елементи.

Якщо в початковій системі a_{kj} або a_{il} дорівнює нулю, то $b_{kl} = a_{kl}$.

Результат виконання одного кроку за методом Жордана—Гаусса зручно подати у вигляді таблиці:

x_1	x_2	x_3	...	x_j	...	x_n	b_i	$\sum$	*contr*
a_{11}	a_{12}	a_{13}	...	a_{1j}	...	a_{1n}	b_1		
a_{12}	a_{22}	a_{23}	...	a_{2j}	...	a_{2n}	b_2		
...	...	$\boxed{\dots}$	...		...	...	...		
a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	...	a_{ij}	...	a_{in}	b_i		
...	...	...	...	...	...	...	...		
a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	...	a_{mj}	...	a_{mn}	b_m		
b_{11}	b_{12}	b_{13}	...	0	...	b_{1n}	b_1^*		
b_{21}	b_{22}	b_{23}	...	0	...	b_{2n}	b_2^*		
...	...	...	...	...	...	...	...		
$\frac{a_{i1}}{a_{ij}}$	$\frac{a_{i2}}{a_{ij}}$	$\frac{a_{i3}}{a_{ij}}$	...	1	...	$\frac{a_{in}}{a_{ij}}$	b_i^*		
...	...	...	...	...	...	...	...		
b_{m1}	b_{m2}	b_{m3}	...	0	...	b_{mn}	b_m^*		

У стовпці $\sum$ потрібно записати суму всіх коефіцієнтів у відповідному рядку таблиці. Стовпець *contr* використовується, щоб проконтролювати, чи правильно знайдено коефіцієнти b_{kl}. Якщо сума коефіцієнтів рядка таблиці збігається з числом, яке дістали за правилом знаходження b_{kl} з елементами попереднього стовпця $\sum$, то обчислення правильні, якщо ні — вони потребують перевірки.

Виконавши один крок за методом Жордана—Гаусса, тобто виключивши невідому x_j, можна зробити наступний крок і виключити ще одну невідому і т.д. Після виконання k-го кроку таблиця матиме такий вигляд:

x_1	x_2	...	x_k	x_{k+1}	...	x_n	b_i	$\sum$	*contr*
1	0	...	0	$c_{1,\,k+1}$	...	c_{1n}	b_1^*		
0	1	...	0	$c_{2,\,k+1}$	...	c_{2n}	b_2^*		
...	...	...	...	...	...	...	...		
0	0	...	1	$c_{k,\,k+1}$	...	c_{kn}	b_k^*		
0	0	...	0	$c_{k+1,\,k+1}$	...	$c_{k+1,\,n}$	b_{k+1}^*		
...	...	...	...	...	...	...	...		
0	0	...	0	$c_{m,\,k+1}$	...	c_{mn}	b_m^*		

Коли не всі елементи, які розміщені в (k + 1)-му і наступних рядках таблиці, дорівнюють нулю, то процедуру за методом Жордана—Гаусса можна продовжити.

Якщо всі елементи в (k + 1)-му і наступних рядках таблиці дорівнюють нулю, то процедуру за методом Жордана—Гаусса продовжити неможливо. У цьому разі слід повернутися від таблиці до системи рівнянь. Невідомі, які відповідають стовпцям таблиці з нулями та одиницею, будуть головними, решта невідомих — вільні. З утвореної після k-го кроку системи рівнянь дістаємо загальний розв'язок початкової системи, переносячи доданки з вільними невідомими у праві частини рівнянь.

Зауваження.

1. Крок розглянутої процедури відповідає елементарному перетворенню головної матриці системи, виконуваному під час знаходження її рангу. Тому, застосовуючи метод Жордана—Гаусса, відразу знаходимо і ранг головної матриці системи, який дорівнює максимально можливій кількості кроків за цим методом. Розширену матрицю системи дістаємо, приєднуючи до головної матриці стовпець вільних членів. Якщо хоча б один із елементів таблиці, який міститься на перетині «зануленого» рядка головної матриці зі стовпцем, що відповідає b_i, не дорівнює нулю, то ранг розширеної матриці буде на одиницю більший за ранг основної. У цьому разі за теоремою Кронекера—Капеллі початкова система рівнянь несумісна.

2. Безпосередньо реалізуючи метод Жордана—Гаусса, слід пам'ятати, що розв'язувальний елемент не повинен дорівнювати нулю. Якщо в якомусь рядку або стовпці таблиці вже було взято розв'язувальний елемент, більше в цьому рядку або стовпці його брати не можна. Не можна його брати й у стовпці b_i.

3. Щоб уникнути помилок, слід неодмінно перевіряти правильність відшукання коефіцієнтів на кожному кроці методу Жордана—Гаусса.

Лекція 4. Комплексні числа та дії над ними.

4.1. Алгебраїчна форма комплексного числа. Зображення комплексних чисел, які задані в алгебраїчній формі, на комплексні площині.

4.2. Дії над комплексними числами, які задані в алгебраїчній формі. Приклади.

4.3. Тригонометрична та показникова форми запису комплексних чисел.

4.4. Дії над комплексними числами, які задані в тригонометричній та в показниковій формі. Формула Муавра. Приклади.

4.1. Алгебраїчна форма комплексного числа. Зображення комплексних чисел, які задані в алгебраїчній формі, на комплексні площині.

Означення. *Комплексним числом* називається число виду $z = a + ib$, де a, b — дійсні числа, $i^2 = -1$.

Число a називається *дійсною частиною*, bi — *уявною частиною*, i — *уявною одиницею*.

Множина комплексних чисел позначається ***C***.

Означення. Комплексні числа виду $a + bi$ і $a - bi$ називаються *спряженими*. Комплексні числа виду $a + bi$ і $-a - bi$ називаються *протилежними*. Спряжене до комплексного числа z позначається $\bar{z}$.

Означення. Два комплексних числа $a + bi$ і $a_1 + b_1i$ вважаються *рівними* в тому і тільки в тому випадку, якщо $a = a_1$ і $b = b_1$.

Зауваження. Щодо комплексних чисел не прийнято жодної угоди, яке з них вважати більшим.

4.2. Дії над комплексними числами, які задані в алгебраїчній формі. Приклади.

Додавання: $(a + bi) + (a_1 + b_1i) = (a + a_1) + (b + b_1)i$.

Віднімання: $(a + bi) - (a_1 + b_1i) = (a - a_1) + (b - b_1)i$.

Множення: $(a + bi)(a_1 + b_1i) = aa_1 + a_1bi + ab_1i + bb_1i^2 = (aa_1 - bb_1) + (a_1b + ab_1)i$.

Ділення:

$$\frac{a+bi}{a_1+b_1i} = \frac{(a+bi)(a_1-b_1i)}{(a_1+b_1i)(a_1-b_1i)} = \frac{aa_1bb_1+(a_1b-ab_1)i}{a_1^2-(b_1i)^2} = \frac{aa_1+bb_1}{a_1^2+b_1^2} + \frac{a_1b-ab_1}{a_1^2+b_1^2}i .$$

Піднесення до степеня: спочатку знайдемо результати від піднесення до степеня уявної одиниці, знаючи, що за умовою i^2 треба вважати таким, що дорівнює -1.

$i^0 = 1$

$i^1 = i$
$i^2 = -1$
$i^3 = i^2 \cdot i = -i$
$i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = 1$
$i^5 = i^4 \cdot i = i$
$i^6 = i^5 \cdot i = -1$
$i^7 = i^6 \cdot i = -1 \cdot i = -i$
$i^8 = i^7 \cdot i = -i \cdot i = 1$
і т. п.
Отже, дістали чотири значення, що чергуються:
i; -1; $-i$; $+1$, тоді:
$(a + ib)^2 = a^2 + 2abi + b^2i^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$,
$(a + ib)^3 = a^3 + 3a^2b + 3a(ib)^2 + (ib)^3 = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i$ і т. п.

Добування квадратного кореня: Припустимо, що $\sqrt{a+bi} = x + iy$.
Тоді $a + bi = (x^2 - y^2) + 2xyi$.
Отже, маємо:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x^2 - y^2)^2 = a^2 \\ (2xy)^2 = b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2 + b^2 \\ x^2 - y^2 = a \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ x^2 - y^2 = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \\ y = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \end{cases}.$$

З рівняння $2xy = b$ випливає, що знаки x та y мають бути однакові, якщо $b > 0$, і різні, якщо $b < 0$.

Тому $\sqrt{a+bi} = \pm\left[\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right]$ при $b > 0$;

$\sqrt{a+bi} = \pm\left[\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} - i\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right]$ при $b < 0$.

Зауваження. Для того щоб з комплексного числа можна було добути корінь третього, або вищого степеня, йому треба надати іншого вигляду.

Приклад.

Нехай $z_1 = 5 + i6$; $z_2 = 7 - i9$; $z_3 = 5 + 12i$.
Знайти: $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$, z_1 / z_2, z_1^2, $\sqrt{z_3}$.
$z_1 + z_2 = (5 + 6i) + (7 - 9i) = (5 + 7) + i(6 - 9) = 12 - 3i$;
$z_1 \cdot z_2 = (5 + 6i) \cdot (7 - 9i) = 5 \cdot 7 + 6i \cdot 7 - 5 \cdot 9i - i6 \cdot i9 = = 35 + 42i - 45i + 54 = 89 - 3i$;

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5+6i}{7-9i} = \frac{(5+6i)(7+9i)}{(7-9i)(7+9i)} = \frac{35+42i+45i-54}{49+81} = \frac{-19+87i}{130} = -\frac{19}{130} + \frac{87}{130}i;$$

$z_1^2 = (5 + i6)^2 = 25 + 2 \cdot 5 \cdot 6i + (i6)^2 = 25 + 60i - 36 = -11 + 60i$;

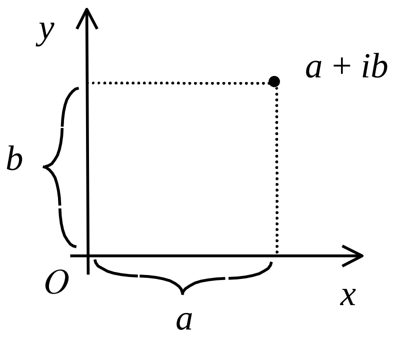
$$\sqrt{z_3} = \sqrt{5+12i} = \pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}+5}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}-5}{2}}\right] = \pm\left(\sqrt{\frac{18}{2}} + i\sqrt{\frac{8}{2}}\right) = \pm\left(\sqrt{9} + i\sqrt{4}\right) = \pm(3+2i).$$

Геометричне зображення комплексного числа (інтерпретація Гаусса)

Будь-яке комплексне число $a + bi$ можна зобразити геометрично.
Візьмемо в площині прямокутну систему координат і, вибравши одиницю довжини, зображатимемо дійсні числа на осі абсцис, а уявні — на осі ординат. Відповідно до цього вісь абсцис

називається *дійсною віссю,* а вісь ординат — *уявною.*

Число $a + bi$ зображатимемо точкою площини, абсциса якої чисельно дорівнює a, а ордината дорівнює b (рис.).



4.3. Тригонометрична та показникова форми запису комплексних чисел.

Зображення комплексних чисел за допомогою точок на площині дає змогу подати число $a + bi$ в іншому вигляді, а саме — у *тригонометричній формі.*

Нехай точка M (рис.) зображає комплексне число $a + ib$.

Тоді $OA = a$, $AM = b$. Позначимо віддаль OM точки від початку координат через r, а кут AOM, утворюваний OM з віссю x, — через φ. Тоді з трикутника AOM матимемо:

$$a = r\cos\varphi,\ b = r\sin\varphi. \qquad (4.1)$$

Підставивши в комплексне число $a + bi$ значення a і b (4.1), дістанемо

$$a + bi = r\cos\varphi + r\sin\varphi\cdot i \qquad (4.2)$$

або

$$a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Це є *тригонометрична форма комплексного числа.* Довжина $OM = r$ називається *модулем комплексного числа*, а кут AOM = φ — *його аргументом.*

Покажемо, як перетворити в тригонометричну форму комплексне число, подане в звичайній алгебраїчній формі.

Для цього треба знайти r і φ за даними a і b. З трикутника OAM (рис.) маємо:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2},\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}, \qquad (4.3)$$

$$\sin\varphi = \frac{b}{r},\ \cos\varphi = \frac{a}{r} \qquad (4.4)$$

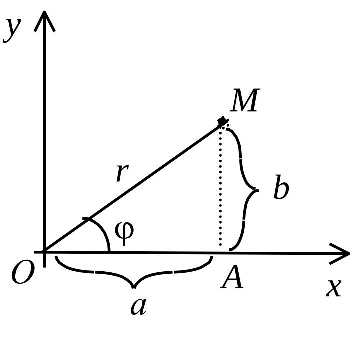


Рис.

Приклад.

Подати в тригонометричній формі число $-3 + 2i$.

З формул (4.3) маємо:

$$r = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13},\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{2}{-3} \approx -0{,}6666...$$

Тангенс від’ємний, отже, кут φ треба шукати в II або IV чверті. З формул (4.4) виходить, що при $a = -3$ і $b = 2$ синус буде додатний, а косинус — від’ємний, тобто φ буде кутом II чверті. На ПОМ або за таблицями знаходимо: φ = 146° 18′, а тому $-3+2i = \ = \sqrt{13}\left(\cos 146^{\circ}18' + i\sin 146^{\circ}18'\right)$.

За допомогою формули Ейлера можна дістати *показникову форму* комплексного числа $z = re^{i\varphi}$.

4.4. Дії над комплексними числами, які задані в тригонометричній та в показниковій формі. Формула Муавра. Приклади.

Додавати і віднімати комплексні числа простіше і зручніше, коли компоненти подані в алгебраїчній формі. Зовсім інша річ з останніми чотирма алгебраїчними діями.

Множення. Нехай треба перемножити числа:

$$a = R_1\left(\cos\alpha + i\sin\alpha\right),\ b = R_2\left(\cos\beta + i\sin\beta\right).$$

Дістанемо:

$$ab = R_1R_2\left[\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\right] \qquad (4.5)$$

Звідси випливає:

Модуль добутку двох комплексних чисел дорівнює добуткові модулів співмножників, а аргумент — сумі аргументів співмножників.

Приклад. Нехай:

$$a = 3\left(\cos 20^{\circ} + i\sin 20^{\circ}\right);\ b = 2\left(\cos 35^{\circ} + i\sin 35^{\circ}\right).$$

Тоді $ab = 3\cdot 2\left[\cos\left(20^{\circ}+35^{\circ}\right) + i\sin\left(20^{\circ}+35^{\circ}\right)\right] = 6\left(\cos 55^{\circ} + i\sin 55^{\circ}\right)$.

Ділення. Нехай треба число $a = R_1(\cos\alpha + \sin\alpha)$ поділити на число $b = R_2(\cos\beta + i\sin\beta)$. Матимемо:

$$\frac{a}{b} = \frac{R_1\left(\cos\alpha + \sin\alpha\right)}{R_2\left(\cos\beta + \sin\beta\right)} = \frac{R_1}{R_2}\cdot\frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\beta + i\sin\beta} =$$

$$= \frac{R_1}{R_2}\cdot\left[\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)\right]. \qquad (4.6)$$

Модуль частки двох комплексних чисел дорівнює частці модулів, а аргумент — різниці аргументів діленого і дільника.

Приклад.

Нехай $a = 12\,(\cos 55^{\circ} + i\sin 55^{\circ})$; $b = 3\,(\cos 35^{\circ} + +i\sin 35^{\circ})$.

Тоді $\frac{a}{b} = \frac{12}{3}\left(\cos\left(55^{\circ}-35^{\circ}\right) + i\sin\left(55^{\circ}-35^{\circ}\right)\right) = 4\left(\cos 20^{\circ} + i\sin 20^{\circ}\right)$.

Піднесення до степеня. Нехай треба число $a = R(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ піднести до степеня n: Матимемо:

$$a^n = \left[R\left(\cos\alpha + i\sin\alpha\right)\right]^n = R^n\left(\cos\alpha n + \sin\alpha n\right). \qquad (4.7)$$

Модуль степеня комплексного числа дорівнює тому самому степеню модуля основи, а аргумент — аргументові основи, помноженому на показник степеня.

У частинному випадку, якщо $r = 1$, формула (4.7) набуває вигляду

$$\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Ця формула має назву *формули Муавра*.

Приклад.

Піднести до куба число $a = 2\,(\cos 20^{\circ} + i\sin 20^{\circ})$.

Матимемо:

$$a^3 = 8(\cos 3\cdot 20 + i\sin 3\cdot 20) = 8(\cos 60 + \sin 60) = 8\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4 + 4\sqrt{3}i\,.$$

Формула Ейлера: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$,

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \ \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}\,.$$

Добування кореня. Добудемо корінь n-го степеня з числа:

$$a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Матимемо:

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right] (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1) \qquad (4.8)$$

1. Модуль кореня n-го степеня з комплексного числа дорівнює кореню того самого степеня з модуля підкореневого числа, а аргумент — аргументові підкореневого числа, поділеному на показник кореня.

2. Корінь n-го степеня з комплексного числа має n різних значень.

Квадратний тричлен з комплексними числами.

Дано тричлен $y = ax^2 + bx + c$.

Відомо, що корені його комплексні. У цьому випадку $b^2 - 4ac < 0$. Перетворимо тричлен до вигляду

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a}\right).$$

Додамо й віднімемо по $\frac{b^2}{4a^2}$:

$$y = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right);\ y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right].$$

При всіх значеннях x вираз $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ є число додатне або таке, що дорівнює нулю

(при $x = -\frac{b}{2a}$).

Дослідимо, який знак має другий доданок $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$.

У випадках комплексних коренів вираз $b^2 - 4ac$ від’ємний, а протилежне йому число $-(b^2 - 4ac)$, тобто $4ac - b^2$, — число додатне.

Знаменник $4a^2$ теж число додатне, а отже, дріб $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$ є додатним числом. Значить, уся сума, що міститься в квадратних дужках, буде додатним числом при всіх значеннях.

Звідси випливає, що знак числової величини тричлена залежить лише від знака a: при a додатному тричлен має додатні значення, при a від’ємному — від’ємні.

Якщо тричлен має комплексний корінь, то при всіх значеннях x його числове значення має той самий знак, що й коефіцієнт при x^2.

Загальний висновок про квадратні рівняння.

Загальна формула для коренів повного квадратного рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$ буде

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,.$$

Корені квадратного рівняння будуть обидва дійсні або обидва уявні залежно від того, чи буде дискримінант (у перекладі розрізнювач) $b^2 - 4ac$ величиною додатною чи від’ємною:

1. $b^2 - 4ac > 0$. У цьому випадку вираз під коренем додатний. Квадратний корінь з цього виразу має два значення, і, отже, рівняння має два різні дійсні корені:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \; x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

2. $b^2 - 4ac = 0$. У цьому випадку другий член чисельника дорівнює нулю і рівняння має два рівні корені: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

3. $b^2 - 4ac < 0$. У цьому випадку рівняння має два комплексно спряжені корені:

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}, \; x_2 = \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

Загальний вигляд алгебраїчного рівняння

Означення. Будь-яке рівняння, в якому невідоме пов'язане з даними числами за допомогою скінченного числа шістьох алгебраїчних дій (додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до степеня і добування кореня), можна звести до такого цілого й раціонального вигляду:

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + ... + Kx + L = 0, \qquad (4.9)$$

де коефіцієнти A, B, C, ..., K і L є сталі дійсні або комплексні числа, m є показник степеня рівняння. Деякі коефіцієнти в окремих випадках можуть дорівнювати нулю.

Рівняння такого виду називаються *алгебраїчними*. Алгебраїчні рівняння степеня, вищого від другого, називаються *рівняннями вищих степенів*.

Рівняння вищих степенів становлять предмет вищої алгебри. Елементарна алгебра розглядає тільки окремі види цих рівнянь.

Вища алгебра встановлює таку важливу теорему:

Теорема.

Будь-яке алгебраїчне рівняння має дійсний або комплексний корінь.

Допустивши це твердження, можна показати, що ***алгебраїчне рівняння має стільки коренів, дійсних або комплексних, скільки одиниць у показнику його степеня***.

Тоді рівняння (4.9) можна подати у вигляді:

$$A\,(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)\,...\,(x - \lambda) = 0,$$

де всіх різниць: $x - \alpha$, $x - \beta$, ..., буде m. В окремих випадках деякі і навіть усі корені можуть бути однакові.

Корисно звернути увагу ще на такі твердження, що їх доводять у вищій алгебрі.

Твердження 1. ***Сума коренів будь-якого алгебраїчного рівняння (4.9) дорівнює*** $-\frac{B}{A}$***, а добуток коренів дорівнює*** $(-1)^m \frac{L}{A}$.

Твердження 2. ***Якщо алгебраїчне рівняння з дійсними коефіцієнтами має комплексні корені, то число цих коренів парне.***

Твердження 3. ***Якщо алгебраїчне рівняння з дійсними коефіцієнтами має n коренів виду p + qi, то воно має ще n коренів виду p – qi.***

Твердження 4. ***Алгебраїчне рівняння непарного степеня з дійсними коефіцієнтами має принаймні один дійсний корінь.***

Твердження 5. ***Рівняння з довільними буквеними коефіцієнтами степеня не вище четвертого можна в загальному розв'язати алгебраїчно, тобто для коренів цих рівнянь знайдені загальні формули, складені з коефіцієнтів рівняння за допомогою алгебраїчних дій.***

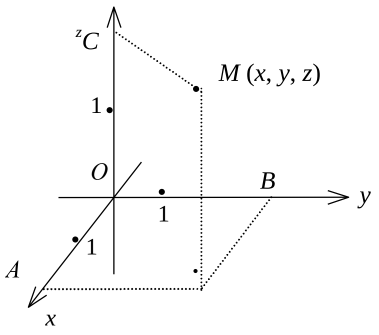
Твердження 6. ***Рівняння з довільними буквеними коефіцієнтами степеня, вищого від четвертого, не можна у загальному розв'язати алгебраїчно, проте, коли коефіцієнти рівняння якого завгодно степеня виражені числами, завжди є змога обчислити з бажаним степенем наближення всі його корені, як дійсні так і уявні. Способи такого обчислення викладаються у вищій алгебрі.***

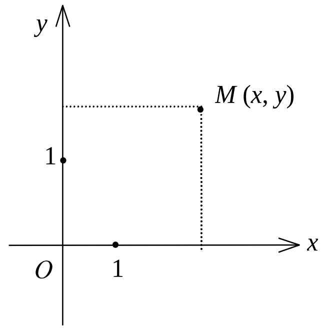
Лекція 5. Елементи векторної алгебри.

5.1. Основні поняття. Лінійні дії над векторами. Проекція вектора на вектор. Базис.
5.2. Скалярний добуток векторів, його властивості та застосування.

5.1. Основні поняття. Лінійні дії над векторами. Проекція вектора на вектор. Базис.

Три взаємно перпендикулярні осі *Ox*, *Oy*, *Oz*, які мають спільний початок точку *O* і однакову масштабну одиницю, утворюють прямокутну декартову систему координат у просторі. Якщо таких осей дві: *Ox* і *Oy*, то маємо систему координат на площині.

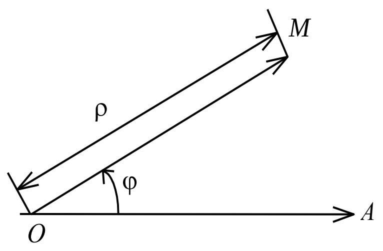


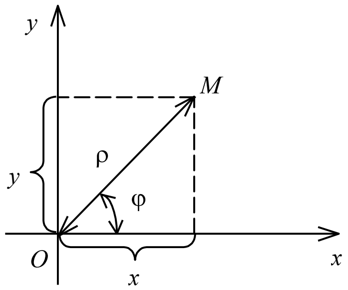


Осі *Ox*, *Oy*, *Oz* називаються відповідно *осями абсцис, ординат і аплікат*, точка *O* — *початок системи координат*. Нехай *M* — довільна точка в просторі або на площині. Декартовими координатами *x*, *y*, *z* точки *M* називатимемо відповідно довжини *OA, OB, OC* напрямлених відрізків $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$.

Таким чином, кожній точці простору відповідає впорядкована трійка чисел (*x*, *y*, *z*), а на площині — впорядкована пара чисел (*x*, *y*), тобто встановлюється відповідність між геометричним образом — точкою і впорядкованою множиною чисел. Ця відповідність дає можливість використовувати рівняння для відображення геометричних образів, таких як лінія, площина тощо, та застосовувати алгебраїчні методи для розв'язування геометричних задач.

Полярна система координат складається з деякої точки площини *O*, яка називається *полюсом*, променя *OA,* що виходить з цієї точки і називається *полярною віссю*. Крім того, задається одиниця масштабу для вимірювання довжин відрізків.





Полярними координатами точки M називаються числа ρ — відстань від полюса O до точки M і φ — кут, на який треба повернути полярну вісь OA до її збігу з OM, проти годинникової стрілки.

Полярний радіус ρ може змінюватись у межах $0 \le \rho < \infty$, полярний кут, як правило, змінюється в межах $0 \le \varphi < 2\pi$.

Зв'язок між полярними і декартовими координатами точки встановлюють формули:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi,$$
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \tag{5.1}$$

Приклад. Знайти полярні координати точки *M* (2, 2).

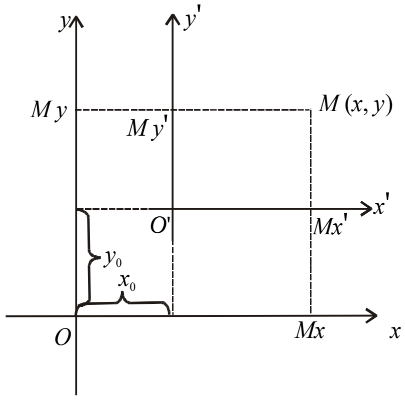
З формули (2.1) маємо $\rho = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\varphi = 1$. Згідно з останньою рівністю $\varphi = \frac{\pi}{4}$, або $\varphi = \frac{5\pi}{4}$

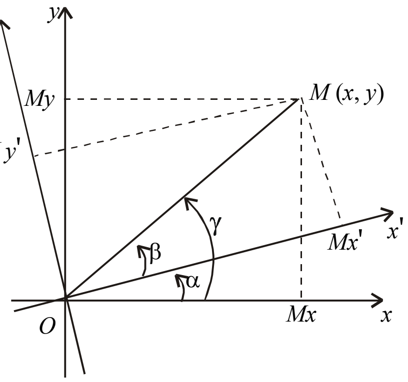
, але $y = 2 > 0$ і $x = 2 > 0$, маємо $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$. У полярних координатах точка $M\left(2\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Розглянемо такі перетворення систем координат:

1) паралельний зсув осей, коли змінюється положення початку системи координат, а напрям осей залишається таким самим;

2) поворот осей, коли обидві осі повертаються на деякий кут відносно початку системи координат.





1. Нехай точка M у старій системі координат Oxy має координати (x, y), а в новій системі координат $O'x'y'$ — (x', y'). Знайдемо зв'язок між ними. З рис. бачимо, що

$$x = x' + x_0,\; y = y' + y_0, \qquad (5.2)$$

де (x_0, y_0) — декартові координати початку нової системи координат (точка O') у старій системі координат. Розв'язуючи рівняння (5.2) відносно x' і y', маємо $x' = x - x_0$, $y' = y - y_0$.

2. Повернемо тепер стару систему координат Oxy відносно точки O на кут α і дістанемо нову систему $Ox'y'$.

Розглянемо також дві полярні системи координат з полюсом у точці O і полярними осями Ox і Ox'. Тоді згідно з рис. маємо

$$x = \rho\cos\gamma,\; y = \rho\sin\gamma,\; x' = \rho\cos\beta,\; y' = \rho\sin\beta.$$

Крім того, $\gamma = \alpha + \beta$, підставляючи це значення γ у формули, остаточно будемо мати:

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,\; y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \qquad (5.3)$$

Розв'язуючи рівності (5.3) відносно x', y', дістаємо:

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \quad y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$

Здобуті формули відбивають зв'язок між старими (x, y) і новими (x', y') координатами точки.

Вектори, лінійні операції над векторами

Означення. *Вектором* називається напрямлений відрізок.

Позначати вектори будемо $\vec{a}, \vec{b}$, ...

Якщо, скажімо, точка A — початок вектора, а точка B — його кінець, то маємо $\overrightarrow{AB}$.

Вектор, в якого початок і кінець збігаються, називається *нульовим вектором.*

Вектор вважається заданим, коли відома його довжина $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$ і напрям щодо деякої осі.

Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються *колінеарними,* якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вважаються *рівними,* коли вони:

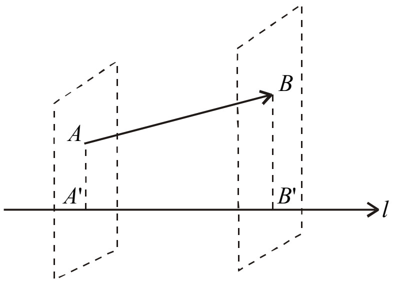
1) колінеарні;

2) однаково напрямлені;

3) їхні довжини рівні.

З останнього випливає, що при паралельному перенесенні вектора дістаємо новий вектор, що дорівнює попередньому, тому вектори в аналітичній геометрії називають вільними.

Нехай у просторі задано деяку вісь l і вектор $\overrightarrow{AB}$. Проведемо через точки A і B площини, перпендикулярно до осі l (рис.). Позначимо точки перетину цих площин з віссю l відповідно A' і B'.



Означення. *Проекцією вектора* $\overrightarrow{AB}$ *на вісь* l називається довжина $A'B'$ напрямленого відрізка $\overrightarrow{A'B'}$ на осі l. Слід зазначити, що $A'B' = |\overrightarrow{A'B'}|$, якщо напрям $\overrightarrow{A'B'}$ збігається з напрямом l і $A'B' = -|\overrightarrow{A'B'}|$, якщо напрям $\overrightarrow{A'B'}$ протилежний напряму l.

Позначається проекція вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l — $np_l\,\overrightarrow{AB}$. З рис. випливає формула знаходження проекції вектора на вісь:

$$np_l\,\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\varphi,$$

де φ — кут між вектором і віссю.

Якщо розглянути прямокутну декартову систему координат і точки початку A (x_1, y_1, z_1) і кінця B (x_2, y_2, z_2) вектора $\overrightarrow{AB}$, то проекції вектора $\overrightarrow{AB}$ на кожну з осей мають вигляд:

$$Ox:\ a_x = x_2 - x_1,\quad Oy:\ a_y = y_2 - y_1,\quad Oz:\ a_z = z_2 - z_1.$$

Довжина вектора подається формулою:

$$|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \qquad (5.4)$$

Якщо позначити α, β, γ — кути між вектором $\vec{a}$ і відповідними осями системи координат, то їх косинуси можна знайти за формулами:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|},\ \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|},\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}. \qquad (5.5)$$

У подальшому називатимемо їх *напрямними косинусами вектора* $\vec{a}$. Піднісши кожну з формул (5.5) до квадрата і скориставшись (5.4), дістанемо:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Дії з векторами виконуються за правилами:

1. *Додавання*:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x,\ a_y + b_y,\ a_z + b_z).$$

2. *Множення вектора на число* $\alpha \in R$:

$$\alpha\vec{a} = \left(\alpha a_x, \alpha a_y, \alpha a_z\right).$$

Для лінійних операцій з векторами виконуються властивості:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
2. $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$.
3. $\alpha\left(\beta\vec{a}\right) = \left(\alpha\beta\right)\vec{a}$.

4. $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$.

5. $\alpha\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$.

***Теорема*.**

Проекція суми двох векторів на вісь дорівнює сумі їхніх проекцій на цю вісь:

$$\boldsymbol{np_l\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=np_l\vec{a}+np_l\vec{b}.}$$

Теорема.

При множенні вектору на число його проекція на цю вісь також множиться на це число:

$$\boldsymbol{np_l(\alpha\vec{a})=\alpha np_l\vec{a}.}$$

Нехай вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ такі, що за напрямом збігаються відповідно з осями *Ox*, *Oy*, *Oz* і $\left|\vec{i}\right|=\left|\vec{j}\right|=\left|\vec{k}\right|=1$. Такі вектори надалі називатимемо *одиничними* векторами осей системи координат. Тоді

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}. \qquad (5.6)$$

5.2. Скалярний добуток векторів, його властивості та застосування.

Означення. Скалярним добутком двох ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число (скаляр), яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними. Якщо хоча б один із векторів дорівнює нулю, то кут між векторами не визначений і за означенням скалярний добуток дорівнює нулю.

Отже:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi,$$

де φ — кут між векторами. Використовуючи формулу проекції вектора, можна також записати:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{b}\right|np_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|np_{\vec{a}}\vec{b}.$$

***Властивості скалярного добутку*:**

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.
2. $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$.
3. $\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}$.
4. $(\vec{a}\cdot\vec{a})=|\vec{a}|^2; \sqrt{(\vec{a})^2}=|\vec{a}|$.
5. $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, якщо $\vec{a}\perp\vec{b}$, і навпаки, $\vec{a}\perp\vec{b}$, якщо $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, $\vec{a}\neq 0, \vec{b}\neq 0$.

Нехай вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задано за допомогою (5.6), тоді, використовуючи властивості скалярного добутку, умови $\vec{i}\perp\vec{j}\perp\vec{k}$, маємо:

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}&=\left(\vec{a}_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)=\\&=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.\end{aligned} \qquad (5.7)$$

Отже, $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

З рівності (5.7) випливає, що:

1. Необхідною і достатньою умовою перпендикулярності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$.
2. Кут між двома векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ можна знайти за формулою:

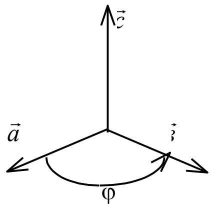
$$\cos\varphi=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

Означення. *Векторним добутком вектора* $\vec{a}$ *на вектор* $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, якщо:

1) *довжина вектора* $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, де φ — кут між двома векторами;

2) *вектор* $\vec{c}$ *перпендикулярний* до кожного з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

3) *вектор* $\vec{c}$ *спрямований* так, що коли дивитися з його кінця на площину, в якій лежать вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, то поворот вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ відбувається на найменший кут проти годинникової стрілки.



Модуль векторного добутку двох неколінеарних векторів дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах як на сторонах.

Властивості векторного добутку:

1. $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, якщо $\vec{a} \neq 0$ і $\vec{b} \neq 0$ — колінеарні вектори.
2. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.
3. $(\lambda\vec{a} \times \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$.
4. $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

Знайдемо векторні добутки одиничних векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. З колінеарності векторів випливає: $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$. З того, що одиничні вектори збігаються з напрямом осей прямокутної системи координат, маємо:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k},\ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i},\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}.$$

Знайдемо координати вектора $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, якщо $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$.

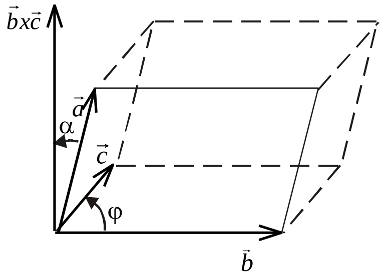
$$\begin{aligned}\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} &= \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right)\cdot\left(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\right) = \\ &= \left(a_y b_z - a_z b_y\right)\vec{i} + \left(a_z b_x - a_x b_z\right)\vec{j} + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\vec{k}\end{aligned} \qquad (5.8)$$

або

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Означення. *Мішаним добутком векторів* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називається число, яке дорівнює скалярному добутку вектора $\vec{a}$ на векторний добуток векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$, тобто $\vec{a}\cdot(\vec{b} \times \vec{c})$.

Розглянемо геометричний зміст змішаного добутку. Для цього побудуємо на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, вважаючи, що вони не лежать в одній площині, тобто не компланарні, паралелепіпед (рис.).



Знайдемо об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (рис.). Площа основи його дорівнює модулю векторного добутку векторів $|\vec{b} \times \vec{c}|$ $s = |\vec{b} \times \vec{c}| = |\vec{c}||\vec{b}|\sin\varphi$. Висота дорівнює $|\vec{a}|\cos\alpha$. Отже, остаточно маємо:

$$V=|\vec{a}|\cos\alpha\cdot|\vec{b}||\vec{c}|\sin\varphi=|\vec{a}||\vec{b}\times\vec{c}|\cos\alpha=\left|\vec{a}\left(\vec{b}\times c\right)\right|. \qquad (5.9)$$

З останнього випливає, що модуль мішаного добутку чисельно дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$.

З рівності (5.9) маємо умову компланарності трьох векторів $\vec{a};\ \vec{b};\ \vec{c}$.

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=0.$$

Ураховуючи формули (5.7) і (5.8) знаходження скалярного і векторного добутків, маємо:

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\left(\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix}\vec{j}+\right.$$

$$\left.+\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}\vec{k}\right)=a_x\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}-a_y\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix}+a_z\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix},$$

або

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

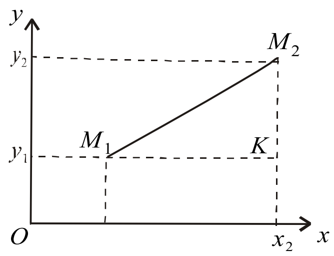
Властивості мішаного добутку:

1. $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{b}\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)=\vec{c}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$.
2. $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=-\vec{b}\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)$.

Найпростіші задачі аналітичної геометрії

*1. **Відстань між двома точками.***

Нехай задано дві точки $M_1\ (x_1, y_1)$ і $M_2\ (x_2, y_2)$ (рис.).



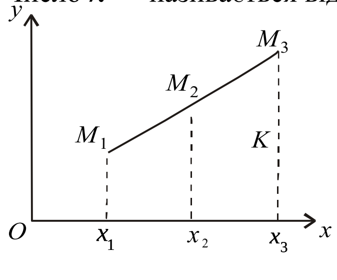
$$|M_1K|=|x_2-x_1|,|M_2K|=|y_2-y_1|.$$

Трикутник M_1M_2K — прямокутний, тому за теоремою Піфагора маємо:

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \quad (5.10)$$

*2. **Поділ відрізка у заданому відношенні.***

Число λ — називається відношенням, в якому точка M ділить відрізок M_1M_2 (рис.), якщо



$$\lambda=\frac{|M_1M|}{|MM_2|}.$$

Нехай задано λ і координати точок $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$, треба знайти координати точки $M(x, y)$.

З рис. і теореми про пропорційні відрізки, що відтинають паралельні прямі на сторонах кута, випливають співвідношення:

$$\frac{|x - x_1|}{|x_2 - x|} = \frac{|M_1 M|}{|M M_2|} = \lambda .$$

Оскільки числа $x - x_1$ і $x_2 - x$ одного й того самого знака (при $x_1 < x_2$ вони додатні, а при $x_1 > x_2$ — від'ємні), то $\left|\frac{x - x_1}{x_2 - x}\right| = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$. Отже, $\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda$.

Звідси:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}. \tag{5.11}$$

Аналогічно до попереднього дістанемо формулу для знаходження координати y

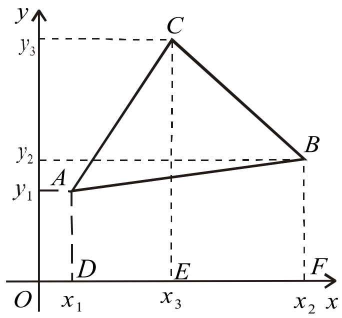
$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \tag{5.12}$$

Наслідок. Якщо точка $M(x, y)$ — середина відрізка $M_1 M_2$, то $\lambda = 1$ і формули (5.11), (5.12) набирають вигляду:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \; y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

3. Площа трикутника.

Нехай задано координати вершин деякого трикутника $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ (рис.).



Знайдемо площу цього трикутника. З рисунка бачимо, що площу трикутника ABC можна знайти як $S_{\Delta ABC} = S_{ADEC} + S_{BCEF} - S_{ABFD}$. У правій частині формули стоять площі відповідних трапецій, які подаються формулами:

$$S_{ADEC} = |DE| \frac{|AD| + |CE|}{2} = \frac{(x_3 - x_1)(y_3 + y_1)}{2};$$

$$S_{BCEF} = |EF| \frac{|EC| - |BF|}{2} = \frac{(x_2 - x_3)(y_2 - y_3)}{2};$$

$$S_{ABFD} = |DF| \frac{|AD| + |BF|}{2} = \frac{(x_2 - x_1)(y_1 + y_2)}{2}.$$

Підставивши знайдені площі у вираз для площі трикутника, дістанемо:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + (x_3 - x_1)(y_3 + y_1)| =$$

$$= \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_3 - y_1)|.$$

Записавши останній вираз у вигляді визначника, дістанемо остаточну формулу:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{matrix} \right\| \tag{5.13}$$

Лекція 6. Пряма на площині.

6.1. Рівняння прямої на площині.

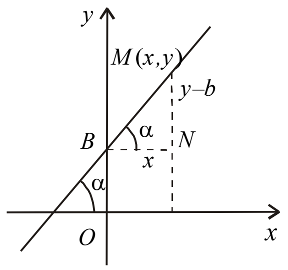
6.2. Взаємне розміщення прямих на площині. Основні задачі.

6.1. Рівняння прямої на площині.

Означення. Рівняння $F(x, y) = 0$ називається *рівнянням деякої лінії в заданій системі координат*, якщо це рівняння задовольняють координати (x, y) будь-якої точки, що лежить на цій лінії, і не задовольняють координати жодної точки, що не лежить на цій лінії.

Пряма лінія на площині

Нехай задано деяку пряму (рис.), знайдемо її рівняння.



Точка $M(x, y)$ лежить на прямій тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$\frac{NM}{BN} = \operatorname{tg}\alpha .$$

Позначимо $\operatorname{tg}\alpha = k$ і назвемо цю величину *кутовим коефіцієнтом* прямої лінії. Тоді, враховуючи, що $NM = y - b$, $BN = x$, маємо *рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом*

$$y = kx + b. \qquad (6.14)$$

Нехай деяка точка $M_1(x_1, y_1)$ належить заданій прямій, тоді $y_1 = kx_1 + b$. Знайдемо з цього рівняння значення b і, підставивши його в рівняння прямої (6.14), дістанемо:

$$y - y_1 = k(x - x_1) \qquad (6.15)$$

— *рівняння прямої, що проходить через задану точку* $M_1(x_1, y_1)$.

Нехай ще одна точка $M_2(x_2, y_2)$ також належить заданій прямій, тоді з означення лінії маємо:

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1).$$

Знайдемо значення k з останнього співвідношення і, підставивши його в рівняння прямої (6.15), дістанемо:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \qquad (6.16)$$

Останнє рівняння (6.16) називається *рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки*.

У прямокутній системі координат пряма лінія задається рівнянням першого степеня відносно x і y.

$$Ax + By + C = 0, \qquad (6.17)$$

і навпаки, рівняння (6.17) при довільних A, B, C (A і B одночасно не дорівнюють нулю) визначає деяку пряму в прямокутній системі координат Oxy.

Рівняння (6.17) називається *загальним рівнянням прямої лінії*. Дослідимо це рівняння.

1. $C = 0$, $A \neq 0$, $B \neq 0$, тоді $Ax + By = 0$ і останнє визначає пряму, що проходить через початок системи координат, бо точка $O(0, 0)$ лежить на цій прямій.

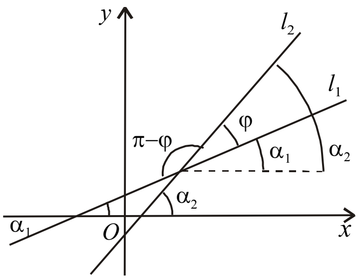
2. $B = 0$, $A \neq 0$, $C \neq 0$, тоді $Ax + C = 0$, або $x = -\frac{C}{A} = a$, де a — довжина відрізка, що його пряма відтинає на осі Ox, а сама вона розміщена паралельно осі Oy, якщо $C = 0$, то $x = 0$ маємо рівняння самої осі Oy.

3. $A = 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, тоді $By + C = 0$, або $y = -\frac{C}{B} = b$, де b — довжина відрізка, що відтинає пряма на осі Ox, при $c = 0$ маємо $y = 0$ — рівняння осі Ox.

6.2. Взаємне розміщення прямих на площині. Основні задачі.

Розглянемо дві прямі l_1: $y = k_1x + b_1$ і l_2: $y = k_2 x + b_2$.

Означення. Кутом між прямим l_1 і l_2 називається такий кут φ, поворот на який від першої прямої до другої відносно точки їх перетину до суміщення цих прямих відбувається на найменший кут проти годинникової стрілки.



Зауважимо, що кут між l_1 і l_2 не дорівнює куту між l_2 і l_1. Пригадуючи, що tg $\alpha_1 = k_1$; tg $\alpha_2 = k_2$, а також, що виконується очевидне співвідношення між кутами $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$ (рис.), маємо: $\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = = \frac{\mathrm{tg}\alpha_2 - \mathrm{tg}\alpha_1}{1 + \mathrm{tg}\alpha_2\alpha_1}$. Остаточно

$$\mathrm{tg} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}. \qquad (6.18)$$

Якщо кут φ — це кут між l_1 і l_2, то кут між l_2 і l_1 дорівнюватиме $\pi - \varphi$.

З формули (6.18) легко дістати *умови паралельності і перпендикулярності двох прямих*. Так, коли $l_1 // l_2$, кут φ між ними дорівнює нулю — маємо:

$$\mathrm{tg}\ \varphi = 0 \Rightarrow k_1 = k_2.$$

Якщо $l_1 \perp l_2$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$; $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} + \alpha_1$

$$\mathrm{tg}\alpha_2 = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1\right) = -\mathrm{ctg}\alpha_1 = -\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha_1}.$$

Підставляючи значення кутових коефіцієнтів, маємо:

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Нехай задано деяку точку M_0 (x_0, y_0) і пряму l: $Ax + By + C = 0$. Пересвідчимось, що M_0 не лежить на прямій, $Ax_0 + By_0 + C \neq 0$, тоді *відстань від точки M_0 (x_0, y_0) до прямої $Ax + By + C = 0$* можна знайти за формулою:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Лекція 7. Криві другого порядку.

7.1.Криві другого порядку: коло, еліпс, гіпербола, парабола (канонічні рівняння, побудова).

7.2.Розв'язання задач.

7.1.Криві другого порядку: коло, еліпс, гіпербола, парабола (канонічні рівняння, побудова).

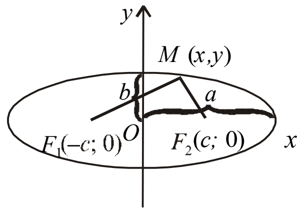
Розглянемо тепер лінії другого порядку, які на площині в загальному випадку можна записати так:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \qquad (7.1)$$

Рівняння (7.1) описує всі криві другого порядку в загальному випадку. Спинимось спочатку на простіших, так званих канонічних рівняннях ліній другого порядку.

Еліпс.

Означення. Множина точок площини, для яких сума відстаней від двох заданих точок, що називаються *фокусами*, є величина стала й така, що дорівнює $2a$ і більша, ніж відстань між фокусами, називається *еліпсом.*



На рис. зображено $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ — фокуси еліпса, $M(x, y)$ — точка множини, яка задовольняє означення, тобто $|MF_1| + |MF_2| = 2a$, причому $2c < < 2a \Rightarrow a > c$.

Тоді

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (7.2)$$

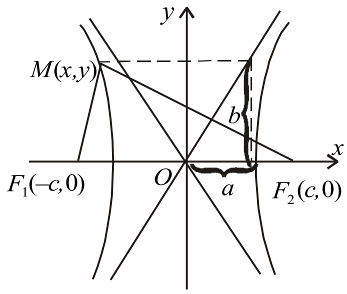
канонічне рівняння еліпса, де $b^2 = a^2 - c^2$.

Розглянемо геометричний зміст параметрів, що входять в рівняння (7.2). Якщо $x = 0$, $y = \pm b$, тобто точки $(0, b)$ і $(0, -b)$ є точками перетину еліпса з віссю Oy. Відрізок завдовжки b називають малою піввіссю еліпса. При $y = 0$, $x = \pm a$ і відповідно $(a, 0)$; $(-a; 0)$ є точками перетину еліпса з віссю Ox. Відрізок завдовжки a — велика півvісь еліпса. З парності виразу (7.2) за x і за y випливає симетрія еліпса відносно осей Ox і Oy. На рис. зображено еліпс.

Ексцентриситет еліпса — це відношення $\varepsilon = \frac{c}{a}$; за означенням $c < a$ і $\varepsilon \in [0, 1)$. Оскільки $\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2$, то $\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$. З останньої рівності випливає геометричний зміст ексцентриситету, який полягає в тому, що він характеризує *ступінь витягнутості* еліпса. Так, при $\varepsilon = 0 \Rightarrow a = b$ маємо коло, якщо ε наближається до одиниці, то відношення довжини півосей еліпса стає малим, тобто еліпс витягується вздовж осі Ox.

Гіпербола.

Означення. Множина точок площини, для яких модуль різниці відстаней від двох заданих точок, що називаються фокусами, є величиною сталою, яка дорівнює $2a$ і менша за відстань між фокусами, називається *гіперболою*.



Скористаємось рис., з якого бачимо, що точки $F_1(-c, 0)$ і $F_2(c, 0)$ — фокуси гіперболи, точка M

(x, y) — точка визначеної множини. Тоді $\left\| MF_1 \right| - \left| MF_2 \right\| = 2a, a < c$.

Канонічне рівняння гіперболи має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{де} \quad b^2 = c^2 - a^2.$$

Дослідимо здобуте рівняння. Гіпербола не перетинає вісь Oy. При $y = 0$; $x = \pm a$ і точки $(-a, 0)$; $(a, 0)$ — точки перетину з віссю Ox. Розглянемо ще рівняння прямих $y = \pm \frac{b}{a} x$, які далі називатимемо *асимптотами гіперболи*. Враховуючи симетрію відносно осей Ox і Oy, будуємо графік гіперболи, який зображено на рис.

Відрізки завдовжки b і a називають відповідно *уявною* і *дійсною осями гіперболи*.

Ексцентриситет гіперболи $\varepsilon = \frac{c}{a}$, але $c > a$ і $\varepsilon > 1$. Беручи до уваги, що $c^2 = a^2 + b^2$, дістаємо: $\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2$, або $\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$.

З останньої рівності випливає, що для гіперболи ексцентриситет характеризує ступінь нахилу віток гіперболи до осі Ox.

Дві прямі, рівняння яких $x = -\frac{a}{\varepsilon}$; $x = \frac{a}{\varepsilon}$, називаються *директрисами* еліпса і гіперболи. Для еліпса $0 \le \varepsilon < 1$ і відношення $\frac{a}{\varepsilon} > a$, директриси еліпса — це дві прямі, що розміщені симетрично відносно осі Oy і проходять зовні еліпса. Для гіперболи $\varepsilon > 1$ і відношення $\frac{a}{\varepsilon} < a$. Тобто директриси гіперболи розміщені симетрично відносно осі Oy і лежать між вітками гіперболи.

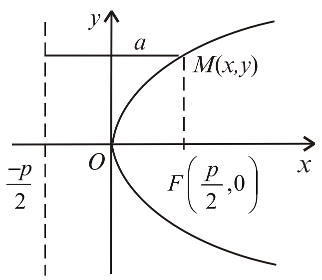
Для еліпса і гіперболи можна сформулювати важливе ***твердження: якщо r — відстань від деякої точки еліпса або гіперболи до будь-якого фокуса, а d — відстань від цієї самої точки до директриси, яка відповідає цьому фокусу, то відношення*** $\frac{r}{d}$ ***стале й дорівнює ексцентриситету, тобто*** $\varepsilon = \frac{r}{d}$.

Розглянуте твердження можна покласти в основу означення цих ліній.

Означення. Множина точок, для яких відношення відстаней від фокуса і до відповідної директриси — величина стала, що дорівнює ексцентриситету ε, є *еліпс*, *якщо* $\varepsilon < 1$, *і гіпербола*, *якщо* $\varepsilon > 1$.

Парабола.

Означення. Множина точок площини, що містяться на однаковій відстані від даної точки фокуса і даної прямої, яка не проходить через фокус і називається *директрисою*, є *парабола*.

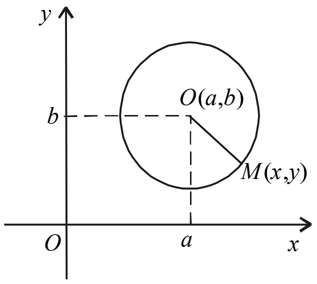


За означенням $r = d$, отже (див. рис.):

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}, \text{ або } y^2 = 2px$$

— канонічне рівняння параболи, коли $\varepsilon = 1$. Парабола симетрична осі Ox, проходить через початок системи координат. Її графік подано на рис..

Коло. До кривих другого порядку належить і добре відома лінія, яка називається *колом* (рис.).



Означення. Множина точок, що містяться на однаковій відстані від заданої точки — центра, називається *колом*.

За означенням $OM = R$ або $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$.

Піднісши обидві частини рівняння до квадрата, дістанемо:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \tag{7.3}$$

— канонічне рівняння кола. Тут (a, b) — координати центра кола, R — його радіус. Розкривши дужки в лівій частині (7.3), дістанемо, очевидно, рівняння другого степеня, тобто коло — також крива другого порядку.

Дослідження загального рівняння кривої другого порядку.

У попередньому підрозділі знайдено рівняння ліній другого порядку в канонічному вигляді. Покажемо, як із загального рівняння кривої другого порядку

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \tag{7.4}$$

дістати канонічне рівняння і визначити тип ліній.

Зробимо заміну змінних за формулами:

$$x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0.$$

Якщо координати нового центра визначаються за формулами:

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}{\delta}; \quad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix}}{\delta}, \text{ де } \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},$$

то в рівнянні (7.4) зникають лінійні відносно x і y члени і воно набирає вигляду

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0. \tag{7.5}$$

Якщо $\delta \neq 0$, то лінія другого порядку *називається центральною кривою*. Тут

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad a_{12} = a_{21}, \quad a_{31} = a_{13}, \quad a_{32} = a_{23}.$$

Нехай $\delta \neq 0$, $\Delta \neq 0$. Зведемо рівняння (7.5) до канонічного вигляду. Для цього позбудемося члена, який містить добуток $x'y'$. Скористаємось ще одним переходом до нової системи координат $O'x''y''$, яка утворюється поворотом системи координат $O'x'y'$ на деякий кут α. З рівняння (5.3) маємо:

$$x' = x''\cos\alpha - y''\sin\alpha, \quad y' = x''\sin\alpha + y''\cos\alpha.$$

Підставивши значення x', y' у (7.5), дістанемо:

$$a_{11}^{*}(x'')^2 + 2a_{12}^{*}x''y'' + a_{22}^{*}(y'')^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0,$$

де

$$a_{11}^{*} = a_{11}\cos^2\alpha + 2a_{12}\cos\alpha\sin\alpha + a_{22}\sin^2\alpha,$$

$$a_{12}^{*} = -a_{11}\sin\alpha\cos\alpha + a_{12}\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) + a_{22}\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$a_{22}^{*} = a_{11}\sin^2\alpha - 2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha + a_{22}\cos^2\alpha.$$

Виберемо такий кут повороту осей Ox', Oy', щоб виконувалась умова $a_{12}^{*} = 0$:

$$(a_{11} - a_{22})\sin 2\alpha = 2a_{12}\cos 2\alpha.$$

Якщо $a_{11} = a_{22}$, то $\cos 2\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Якщо $a_{11} \neq a_{22}$, то

$$\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}. \qquad (7.6)$$

Підставивши значення α у вирази для a_{11}^{*} і a_{22}^{*}, дістанемо канонічну форму рівняння кривої другого порядку:

$$a_{11}^{*}(x'')^2 + a_{22}^{*}(y'')^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

Остаточно здобуті результати можна звести в таблицю:

	$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0$
$\delta > 0$	Еліпс (дійсний або уявний)	Уявні прямі, що перетинаються в дійсній точці
$\delta = 0$	Парабола	Паралельні прямі (дійсні, уявні або такі, що збігаються)
$\delta < 0$	Гіпербола	Дійсні прямі, що перетинаються

Лекція 8. Функції однієї змінної, основні поняття. Числові послідовності.

8.1. Числові множини.
8.2. Поняття функції, основні характеристики функції, складна та обернена функції.
8.3. Основні елементарні функції, їх властивості та графіки.

8.1. Числові множини.

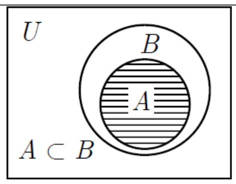
Поняття **множини** є ще одним не означуваним базовим поняттям математики. Воно є одним з найширших в математиці (за Г.Кантором, ***це – багато дечого, мислимого нами, як єдине).***

Елементами множини *називаються* об'єкти, що складають множину.

Порожньою *називається* множина, яка не містить жодного елементу.

Множини надалі в більшості випадків позначатимуться великими буквами латинського алфавіту, їх елементи – малими буквами. Якщо об'єкт a належить множині A, то пишуть $a \in A$, якщо об'єкт b не належить множині B, то пишуть $b \notin B$. Порожня множина позначається символом $\varnothing$.

Підмножиною множини А *називається* така множина В, всі елементи якої є елементами множини A. Це позначають так: $B \subset A$ або $A \supset B$.



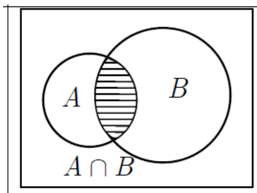
1) $A \subset A$;
2) $\varnothing \subset A$

Дві множини A та B *називаються* **рівними** ($A = B$), якщо вони складаються з одних і тих самих елементів, тобто одночасно $A \subset B$ та $B \subset A$. Символічний запис має вигляд: $\{A \subset B \wedge B \subset A\} \Leftrightarrow \{A = B\}$.

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B, \\ B \subset A \end{cases}$$

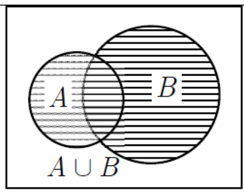
Основні операції над множинами визначаються так:

1) **перетином множин** A **та** B *називається* множина C, яка складається з тих і тільки тих елементів, які належать одночасно множині A та множині B, позначається це так: $C = A \bigcap B$;



1) $A \cap A = A$;
2) $A \cap \varnothing = \varnothing$

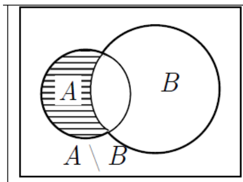
2) **об'єднанням множин** A **та** B *називається* множина D, яка складається з тих і тільки тих елементів, які належать хоча б одній із цих множин, позначається це так: $D = A \bigcup B$;



1) $A \cup A = A$;

2) $A \cup \varnothing = A$

3) **різницею множин A та B** *<u>називається</u>* множина E, яка складається з тих і тільки тих елементів A, які не належать B, позначається це так: $E = A \setminus B$;

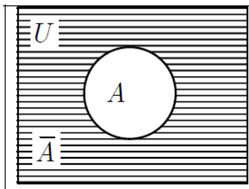


1) $A \setminus A = \varnothing$;

2) $A \setminus \varnothing = A$

4) **доповнення** множини B до множини A є частинним випадком різниці

$A \setminus B$ коли $B \subset A$, в таких випадках пишуть $\overline{B}_A$ або просто $\overline{B}$ (коли множина A є очевидно зрозумілою).



1) $A \cup \overline{A} = U$;

2) $A \cap \overline{A} = \varnothing$

комутативність об'єднання	$A \cup B = B \cup A$
комутативність перерізу	$A \cap B = B \cap A$
асоціативність об'єднання	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
асоціативність перерізу	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
дистрибутивність об'єднання щодо перерізу	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
дистрибутивність перерізу щодо об'єднання	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
закони де Моргана	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
закони поглинання	$A \cup (A \cap B) = A,\ A \cap (A \cup B) = A$

У курсі математики найчастіше використовуються **числові множини**. Це, по-перше, **множина натуральних чисел** $N=\{1;2;3;\ldots\}$. Відзначимо, що такі числа виникають, якщо лічити певні об'єкти, ця множина **замкнена відносно операцій додавання та множення** (сума та добуток натуральних чисел також є натуральними числами). По-друге, розглядається **множина цілих чисел** Z, яка складається з натуральних чисел, протилежних їм чисел і нуля: $Z=\{0;\pm1;\pm2;\pm3;\ldots\}$. Зазначимо, що така множина **замкнена відносно операцій додавання, множення та віднімання**. По-третє, визначається **множина раціональних чисел** Q, що містить всі числа вигляду $\frac{p}{q}$, де $p\in Z$, $q\in N$. Для цієї множини має місце **замкненість відносно всіх чотирьох арифметичних дій** («заборонене» лише ділення на нуль).

Для подальшого розширення системи числових множин слід зауважити, що раціональні числа при використанні, наприклад, десяткової системи запису, є **скінченими** або ж **нескінченними періодичними десятковими дробами**. Числа ж, які записуються нескінченними неперіодичними десятковими дробами, *називаються* **ірраціональними.** Об'єднання множин **раціональних** та **ірраціональних** чисел складає **множину дійсних чисел** і позначається R. Таким чином, має місце ланцюг включень $N\subset Z\subset Q\subset R$, причому множина $\overline{Q}=R\setminus Q$ є множина ірраціональних чисел.

Принципово важливою є **геометрична властивість множини дійсних чисел**. Нехай на прямій лінії визначено **напрям** (називатимемо його додатним, а протилежний до нього – від'ємним), деяку точку O (**початок відліку** або **початок координат**) та **масштаб.** Тоді така пряма *називається* **числовою прямою** або **координатною віссю**. Положення будь-якої точки M на координатній осі визначається її **координатою** – числом, рівним відстані точки M до точки O, взятій зі знаком « + », якщо точка M розміщена в додатному напрямі відносно початку координаті, або зі знаком « –» у протилежному випадку.

До «найуживаніших» підмножин множини дійсних чисел (і, відповідно, множин точок на прямій), належать **замкнені інтервали** (сегменти) – множини $\{x: a\le x\le b\}$, **відкриті інтервали** – множини $\{x: a<x<b\}$, **напіввідкриті інтервали** – множини вигляду $\{x: a\le x<b\}$ та $\{x: a<x\le b\}$.

При цьому числа a та b називають **кінцями інтервалу**, а сам інтервал – **обмеженим**. До **нескінченних інтервалів** належать інтервали $(-\infty;a],(-\infty;a),(b;+\infty),[b;+\infty),(-\infty;+\infty)$.

Модулем (абсолютною величиною) числа x *називається* число

$$|x|=\begin{cases} x, x>0; \\ -x, x<0; \\ 0, x=0. \end{cases}$$

Модуль дійсного числа має наступні властивості:

1) рівні числа мають рівні модулі: $a = b \Rightarrow |a| = |b|$;
2) модуль числа завжди невід'ємний: $|a| \geq 0$;
4) число не перевищує свого модуля: $a \leq |a|$;
5) протилежні числа мають рівні модулі: $|a| = |-a|$;
6) модуль суми скінченої кількості доданків не перевищує суми їх модулів: $|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$;
7) модуль різниці двох чисел не менший за різницю їх модулів: $|a - b| \geq |a| - |b|$;
8) модуль добутку скінченої кількості співмножників дорівнює добутку їх модулів: $|a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n| = |a_1| \times |a_2| \times \ldots \times |a_n|$;
9) модуль частки дорівнює частці модулів діленого і дільника: $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$.

З поняттям модуля пов'язаний важливий різновид підмножин множини раціональних чисел (множин на числовій прямій) – **околи числа** (точки). Надалі називатимемо ε – **околом** ($\varepsilon > 0$) числа a (точки з координатою a на числовій прямій) сукупність чисел x (точок), які задовольняють нерівність $|x - a| < \varepsilon$. З геометричної точки зору, така множина на числовій прямій є відкритий інтервал довжини 2ε, середина якого знаходиться в точці з координатою a.

8.2. Поняття функції, основні характеристики функції, складна та обернена функції.

Величина називається змінною (сталою), якщо в умовах даної задачі вона набуває різних (тільки одного) значень.

Розглянемо дві змінні величини $x \in D \subseteq R$ і $y \in E \subseteq R$.

Означення.

Функцією $y = f(x)$ називається така відповідність між множинами D і E, за якої кожному значенню змінної x відповідає одне й тільки одне значення змінної y.

При цьому вважають, що:
x — незалежна змінна, або аргумент;
y — залежна змінна, або функція;
f — символ закону відповідності;
D — область визначення функції;
E — множина значень функції.
Розрізняють три способи завдання функції: аналітичний, графічний і табличний.

Означення.

Функція $y = F(u)$, де $u = \varphi(x)$, називається *складною (складеною) функцією*, або *суперпозицією* функцій $F(u)$ та $\varphi(x)$, і позначається $y = F(\varphi(x))$.

Приклад.

$y = 2^{\sin^2 x}$ — складна функція, вона буде суперпозицією трьох функцій: $y = 2^u$, $u = v^2$, $v = \sin x$.

Приклад.

$y = \mathrm{tg}(3u) \cdot f(u)$, де $u = 3x + 1$, $f(x) = (2x + 5)^3$.

Оскільки $f(u) = (2u + 5)^3$, то $y = \mathrm{tg}(3(3x + 1))(2(3x + 1) + 5)^3 = \mathrm{tg}(9x + 3)(6x + 7)^3$.

Означення.

Нехай функція $y = f(x)$ встановлює відповідність між множинами D та E. Якщо обернена відповідність між множинами E та D буде функцією, то вона називається *оберненою до даної* $y = f(x)$; її позначають $y = f^{-1}(x)$.

За означенням, для взаємно обернених функцій маємо:

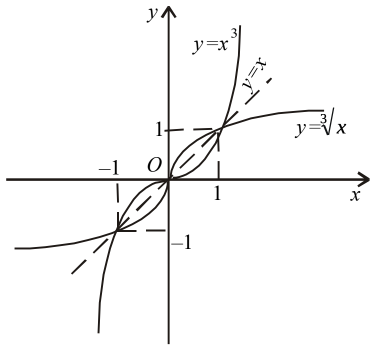
$$f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x.$$

Приклад.

$f(x) = x^3$, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ — взаємно обернені функції:

$$\sqrt[3]{x^3} = (\sqrt[3]{x})^3 = x.$$

Графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$ (рис.).



Означення.

Функція (функціональна залежність змінної y від змінної x) називається *неявною*, якщо її задано рівнянням $F(x, y) = 0$, яке не розв'язане відносно змінної y.

Приклад.

Рівняння $y + x + 2^y = 0$ визначає неявну функцію y від x.

Означення.

Система рівнянь

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

визначає *параметричну залежність функції y від змінної x (t—параметр).*

Вираз $y = f(x)$ самої залежності y від x можна дістати виключенням параметра t з останньої системи рівнянь.

Приклад.

Параметрична залежність

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

визначає коло радіуса r з центром у початку прямокутної декартової системи координат. Справді, зводячи до квадрата параметричні рівняння і підсумовуючи результат, дістаємо: $x^2 + y^2 = r^2(\cos^2 t + \sin^2 t)$, або $x^2 + y^2 = r^2$.

Загальні властивості функцій.

Означення.

Множина всіх значень аргументу, для яких можна обчислити значення функції, називається *природною областю визначення функції*. Область визначення може бути заданою; у цьому випадку вона залежить також від умови задачі.

Приклад.

Знайти область визначення функції

$$y = \frac{\arcsin\frac{x}{2} + \sqrt{1-x^2}}{\lg(1+x)}.$$

$$D(y) = \begin{cases} \left|\frac{x}{2}\right| \le 1 \\ 1-x^2 \ge 0 \\ x+1>0 \\ \lg(x+1) \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \le 2 \\ |x| \le 1 \\ x > -1 \\ x+1 \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x \le 1 \\ x \ne 0. \end{cases}$$

$D(y) = (-1; 0) \cup (0; 1]$ — природна область визначення. Якщо за умовою задачі x — відстань, а це означає, що $x \ge 0$, тоді $D(y) = (0; 1]$ — задана область визначення.

Означення.

Функція $y = f(x)$ називається *парною (непарною)*, якщо для будь-якого $x \in D$ виконується умова $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$).

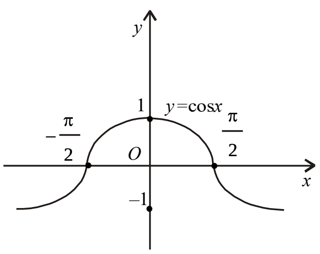
Функція буде ні парною, ні непарною, якщо для $x \in D$, $f(-x) \ne \pm f(x)$.

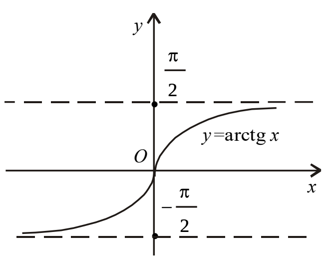
Приклад.

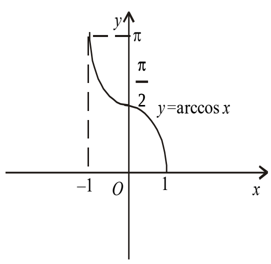
$y = \cos x$ — парна функція (графік функції симетричний відносно осі ординат (рис.)), бо $y(x) = \cos(-x) = \cos x = y(x)$;

$y = \operatorname{arctg} x$ — непарна функція (графік функції симетричний відносно початку координат (рис.)), бо $y(-x) = \operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x = -y(x)$;

$y = \arccos x$ — ні парна, ні непарна (рис.), бо $y(-x) = \arccos(-x) = \pi - \arccos x \ne \pm y(x)$.





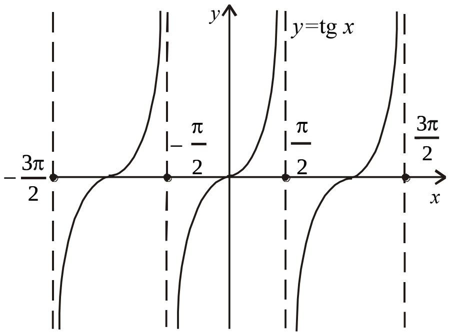


Означення.

Функція $y = f(x)$ називається *періодичною*, якщо для $x \in D$ виконується умова $f(x+T) = f(x-T) = f(x)$, де число T — період функції.

Приклад.

$y = \mathrm{tg} x$ — періодична функція з мінімальним періодом $T = \pi$ (див. рис.), бо $\mathrm{tg}(x+\pi) = \mathrm{tg}(x-\pi) = \mathrm{tg} x$.

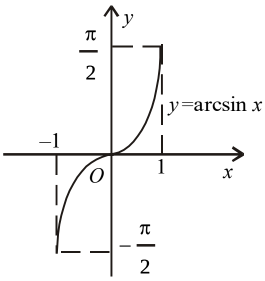


Означення.

Функція $y = f(x)$ називається *обмеженою на множині* D, якщо для всіх $x \in D$ виконується умова $|f(x)| \le M$, де $M > 0$ — деяке скінченне число.

Приклад.

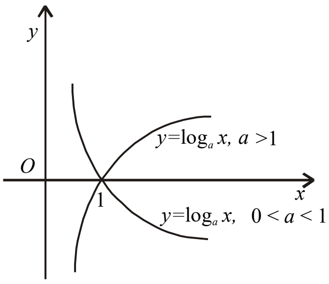
$y = \arcsin x$ — обмежена функція для всіх $x \in [-1; 1]$ (рис.), бо $|\arcsin x| \le \frac{\pi}{2}$.



Означення. Функція $y = f(x)$ називається *монотонно зростаючою* (*спадною*) на множині D, якщо для всіх $x \in D$ більшому значенню аргументу відповідає більше (менше) значення функції, тобто $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1) (f(x_2) < f(x_1))$.

Приклад.

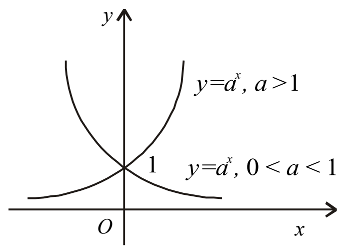
$y = \log_a x$ — монотонно спадна функція при $0 < a < 1$, а при $a > 1$ — монотонно зростаюча (рис.).

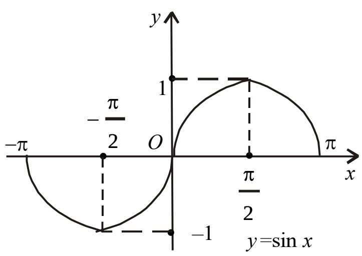


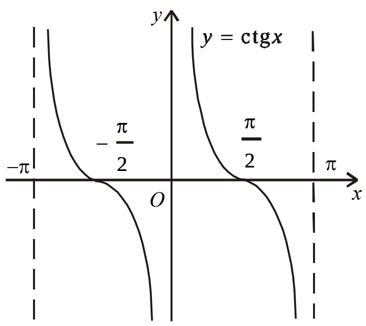
8.3. Основні елементарні функції, їх властивості та графіки.

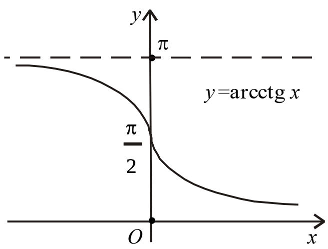
Основні з них:

1) степенева $y = x^{\alpha}$;
2) показникова $y = a^{x}$, $a > 0$, $a \neq 1$ (рис.);
3) логарифмічна $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ (рис.);
4) тригонометричні: $y = \cos x$ (рис.); $y = \sin x$ (рис.); $y = \mathrm{tg}x$ (рис.); $y = \mathrm{ctg}x$ (рис.);
5) обернені тригонометричні: $y = \arcsin x$ (рис.); $y = \arccos x$ (рис.); $y = \mathrm{arctg}x$ (рис.); $y = \mathrm{arcctg}x$ (рис.).









Функція вважається *елементарною*, якщо вона може бути побудована з основних елементарних функцій за допомогою скінченної кількості алгебраїчних дій та суперпозицій, наприклад:

$$y = 2^{x\mathrm{tg}^3\left(x^2 + \arcsin\sqrt{x}\right)} + \cos^2\left(\log_2\left(\mathrm{arctg}x - \frac{1}{x}\right)\right) \text{ — елементарна функція.}$$

Означення. Функція $y = y(x)$ називається *алгебраїчною*, якщо $y(x)$ — розв’язок рівняння

$$P_0(x)y^n + P_1(x)y^{n-1} + \ldots + P_{n-1}(x)y + P_n(x) = 0,$$

де $P_i(x)$, $i = (\overline{0,n})$ — многочлени.

Приклад.

Функція $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^2+1}{x-1}}$ буде алгебраїчною, бо вона є розв’язком рівняння

$$y^3(x-1) - \left(x^2+1\right) = 0.$$

Усі неалгебраїчні функції називаються *трансцендентними*.
Алгебраїчні функції поділяються на *раціональні* (цілі й дробові) та *ірраціональні*.
Цілою раціональною функцією буде упорядкований многочлен

$$y = P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, a_i \in R.$$

Дробово-раціональною функцією буде відношення многочленів

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \text{ або } y = R(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}.$$

Лекція 9. Границя числової послідовності. Основні теореми о границях числової послідовності. Границя функції.

9.1. Поняття числової послідовності та її границі.
9.2. Нескінченно мала та нескінченно велика послідовності, зв'язок між ними.
9.3. Граничний перехід при арифметичних операціях.
9.4. Теореми, які полегшують знаходження границь послідовностей
9.5. Число е

9.1. Поняття числової послідовності та її границі

Означення. Числова функція $y = f(n)$, область визначення якої є множина натурального ряду чисел, називається *числовою послідовністю*, або просто послідовністю, і позначається $y = x_n$, надалі писатимемо $x_n = f(n),\ n \in N$.

Значення $x_1 = f(1),\ x_2 = f(2),\ \ldots,\ x_n = f(n),\ \ldots$ називаються *членами послідовності*. Послідовність вважається заданою, якщо задано n-й член послідовності.

Приклад.

Записати три перші члени послідовності $x_n = \dfrac{2n-1}{2^n}$.

Маємо $x_1 = \dfrac{1}{2},\ \ x_2 = \dfrac{3}{2^2},\ \ x_3 = \dfrac{5}{2^3}$.

Приклад.

За заданими трьома першими членами послідовності $x_1 = 1,\ \ x_2 = -\dfrac{3}{5\sqrt{2}},\ \ x_3 = \dfrac{5}{5^2\sqrt{3}}$ знайти формулу n-го члена.

Задача розв'язується методом добору з наступною перевіркою $x_n = \dfrac{(-1)^{n-1}(2n-1)}{5^{n-1}\sqrt{n}}$.

Означення.

Число a називається *границею послідовності* x_n, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$, яке б мале воно не було, існує номер N такий, що для всіх номерів $n > N$ виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$.

Позначення $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ або $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$.

Для стислого запису означення границі використаємо квантори:

$\forall$ — для будь-якого, будь-який;

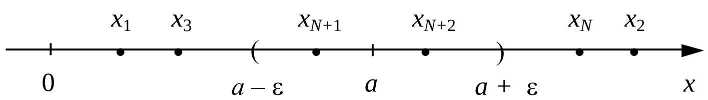
$\exists$ — існує, знайдеться;

:= дорівнює за означенням, означає.

Тоді означення границі послідовності за допомогою цих символів запишеться так:

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n = a\right) := \big((\forall\varepsilon > 0,\ \ \exists N,\ \ n > N) \Rightarrow (|x_n - a| < \varepsilon)\big).$$

Розглянемо геометричну інтерпретацію границі послідовності. На числовій осі побудуємо ε-окіл числа a, тобто інтервал $(a - \varepsilon;\ a + \varepsilon)$, і покажемо, як розміщуватимуться точки, які відповідають членам послідовності $x_n \to a$, при $n \to \infty$ (рис.).



Означення.
Число a називається *границею послідовності* x_n, якщо для будь-якого ε-околу точки a існує номер N такий, що, починаючи з номерів $n > N$, усі члени послідовності перебувають в ε-околі точки a (див. рис.).

Означення.

Послідовність називається *збіжною*, якщо вона має границю (скінченну). Послідовність, яка не має границі, називається *розбіжною*.

Приклад.

Довести за означенням, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Зауважимо, що n-й член послідовності $x_n=\frac{1}{n}$; сама послідовність така: 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, …, $\frac{1}{n}$, …. Для доведення потрібно за заданим $\varepsilon>0$ знайти номер послідовності N, такий, що при всіх номерах $n>N$ виконуватиметься нерівність $\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$. Розв'яжемо останню нерівність відносно n:

$$\left|\frac{1}{n}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n}<\varepsilon \Leftrightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}.$$

Виберемо* $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$. Тоді при $n>N$ нерівність $n>\frac{1}{\varepsilon}$ виконується, а отже, виконується і нерівність $\left|\frac{1}{n}\right|<\varepsilon$, чим доведено, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Отже, для доведення за означенням певної границі послідовності досить побудувати функціональну залежність N від числа ε, тобто знайти функцію $N(\varepsilon)$. У розглянутому прикладі функція $N(\varepsilon)=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, і за заданим будь-яким $\varepsilon>0$ завжди можна знайти відповідний номер N; наприклад при $\varepsilon_1=0{,}001$, $N_1=\left[\frac{1}{0{,}001}\right]=1000$, при $n>N_1=1000$ нерівність $\left|\frac{1}{n}\right|<\varepsilon_1=0{,}001$ виконується.

Загальні властивості збіжних послідовностей

Теорема 1.
(Єдиність границі послідовності). Якщо послідовність має границю, то вона єдина.

Теорема 2.

(Необхідна умова збіжності послідовності). Якщо послідовність збіжна, то вона обмежена.

Теорема 3.

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ і $a<l\,(a>m)$, ***то існує такий номер N, що при всіх*** $n>N$ ***виконується нерівність*** $x_n<l\,(x_n>m)$.

Приклад. Послідовність $x_n=\frac{n+4}{n}$ у розгорнутому вигляді така: $\frac{5}{1}$, $\frac{6}{2}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{8}{4}$, $\frac{9}{5}$, …, $\frac{n+4}{n}$, …; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+4}{n}=1<2=l$. Для номерів $n>4$ усі члени послідовності $\frac{9}{5}$, $\frac{10}{6}$, $\frac{11}{7}$, … будуть менші за 2.

Теорема 4.

Границя сталої величини дорівнює сталій, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} c = c,\quad c = \text{const}.$

9.2. Нескінченно мала та нескінченно велика послідовності, зв'язок між ними.

Означення. Послідовність α_n називається *нескінченно малою величиною* (*н. м. в.*), якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Приклад. $\alpha_n = \frac{1}{n}$ — н.м.в., бо $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Теорема 1.

Сума двох н.м.в. є н. м. в.

Наслідок. Алгебраїчна сума скінченної кількості н.м.в. є н.м.в.

Теорема 2.

Добуток обмеженої величини на н.м.в. є н.м.в.

Приклад.

Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n}$. Послідовність $\frac{\sin n}{n}$ — н.м.в., бо є добутком обмеженої величини $\sin n (|\sin n| \le 1)$ і н.м.в. $\frac{1}{n}$.

Таким чином, за теоремою 2

$$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

Теорема 3.

Добуток двох н.м.в. є н.м.в.

Наслідок. Добуток скінченної кількості н.м.в. є н.м.в.

Теорема 4.

Для існування границі a послідовності x_n ***необхідно і достатньо, щоб послідовність*** $\alpha_n = x_n - a$ ***була н.м.в.***

Наслідок. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $x_n = a + a_n$, де α_n — н.м.в.

Означення. Послідовність x_n називається *нескінченно великою величиною* (н.в.в.), якщо для будь-якого числа $0 < M < +\infty$, яке б велике воно не було, існує номер N, такий, що при всіх $n > N$ виконується нерівність $|x_n| > M$.

Якщо члени н.в.в., починаючи з деякого номера, всі додатні, то позначають

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$;

якщо від'ємні, то —

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, а якщо різних знаків, то —

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Наприклад:

1) $x_n = \sqrt{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$;

2) $x_n = -n^2$, $\lim\limits_{n\to\infty} (-n^2) = -\infty$;

3) $x_n=(-1)^n n,\ \lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n n=\infty.$

Аналітичною мовою означення н.в.в. виглядає так:

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n=\infty\right):=\left(\left(\forall M>O,\ \exists N,\ n>N\right)\Rightarrow\left(\left|x_n\right|>M\right)\right).$$

За своїм означенням, н.в.в. — необмежена, але не кожна необмежена величина є н.в.в., наприклад послідовність 1, 0, 3, 0, 5, 0, ... з членом $x_n=\frac{1}{2}\left(n+(-1)^{n+1}n\right)$ — величина необмежена, але н.в.в. не буде. Справді, не *всі* члени цієї послідовності, починаючи з деякого номера, будуть як завгодно великими.

Теорема 5.

Зв'язок між н.в.в. і н.м.в.

1. Якщо α_n ***— н.м.в. і*** $\alpha_n\neq 0$***, то обернена до неї послідовність*** $y_n=\dfrac{1}{\alpha_n}$ ***буде н.в.в., і навпаки.***

2. Якщо y_n ***— н.в.в., то обернена до неї*** $\alpha_n=\dfrac{1}{y_n}$ ***— н.м.в.***

9.3. Граничний перехід при арифметичних операціях

Теорема.

Якщо існують границі $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a,\ \lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$***, то:***

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}y_n;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}y_n\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}cy_n=c\lim\limits_{n\to\infty}y_n;$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}$ **при** $\lim\limits_{n\to\infty}y_n\neq 0.$

За допомогою теореми можна виконувати граничний перехід при арифметичних операціях з послідовностями, але тільки в тих випадках, коли послідовності збіжні.

Приклад.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=\frac{1-0}{2+0}=\frac{1}{2}.$$

На практиці такі докладні записи граничного переходу виконують рідко; як правило, граничний перехід при арифметичних операціях виконується усно.

Якщо умови теореми порушуються, то вираз під знаком границі спочатку перетворюють таким чином, щоб арифметичні дії виконувалися зі збіжними послідовностями, а потім виконують граничний перехід.

Приклад.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\ldots+a_{k-1}n+a_k}{b_0n^m+b_1n^{m-1}+\ldots+b_{m-1}n+b_m}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k\left(a_0+\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n^2}+\ldots+\frac{a_k}{n^k}\right)}{n^m\left(b_0+\frac{b_1}{n}+\frac{b_2}{n^2}+\ldots+\frac{b_m}{n^m}\right)}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}, & \text{якщо } k=m;\\ \infty, & \text{якщо } k>m;\\ 0, & \text{якщо } k<m.\end{cases}$$

9.4. Теореми, які полегшують знаходження границь послідовностей

Теорема 1.
(Граничний перехід у нерівності).
Якщо для будь-якого n виконується нерівність $x_n \le y_n$ і x_n, y_n — збіжні, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$
.

Теорема 2.

(Про границю затисненої послідовності). Якщо для будь-якого n $x_n \le y_n \le z_n$ і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Приклад.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=1,\ \text{бо } 1<\sqrt{1+\frac{1}{n}}<1+\frac{1}{n},\ \text{а } \lim_{n\to\infty}1=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

Теорема 3.(Вейєрштрасса).

Про границю монотонної й обмеженої послідовності:
1) якщо монотонно зростаюча послідовність обмежена зверху, то вона збіжна;

2) якщо монотонно спадна послідовність обмежена знизу, то вона збіжна.

Приклад.

Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ при $|q|<1$. При $q=0$ доведення очевидне. Нехай $0<q<1$, тоді послідовність $x_n = q^n$ — монотонно спадна і обмежена знизу $(q^n>0)$. Отже, за теоремою Вейєрштрасса послідовність $x_n = q^n$ має границю, яку позначимо так: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = a$. Послідовність $y_n = q^{n-1}$, за винятком першого члена, збігається з послідовністю $x_n = q^n$, отже, $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n-1} = a$. Звідси випливає, що $a=\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(q\cdot q^{n-1}\right)=q\cdot a$, тобто $a=qa$ або $a(1-q)=0$, але $q\ne 1$, отже, $a=\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. Нехай тепер $-1<q<0$.

Розглянемо

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \left|\begin{array}{l} -q=p\\ 0<p<1\\ q=-1p\end{array}\right| = \lim_{n\to\infty}(-1)^n\cdot p^n = \left|\begin{array}{l} p^n \underset{n\to\infty}{\to} 0 \Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow p^n - \text{н.м.в.}\\ \left|(-1)^n\right| \le 1 - \text{обмежена.}\end{array}\right| = 0.$$

Приклад.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n+3^n}{3^n}}{\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}{2\left(\frac{2}{3}\right)^n+3}=\left|\begin{array}{l}\left(\frac{2}{3}\right)^n \underset{n\to\infty}{\to} 0\\ 0<\frac{2}{3}<1\end{array}\right|=\frac{1}{3}.$$

9.5. Число е

Розглянемо послідовність $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Можна довести, що ця послідовність монотонно зростає і обмежена $2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$. За теоремою Вейєрштрасса існує границя цієї послідовності, яку позначають так: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

Зазначимо, що число $e = 2{,}7183...$ є основою натуральних логарифмів $\ln a = \log_e a$. Взагалі, число *e*, як і число π = 3,14 ..., широко застосовується в різних задачах, у тому числі й у задачах з економічним змістом.

Приклад.

Суму *a* грн покладено в банк при *p* % річних. Як збільшиться ця сума за один рік, якщо вклад безперервно забирати і знову класти в банк?

Нехай вклад буде недоторканним цілий рік, тоді його приріст $x = \frac{ap}{100}$, а вся сума $S_1 = a + \frac{ap}{100} = a\left(1+\frac{p}{100}\right)$.

Якщо вклад зняли через півроку і відразу поклали на півроку, то приріст за перше півріччя буде $x_1 = \frac{ap}{2\cdot 100}$, а за друге — $x_2 = \left(a + \frac{ap}{2\cdot 100}\right)\cdot\frac{p}{2\cdot 100}$. Отже, вся сума за $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)$ року буде

$$S_2 = a + \frac{ap}{2\cdot 100} + \frac{a\left(1+\frac{p}{200}\right)p}{200} =$$
$$= a\left(1+\frac{p}{2\cdot 100}\right)\left(1+\frac{p}{2\cdot 100}\right) = a\left(1+\frac{p}{2\cdot 100}\right)^2.$$

Аналогічно можна вважати, що коли брати з банку і знову класти 3 рази на рік, то за рік $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)$ сума буде така:

$$S_3 = a\left(1+\frac{p}{3\cdot 100}\right)^3,$$

а за рік $\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+...+\frac{1}{n}\right) = 1 \Rightarrow S_n = a\left(1+\frac{p}{n\cdot 100}\right)^n$.

Розв’язком задачі буде границя $S = a\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{n\cdot 100}\right)^n$.

При $p = 100\%$ сума $S = a\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = ae$; для довільного *p*, як буде показано в підрозд. 10.6, $S = ae^{\frac{p}{100}}$.

Розглянемо деякі цифрові дані: при початковому вкладі $a = 100$ грн, в умовах даної задачі, при $p = 100$ % річних сума за рік буде $S = 271$ грн 83 коп. (а не 200 грн, якщо вклад не знімали цілий рік); при $p = 2$ % річних *S* = 102 грн 2 коп. (а не 102 грн, якщо вклад не знімати цілий рік).

Лекція 10. Границя функції (продовження).

10.1. Основні теореми про границі функції.

10.2. Розкриття невизначених виразів типу $\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right], [\infty-\infty]$ для алгебраїчних функцій.

10.3. Перша особлива границя $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

10.4. Друга особлива границя $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$.

10.5. Еквівалентні нескінченно малі величини.

10.1. Основні теореми про границі функції.

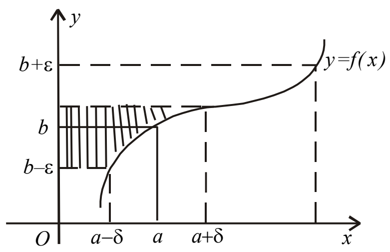
Нехай функція $y=f(x)$ визначена у деякому околі точки $x = a$, за винятком, хіба що, самої точки $x = a$.

Означення. Число b називається *границею функції* $f(x)$ *при* $x\to a$, якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ існує число $\delta>0$, таке що при $|x-a|<\delta$ і $x\neq a$ виконується нерівність $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Коротко це означення можна записати так:

$$\left(\lim_{x\to a} f(x)=b\right):=((\forall\varepsilon>0,\ \ \exists\delta>0,\ \ |x-a|<\delta,\ \ x\neq a)\Rightarrow(|f(x)-b|<\varepsilon)).$$

На рис. показано геометричну інтерпретацію $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, де за заданим ε-околом числа b знайдено δ-окіл числа a такий, що для всіх $x\in(a-\delta;\ a+\delta)$, $x\neq a$ відповідні значення функції $f(x)\in(b-\varepsilon,\ b+\varepsilon)$, тобто графік функції $f(x)$ лежить у смузі шириною 2 ε.



Означення. Число b називається *границею функції* $f(x)$, *коли* $x\to\infty$, якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ існує число $M>0$, таке що з нерівності $|x|>M$ випливає нерівність $|f(x)-b|<\varepsilon$. Коротко це можна записати так:

$$\left(\lim_{x\to\infty} f(x)=b\right):=\left(\left(\forall\varepsilon>0,\ \exists M>0,\ |x|>M\right)\Rightarrow\left(|f(x)-b|<\varepsilon\right)\right).$$

При $x\to a$ або $x\to\infty$ функція може набувати нескінченно великих значень чи прямувати до нуля. Ці випадки можна проілюструвати такими означеннями.

Означення. Функція $f(x)$ називається *нескінченно великою величиною* (*н.в.в.*) при $x\to a$, якщо для будь-якого $M>0$, яке б велике воно не було, існує число $\delta>0$, таке що з нерівності $0<|x-a|<\delta$ випливає $|f(x)|>M$, тобто:

$$\left(\lim_{x\to a} f(x)=\infty\right):=\left(\left(\forall M>0,\ \exists\delta>0,\ 0<|x-a|<\delta\right)\Rightarrow\left(|f(x)|>M\right)\right).$$

Означення. Функція $f(x)$ називається *нескінченно малою величиною* (*н.м.в.*) при $x\to a$, якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$.

Розглянемо односторонні границі для функції $y=f(x)$.

Означення.
Правостороння границя функції:

$$\left(\lim_{x\to a+0} f(x)=b\right):=\left(\left(\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ a<x<a+\delta\right)\Rightarrow\left(\left|f(x)-b\right|<\varepsilon\right)\right).$$

Означення.
Лівостороння границя функції:

$$\left(\lim_{x\to a-0} f(x)=b\right):=((\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ a-\delta<x<a)\Rightarrow(|f(x)-b|<\varepsilon)).$$

Теорема.
Для існування $\lim_{x\to a} f(x)=b$ необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова $\lim_{x\to a-0} f(x)=\lim_{a+0} f(x)=b$.

Приклад.

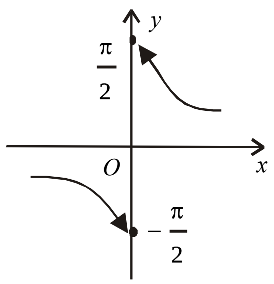
Довести, що $\lim_{x\to 0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ не існує.

Розглянемо односторонні границі:

а) ліворуч $\lim_{x\to -0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\left|\begin{matrix}x\to -0\\ \frac{1}{x}\to-\infty\end{matrix}\right|=-\frac{\pi}{2}$;

б) праворуч $\lim_{x\to +0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\left|\begin{matrix}x\to +0\\ \frac{1}{x}\to+\infty\end{matrix}\right|=+\frac{\pi}{2}$.

Отже, $\lim_{x\to 0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ не існує, бо односторонні границі хоча й існують, але не рівні між собою.



Зведення поняття границі функції до границі послідовності.

Послідовність за означенням є функція, отже, границя послідовності — просто окремий випадок границі функції. Навпаки, у деякому розумінні границя функції може бути зведена до границі послідовності.

Нехай задано функцію $f(x)$, $x\in D$; $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$ — послідовність значень аргументу функції з області D; цій послідовності відповідатиме така послідовність значень функції: $f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_n),\ \ldots$.

Означення. Число b називається *границею функції* $f(x)$ при $x\to a$, якщо для будь-якої послідовності значень аргументу x_n, $x_n\neq a$, що має границею число a, відповідна послідовність значень функції $f(x_n)$ має границею число b.

Відповідно до означення поняття границі функції фактично зведено до поняття границі послідовності, тому теореми про границі послідовностей також справджуються для границь функцій, тобто не потрібно формулювати ці теореми ще раз для границь функцій.

10.2. Розкриття невизначених виразів типу $\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right], [\infty-\infty]$ для алгебраїчних функцій

При виконанні граничного переходу у виразах типу $f(x)\pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$, коли порушуються умови теореми про гранич-ний перехід при арифметичних операціях, розв'язання задачі у ряді випадків зводиться до аналізу невизначених виразів виду $\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right], [\infty-\infty]$.

Розглянемо деякі загальні рекомендації щодо дослідження таких невизначених виразів, обмежуючись тільки алгебраїчними функціями.

1. Невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$ для раціональних функцій

Спочатку нагадаємо деякі положення алгебри многочленів. Многочлен $P_n(x)$ називається *упорядкованим*, якщо

$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$.

Теорема (Безу).

Остача від ділення многочлена $P_n(x)$ на двочлен типу x – a дорівнює значенню многочлена при $x=a$, тобто $P_n(a)$.

Наслідок. Якщо число a — корінь многочлена $P_n(x)$, тобто $P_n(a)=0$, то многочлен $P_n(x)$ ділиться без остачі на двочлен x – a.

Приклад.

Розкласти на множники $P_3(x)=x^3-2x^2+6x-5$. Оскільки $P_3(1)=0\Rightarrow x=1$ — корінь $P_3(x)\Rightarrow P_3(x)$ ділиться без остачі на $x-1$. Виконуючи ділення многочленів, дістаємо:

$$
\begin{array}{r|l}
-\,x^3-2x^2+6x-5 & x-1 \\ \cline{2-2}
x^3-x^2 & x^2-x-5 \\ \cline{1-1}
-\,-x^2+6x & \\
-x^2+x & \\ \cline{1-1}
-\,5x-5 & \\
5x-5 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Отже,

$P_3(x)=x^3-2x^2+6x-5=(x-1)(x^2-x+5)$.

Розглянемо $\lim\limits_{x\to a}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\left[\frac{0}{0}\right]$, де $P_n(x)$, $Q_m(x)$ — такі многочлени, що $P_n(a)=0$, $Q_m(a)=0$.

За наслідком з теореми Безу чисельник і знаменник діляться без остачі на $x-a$, тобто чисельник і знаменник мають спільний множник $x-a$. Отже, дістаємо:

$$\lim_{x\to a}\frac{P_n(a)}{Q_m(a)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)P_{n-1}(x)}{(x-a)Q_{m-1}(x)}=\lim_{x\to a}\frac{P_{n-1}(x)}{Q_{m-1}(x)}.$$

Степінь многочленів як у чисельнику, так і в знаменнику зменшився на одиницю. Якщо після виконання нового граничного переходу знову буде невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$, то наведений алгоритм повторюють.

Зауважимо, що скорочення дробу на множник $x-a$ під знаком границі можливе, бо за означенням границі функції змінна x як завгодно близька до числа a, але $x\neq a$.

Приклад.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2+6x-5}{x^2-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2-x+5)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x+5}{x+1}=\frac{1-1+5}{1+1}=\frac{5}{2}.$$

Отже, невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$ при $x\to a$ для раціональних функцій розкривається діленням многочленів у чисельнику і знаменнику на двочлен $x-a$.

2. ***Невизначеність*** $\left[\frac{0}{0}\right]$ ***для ірраціональних функцій***

3.

Для розв'язування задач у цьому випадку рекомендується звільнитись від тих ірраціональних множників у чисельнику і знаменнику дробового виразу, які перетворюються на нуль при виконанні граничного переходу. Для звільнення від радикалів використовують формули скороченого множення, заміну змінної та інші штучні прийоми.

Приклад.

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 5}\frac{\left(\sqrt{x-1}-2\right)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{x-1-4}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}=\frac{1}{4}.$$

Приклад.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\begin{vmatrix} x=t^6 \\ x\to 1 \\ t\to 1\end{vmatrix}=$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{t^2-1}{t^3-1}=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(t+1)}{(t-1)\left(t^2+t+1\right)}=\lim_{t\to 1}\frac{t+1}{t^2+t+1}=\frac{2}{3}.$$

3. Невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

У цьому випадку і чисельник, і знаменник рекомендується поділити на найбільший степінь змінної, що входить як до знаменника, так і до чисельника.

Приклад.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{x}+x+1}{2\sqrt{x^3+x}-10x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x\sqrt{x}+x+1}{x\sqrt{x}}}{\dfrac{2\sqrt{x^3+x}-10x}{x\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}}{2\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{10}{\sqrt{x}}}=\frac{1}{2}.$$

4. Невизначеність $[\infty-\infty]$

Цей тип невизначеності зводиться до невизначеностей $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$; наприклад, зведенням виразу до спільного знаменника, множенням на спряжений вираз.

Приклад.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right)=[\infty-\infty]=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1+x-2}{1-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{1-x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}-\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{x+1}=-\frac{1}{2}.$$

Приклад.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=[\infty-\infty]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}=\frac{2}{1+1}=1.$$

10.3. Перша особлива границя $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Границі — наслідки першої особливості границі:

1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1.$ 2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{tg}x}{x}=1.$ 3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{\mathrm{tg}\,x}=1.$ 4. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\frac{a}{b}.$

Зауваження. За допомогою першої особливої границі можна досліджувати невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$ *для виразів з тригонометричними функціями.*

Приклад.

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{2}.$$

Приклад.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1-\sin x/2}{(\pi-x)^2}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Для того щоб скористатися першою особливою границею, потрібно виконати таку заміну змінної x, щоб нова змінна прямувала до нуля, наприклад $\pi-x=y$.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1-\sin\frac{x}{2}}{(\pi-x)^2}=\left|\begin{array}{l}\pi-x=y\\ x=\pi-y\\ x\to\pi\\ y\to0\end{array}\right|=\lim_{y\to0}\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{y}{2}\right)}{y^2}=\lim_{y\to0}\frac{1-\cos\frac{y}{2}}{y^2}=$$

$$=\lim_{y\to0}\frac{2\sin^2\frac{y}{4}}{y^2}=\lim_{y\to0}\frac{2\sin^2\left(\frac{y}{4}\right)}{16\left(\frac{y}{4}\right)^2}=\frac{1}{8}.$$

Приклад.

$$\lim_{x\to1}(1-x)\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to1}\frac{1-x}{\mathrm{ctg}\frac{\pi x}{2}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{array}{l}1-x=y\\ x=1-y\\ x\to1\\ y\to0\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{y\to0}\frac{y}{\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi y}{2}\right)}=\lim_{y\to0}\frac{y}{\mathrm{tg}\frac{\pi y}{2}}=\lim_{y\to0}\frac{\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi y}{2}}{\mathrm{tg}\frac{\pi y}{2}}=\frac{2}{\pi}.$$

10.4. *Друга особлива границя* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

Границі — наслідки другої особливої границі:

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$. 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx}=e^{ab}$. 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.

Зауваження: За допомогою другої особливої границі та її на-слідків можна досліджувати невизначеності

$\left[\dfrac{0}{0}\right]$, $\left[1^\infty\right]$, $\left[\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)^\infty\right]$.

Приклад.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{2x-1}=\left[\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^\infty\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right)^{2x-1}=\left[1^\infty\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}\cdot\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\left(1+\frac{-2}{x}\right)^{2x}\left(1+\frac{3}{x}\right)}=\frac{e^{3\cdot 2}\cdot 1}{e^{-2\cdot 2}\cdot 1}=e^{10}.$$

Приклад.

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}=\left[1^\infty\right]=\lim_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{\sin 2x}{x\sin 2x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left((1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}}\right)^{\frac{\sin 2x}{x}}=\left|\begin{array}{l}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}}\xrightarrow[x\to 0]{}e\\ \dfrac{\sin 2x}{x}\xrightarrow[x\to 0]{}2\end{array}\right|=e^2.$$

Приклад.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\ln(2x+1)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x\cdot 2x\cdot 5x}{5x\cdot\ln(2x+1)\cdot 2x}=\left|\begin{array}{l}\dfrac{\sin 5x}{5x}\xrightarrow[x\to 0]{}1\\ \dfrac{2x}{\ln(2x+1)}\xrightarrow[x\to 0]{}1\end{array}\right|=\frac{5}{2}.$$

10.5. Еквівалентні нескінченно малі величини.

Означення.

Нескінченно малі величини (н.м.в.) $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються *н.м.в. одного порядку мализни* при $x\to a$, якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\text{const}\neq 0$.

Приклад.

Н.м.в. $\alpha(x)=x$ та $\beta(x)=\sin 2x$ є н.м.в. *одного порядку мализни* при $x\to 0$, бо

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 2x}=\dfrac{1}{2}\neq 0$.

Означення.

Н.м.в. $\alpha(x)$ називається н.м.в. *вищого порядку мализни* порівняно з н.м.в. $\beta(x)$ при $x\to a$, якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$.

Приклад.

Н.м.в. $\alpha(x)=x^n\,(n>1)$ є вищого порядку мализни порівняно з н.м.в. $\beta(x)=x$ при $x\to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^n}{x}=\lim_{x\to 0}x^{n-1}=0.$$

Означення.

Дві н.м.в. $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються *еквівалентними* при $x\to a$, якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$.

Зауваження: При дослідженні границь відношення н.м.в. їх можна замінювати еквівалентними, тобто якщо $\beta(x)$ *еквівалентна* $\gamma(x)$ *при* $x\to a$, *то* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\gamma(x)}$.

Виходячи з наслідків першої та другої особливих границь, можна записати таку низку еквівалентних н.м.в. при $x\to 0$:

$x\sim \sin x\sim \mathrm{tg}x\sim \arcsin x\sim \mathrm{arctg}x\sim e^x-1\sim \ln(x+1)$.

Як наслідок звідси випливає, наприклад, що при $x\to 0$ буде:

$e^{3x}-1\sim 3x$; $\sin 5x\sim 5x$ і т.п.

Використовується шкала н.м.в. при дослідженні невизначеностей типу $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Приклад.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 5x}-e^{\sin x}}{\ln(1+3x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}\left(e^{\sin 5x-\sin x}-1\right)}{\ln(1+3x)}=$$

$$=\left|\begin{array}{l} x\to 0\\ \ln(1+3x)\sim 3x;\\ e^{\sin 5x-\sin 5x}-1\sim \sin 5x-\sin x;\\ e^{\sin x}\to 1\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin x}{3x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x\cdot\cos 3x}{3x}=\left|\begin{array}{c} x\to 0\\ \sin 2x\sim 2x\\ \cos 3x\to 1\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot 2x}{3x}=\frac{4}{3}.$$

Лекція 11. Неперервність функцій.

11.1. Поняття неперервності функції.

Означення. Функція $y = f(x)$ називається *неперервною в точці* $x = x_0$, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Виходячи з означення границь функції, поняття неперервності функції в точці можна зобразити так:

$$\begin{pmatrix} f(x) \text{ — неперервна} \\ \text{при } x = x_0 \end{pmatrix} :=$$
$$:= ((\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad 0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)).$$

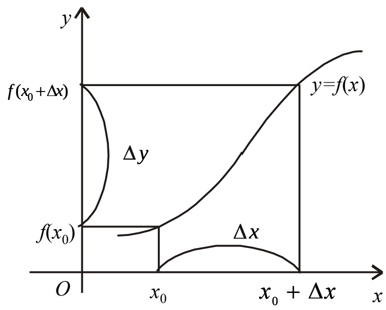
Звідси випливає, що для неперервності функції в точці мають виконуватися такі умови:

а) точка $x = x_0$ належить області визначення функції $D(f)$, тобто $f(x_0)$ існує;

б) деякий окіл точки $x = x_0$ входить до області визначення функції, наприклад $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset D(f)$;

в) границя $f(x)$ при $x \to x_0$ дорівнює значенню функції в точці $x = x_0$, тобто дорівнює $f(x_0)$.

Позначимо через $\Delta x = x - x_0$ приріст аргументу, а через $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ — приріст функції.



Означення. Функція $y = f(x)$ називається *неперервною в точці* $x = x_0$, якщо в цій точці нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції, тобто

$$\begin{pmatrix} f(x) \text{ — неперервна} \\ \text{при } x = x_0 \end{pmatrix} :=$$
$$= ((\Delta x = x - x_0 \to 0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\Delta y = f(x) - f(x_0) \to 0)).$$

Означення. Функція $y = f(x)$ називається *неперервною в точці* $x = x_0$, якщо границя функції дорівнює функції від границі аргументу при $x \to x_0$, тобто

$$\begin{pmatrix} f(x) \text{ — неперервна} \\ \text{при } x = x_0 \end{pmatrix} := \left(\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x \right) \right).$$

Означення. Функція $y = f(x)$ називається *неперервною в точці* $x = x_0$, якщо односторонні границі функції зліва й справа в цій точці існують, рівні між собою і дорівнюють значенню функції у цій точці, тобто:

$$\begin{pmatrix} f(x) \text{ — неперервна} \\ \text{при } x = x_0 \end{pmatrix} := \left(\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0) \right).$$

Означення. Функція називається *неперервною на проміжку*, якщо вона неперервна у кожній точці цього проміжку.

Таким чином, поняття неперервності функції у точці задається чотирма, хоч і рівноправними, але різними за формулюванням означеннями. Використання конкретного означення неперервності функції в точці визначається специфікою задачі.

Приклад.

Дослідити на неперервність функцію $y=\sin x$.

Область визначення функції $y=\sin x - D=R$.

Візьмемо довільне $x_0\in D=R$, надамо x_0 приросту Δx, тоді приріст функції Δy буде

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Розглянемо

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta x\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\right)=0.$$

Дамо необхідні пояснення: при $\Delta x\to 0\Rightarrow \Delta x$ — н.м.в.; $\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\to 1$; $\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)$ — величина обмежена $\left(\left|\cos\left(\frac{\Delta x}{2}+x_0\right)\right|\le 1\right)$, отже, добуток $\Delta y=\Delta x\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(\frac{\Delta x}{2}+x_0\right)$ є н.м.в.

Таким чином, з $\Delta x\to 0\Rightarrow\Delta y\to 0$.

Звідси функція $y=\sin x$ неперервна $\forall x_0\in R$, тобто на всій області визначення.

11.2. Властивості неперервних функцій.

Теорема 1.

Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні у точці $x=x_0$, то у цій точці будуть неперервними функції $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$; в останньому випадку за умови, що $g(x_0)\neq 0$.

Теорема 2.

Якщо функція $y=F(u)$ — неперервна для $u\in U$, а функція $u=\varphi(x)$ — неперервна для $x\in X$ і значення функції $\varphi(x)\in U$, то складна функція $y=F(\varphi(x))$ — неперервна для $x\in X$.

Приклад.

Дослідити функції $y=\cos x$, $y=\mathrm{tg}x$, $y=\mathrm{ctg}x$ на неперервність.

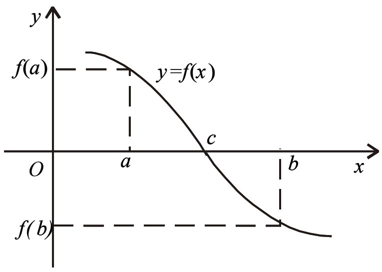
Оскільки $\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, то функцію $y=\cos x$ можна вважати суперпозицією таких неперервних $\forall x\in R$ функцій: $y=\sin u$, $u=\frac{\pi}{2}-x$. Отже, за теоремою 2 функція $y=\cos x$ — неперервна $\forall x\in R$.

Тепер за теоремою 1 неважко встановити, що функція $y=\mathrm{tg}x$ — неперервна $\forall x\in\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, а функція $y=\mathrm{ctg}x$ — неперервна $\forall x\in(\pi n,\pi+\pi n)\, n\in Z$, як відношення неперервних функцій $y=\sin x$ та $y=\cos x$.

Зауваження. Можна довести, що всі основні елементарні функції будуть неперервними в кожному з відкритих проміжків своєї області визначення.

Теорема 3 (Коші).

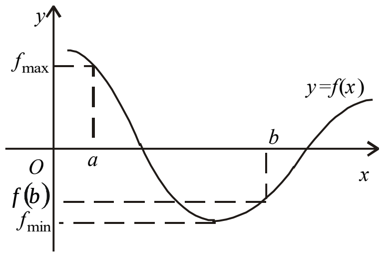
Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на закритому проміжку $[a;\ b]$ і на кінцях проміжку набуває значення різних знаків (наприклад $f(a) > 0,\ \ f(b) < 0$), тоді на відкритому проміжку $(a;\ b)$ існує така точка $x = c$, що $f(c) = 0$.



Наслідок. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на $[a; b]$ і $f(a) = A,\ \ f(b) = B,$ то $y = f(x)$ на $[a; b]$ набуває всіх проміжних значень між числами A і B.

Теорема 4 (Вейєрштрасса).

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на закритому проміжку $[a;\ b]$, то вона набуває на цьому проміжку своїх найбільших й найменших значень.



11.3. Класифікація точок розриву функцій.

Означення. Функція $y = f(x)$ називається *розривною в точці* $x = x_0$, якщо порушується хоча б одна з умов рівності

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Розрізняють точки *розриву 1-го* і *2-го роду*. Розриви 1-го роду бувають усувні й неусувні; розриви 2-го роду — завжди неусувні.

Означення. Точка $x = x_0$ називається *точкою розриву 2-го роду* для функції $y = f(x)$, якщо в цій точці не існує хоча б одна з односторонніх границь (зліва чи справа).

Означення. Точка $x = x_0$ називається *точкою розриву 1-го роду* (розрив неусувний) для функції $y = f(x)$, якщо односторонні границі (зліва і справа) функції у цій точці існують, але не рівні між собою, тобто $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x).$

Означення. Точка $x = x_0$ називається *точкою розриву 1-го роду* (розрив усувний) для функції $y = f(x)$, якщо односторонні границі функції в цій точці існують, рівні між собою, але не дорівнюють значенню функції в цій точці або функція у цій точці не існує, тобто $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0)$.

Зауваження. Точка $x = x_0$ усувного розриву відзначається тим, що існує $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A,$ але $f(x_0) \neq A.$ Тому на основі функції $f(x)$ можна побудувати функцію

$$F(x)=\begin{cases} f(x) \text{ при } x\neq x_0 \\ A \text{ при } x=x_0\text{, яка буде неперервною в точці } x=x_0, \end{cases}$$

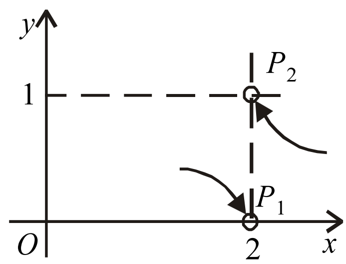
Методика дослідження функцій на неперервність.

1. Знайти область визначення функції $D(y)$.

2. Дослідити функцію на неперервність у відкритих проміжках $D(y)$.

3. Визначити скінченні граничні точки (с.г.т.) $D(y)$ і обчислити односторонні границі функції у цих точках.

4. Зробити висновок про характер точок розриву (якщо вони є) і побудувати графік функції поблизу цих точок. Для зручності побудови графіка функції рекомендується записати координати граничних точок графіка функції $P_i(x_0\pm 0;\ y_0\pm 0)$. Символічний запис абсциси граничної точки $x_0\pm 0$ означає, що абсциса довільної точки графіка функції прямує до x_0 зліва (x_0-0) або справа (x_0+0); а запис $y_0\pm 0$ означає, що ордината довільної точки графіка функції при цьому прямує до y_0 знизу (y_0-0) або зверху (y_0+0). Наприклад, для граничних точок $P_1(2-0;\ +0)$ і $P_2(2+0;\ 1-0)$ графік функції підходить до цих точок так, як показано на рис.



До точки P_1 графік підходить зліва і зверху, а до точки P_2 — справа і знизу.

Приклад.

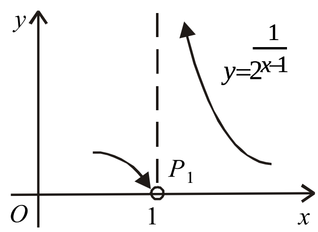
Дослідити на неперервність функцію $y=2^{\frac{1}{x-1}}$.

Область визначення цієї функції $D=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$. На кожному з інтервалів області визначення функція буде неперервна, як суперпозиція неперервних елементарних функцій. Скінченною граничною точкою D функції буде $x = 1$. Обчислимо такі границі:

$$\lim_{x\to 1-0} y=\lim_{x\to 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}}=\left|\begin{array}{l} x\to 1-0(x<1) \\ x-1\to -0 \\ \dfrac{1}{x-1}\to -\infty \\ 2^{-\infty}\to \dfrac{1}{2^{+\infty}}\to +0 \end{array}\right|=+0;$$

$$\lim_{x\to 1+0} y=\lim_{x\to 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}}=\left|\begin{array}{l} x\to 1+0(x>1) \\ x-1\to +0 \\ \dfrac{1}{x-1}\to +\infty \\ 2^{\frac{1}{x-1}}\to +\infty \end{array}\right|=+\infty.$$

Отже, $x = 1$ — точка розриву 2-го роду, бо одна з односторонніх границь не існує. Граничні точки графіка функції: $P_1(1-0;+0)$, $P_2(1+0;+\infty)$. Графік функції $y=2^{\frac{1}{x-1}}$ поблизу точки розриву показано на рис. Зауважимо, що гранична точка $P_2(1+0;+\infty)$ лежить на нескінченності.

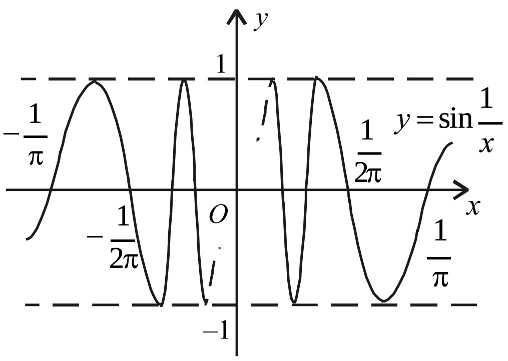


Приклад.

Дослідити на неперервність функцію $y=\sin\frac{1}{x}$.

Ця функція буде неперервною на кожному з проміжків (–∞; 0) і (0; + ∞), бо є суперпозицією неперервних елементарних функцій. Границі $\lim\limits_{x\to -0}\sin\frac{1}{x}$ і $\lim\limits_{x\to +0}\sin\frac{1}{x}$ — не існують. Отже, точка $x = 0$ — точка розриву функції 2-го роду.

Записати координати граничних точок графіка функції неможливо, тому і побудувати графік функції $y=\sin\frac{1}{x}$ поблизу самої точки розриву не можна (рис.).



Приклад.

Дослідити на неперервність функцію $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}$.

Скорочений запис розв'язування задачі:

$$D(y)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty).$$

$\left.\begin{array}{l} x\in(-\infty;\ 0) \\ x\in(0;\ +\infty) \end{array}\right\} y$ — неперервна, як суперпозиція елементарних функцій.

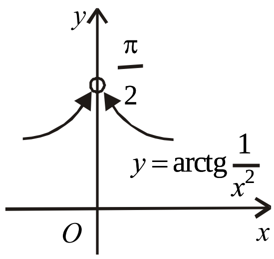
$x = 0$ — с.г.т. $D(y)$.

$$\lim_{x\to -0} y=\lim_{x\to -0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}=\left|\begin{array}{c} x\to -0 \\ x^2\to +0 \\ \frac{1}{x^2}\to +\infty \end{array}\right|=\frac{\pi}{2}-0;$$

$$\lim_{x\to +0} y=\lim_{x\to +0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}=\left|\begin{array}{c} x\to +0 \\ x^2\to +0 \\ \frac{1}{x^2}\to +\infty \end{array}\right|=\frac{\pi}{2}-0.$$

Таким чином, точка $x = 0$ є точкою розриву функції 1-го роду (розрив усувний), бо односторонні границі існують і рівні між собою (сама функція при $x = 0$ не існує).

Граничні точки графіка функції $P_1\left(-0;\ \frac{\pi}{2}-0\right)$ і $P_2\left(+0;\ \frac{\pi}{2}-0\right)$ зливаються в одну точку (рис).



Приклад.

Дослідити на неперервність функцію $y = x - \dfrac{x+2}{|x+2|}$.

Після розкриття $|x+2|$ функція перепишеться так:

$$y = \begin{cases} x - \dfrac{x+2}{x+2} & \text{при } x > -2; \\ x + \dfrac{x+2}{x+2} & \text{при } x < -2 \end{cases} = \begin{cases} x-1 \text{ при } x > -2; \\ x+1 \text{ при } x < -2. \end{cases}$$

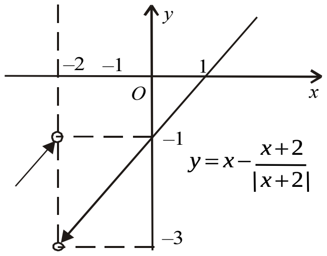
На кожному з інтервалів $(-\infty\,;-2)$ і $(-2;\,+\infty)$ функція неперервна. Розглянемо односторонні границі функції у точці $x = -2$.

$$\lim_{x\to -2-0} y = \left| \begin{array}{c} (x \to -2-0) \Rightarrow \\ \Rightarrow (x < -2) \Rightarrow \\ \Rightarrow y = x+1 \end{array} \right| = \lim_{x\to -2-0} (x+1) = -1-0;$$

$$\lim_{x\to -2+0} y = \left| \begin{array}{c} (x \to -2+0) \Rightarrow \\ \Rightarrow (x > -2) \Rightarrow \\ \Rightarrow y = x-1 \end{array} \right| = \lim_{x\to -2+0} (x-1) = -3+0.$$

Отже, точка $x = -2$ — точка розриву 1-го роду (розрив неусувний), бо односторонні границі функції у цій точці існують, але не рівні між собою.

Граничні точки графіка функції такі: $P_1(-2-0;\ -1-0)$, $P_2(-2+0;\ -3+0)$ (рис.).



Лекція 12. Диференціювання функції однієї змінної. Методи диференціювання.

12.1. Означення похідної. Геометричний зміст похідної. Механічний зміст похідної.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на деякому проміжку (a; b). Візьмемо значення $x \in (a;b)$ і надамо аргументу приросту Δx. Тоді функція набуде приросту $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$. Розглянемо відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx і перейдемо до границі при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (12.1)$$

Якщо границя (12.1) існує і скінченна, вона називається *похідною функції* $y = f(x)$ *за змінною* x і позначається

$$y', \quad y'_x, \quad \frac{dy}{dx}, \quad f'(x), \quad \frac{df(x)}{dx}.$$

Означення. Похідною функції $y = f(x)$ *за аргументом* x називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.

Операція знаходження похідної називається *диференціюванням* цієї функції.

Користуючись означенням похідної, знайти похідні функцій.

Приклад.

Функція $y = x^2$. Знайти похідну в точках $x = 3$ і $x = -4$.

Надамо аргументу x приросту Δx,

тоді функція набуде приросту

$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2 + x^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$.

Складемо відношення приросту функції до приросту аргументу

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$,

відшукаємо границю $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x) = 2x$. Таким чином, $f'(x) = 2x$.

Похідна в точці $x = 3$ $f'(3) = 2\cdot 3 = 6$, а похідна при $x = -4$ буде $f'(-4) = 2\cdot(-4) = -8$.

Приклад.

$y = C$, де $c = \text{const}$.

Надавши аргументу x приросту Δx, дістанемо приріст функції $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = C - C = 0$. Тепер знайдемо границю відношення $\Delta y / \Delta x$ при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 0 = 0 \text{, тобто } C' = 0$$

Приклад.

$y = \sin x$.

Користуючись відомою з тригонометрії формулою

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

знайдемо приріст функції у точці x і обчислимо границю:

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right),$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x;$$

$(\sin x)'=\cos x$.

Аналогічно можна дістати: $(\cos x)'=-\sin x$.

Приклад.

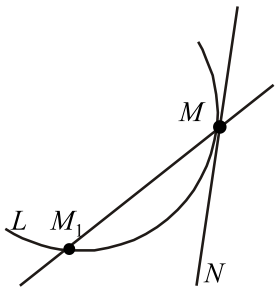
$y=e^x$.
Для цієї функції маємо

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x}=e^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=e^x\cdot 1=e^x,$$

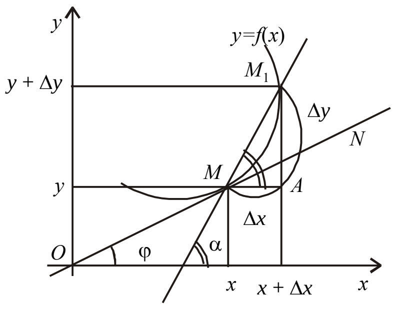
тобто $\left(e^x\right)'=e^x$.

Геометричний зміст похідної

Означення. Дотичною до кривої L у точці M називається граничне положення MN січної MM_1 при прямуванні точки M_1 по кривій L до точки M (рис.).



Нехай крива, задана рівнянням $y=f(x)$, має дотичну в точці M (x, y). Позначимо (рис.) кутовий коефіцієнт дотичної MN: $k=\text{tg}\varphi$. Надамо в точці x приросту Δx, тоді ордината y набуде приросту Δy .



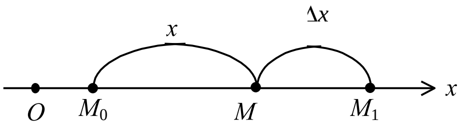
З ΔMAM_1 випливає, що $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\text{tg}\alpha$. Коли $\Delta x\to 0$, то $M_1\to M$, $\alpha\to\varphi$ і січна прямує до положення дотичної MN.

Таким чином, $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\text{tg}\alpha=\text{tg}\varphi=k$.

Оскільки $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$, то $f'(x)=k$, тобто похідна $f'(x)$ чисельно дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної до графіка функції у точці з абсцисою x. У цьому полягає геометричний зміст похідної.

Механічний зміст похідної

Припустимо, що точка M рухається прямолінійно нерівномірно по деякій прямій лінії, яку візьмемо за вісь Ox (рис.).



Рух точки відбувається за законом $x = f(t)$, де x — шлях; t — час. Знайдемо швидкість точки M у даний момент часу t (миттєва швидкість).

Нехай точка M у момент t перебувала на відстані x від початкової точки M_0, а в момент часу $t+\Delta t$ точка опинилася на відстані $x+\Delta x$ від початкової точки й зайняла положення M_1. Отже, час t набув приросту Δt, а шлях x — приросту $\Delta x = f(\Delta t + t) - f(t)$. Середня швидкість руху точки M за час Δt описується формулою $V_{ср} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$.

Якщо точка M рухається рівномірно, то $V_{ср}$ є величина стала, і її беруть за швидкість точки. Для нерівномірного руху точки очевидно, що для достатньо близьких значень Δt до нуля середня швидкість точки M буде близька до її швидкості у момент часу t. Тому за точне значення швидкості точки M у момент часу t беруть величину

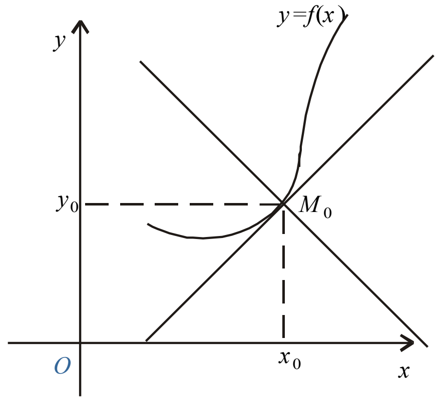
$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t},$$

яка є швидкістю зміни функції $x = f(t)$ у точці. У цьому полягає механічний зміст похідної.

12.2. Рівняння дотичної і нормалі до плоскої кривої

Нехай функція $y = f(t)$ означена і неперервна на деякому проміжку $[a; b]$. Визначимо рівняння дотичної й нормалі до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою $x_0 \in [a;b]$.

Оскільки дотична й нормаль проходять через точку з абсцисою x_0, то рівняння кожної з них будемо шукати у вигляді рівняння прямої, що проходить через задану точку M_0 $(x_0; y_0)$ у даному напрямі (рис.).



$$y - y_0 = k(x - x_0), \qquad (12.2)$$

де k кутовий коефіцієнт дотичної. Використовуючи геометричний зміст похідної, маємо $k = f'(x_0)$.

Рівняння дотичної.

Оскільки $y_0 = f(x_0)$, то з виразу (12.2) дістанемо рівняння дотичної у вигляді

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \qquad (12.3)$$

Рівняння нормалі.

Означення. Нормаллю до графіка функції в точці M_0 називається перпендикуляр, проведений до дотичної в цій точці (рис.).

Використовуючи умову перпендикулярності дотичної та нормалі, знаходимо кутовий коефіцієнт нормалі $k = -\dfrac{1}{f'(x_0)}$ і записуємо її рівняння у вигляді

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \qquad (12.4)$$

Приклад.

Знайти рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y = x^2$ у точці з абсцисою $x_0 = -3$.
Знайдемо похідну від заданої функції $f'(x) = 2x$, звідси $f'(-3) = -6$; $f(-3) = (-3)^2 = 9$.

Рівняння дотичної (12.3) і нормалі (12.4) запишуться так: $y - 9 = -6(x+3)$, $y - 9 = \dfrac{1}{6}(x+3)$ або у загальному вигляді: $6x + y + + 9 = 0$, $x - 6y + 57 = 0$.

Залежність між неперервністю і диференційованістю функції.

Функція $y = f(x)$ є *неперервною в точці x,* якщо у цій точці $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Означення.

Функція $y = f(x)$ називається *диференційованою в точці*, якщо у цій точці вона має похідну, тобто якщо існує кінцева границя:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

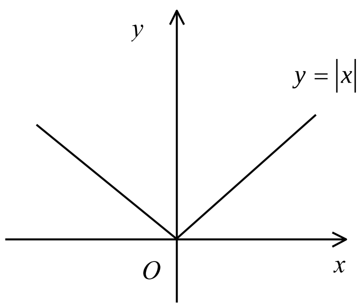
Означення.
Функція $y = f(x)$ називається *диференційованою на інтервалі* $(a; b)$, якщо вона диференційована в кожній точці даного інтервалу.
Зв’язок між неперервністю і диференційованістю функції встановлює теорема.

Теорема.

Якщо функція диференційована в деякій точці, то у цій точці функція неперервна.

Обернене твердження неправильне: для неперервної функції може не існувати похідної.
Справді, нехай функція $y = f(x)$ диференційована в точці x.
Запишемо тотожність
$\Delta y = \dfrac{\Delta y \cdot \Delta x}{\Delta x}(\Delta x \neq 0)$, звідси $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y \cdot \Delta x}{\Delta x} = \; = f'(x) \cdot 0 = 0$.
Таким чином, функція $y = f(x)$ неперервна в точці x.

Наслідок. Якщо функція розривна в деякій точці, то вона не має похідної в цій точці.
Прикладом неперервної функції, що не має похідної в одній точці, є функція $y = |x|$ (рис.).



Ця функція неперервна при $x = 0$, але не диференційована для цього значення, оскільки в точці з абсцисою $x = 0$ не існує дотичної до графіка функції.
Таким чином, необхідною умовою диференційованості функції $y = f(x)$ у точці x є її неперервність у цій точці.

12.3. Основні правила диференціювання

Теорема 1.
Похідна сталої дорівнює нулю, тобто якщо y = c, де c = const, то $y' = 0$.

Теорема 2.

Похідна алгебраїчної суми скінченної кількості диференційованих функцій дорівнює алгебраїчній сумі похідних цих функцій: $(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$.

Теорема 3.

Похідна добутку двох диференційованих функцій дорівнює добутку першого множника на похідну другого плюс добуток другого множника на похідну першого:

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Теорема 4.
Сталий множник можна виносити за знак похідної:

$$(cu)' = cu', \text{ де } c = \text{const}.$$

Теорема 5.
Якщо чисельник і знаменник дробу диференційовані функції (знаменник не перетворюється в нуль), то похідна дробу також дорівнює дробу, чисельник якого є різницею добутків знаменника на похідну чисельника і чисельника на похідну знаменника, а знаменник є квадратом знаменника початкового дробу $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Зауваження. Похідну від функції $y = \frac{u(x)}{c}$, де $c = \text{const}$, зручно обчислювати як похідну від добутку сталої величини $\frac{1}{c}$ на функцію *u* (*x*):

$$\left(\frac{u(x)}{c}\right)' = \left(\frac{1}{c}u(x)\right)' = \frac{1}{c}u'(x).$$

Приклад.
Обчислити похідну для функції *y* = tg *x*.

$$y' = (\text{tg}x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} =$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Таким чином, $(\text{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Похідна складної функції. Нехай *y* = *f* (*u*), де $u = \varphi(x)$, тобто $y = f(\varphi(x))$. Функція *f* (*u*) називається *зовнішньою*, а функція $\varphi(x)$ — *внутрішньою*, або *проміжним аргументом*.

Теорема 6.

Якщо y = f (u) та $u = \varphi(x)$ ***— диференційовані функції від своїх аргументів, то похідна складної функції існує і дорівнює*** $y'_x = f'_u \cdot u'_x$.
Таким чином, похідна складної функції дорівнює добутку похідної зовнішньої функції за проміжним аргументом на похідну проміжного аргументу за незалежною змінною.

Похідна неявної функції. Нехай рівняння *F* (*x*; *y*) = 0 визначає *y* як неявну функцію від *x*. Надалі будемо вважати, що ця функція — диференційована.

Якщо продиференціювати по x обидві частини рівняння $F(x; y) = 0$, то дістанемо рівняння першого степеня відносно y'. З цього рівняння легко знайти y', тобто похідну неявної функції.

Приклад.

Знайти y'_x з рівняння $x^2 + y^2 = 4$.

Оскільки y є функцією від x, то y^2 розглядатимемо як складну функцію від x, тобто $\left(y^2\right)' = 2y \cdot y'$.
Диференціюємо по x обидві частини заданого рівняння, дістанемо $2x + 2yy' = 0$. Звідси $y' = -\dfrac{x}{y}$.

Похідна оберненої функції. Нехай задані дві взаємно обернені диференційовані функції

$$y = f(x) \text{ та } x = \varphi(y)\left(f(\varphi(y)) = y\right).$$

Теорема 7.
Похідна x'_y оберненої функції $x = \varphi(y)$ по змінній y дорівнює оберненій величині похідної y'_x від прямої функції $y = f(x): x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$.

Приклад.

Обчислити похідну для функції $x = \arcsin y$.
Задана функція обернена до функції $y = \sin x$.
Згідно з теоремою 7 можна записати

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Звідси $(\arcsin y)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.
Якщо в останньому виразі замість y записати x, то дістанемо

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Похідна параметрично заданої функції. Нехай функцію y від x задано параметричними рівняннями:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \Psi(t) \end{aligned}\right\} (t_1 \le t \le t_2).$$

Припустимо, що функції $\varphi(t), \Psi(t)$ мають похідні і що функція $x = \varphi(t)$ має обернену функцію $t = \Phi(x)$, яка також є диференційованою. Тоді визначену параметричними рівняннями функційну залежність $y = f(x)$ можна розглядати як складну функцію $y = \Psi(t)$, $t = \Phi(x)$ (t — проміжний аргумент).
На підставі теорем 6 та 7 маємо:

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = \Psi'_t(t)\Phi'_x(x), \quad \Phi'_x(x) = \frac{1}{\varphi'_t(t)}.$$

Звідки $y'_x = \dfrac{\Psi'(t)}{\varphi'(t)}$ або $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.
Знайдена формула дає можливість знаходити похідну y'_x від параметрично заданої функції, не знаходячи явної залежності $y = f(x)$.

Приклад.

Функцію y від x задано параметричними рівняннями:

$$\left.\begin{array}{l} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{array}\right\}(0 \le t \le \pi).$$

Знайти похідну $\frac{dy}{dx}$: а) при будь-якому t; б) при $t = \frac{\pi}{4}$.

а) $y'_x = \frac{(a\sin t)'}{(a\cos t)'} = \frac{a\cos t}{-a\sin t} = -\mathrm{ctg}\, t$;

б) $\left(y'_x\right)\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$.

12.4. Похідні від основних елементарних функцій

За аналогією з попередніми прикладами можна дістати похідні від основних елементарних функцій:

1. $(x)' = 1$;
2. $\left(x^m\right)' = mx^{m-1}$;
3. $\left(e^x\right)' = e^x$;
4. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$;
5. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;
6. $\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x\ln a}$;
7. $(\sin x)' = \cos x$;
8. $(\cos x)' = -\sin x$;
9. $(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;
10. $(\mathrm{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;
11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
13. $(\mathrm{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$;
14. $(\mathrm{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Приклад.

$y = 3x^2 - \sqrt[3]{x} + \ln x$.

Дана функція є алгебраїчною сумою функцій, тому використовуємо теорему 2:

$$y' = \left(3x^2\right)' - \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' + (\ln x)'.$$

У здобутому виразі перший доданок алгебраїчної суми є добуток сталої величини на степеневу функцію $\Rightarrow$ — застосуємо до нього теорему 4 і формулу (2) таблиці похідних; другий — ірраціональна функція з показником $m = \frac{1}{3}$ — застосуємо формулу (2) таблиці похідних; третій — логарифмічна функція з основою $e \Rightarrow$ — використаємо формулу (5):

$$y' = 3\cdot 2x - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{x} = 6x - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{x}.$$

Приклад.

$y = 6^{\arcsin\left(x^5 - 4\right)}$.

Задана функція складна: зовнішня — показникова функція з основою 6, внутрішня для неї — обернена тригонометрична. Обернена тригонометрична, у свою чергу, є складною, для якої внутрішня функція — алгебраїчна сума $x^5 - 4$. Для суми аргументом (скінченним) є x.

Таким чином, задана функція є суперпозицією трьох функцій.

При диференціюванні послідовно застосовуємо два рази теорему 6:

$$y = \left[6^{\arcsin\left(x^5-4\right)}\right]'_{\arcsin\left(x^3-4\right)} \left[\arcsin\left(x^5 - 4\right)\right]'_x =$$

$$= \left[6^{\arcsin\left(x^5-4\right)}\right]'_{\arcsin\left(x^5-4\right)} \left[\arcsin\left(x^5 - 4\right)\right]'_{x^5-4} \left[x^5 - 4\right]'_x .$$

У цьому виразі знизу біля кожної квадратної дужки вказано аргумент, за яким слід диференціювати функцію, взяту в дужки.

Тепер послідовно скористаємося формулами (4), (11), (2) таблиці похідних та теоремами 1, 2. Дістанемо:

$$y' = 6^{\arcsin\left(x^5-4\right)} \ln 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(x^5 - 4\right)^2}} \cdot 5x^4 .$$

Взагалі використані правила та формули не фіксують, а записують кінцевий результат їх застосування.

Приклад.

$y = \left(\mathrm{tg} 3x\right)^{\sin 4x}$.

Задана функція є степенево-показниковим виразом виду

$$y = \left(u(x)\right)^{v(x)}, \text{ де } u(x) = \mathrm{tg} 3x, v(x) = \sin 4x . \qquad (12.5)$$

Прологарифмуємо функцію (12.5) за основою e:

$$\ln y = v \ln u . \qquad (12.6)$$

Оскільки $\ln y$ і $\ln u$ — складні функції, після диференціювання обох частин рівності (12.6) дістанемо:

$$\frac{1}{y} y' = v' \ln u + \frac{1}{u} u' v .$$

Звідси $y' = y\left(v' \ln u + \dfrac{u'}{u} v\right) = u^v \left(v' \ln u + \dfrac{u'}{u} v\right)$.

Таким чином, дістали формулу для знаходження похідної від степенево-показникової функції виду (12.5).

$$y' = u^v \left(v' \ln u + \frac{u'}{u} v\right). \qquad (12.7)$$

У даному випадку формула (12.7) виглядає як

$$y' = \left(\mathrm{tg} 3x\right)^{\sin 4x} \cdot \left(4 \cos 4x \cdot \ln \mathrm{tg} 3x + \frac{3 \sin 4x}{\mathrm{tg} 3x \cdot \cos^2 3x}\right).$$

Лекція 13. Диференціал. Похідні та диференціали вищих порядків. Основні теореми диференціального числення та їх застосування.

13.1. Похідні вищих порядків

Похідна $y' = f'(x)$ від функції $y = f(x)$ називається *похідною першого порядку* і являє собою деяку нову функцію. Можливі випадки, коли ця функція сама має похідну. Тоді похідна від похідної першого порядку $(y')'$ називається *похідною другого порядку від функції* $y = f(x)$ і позначається y'', $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Похідна від похідної другого порядку $(y'')'$ називається *похідною третього порядку* і позначається y''', $f'''(x)$, $\frac{d^3x}{dx^3}$.

Похідна від похідної $(n-1)$-го порядку $\left(y^{(n-1)}\right)'$ називається *похідною n-го порядку* і позначається $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^ny}{dx^n}$.

Таким чином, $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$, $n = 1, 2, \ldots$

Приклад. Знайти похідну третього порядку для функції $y = \sin(5x+4)$.

$y' = 5\cos(5x+4)$; $y'' = -25\sin(5x+4)$; $y''' = -125\cos(5x+4)$.

13.2. Означення диференціалу функції

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована на деякому проміжку, тобто для будь-якої точки x з цього проміжку границя $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ існує і дорівнює скінченному числу.

Враховуючи взаємозв'язок змінної величини, що має скінченну границю, і нескінченної малої величини, можемо записати $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, де α — нескінченно мала величина ($\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$).

Помноживши всі члени останньої рівності на Δx, дістанемо

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x. \qquad (13.1)$$

З виразу (13.1) випливає, що приріст функції Δy складається із суми двох доданків, з яких перший доданок — так звана *головна частина приросту*, лінійна відносно Δx (при $\Delta x \to 0$ добуток $f'(x)\Delta x$ є нескінченно мала величина першого порядку відносно Δx). Другий доданок — добуток $\alpha\Delta x$ завжди нескінченно мала величина вищого порядку, ніж Δx.

Означення. Добуток $f'(x)\Delta x$ називається *диференціалом функції* $y = f(x)$; його позначають символом dy, тобто

$$dy = f'(x)\Delta x \qquad (13.2)$$

Знайдемо диференціал функції $y = x$; для цього випадку $y' = (x)' = 1$, отже, $dy = dx = \Delta x$. Таким чином, диференціал незалежної змінної збігається з її приростом Δx. З огляду на це формулу для диференціала (13.2) можна записати так:

$$dy = f'(x)dx. \qquad (13.3)$$

Приклад.

Знайти диференціал dy функції $y = x^2$: 1) при довільних значеннях x та Δx; 2) при $x = 20$, $\Delta x = 0{,}1$.

1) $dy = \left(x^2\right)' \Delta x = 2x\Delta x$;

2) якщо $x = 20$, $\Delta x = 0{,}1$, то $dy = 2 \cdot 20 \cdot 0{,}1 = 4$.

Приклад.

Знайти диференціал dy функції $y = x^2 \operatorname{tg}(3x+1)$.

Оскільки $y' = 2x\operatorname{tg}(3x+1) + \dfrac{3x^2}{\cos^2(3x+1)}$, то за формулою (13.3) дістанемо

$$dy = \left(2x\operatorname{tg}(3x+1) + \frac{3x^2}{\cos^2(3x+1)}\right)dx.$$

Застосування диференціала в наближених обчисленнях

Вираз (13.1) з урахуванням (13.2) можна записати так:

$$\Delta y = dy + \alpha\Delta x. \qquad (13.4)$$

Якщо $f'(x) \neq 0$, то величина $\alpha\Delta x$ є малою вищого порядку порівняно з dy.

При малих Δx доданком $\alpha\Delta x$ у виразі (13.4) нехтують і користуються наближеною рівністю $\Delta y \approx dy$, або в розгорнутому вигляді: $f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$, звідки

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \qquad (13.5)$$

Остання наближена рівність тим точніша, чим менше Δx.

Приклад.

Обчислити наближено $\sqrt{27}$.

Перетворимо вираз, що стоїть під знаком радикала:

$$27 = 25 + 2 = 25\left(1 + \frac{2}{25}\right), \text{ звідки } \sqrt{27} = \sqrt{25\left(1+\frac{2}{25}\right)} = 5\sqrt{1+\frac{2}{25}}. \qquad (13.6)$$

При обчисленні $\sqrt{1+\frac{2}{25}}$ введемо функцію $f(x) = \sqrt{x}$, тоді $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Формула (13.5) у нашому випадку запишеться так:

$$\sqrt{x+\Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x, \text{ де } x = 1, \Delta x = \frac{2}{25}.$$

Інакше

$$\sqrt{1+\frac{2}{25}} \approx \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}}\frac{2}{25} = 1 + \frac{1}{25} = 1{,}04. \qquad (13.7)$$

Підставивши (13.7) у рівність (13.6), дістанемо

$$\sqrt{27} \approx 5 \cdot 1{,}04 = 5{,}2.$$

Правила знаходження диференціала

Застосовуючи формулу (13.3) та властивості похідних, дістаємо правила знаходження диференціала:

1. $y = c$; $dy = 0$;
2. $y = uv$, $dy = udv + vdu$;
3. $y = u + v$, $dy = du + dv$;
4. $y = \dfrac{u}{v}$, $dy = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$.

Теорема.

Форма диференціала не залежить від того, чи є аргумент незалежною змінною або функцією.

13.3. Основні теореми диференціального числення та їх застосування: теорема Ферма, теорема Коші, теорема Лагранжа, теорема Ролля. Геометричний зміст основних теорем диференціального числення.

Теорема Ферма.

Якщо диференційована на проміжку D функція $y = f(x)$ досягає найбільшого або найменшого значення у внутрішній точці ξ цього проміжку, то похідна функції в цій точці дорівнює нулю, тобто $f'(\xi) = 0$.

Припустимо, для визначеності, що $f(x)$ набуває в точці ξ найбільшого значення, тобто для всіх $x \in D$ $f(x) \le f(\xi)$.

За означенням похідної

$$f'(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi},$$

причому ця границя не залежить від того, як наближається x до ξ — справа чи зліва.

Розглянемо відношення $\dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$.

Для всіх x, достатньо близьких до точки $\xi (x \ne \xi)$, маємо:

$$\begin{cases} \dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \le 0 \text{ при } x > \xi, \\ \dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \ge 0 \text{ при } x < \xi. \end{cases}$$

Перейдемо в останніх нерівностях до границі при $x \to \xi$. Дістанемо

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to\xi+0} \dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \le 0 \\ \lim\limits_{x\to\xi-0} \dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to\xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = 0 \Rightarrow f'(\xi) = 0.$$

Аналогічно розглядається випадок, коли функція $f(x)$ набуває в точці $x = \xi$ найменшого значення.

Геометричний зміст теореми Ферма. Геометричний зміст похідної $y' = f'(x)$ являє собою кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $y = f(x)$. Звідси рівність нулю похідної $f'(\xi)$ геометрично означає, що у відповідній точці цієї кривої дотична паралельна осі Ox.

Теорема Ролля.

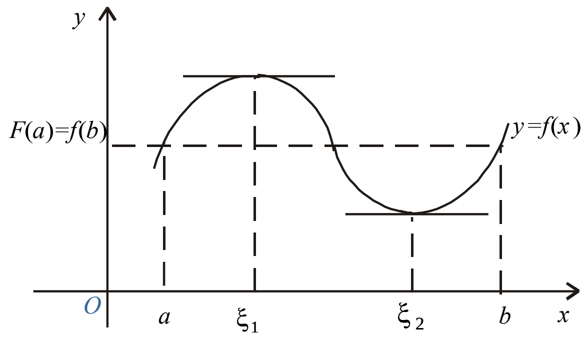
Якщо функція $f(x)$:

1) неперервна на сегменті $[a; b]$;

2) диференційована на інтервалі $(a; b)$;

3) на кінцях сегмента набуває рівних між собою значень, тобто $f(a) = f(b)$, то на інтервалі $(a; b)$ існує хоча б одна точка $x = \xi (a < \xi < b)$, для якої $f'(\xi) = 0$.

Геометричний зміст теореми Ролля. Якщо крайні ординати неперервної кривої $y = f(x)$, яка має в кожній точці дотичну, рівні, то на цій кривій знайдеться принаймні одна точка з абсцисою $\xi(a<\xi<b)$, в якій дотична паралельна осі Ox (рис.).



Теорема Лагранжа (теорема про скінченні прирости функції).

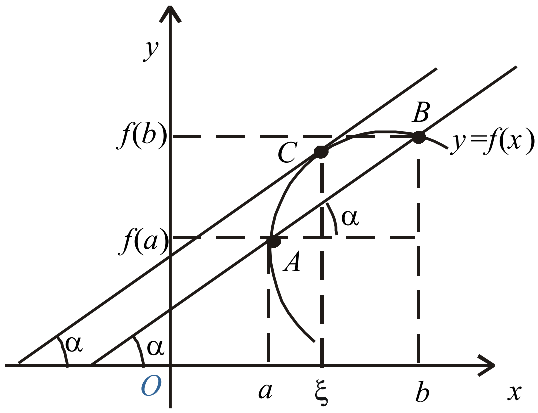
Якщо функція f (x): 1) неперервна на сегменті [a; b]; 2) диференційована на інтервалі (a; b), то на інтервалі знайдеться хоча б одна точка $x=\xi(a<\xi<b)$***, така що***

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi). \qquad (13.8)$$

Геометричний зміст теореми Лагранжа. Запишемо формулу (13.8) у вигляді

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi). \qquad (13.9)$$

З рис. бачимо, що величина $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ є тангенсом кута α нахилу хорди, що проходить через точки A і B графіка функції $y=f(x)$ з абсцисами a і b.



Водночас, $f'(\xi)$ — тангенс кута нахилу дотичної до кривої у точці C з абсцисою ξ. Таким чином, геометричний зміст рівності (13.8) або рівносильної для неї рівності (13.9) можна визначити так: якщо для всіх точок кривої $y=f(x)$ існує дотична, то на цій кривій знайдеться точка з абсцисою ξ, в якій дотична паралельна хорді AB, що сполучає точки A і B.

Теорема Коші.

Якщо f (x) і $\varphi(x)$ ***дві функції: 1) неперервні на сегменті [a; b]; 2) диференційовані на інтервалі (a; b); 3)*** $\varphi'(x)\neq 0$ ***для*** $x\in(a;b)$***, то на інтервалі (a; b) знайдеться хоча б одна точка*** $x=\xi(a<\xi<b)$***, така що***

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

13.4. Правило Лопіталя

Розглянемо відношення $f(x)=\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, де функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ визначені й диференційовані в деякому околі точки a, виключаючи, можливо, саму точку a. Може бути, що при $x\to a$ обидві функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ прямують до 0 або до ∞, тобто ці функції одночасно є нескінченно малими або нескінченно великими величинами при $x\to a$. Тоді говорять, що в точці a функція $f(x)$ має невизначеність виду

$$\left[\frac{0}{0}\right] \text{ або } \left[\frac{\infty}{\infty}\right]. \qquad (13.10)$$

У цьому випадку, використовуючи похідні $\varphi'(x)$ і $\psi'(x)$, можна сформулювати правило для знаходження границі функції $f(x)$ при $x\to a$, тобто визначити спосіб для розкриття невизначеностей виду (13.10).

Теорема (правило Лопіталя).

Границя відношення двох нескінченно малих або нескінченно великих функцій дорівнює границі відношення їхніх похідних (скінченній або нескінченній), якщо остання існує.

Зауваження. Якщо $\varphi'(x)$ і $\psi'(x)$ при $x\to a$ прямують одночасно до 0 або до ∞ і задовольняють ті умови, які були накладені теоремою на функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$, то до відношення $\varphi'(x)/\psi'(x)$ знову застосовуємо правило Лопіталя і виводимо формулу

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)}$$

і т. п.

Приклад.

Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{2x}$.

Виконавши граничний перехід, дістанемо невизначеність вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$. Застосовуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 7x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{7\cos x}{2}=\frac{7}{2}.$$

Приклад.

Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x+1}{2x^3+7x+5}$.

Виконання граничного переходу приводить до невизначеності виду $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Застосовуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+1}{2x^2+7x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+3x+1)'}{(2x^3+7x+5)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{6x^2+7}=$$

(виконання граничного переходу знову приводить до невизначеності виду $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, а тому застосовуємо правило Лопіталя повторно):

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+3)'}{(6x^2+7)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{12x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{6}\cdot 0=0.$$

Перетворення невизначеностей виду $[0\cdot\infty]$; $\left[0^0\right]$, $\left[\infty^0\right]$, $\left[1^\infty\right]$, $[\infty-\infty]$ ***до виду*** $\left[\frac{0}{0}\right]$ ***або*** $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Правило Лопіталя можна застосувати тільки для розкриття невизначеностей вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ При розкритті інших типів невизначеностей їх перетворюють до одного з цих видів.

Невизначеність виду $[0\cdot\infty]$.

Нехай $\lim\limits_{x\to a} u(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} v(x)=\infty$.
Потрібно знайти

$$\lim_{x\to a}(u(x)\cdot v\cdot(x)). \qquad (13.11)$$

Це невизначеність типу $[0\cdot\infty]$.
Якщо вираз (13.11) записати у вигляді

$$\lim_{x\to a} u\cdot v=\lim_{x\to a}\frac{u}{\frac{1}{v}} \text{ або } \lim_{x\to a} u\cdot v=\lim_{x\to a}\frac{v}{\frac{1}{u}},$$

то при $x\to a$ дістанемо невизначеність відповідно вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Приклад.

Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^3\ln x\right)$.

Тут маємо невизначеність вигляду $[0\cdot\infty]$. Зобразимо добуток функції у вигляді частки, а потім, отримавши невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\left(x^3\ln x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(x^{-3}\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{3}{x^4}}=-\frac{1}{3}\lim_{x\to 0} x^3=0.$$

Невизначеність вигляду $\left[0^0\right]$, $\left[\infty^0\right]$, $\left[1^\infty\right]$.

Нехай маємо функцію $u(x)^{v(x)}$.
При $x\to a$ (a — скінченне або нескінченне) можливі три випадки:
а) $u\to 0$, $v\to 0$ маємо невизначеність виду $\left[0^0\right]$;
б) $u\to\infty$, $v\to 0$ дістанемо невизначеність $\left[\infty^0\right]$;
в) $u\to 1$, $v\to\infty$ маємо невизначеність виду $\left[1^\infty\right]$.

Ці невизначеності за допомогою логарифмування зводяться до невизначеності вигляду $[0\cdot\infty]$. Справді, позначимо дану функцію через y, тобто візьмемо $y=u^v$. Прологарифмувавши цю рівність, дістанемо $\ln y=v\ln u(u>0)$.

Легко перевірити, що при $x\to a$ добуток $v\ln u$ буде невизначеністю $[0\cdot\infty]$ для всіх трьох випадків.

Відповідно до підпункту 1 розкриємо невизначеність $[0\cdot\infty]$, тобто знайдемо границю $\lim\limits_{x\to a}\ln y=k$ (k — скінченне або ∞).

Звідси $\lim\limits_{x\to a} y=\lim\limits_{x\to a} u^v=e^k$.

Приклад.

Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x$.

Це невизначеність виду $\left[0^0\right]$. Позначимо функцію, що стоїть під знаком границі, через y, тобто $y=(\sin x)^x$, і прологарифмуємо її:

$$\ln y = x\ln\sin x = \frac{\ln\sin x}{x^{-1}}.$$

Обчислимо границю логарифма даної функції. Тут маємо невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\sin x\left(-x^{-2}\right)} = -\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x}{\sin x} = 0.$$

Звідси $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x = e^0 = 1$.

Приклад.

Знайти границю $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$.

При $x\to 1$ маємо невизначеність $\left[1^\infty\right]$.

$$y = x^{\frac{1}{x-1}},\quad \ln y = \frac{\ln x}{x-1};\quad \lim_{x\to 1}\ln y = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 1.$$

Звідси $\lim\limits_{x\to 1} y = \lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = e^1 = e$.

Невизначеність $[\infty-\infty]$. Якщо функції $u(x)\to\infty$, $v(x)\to\infty$ при $x\to a$ (a — скінченне або нескінченне), то різниця $u-v$ при $x\to a$ дає невизначеність $[\infty-\infty]$. Остання з допомогою алгебраїчних перетворень зводиться до невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Приклад.

Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$.

Маємо невизначеність виду $[\infty-\infty]$. Алгебраїчним перетворенням приведемо цю невизначеність до невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$, а потім двічі застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x + x\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+\cos x - x\sin x} = \frac{0}{2} = 0.$$

Лекція 14. Дослідження поведінки функції однієї змінної. Застосування диференціального числення для побудови графіку функції.

14.1. Зростання та спадання функції. Екстремуми функції. Достатні умови існування екстремуму функції.

Нагадаємо: функція $f\ (x)$ називається *зростаючою на проміжку*, якщо більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції (якщо $x_2 > x_1$ то $f(x_2) > f(x_1)$); функція *спадна* на проміжку, якщо більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції (якщо $x_2 > x_1$, то $f(x_2) < f(x_1)$).

Теорема 1 (необхідна умова зростання (спадання) функції):
1. Якщо диференційована функція зростає на деякому проміжку, то похідна цієї функції невід'ємна на цьому проміжку.

2. Якщо диференційована функція спадає на деякому проміжку, то похідна цієї функції недодатна на цьому проміжку.

Теорема 2 (достатня умова зростання (спадання) функції):
1. Якщо похідна диференційованої функції додатна всередині деякого проміжку, то функція зростає на цьому проміжку.

2. Якщо похідна диференційованої функції від'ємна всередині проміжку, то функція спадає на цьому проміжку.

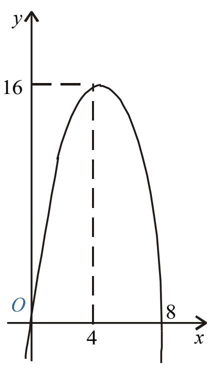
Приклад.

Знайти проміжки зростання та спадання функції $y = 8x - x^2$.

Область визначення функції — уся числова вісь $-\infty < x < +\infty$. Знайдемо похідну $y' = 8 - 2x$. Функція диференційована на проміжку $-\infty < x < +\infty$.

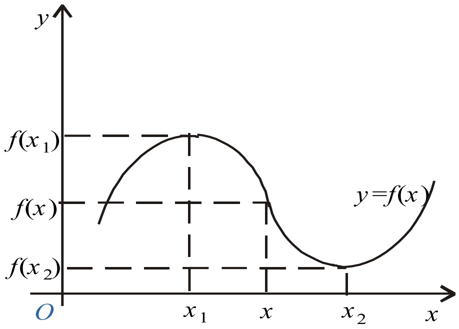
Для визначення проміжку зростання функції розв'яжемо нерівність $8 - 2x > 0$, $x < 4$, тобто функція зростає на проміжку $-\infty < x < 4$.

При визначенні проміжку спадання функції (рис.) маємо 8 – 2x < 0, тобто $4 < x < +\infty$.



Екстремуми функцій

Означення. При значенні x_1 аргументу x *функція $f(x)$ має максимум $f(x_1)$,* якщо в деякому околі точки x_1 виконується нерівність (рис.) $f(x_1) > f(x)(x \neq x_1)$. Аналогічно: при значенні x_2 аргументу x *функція $f(x)$ має мінімум $f(x_2)$,* якщо в деякому околі точки x_2 має місце нерівність (див. рис.) $f(x_2) < f(x)(x \neq x_2)$.



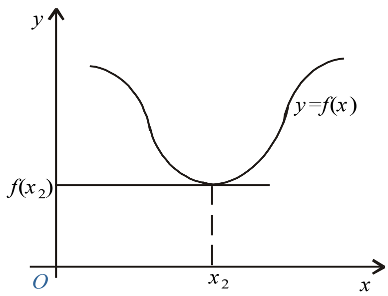
Максимум або мінімум функції називається екстремумом функції, а ті значення аргументу, при яких досягаються екстремуми функції, називаються точками екстремуму функції (відповідно точками максимуму або мінімуму функції).

Екстремум функції, у загальному випадку, має локальний характер — це найбільше або найменше значення функції порівняно з ближніми її значеннями.

Необхідна умова екстремуму функції.
Теорема. У точці екстремуму диференційованої функції похідна її дорівнює нулю:

$$\boldsymbol{f'(x_2) = 0}. \qquad (13.12)$$

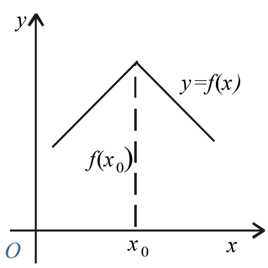
Геометрична умова (13.12) означає, що в точці екстремуму диференційованої функції $y = f(x)$ дотична до її графіка паралельна осі Ox (рис.).



Наслідок. ***Неперервна функція може мати екстремум тільки в тих точках, де похідна функції дорівнює нулю або не існує.***

Справді, якщо в точці x_0 екстремуму функції $f(x)$ існує похідна $f'(x_0)$, то, згідно з даною теоремою, ця похідна дорівнює нулю.

Те, що в точці екстремуму неперервної функції похідна може не існувати, показує приклад функції, графік якої має форму «ламаної» (рис).

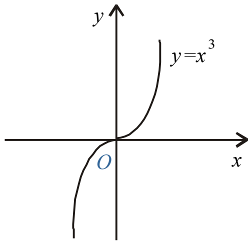


Ті значення аргументу x, які для заданої функції перетворюють на нуль її похідну $f'(x)$ або для якої похідна $f'(x)$ не існує (наприклад, перетворюється на нескінченність), називаються *критичними значеннями аргументу* (*критичними точками*).

Достатні умови екстремуму функції.

Із того, що $f'(x_0)=0$, не випливає, що функція $f(x)$ має екстремум при $x=x_0$.

Наприклад, нехай $f(x)=x^3$. Тоді $f'(x)=3x^2$ і $f'(0)=0$, однак значення $f(0)=0$ не є екстремумом даної функції, оскільки різниця $f(x)-f(0)$ змінює знак при зміні знаку аргументу x (рис).

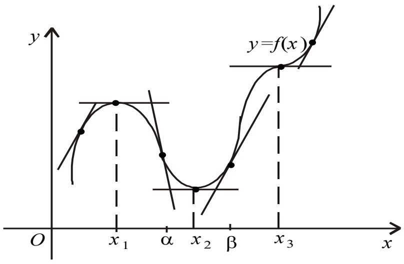


Отже, не для будь-якого критичного значення аргументу функції $f(x)$ має місце екстремум цієї функції. Через це поряд з необхідною умовою існують достатні умови існування екстремуму функції.

Теорема 1 (перше правило).
Нехай функція $f(x)$ неперервна на деякому інтервалі, в якому міститься критична точка x_0, і диференційована в усіх точках цього інтервалу (крім, можливо, самої точки x_0). Якщо при переході зліва направо через цю точку похідна:
1) змінює знак з «+» на «–», то при $x = x_0$ функція має максимум;
2) змінює знак «–» на «+», то функція має у цій точці мінімум;
3) не змінює свого знака, то функція в точці $x = x_0$ екстремуму не має.

Геометрична ілюстрація теореми 1 (рис.). Нехай у точці $x = x_1$ маємо $f'(x_1)=0$ і для всіх x, достатньо близьких до точки x_1, виконуються нерівності

$$\begin{cases} f'(x)>0 \text{ при } x<x_1; \\ f'(x)<0 \text{ при } x>x_1. \end{cases}$$



Тоді при $x<x_1$ дотична до кривої утворює з віссю Ox гострий кут — функція зростає, а при $x>x_1$ дотична утворює з віссю Ox тупий кут — функція спадає; при $x = x_1$ функція переходить від зростання до спадання, тобто має максимум.

Якщо в точці x_2 маємо $f'(x_2)=0$ і для всіх значень x, достатньо близьких до точки x_2, виконуються нерівності

$$\begin{cases} f'(x)>0, \quad x>x_2, \\ f'(x)<0, \quad x<x_2, \end{cases}$$

то при $x<x_2$ дотична до кривої утворює з віссю Ox тупий кут — функція спадає, а при $x>x_2$ дотична до кривої утворює гострий кут — функція зростає. При $x = x_2$ функція переходить від спадання до зростання, тобто має мінімум.

Якщо при $x = x_3$ маємо $f'(x_3)=0$ і для всіх значень x, достатньо близьких до x_3, виконуються нерівності $f'(x)>0$ при $x<x_3$; $f'(x)>0$ при $x>x_3$, то функція зростає як при $x<x_3$, так і при $x>x_3$. Звідси при $x = x_3$ функція не має ні максимуму, ні мінімуму.

Зауваження. На основі даної теореми можна сформулювати таке правило для дослідження неперервної функції $y = f(x)$ *на максимум і мінімум.*

1. Знаходимо першу похідну функції, тобто $f'(x)$.
2. Обчислюємо критичні значення аргументу x (критичні точки), для цього:
а) прирівнюємо першу похідну до нуля і знаходимо дійсні корені здобутого рівняння $f'(x) = 0$;
б) знаходимо значення x, для яких похідна $f'(x)$ має розрив.
3. Досліджуємо знак похідної ліворуч і праворуч від критичної точки. Оскільки знак похідної залишається сталим в інтервалі між двома критичними точками, для дослідження знака похідної ліворуч і праворуч, наприклад від критичної точки x_2 (див. рис.), досить визначити знак похідної в точках α і $\beta(x_1 < \alpha < x_2 < \beta < x_3)$, де x_1 і x_3 — найближчі критичні точки).
4. Обчислюємо значення функції $f(x)$ у кожній критичній точці.
Таким чином, маємо таке схематичне зображення можливих випадків:

<table>
<tr><td>x (досліджуваний інтервал змінної)</td><td>(x_1, x_2)</td><td>x_2</td><td>(x_2, x_3)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$f'(x)$ (знак похідної в досліджуваному інтервалі)</td><td>+</td><td rowspan="3">$f(x_2) = 0$
або не існує</td><td>–</td></tr>
<tr><td>–</td><td>+</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$f(x)$ (характер поводження функції)</td><td>+ (–)</td><td>+ (–)</td></tr>
<tr><td>Функція зростає</td><td>Точка максимуму</td><td>Функція спадає</td></tr>
<tr><td>Функція спадає</td><td>Точка мінімуму</td><td>Функція зростає</td></tr>
<tr><td>Функція зростає (спадає)</td><td>Немає ні максимуму, ні мінімуму</td><td>Функція зростає (спадає)</td></tr>
</table>

Приклад.

Дослідити на максимум і мінімум функцію $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$.
1. Знаходимо першу похідну $y' = x^2 - 4x + 3$.
2. Знаходимо дійсні корені рівняння
$x^2 - 4x + 3 = 0\, (f'(x) = 0)$.
Звідки $x_1 = 1,\ x_2 = 3$.
Похідна скрізь неперервна. Значить, інших критичних точок для заданої функції не існує.
3. Досліджуємо критичні значення. Для цього область визначення функції $(-\infty, +\infty)$ здобутими критичними точками розбиваємо на три інтервали
$(-\infty, 1), (1, 3), (3, +\infty)$.
Виберемо в кожному інтервалі по одній точці і обчислимо значення похідної в цих точках:

$$x = 0 \in (-\infty, 1),\ y'(0) = 3 > 0;$$

$$x = 2 \in (1, 3),\ y'(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1 < 0;$$

$$x = 4 \in (3, +\infty),\ y'(4) = 4^2 - 4 \cdot 4 + 3 = 11 > 0.$$

Знак похідної на кожному з трьох інтервалів збігається зі знаком похідної в обраній точці відповідного інтервалу (табл.).

З таблиці видно: при переході (зліва направо) через значенняx = 1 похідна змінює знак з «+» на «–». Звідси, при x = 1 функція має максимум:

$$y_{\max}(1)=\frac{1^3}{3}-2\cdot 1^2+3\cdot 1+1=\frac{7}{3}.$$

x	$(-\infty,\ 1)$	1	$(1,\ 3)$	3	$(3,\ +\infty)$
y'	+	0	–	0	+
y	$\nearrow$	$y_{\max}(1)=\frac{7}{3}$	$\searrow$	$y_{\min}(3)=1$	$\nearrow$

При переході через значення x = 3 похідна змінює знак з «–» на «+». Звідси, при x = 3 функція має мінімум:

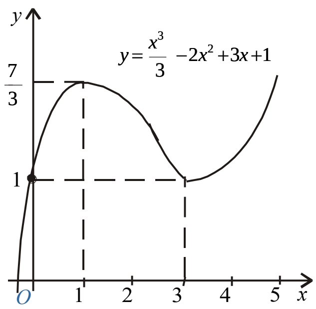
$$Y_{\min}(3)=\frac{3^3}{3}-2\cdot 3^2+3\cdot 3+1=1.$$

На інтервалі:

1) $(-\infty,\ 1)$ — функція зростає;
2) (1, 3) — спадає;
3) $(3,\ +\infty)$ — зростає.

Крім того, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1\right)=\pm\infty$.

На основі проведеного дослідження будуємо графік функції (рис.).



Теорема 2 (друге правило).

Якщо для диференційованої функції $f(x)$ у деякій точці x_0 її перша похідна $f'(x)$ дорівнює нулю, а друга похідна $f''(x)$ існує й відмінна від нуля, тобто $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$, то:

1) якщо друга похідна $f''(x_0)>0$, то в точці x_0 функція $f(x)$ має мінімум;

2) якщо $f''(x_0)<0$ — максимум;

3) якщо $f''(x_0)=0$ — питання залишається відкритим, і для його розв'язання треба застосувати перше правило.

Зауваження. Для критичних точок, в яких похідна функції не існує або дорівнює нескінченності, друге правило не застосовується.

Приклад.

За допомогою другої похідної дослідити на екстремум функцію $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$.

Перша похідна цієї функції $y'=x^2-4x+3$ перетворюється в нуль у точках x = 1 і x = 3 (див. попередній приклад).

Друга похідна $y''=2x-4$:

а) при x = 1 $y''(1)=2\cdot 1-4=-2<0$, звідси в точці x = 1 функція має максимум $y_{\max}(1)=\frac{7}{3}$;

б) при x = 3 $y''(3)=2\cdot 3-4=2>0$, тобто в точці x = 3 функція має мінімум $Y_{\min}(3)=1$ (див. рис.).

14.2. Найбільше і найменше значення функції на відрізку.

Якщо функція $f(x)$ неперервна на проміжку [*a*; *b*], то вона набуває на цьому проміжку свого найбільшого й найменшого значення.

Найбільше значення функції на проміжку [*a*; *b*] називається *абсолютним максимумом*, а найменше — *абсолютним мінімумом*.

Припустимо, що на даному проміжку функція $f(x)$ має скінченне число критичних точок. Якщо найбільше значення досягається в середині проміжку [*a*; *b*], то очевидно, що це значення буде одним із максимумів функції (якщо існує кілька максимумів), точніше — найбільшим максимумом. Однак можливо, що найбільше значення дотягатиметься на одному з кінців проміжку.

Таким чином, ***функція на відрізку [a, b] досягає свого найбільшого значення на одному з кінців цього проміжку або в такій точці його, яка є точкою максимуму***.

Аналогічне твердження можна сформулювати й про найменше значення функції: ***воно досягається на одному з кінців даного проміжку або в такій внутрішній точці, яка є точкою мінімуму***.

Правило.

Якщо треба знайти найбільше значення неперервної функції на проміжку [*a*, *b*], то необхідно:

1) знайти всі максимуми функції на проміжку;

2) визначити значення функції на кінцях проміжку, тобто обчислити *f* (*a*) і *f* (*b*);

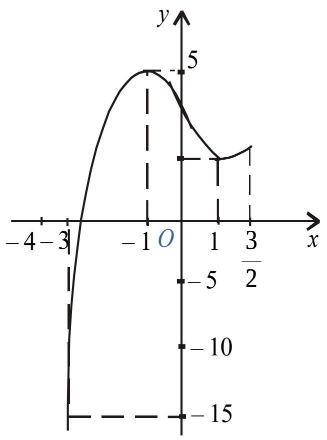
3) з усіх отриманих значень функції вибрати найбільше: воно й буде найбільшим значенням функції на проміжку.

Аналогічно треба діяти і при визначенні найменшого значення функції на проміжку.

Приклад.

Визначити на проміжку $\left[-3,\ \frac{3}{2}\right]$ найбільше й найменше значення функції $y = x^3 - 3x + 3$.

1. Знаходимо максимуми й мінімуми функції на проміжку $\left[-3,\ \frac{3}{2}\right]$:



$y' = 3x^2 - 3, 3x^2 - 3 = 0,\ \ x_1 = 1,\ \ x_2 = -1;$

$y'' = 6x,\ y''(1) = 6 > 0$.

Таким чином, у точці $x = 1$ маємо мінімум: $y_{\min}(1) = 1$.

Далі, $y''(-1) = -6 < 0$, тобто в точці $x = -1$ маємо максимум: $y_{\max}(-1) = 5$.

2. Визначаємо значення функції на кінцях проміжку:

$$y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{15}{8},\quad y(-3) = -15.$$

3. Таким чином, найбільше значення заданої функції на проміжку $\left[-3,\ \frac{3}{2}\right]$ є:

$y_{\text{найб}} = y_{\max}(-1) = 5$, а найменше — $y_{\text{найм}} = y(-3) = -15$.

Графік функції зображено на рис.

14.3. Опуклість графіку функції, точки перегину. Необхідна та достатня умови існування точки перегину.

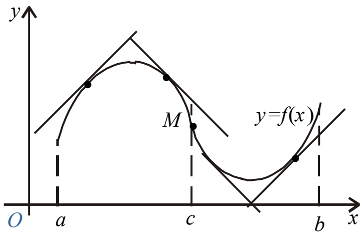
Означення.

Крива на проміжку називається *опуклою* (*угнутою*), якщо всі точки кривої лежать нижче (вище) будь-якої її дотичної на цьому проміжку.

З графіка функції $y = f(x)$ (рис.16) бачимо: крива $y = f(x)$ є опуклою на проміжку (a, c) і вгнутою на проміжку (c, b).

Означення.

Точка, яка відокремлює опуклу частину кривої від вгнутої, називається *точкою перегину*. На рис. точка M — точка перегину.



Наведемо дві теореми.

Теорема 1.

1) Якщо в усіх точках проміжку (c,b) для функції $y = f(x)$ друга її похідна додатна $(f''(x) > 0)$, то графік функції вгнутий.
2) Якщо в усіх точках проміжку (a, c) друга похідна від'ємна $(f''(x) < 0)$, то графік функції випуклий.

Теорема 2.

Якщо для функції $y = f(x)$ друга похідна її $f''(x)$ у деякій точці x_0 перетворюється на нуль або не існує й при переході через цю точку змінює свій знак на обернений, то точка $M(x_0,\ f(x_0))$ є точкою перегину графіка функції.

Зауваження. Якщо у точці x_0 друга похідна $f''(x)$ дорівнює нулю або не існує, але при переході через цю точку $f''(x)$ не змінює свого знака, то точка $M(x_0,\ f(x_0))$ не є точкою перегину.

Приклад.

Знайти інтервали опуклості та вгнутості графіка функції $y = e^{-x^2}$.
Маємо

$$y' = -2xe^{-x^2},\ y'' = 4\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2}.$$

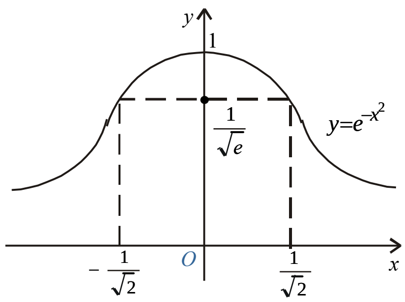
Друга похідна y'' перетворюється в нуль, коли

$$x^2 - \frac{1}{2} = 0,\ \text{звідки}\ x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

При переході через точки x_1 і x_2 друга похідна змінює знак.

Таким чином, точки $M_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ і $M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ є точками перегину графіка функції (рис.).

Результати дослідження заносимо в табл.



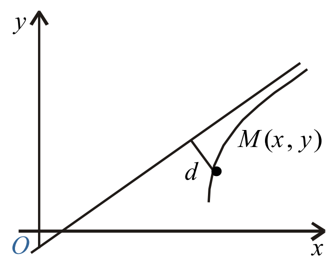
x	$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$
y''	+	0	–	0	+
y	$\cup$	Перегин	$\cap$	Перегин	$\cup$

Із цієї таблиці бачимо, що графік функції на інтервалах $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ і $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$ вгнутий, а на інтервалі $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ — опуклий.

14.4. Асимптоти графіка функції.

Змінна точка M рухається по кривій у нескінченність, коли відстань від цієї точки до початку координат необмежено зростає.

Означення. Пряма називається *асимптотою кривої*, якщо відстань d від змінної точки M кривої до цієї прямої при віддаленні точки M у нескінченність прямує до нуля. Асимптоти бувають *вертикальні* й *похилі*.



Вертикальні асимптоти.

Якщо

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\infty \text{, або } \lim_{x\to a-0} f(x)=\infty,$$

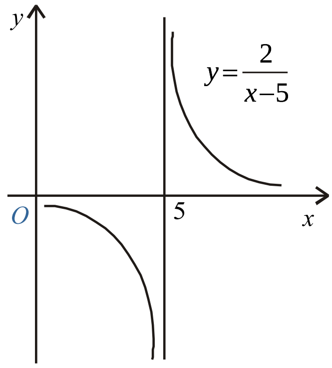
або

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty,$$

то пряма $x = a$ є вертикальною асимптотою для графіка функції $y = f(x)$.

Приклад.

Крива $y=\frac{2}{x-5}$ має вертикальну асимптоту $x = 5$, оскільки $\lim\limits_{x\to 5\pm 0} y=\pm\infty$ (рис.).



Похилі асимптоти. Нехай крива $y=f(x)$ має похилу асимптоту $y=kx+b$, тоді

$$\left.\begin{aligned} k &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} \\ b &= \lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right) \end{aligned}\right\}. \tag{13.13}$$

Якщо хоча б одна з границь (13.13) не існує, то крива похилих асимптот у відповідній напівплощині не має.

Приклад.

Визначити асимптоти кривої $y=\dfrac{x^2+2x-1}{x}$.

1. Оскільки

$$\lim_{x\to\pm0} y=\lim_{x\to\pm0}\frac{x^2+2x-1}{x}=\lim_{x\to\pm0}\left(x+2-\frac{1}{x}\right)=\mp\infty,$$

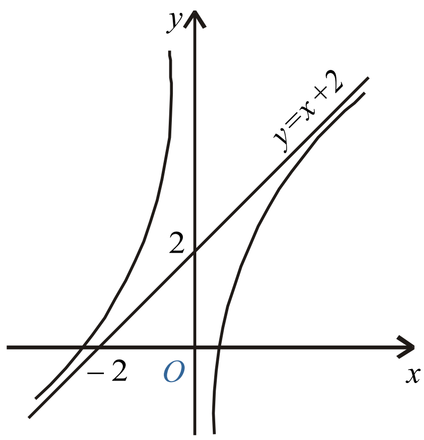
то пряма $x = 0$ (вісь Ox) є вертикальною асимптотою.

2. Нехай похила асимптота має рівняння $y=kx+b$, тоді

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(y-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)=2.$$

Отже, пряма $y=x+2$ — похила асимптота для графіка функції (рис.).



14.5. Загальний план повного дослідження функції. Приклади побудови графіків функцій.

При дослідженні функцій треба:
1. Знайти область визначення функції.
2. Встановити парність (непарність) і періодичність функції.
3. Знайти точки розриву функції та їх характер.
4. Визначити точки перетину графіка функції з осями координат.
5. Знайти точки екстремуму та обчислити значення функції у цих точках.
6. Визначити інтервали зростання й спадання функції.
7. Знайти точки перегину, інтервали випуклості й вгнутості.
8. Знайти асимптоти.
9. Знайти граничні значення функції, коли x прямує до граничних точок області визначення.

Графік функції будують за характерними точками й лініями, отриманими у результаті дослідження. Якщо їх недостатньо, знаходять допоміжні точки для деяких конкретних значень аргументу.

Приклад.

Дослідити функцію $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$ і побудувати її графік.

1. Знаходимо область визначення функції. Функція існує при всіх значеннях x за винятком значення $x = 1$. Звідси її область визначення $\{-\infty<x<1;\ 1<x<+\infty\}$.

2. Точка $x = 1$ є точкою розриву функції. Дослідимо її характер:

$$\lim_{x\to 1\pm 0} y=\lim_{x\to 1\pm 0}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 1\pm 0}(x-1)^2}=+\infty .$$

Як ліворуч, так і праворуч точки $x = 1$ маємо нескінченний розрив.
Точка $x = 1$ — точка розриву другого роду.

3. Вертикальні асимптоти. Пряма $x = 1$ є вертикальною асимптотою.

4. Знаходимо точки перетину графіка функції з осями координат: з віссю Ox: $y = 0$, $\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}=0,\ 2x-1=0,\ x=\dfrac{1}{2},\ \left(\dfrac{1}{2};\ 0\right)$; з віссю Oy: $x = 0$, $y=\dfrac{-1}{1}=-1,\ (0;\ -1)$.

5. Знаходимо точки екстремуму та інтервали зростання і спадання функції, результати заносимо у табл. 4.3:

$$y'=\frac{2(x-1)^2-2(x-1)(2x-1)}{(x-1)^4}=-\frac{2x}{(x-1)^3};\ y'=0\Rightarrow$$

$-2x=0\Rightarrow x=0$ — критична точка. При $x=1$ y' не існує, але у цій точці сама функція теж не існує. Дослідимо критичну точку $x = 0$ на екстремум:

при $x=-1$ $y'=\dfrac{2}{-8}=-\dfrac{1}{4}<0(-)$;

при $x=\dfrac{1}{2}$ $y'=\dfrac{-1}{-1/8}=8>0(+)$.

x	$(-\infty,0)$	0	(0, 1)	1	$(1,+\infty)$
y'	–	0	+	Не існує	–
y	↘	$y_{\min}$ (-1)	↗	Не існує	↘

Проходячи через критичну точку зліва направо, похідна змінює знак з «–» на «+», через це в точці $x = 0$ функція має мінімум:

$$y_{\min} = \frac{-1}{1} = -1.$$

У точці x = 1 функція не визначена. При $1 < x < +\infty$ $y'(x) < 0$, отже, функція на цьому інтервалі спадає.

6. Точки перегину та інтервали опуклості й вгнутості графіка функції знаходимо за допомогою другої похідної:

$$y'' = \frac{-2(x-1)^3 + 6x(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{2(2x+1)}{(x-1)^4}; \quad y'' = 0 \Rightarrow$$

$2(2x+1) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$; при x = 1 y'' не існує, але в цій точці не існує і сама функція.

Дослідимо точку $x = -\frac{1}{2}$:

при $x = -1$ $y'' = \frac{2(-2+1)}{(-2)^4} = -\frac{1}{8} < 0(-)$;

при $x = 0$ $y'' = \frac{2}{1} = 2 > 0(+)$.

Друга похідна, проходячи через $x = -\frac{1}{2}$, змінює знак, отже, точка перетину кривої з цією абсцисою є точкою перегину.

Знайдемо її ординату:

$$y = \frac{2\left(-\frac{1}{2}\right) - 1}{\left(-\frac{1}{2} - 1\right)^2} = -\frac{8}{9} \approx -0{,}9.$$

Таким чином, точка $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{8}{9}\right)$ — точка перегину.

У точці x = 1 функція не визначена. При $1 < x < +\infty$ $y'' > 0$, значить, графік функції вгнутий.

Результати дослідження заносимо у табл.

x	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$	1	$(1, +\infty)$
y''	+	0	+	Не існує	+
y	$\cap$	Перегин (– 8/9)	$\cup$	Не існує	$\cup$

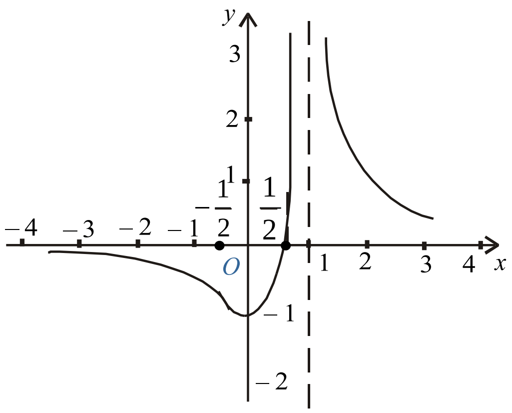
7. Рівняння похилої асимптоти знаходимо у вигляді $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x-1}{x(x-1)^2} = 0;$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 0.$$

Таким чином, похилою асимптотою є y = 0 (вісь Ox).

На підставі результатів дослідження будуємо графік функції. Для точнішої побудови візьмемо додатково точки на рис.: (–5; – 0,3), $\left(\frac{2}{3}, 3\right)$, (2; 3), (3; 1,3).



14.6. Економічний зміст похідної. Використання поняття похідної в економіці.

Розглянемо задачу про продуктивність праці. Нехай функція $u = u(t)$ відображає кількість виробленої продукції u за час t і необхідно знайти продуктивність праці в момент t_0.

За період часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$ кількість виробленої продукції зміниться від значення $u_0 = u(t_0)$ до значення $u_0 + \Delta u = u(t_0 + \Delta t)$; тоді середня продуктивність праці за цей період часу $z_{\text{сер}} = \frac{\Delta u}{\Delta t}$. Очевидно, що продуктивність праці в момент t_0 можна визначити як граничне значення середньої продуктивності за період часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$ при $\Delta t \to 0$, тобто

$$z = \lim_{\Delta t \to 0} z_{\text{сер}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = u'(t_0).$$

Таким чином, продуктивність праці є похідна від обсягу виробленої продукції по часу.

Розглянемо ще одне поняття, яке ілюструє економічний зміст похідної.

Витрати виробництва y будемо розглядати як функцію кількості продукції x, що виробляється. Нехай Δx — приріст продукції, тоді Δy — приріст витрат виробництва і $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ — середній приріст витрат виробництва продукції на одиницю продукції. Похідна $y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ виражає граничні витрати виробництва і характеризує наближено додаткові затрати на виробництво одиниці додаткової продукції.

Граничні витрати залежать від рівня виробництва (кількість продукції, що випускається) x і визначаються не постійними виробничими затратами, а лише змінними (на сировину, паливо та ін.). Аналогічним чином можуть бути визначені гранична виручка, граничний дохід, граничний продукт, гранична корисність, гранична продуктивність та інші граничні величини.

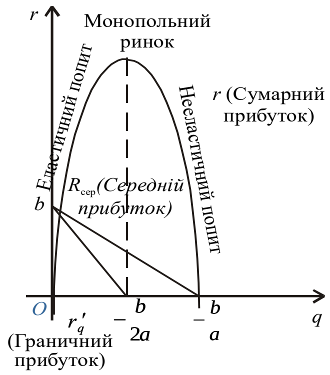
Застосування диференціального числення для дослідження економічних об'єктів та процесів на основі аналізу цих граничних величин дістало назву *граничного аналізу*. Граничні величини характеризують не стан (як сумарна чи середня величини), а процес зміни економічного об'єкта. Таким чином, похідна виступає як швидкість зміни деякого економічного об'єкта (процесу) за часом або відносно іншого об'єкта дослідження. Але необхідно врахувати, що економіка не завжди має змогу використовувати граничні величини у зв'язку з неподільністю багатьох об'єктів економічних розрахунків та перервністю (дискретністю) економічних показників у часі (наприклад, річних, квартальних, місячних та ін.). Водночас у деяких випадках можна знехтувати дискретністю показників і ефективно використовувати граничні величини.

Розглянемо, наприклад, співвідношення між середнім та граничним доходом в умовах монопольного та конкурентного ринків.

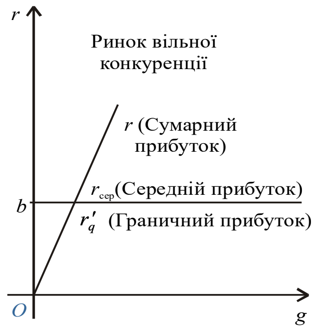
Сумарний дохід (виручка) від реалізації продукції r можна визначити як добуток ціни одиниці продукції p на кількість продукції q, тобто $r = pq$.

В умовах монополії одна або кілька фірм повністю контролюють пропозицію певної продукції, а отже, і її ціну. При цьому, як правило, зі збільшенням ціни попит на продукцію падає. Вважаємо, що цей процес проходить по прямій, тобто крива попиту $p\ (q)$ є лінійна спадна функція $p = aq + b$, де $a < 0,\ b > 0$. Звідси сумарний дохід від реалізованої продукції складає $r = (aq + b)q = aq^2 + bq$ (див.

рис.). У цьому разі середній дохід на одиницю продукції $r_{\text{сер}} = \dfrac{r}{q} = aq + b$, а граничний прибуток, тобто додатковий дохід від реалізації одиниці додаткової продукції, складатиме $r'_q = 2aq + b$ (див. рис.). Звідси, в умовах монопольного ринку зі зростанням кількості реалізованої продукції граничний прибуток зменшується, внаслідок чого відбувається зменшення (з меншою швидкістю) середнього прибутку.



В умовах досконалої конкуренції, коли на ринку функціонує велика кількість учасників і кожна фірма не здатна контролювати рівень цін, стабільна реалізація продукції можлива при домінуючій ринковій ціні, наприклад, $p = b$. При цьому сумарний прибуток становитиме $r = bq$ і відповідно середній прибуток $r_{\text{сер}} = \dfrac{r}{q} = b$; граничний прибуток $r'_q = b$ (див. рис.).



Таким чином, в умовах ринку вільної конкуренції, на відміну від монопольного ринку, середній та граничний прибутки збігаються.

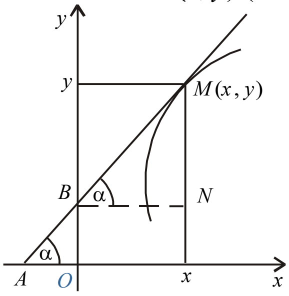
Для дослідження економічних процесів та розв'язування інших прикладних задач використовується поняття еластичності функції.

Означення. *Еластичністю функції* $E_x(y)$ називається границя відношення відносного приросту функції y до відносного приросту змінної x при $\Delta x \to 0$:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{x}{y}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y}\cdot y'. \qquad (13.14)$$

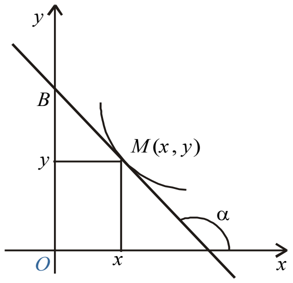
Еластичність функції наближено показує, на скільки відсотків зміниться функція $y = f(x)$ при зміні незалежної змінної x на 1%.

Визначимо геометричний зміст еластичності функції. За означенням (13.14) $E_x(y) = \dfrac{x}{y}y' = \dfrac{x}{y}\text{tg}\alpha$, де $\text{tg}\alpha$ — тангенс кута нахилу дотичної в точці $M(x, y)$ (див. рис.).



Враховуючи, що з трикутника MBN $MN = x\text{tg}\alpha$, $MC = y$, а з подібності трикутників MBN та AMC

$\dfrac{MN}{MC}=\dfrac{MB}{MA}$ дістанемо $E_x(y)=\dfrac{MB}{MA}$, тобто еластичність функції (за абсолютною величиною) дорівнює відношенню відстаней по дотичній від даної точки графіка функції до точок її перетину з осями *Ox* та *Oy*. Якщо точки перетину дотичної до графіка функції *A* і *B* містяться по один бік від точки *M*, то еластичність $E_x(y)$ додатна (див. рис.вище), якщо по різні боки, то $E_x(y)$ від'ємна (див. рис.).



Властивості еластичності функції.

1. Еластичність функції дорівнює добутку незалежної змінної на темп зміни функції $T_y=(\ln y)'=\dfrac{y'}{y}$, тобто $E_x(y)=x\cdot T_y$.

2. Еластичність добутку (частки) двох функцій дорівнює сумі (різниці) еластичностей цих функцій: $E_x(uv)=E_x(u)+E_x(v)$, $E_x\left(\dfrac{u}{v}\right)=E_x(u)-E_x(v)$.

3. Еластичності взаємно обернених функцій — взаємно обернені величини:

$$E_x(y)=\frac{1}{E_y(x)}. \qquad (13.15)$$

Еластичність функції застосовується при аналізі попиту та пропозиції. Наприклад, еластичність попиту *y* відносно ціни *x* (або доходу *x*) — коефіцієнт, що визначається за формулою (13.14) і наближено показує, на скільки відсотків зміниться попит (обсяг пропозиції) при зміні ціни (або доходу) на 1%.

Якщо еластичність попиту (за абсолютною величиною) $|E_x(y)|>1$, то попит вважають еластичним, якщо $|E_x(y)|<1$ — нееластичним відносно ціни (або доходу). Якщо $|E_x(y)|=1$, то йдеться про попит з одиничною еластичністю.

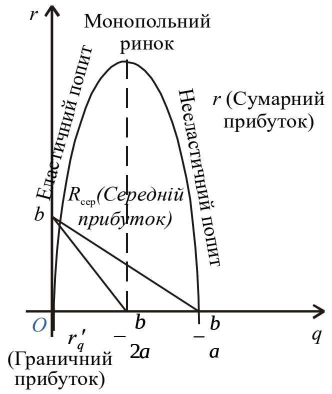
Визначимо, наприклад, як впливає еластичність попиту відносно ціни на сумарний прибуток $z=pq$ при реалізації продукції. Вище ми вважали криву попиту $p=p(q)$ — лінійною функцією; тепер припустимо, що $p=p(q)$ — довільна функція. Знайдемо граничний прибуток:

$$z'_q=(pq)'_q=p'_q\cdot q+p\cdot 1=p\left(1+\frac{q}{p}p'_q\right)=p\big(1+E_q(p)\big).$$

Згідно з формулою (13.15) для еластичності взаємно обернених функцій еластичність попиту відносно ціни обернена еластичності ціни відносно попиту, тобто $E_q(p)=\dfrac{1}{E_p(q)}$, а також те, що $E_p(q)<0$, отримаємо при довільній кривій попиту:

$$r'_q=p\left(1-\frac{1}{|E_p(q)|}\right). \qquad (13.16)$$

Якщо попит не є еластичним, тобто $|E_p(q)|<1$, то відповідно до (13.15) граничний дохід r'_q буде від'ємний при будь-якій ціні; якщо попит еластичний, тобто $|E_p(q)|>1$, то граничний прибуток r'_q додатний. Таким чином, для нееластичного попиту зміна ціни та граничного прибутку відбувається в одному напрямку, а для еластичного попиту — в різних. Це означає, що зі зростанням ціни для продукції еластичного попиту сумарний прибуток від реалізації продукції збільшується, а для товарів нееластичного попиту — зменшується. На рис. на кривих прибутків виділені області еластичного та нееластичного попиту.



Приклад.

Залежність між витратами виробництва y і обсягом продукції x, що випускається, визначається функцією $y = 50x - 0{,}05x^3$ (грош. од.). Визначити середні та граничні витрати за умови, що обсяг продукції 10 одиниць.
Функція середніх витрат (на одиницю продукції) виражається відношенням $y_{\text{сер}} = \dfrac{y}{x} = 50 - 0{,}05x^2$; при x = 10 середні витрати (на одиницю продукції) дорівнюють $y_{\text{сер}} = (10) =$ $= 50 - 0{,}05 \cdot 10^2 = 45$ (грош. од.). Функція граничних витрат виражається похідною $y'(x) = 50 - 0{,}15x^2$; при x = 10 граничні витрати складають $y'(10) = 50 - 0{,}15 \cdot 10^2 = 35$ (грош. од.). Отже, якщо середні витрати на виробництво одиниці продукції складають 45 грош. од., то граничні витрати, тобто додаткові затрати на виробництво додаткової одиниці продукції за умови даного рівня виробництва (обсягу продукції, що випускається 10 од.), складають 35 грош. од.

Приклад.

Залежність між собівартістю одиниці продукції у (тис. грош. од.) та випуском продукції x (млрд грош. од.) виражається функцією $y = -0{,}5x + 80$. Знайти еластичність собівартості за умови випуску продукції в розмірі 60 млрд грош. од.
За формулою (13.14) еластичність собівартості

$$E_x(y) = \frac{-0{,}5x}{-0{,}5x + 80} = \frac{x}{x - 160}.$$

При x = 60 $E_{x=60}(y) = -0{,}6$, тобто при виробництві продукції в розмірі 60 млн грош. од., збільшення її на 1% викличе зменшення собівартості на 0,6%.

Приклад.

За допомогою досліду були встановлені функції попиту $q = \dfrac{p+8}{p+2}$ та пропозиції $s = p + 0{,}5$, де q та s — кількість товарів, відповідно що купується і пропонується для продажу за одиницю часу, p — ціна товару. Знайти: а) рівноважну ціну, тобто ціну, за якої попит та пропозиція врівноважуються; б) еластичність попиту та пропозиції для цієї ціни; в) зміну доходу при збільшенні ціни на 5% від рівноважної.

а) Рівноважна ціна визначається з умови $q = s$, $\dfrac{p+8}{p+2} = p + 0{,}5$, звідки p = 2, тобто рівноважна ціна дорівнює 2 грош. од.

б) Знайдемо еластичності попиту та пропозиції за формулою (13.14):

$$E_p(q) = -\frac{6p}{(p+2)(p+8)}; \quad E_p(s) = \frac{2p}{2p+1}.$$

Для рівноважної ціни p = 2 маємо $E_{p=2}(q) = -0{,}3$; $E_{p=2}(s) = 0{,}8$.

Оскільки отримані значення еластичності за абсолютною величиною менші 1, то попит і пропозиція даного товару за рівноважної (ринкової) ціни нееластичні відносно ціни. Це означає, що зміна ціни не приведе до різкої зміни попиту та пропозиції. Так, при збільшенні ціни p на 1% попит зменшиться на 0,3%, а пропозиція збільшиться на 0,8%.

в) При збільшенні ціни p на 5% від рівноважної попит зменшиться на 5*0,3 = 1,5%, тобто прибуток зросте на 3,5%.

Лекція 15. Границя, неперервність, частинні похідні функції декількох змінних (ФДЗ). Диференціал ФДЗ, похідні вищих порядків. Застосування похідних ФДЗ. Екстремум ФДЗ.

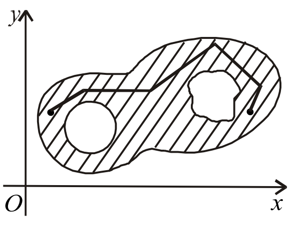
15.1. Означення, геометричний зміст ФДЗ, окіл точки.
15.1.1. Множини точок на площині та в n-вимірному просторі.

Упорядкованій парі чисел $(x_0; y_0)$ на координатній площині відповідає одна точка $P_0(x_0; y_0)$. Аналогічно, в n-вимірному просторі n упорядкованим дійсним числам відповідає одна точка $P_0(x_1^0;\, x_2^0;\, \ldots;\, x_n^0)$, де числа $x_1^0,\, x_2^0,\, \ldots,\, x_n^0$ будуть координатами цієї точки. З метою скорочення запису далі розглядатимемо множини точок на площині, але подані далі означення можна вважати правильними і в разі n-вимірного простору.

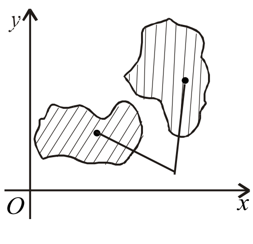
Означення. Множина точок називається *зв'язною*, якщо будь-які її дві точки можна сполучити ламаною лінією так, щоб усі точки цієї лінії належали цій множині.

Приклад.

На рис. у випадку а) буде зв'язна множина, а у випадку б) — не зв'язна.



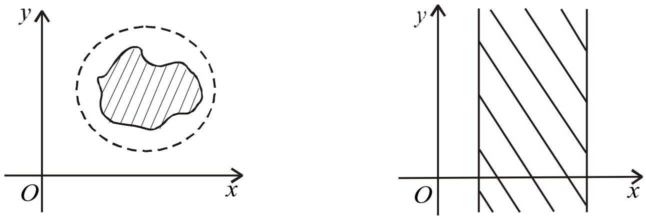
а)



б)

Означення. Множина точок називається *обмеженою*, якщо всі її точки належать множині точок круга скінченного радіуса.

Приклад. На рис.2 у випадку а) маємо обмежену множину, а у випадку б) — необмежену.



а) *б*)

Означення. Множина точок, координати яких задовольняють нерівність

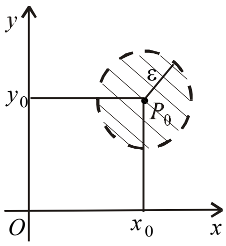
$$\left(x_1 - x_1^0\right)^2 + \left(x_2 - x_2^0\right)^2 + \ldots + \left(x_n - x_n^0\right)^2 < \delta^2 \qquad (15.1)$$

називається δ-*околом точки* $P_0\left(x_1^0;\ x_2^0; \ldots; x_n^0\right)$.

Зауваження. У випадку двовимірного простору нерівність (15.1) можна подати у вигляді

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2. \qquad (15.2)$$

Вона означає внутрішність круга з радіусом $R = \varepsilon$ та з центром у точці $P_0(x_0;\ y_0)$ (рис.).



Якщо з δ-околу точки P_0 вилучимо саму точку P_0, дістанемо *виколотий* δ-*окіл* точки P_0.

Означення. Точка називається *внутрішньою* для множини точок, якщо вона належить цій множині разом з деяким своїм δ-околом, і *зовнішньою*, якщо існує її окіл з точок, жодна з яких не належить цій множині.

Означення. Зв'язна множина, яка складається тільки з внутрішніх точок, називається *відкритою областю* (або просто *областю*).

Область позначатимемо:

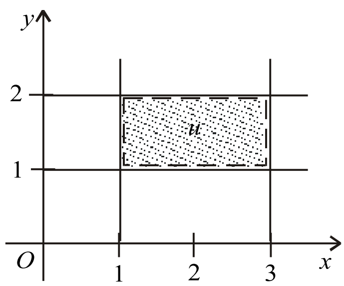
$$D = \{(x;\ y) \in R^2 \mid \quad \varphi(x;\ y) \le \text{const}\}.$$

(Читаємо: область D є множина точок площини з координатами $(x;\ y)$, таких що $\varphi(x;\ y) \le \text{const}$.)
У частинному випадку, коли D — прямокутник, область позначатимемо

$$D = \{(x;\ y) \in R^2 \mid \quad a \le x \le b,\ c \le y \le d\}.$$

Приклад.
На рис. множина точок D — область:

$$D = \{(x;\ y) \in R^2 | 1 < x < 3,\ 1 < y < 2\}.$$

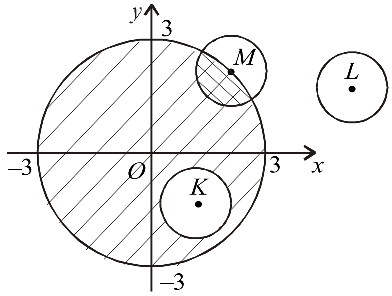


Означення. Точка називається *межовою* для області, якщо в будь-якому її δ-околі існують точки, що не належать області і належать їй.

Означення. Множина межових точок називається *межею області*.

Означення. Область, об’єднана зі своєю межею, називається *замкненою областю*.

Приклад. На рис. $D=\{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2\le 9\}$ — замкнена область, $x^2+y^2=9$ — рівняння межі області, K — внутрішня, L — зовнішня, M — межова точка.



Означення. Множина називається *опуклою*, якщо будь-які точки множини можна зв’язати відрізком, який буде належати цій множині.

15.1.2. Означення функції багатьох змінних.

Означення. Якщо кожній точці $P(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ множини D n-вимірного простору поставлено у відповідність за деяким законом одне і тільки одне дійсне число $z\in E\subset R$, то кажуть, що в області $D\subset R^n$ задано функцію n незалежних змінних $z=f(x_1;\ x_2;\ \ldots; x_n)$. При цьому D називають *областю визначення функції, E — областю значень функції.*

Згідно з означенням функцію $z=f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ можна розглядати як функцію точки і записувати $z=f(P)$.

Зокрема, при $n = 2$ говорять, що задана функція двох змінних $z=f(x;y)$, якщо кожній парі $(x;y)\in D$ на площині поставлено у відповідність тільки одне число z. Для прикладних питань економіки має значення розгляд функції двох або трьох незалежних змінних. Тому в подальшому більше уваги звертатимемо на ці функції.

Наведемо приклади функції двох змінних.

Приклад. Витратами на виробництво даного виробу при даній техніці виробництва є функція матеріальних витрат x і витрат на оплату робочої сили y: $z=f(x;\ \ y)$.

Це є функція *витрат виробництва*.

Приклад. Розглянемо функцію двох незалежних змінних K, L, яка називається *функцією виробництва*, або *функцією Кобба—Дугласа*, де K — кількість капіталу, L — кількість праці, яку вкладено у виробництво $P=\mathrm{const}K^{\alpha}L^{\beta},\ \alpha+\beta=1$.

Приклад. Припустимо, що предметами споживання будуть два товари A та B, ціни яких відповідно становлять p_1 та p_2. Якщо ціни інших товарів сталі, а прибуток споживачів та структура споживань не змінюються, то попит та пропозиція кожного з товарів залежить від їх цін.

Маємо функцію попиту на товар A: $g_1=f_1(p_1;p_2)$; функцію попиту на товар B: $g_2=f_2(p_1;p_2)$; функцію пропозиції товару A: $s_1=f_3(p_1;p_2)$; функцію пропозиції товару B: $s_2=f_4(p_1;p_2)$.

15.1.3. Способи завдання функції

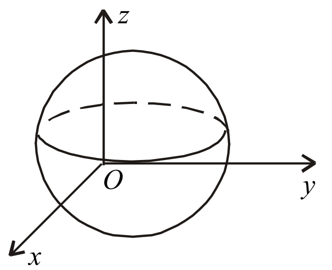
Як і функцію однієї змінної, функції двох змінних можна зобразити:

— *аналітично* (у вигляді формули), наприклад: $z = x\left(y^2 + 2x\right)$,
— *таблично* (у вигляді таблиці), наприклад:

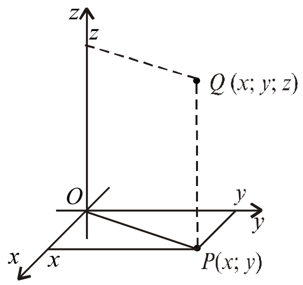
x \ y	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	6	8
3	3	6	9	12
4	4	8	12	16

таблицею задана функція $z = xy$;

— *графічно*:



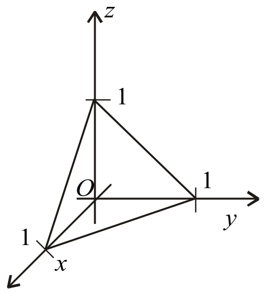
Для графічного зображення функції двох змінних використовуємо систему координат *Oxyz* у тривимірному просторі (рис.).

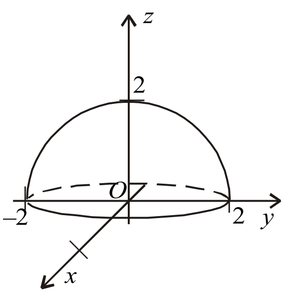


Кожній парі чисел *x* та *y* відповідає точка $P(x; y)$ площини *Oxy*. У точці $P(x; y)$ проводимо пряму, перпендикулярну до площини *Oxy*, та позначаємо на ній відповідне значення функції *z*; дістаємо в просторі точку *Q* з координатами $(x; y; z)$, яка позначається символом $Q(x; y; z)$. Точки *Q*, які відповідають різним значенням незалежних змінних, утворюють певну поверхню у просторі. Така поверхня є *графічним зображенням функції* $z = f(x; y)$.

Зауваження. На практиці побудувати графік функції важко, адже йдеться про зображення на площині просторової фігури, а це не завжди вдається.

Приклад. Графічне зображення функції $z = 1 - x - y$ є площина, яка проходить через точки (0; 0; 1), (0; 1; 0), (1; 0; 0) (рис.). Графічне зображення функції $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ є півкуля (рис.).





Існує й інший спосіб геометричного зображення функції двох змінних — зображення за допомогою *ліній рівня*.

Означення. *Лінією рівня* називається множина всіх точок площини, в яких функція $z = f(x; y)$ набуває однакових значень.

Рівняння ліній рівня записують у вигляді $f(x; y) = C$.

Накресливши кілька ліній рівня та зазначивши, яких значень набуває на них функція, дістанемо наближене уявлення про зміну функції. Елементарний приклад зображення функції за допомогою ліній рівня є зображення рельєфу місцевості на географічній карті. Висота місцевості над рівнем моря є функцією координат точки земної поверхні. За лініями рівня висоти, нанесеними на карту, легко уявити собі рельєф даної місцевості.

15.1.4. Знаходження області визначення функції двох змінних

Покажемо алгоритм знаходження області визначення функції двох змінних на прикладі.

Приклад.

Знайти область визначення функції $z = \dfrac{\ln\left(4 - x^2 - y^2\right)}{\sqrt{4x - y}}$ та надати їй геометричну інтерпретацію.

1. Знайдемо область визначення функції аналітично

$$D = \left\{(x; y) \in R^2 \middle| 4 - x^2 - y^2 > 0,\ \ 4x > y\right\}.$$

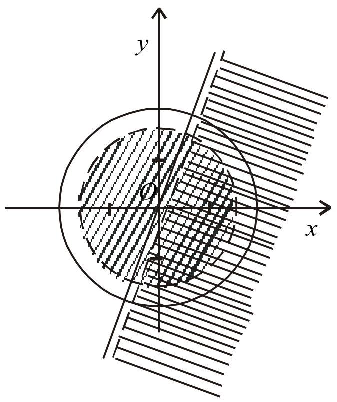
2. Нерівності в D замінюємо рівностями і будуємо лінії, що їм відповідають на координатній площині, а саме: $x^2 + y^2 = 4$; $y = 4x$.

3. Визначаємо за допомогою контрольних точок $P_1\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$, $P_2(1; 2)$ розміщення D на площині і заштриховуємо її (рис.).

$$\left.\begin{matrix} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{10}{4} < 4 \\ 4 \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{2} > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow P_1 \in D$$

$$\left.\begin{matrix} 1^2 + 2^2 = 5 > 4 \\ 4 > 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow P_2 \overline{\in} D.$$

4.



15.2.1. Границя функції двох змінних.

Означення. Число B називається *границею* функції $z = f(x; y)$ при $x \to x_0$, $y \to y_0$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що при виконанні нерівності $0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$

виконується нерівність $\left|f(x;y)-B\right|<\varepsilon$ і позначається $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x;y)=B$ або $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y)=B$.

Зауваження. Для функції багатьох змінних справедливі теореми про границю суми, добутку та частки, які аналогічні відповідним теоремам для функції однієї незалежної змінної.

Наведемо формулювання відповідних теорем.

Теорема 1.

Якщо функція $\boldsymbol{z=f(x;\,y)}$ ***має границю при*** $\boldsymbol{(x;\,y)\to(x_0;\,y_0)}$***, то вона єдина.***

Теорема 2.

Якщо функція $\boldsymbol{z=f(x;\,y)}$ ***має границю при*** $\boldsymbol{(x;\,y)\to(x_0;\,y_0)}$***, то вона обмежена в деякому околі точки*** $\boldsymbol{(x_0;\,y_0)}$***.***

Теорема 3.

Якщо $\boldsymbol{\lim\limits_{(x;\,y)\to(x_0;\,y_0)} f(x;\,y)=b}$***,*** $\boldsymbol{\lim\limits_{(x;\,y)\to(x_0;\,y_0)} g(x;\,y)=c}$ ***і в деякому околі точки*** $\boldsymbol{(x_0;\,y_0)}$ ***виконується нерівність*** $\boldsymbol{f(x;\,y)\le g(x;\,y)}$***, то*** $\boldsymbol{b\le c}$***.***

Теорема 4.

Нехай $\boldsymbol{\lim\limits_{(x;\,y)\to(x_0;\,y_0)} f(x;\,y)=b}$***,*** $\boldsymbol{\lim\limits_{(x;\,y)\to(x_0;\,y_0)} g(x;\,y)=c}$***. Тоді:***

1) $\boldsymbol{\lim\limits_{(x;\,y)\to(x_0;\,y_0)} \left(f(x;\,y)+g(x;\,y)\right)=b+c}$ ***;***

2) $\boldsymbol{\lim\limits_{(x;\,y)\to(x_0;\,y_0)} f(x;\,y)\cdot g(x;\,y)=b\cdot c}$ ***;***

3) $\boldsymbol{\lim\limits_{(x;\,y)\to(x_0;\,y_0)} \dfrac{f(x;\,y)}{g(x;\,y)}=\dfrac{b}{c}\quad (c\ne 0)}$***.***

Приклад.

Обчислити $\lim\limits_{(x;y)\to(1;2)} \dfrac{x^2+y^3}{2x-3y}$.

Згідно з теоремами про арифметичні операції з границями, а також те, що границя сталої дорівнює сталій, тобто $\lim\limits_{(x;y)\to(1;2)} x=1$, $\lim\limits_{(x;y)\to(1;2)} y=2$, маємо

$$\lim_{(x;y)\to(1;2)} \frac{x^2+y^3}{2x-3y}=\frac{\lim\limits_{(x;y)\to(1;2)}\left(x^2+y^3\right)}{\lim\limits_{(x;y)\to(1;2)}\left(2x-3y\right)}= =\frac{\lim\limits_{(x;y)\to(1;2)} x^2+\lim\limits_{(x;y)\to(1;2)} y^3}{\lim\limits_{(x;y)\to(1;2)} 2x-\lim\limits_{(x;y)\to(1;2)} 3\cdot y}=\frac{1+2^3}{2-3\cdot 2}=-\frac{9}{4}.$$

Приклад.

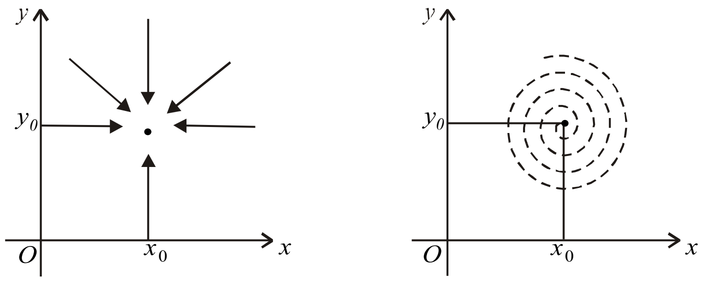
Обчислити $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\ln(1+2xy)}{\sin 3xy}$.

Візьмемо $xy=t$. Тоді з того, що $(x;y)\to(0;0)$ випливає $t\to 0$ і задану границю можна переписати у вигляді $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+2t)}{\sin 3t}$. При $t\to 0$ маємо $\ln(1+2t)\sim 2t$; $\sin 3t\sim 3t$, тобто $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+2t)}{\sin 3t}=$ $=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2t}{3t}=\dfrac{2}{3}$. Таким чином, $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)}\dfrac{(1+2xy)}{\sin 3xy}=\dfrac{2}{3}$.

Зауваження. Між поняттями границі в точці для функції однієї змінної та функції багатьох змінних є багато спільного, але є й принципова відмінність, яка робить поняття границі функції кількох змінних суттєво більш обмеженим, ніж поняття границі функції однієї змінної.

Річ у тім, що коли $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ ($f(x)$ — функція однієї змінної), то це означає, що і лівостороння і правостороння границі дорівнюють b. Правильним є й обернене: з існування та збігу двох односторонніх границь випливає існування границі функції в точці.

Для функції двох змінних $z = f(x; y)$ наближатися до точки $(x_0;\ y_0)$ можна нескінченною множиною способів: і справа, і зліва, і зверху, і знизу, і під кутом 30° до осі Ox тощо (рис.). Більше того, до точки можна наближатися не тільки по прямій, а й по більш складних траєкторіях (рис.).



Очевидно, що рівність $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x;y)=b$ правильна тоді й тільки тоді, коли границя дорівнює b при наближенні до точки $(x_0;y_0)$ по будь-якій траєкторії. Це суттєво більш обмежене, ніж збіг двох односторонніх границь у випадку функції однієї змінної.

Приклад.

Довести, що $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ не існує.

Будемо наближатися до точки (0;0) по прямій $y = kx$.

Якщо $y = kx$, тоді

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{xkx}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}.$$

Зауважимо, що значення границі залежить від кутового коефіцієнта прямої, наприклад:

при $k=1$ границя дорівнює $1/2$.

при $k=2$ границя дорівнює $2/5$ і т. п.

Таким чином, якщо наближатися до точки (0;0) з різних напрямків, то дістанемо різні значення, тобто границя $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ не існує.

Зауваження. Нехай дано функцію двох змінних $z = f(x;\ y)$. Розглянемо границі, які дістаємо після послідовних граничних переходів за кожним із аргументів окремо в тому чи іншому порядку.

Якщо при будь-якому фіксованому y з Y існує для функції $f(x;\ y)$ (яка буде функцією від x) границя при $x \to a$, то ця границя, взагалі кажучи, буде залежати від наперед фіксованого y:

$$\lim_{x\to a} f(x;\ y) = \varphi(y).$$

Далі постає запитання про границю функції $\varphi(y)$ при $y \to b : \lim\limits_{y\to b}\varphi(y) = \lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} f(x;\ y)$ — це буде одна із двох повторних границь. Іншу дістанемо, якщо границі візьмемо в зворотному порядку

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,\ y).$$

Повторні границі не обов'язково рівні.

Приклад.

Нехай

1) $f(x;\ y)=\dfrac{x-y+x^2+y^2}{x+y}$ і $a=b=0$, тоді:

$$\varphi(y)=\lim_{x\to 0} f(x;\ y)=y-1,\ \lim_{y\to 0}\varphi(y)=\lim_{y\to 0}\ \lim_{x\to 0} f(x;\ y)=-1,$$

але водночас $\varphi(x)=\lim_{y\to 0} f(x;\ y)=x+1$, $\lim_{x\to 0}\varphi(x)=\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x;\ y)=1$. Отже, $1\neq -1$.

Може статися так, що одна з повторних границь існує, друга — ні.
Розглянемо приклади.

2) $f(x;\ y)=\dfrac{x\sin\frac{1}{x}+y}{x+y}$
або
3) $f(x;\ y)=x\cdot\sin\dfrac{1}{y}$.

В обох випадках існує повторна границя $\lim_{y\to 0}\ \lim_{x\to 0} f$, але немає повторної границі $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f$ (в останньому прикладі навіть не існує простої границі $\lim_{y\to 0} f$).

Приклади показують, що можливість перестановки границь повинна бути обґрунтована. У зв'язку з цим виконується наступна теорема, що встановлює зв'язок між подвійною і повторною границями.

Теорема 5.
Якщо
1) існує (скінченна або ні) подвійна границя
$\boldsymbol{A=\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x;\ y)}$ ***і***
2) при будь-якому y з Y існує (скінченна) звичайна границя по x $\boldsymbol{\varphi(y)=\lim_{x\to a} f(x;\ y)}$,
то існує повторна границя $\boldsymbol{\lim_{y\to b}\varphi(y)=\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x;\ y)}$***, яка дорівнює подвійній границі.***

Доведемо це для випадку скінченних *A*, *a* і *b*. Згідно з означенням за заданим $\varepsilon>0$ знайдеться таке $\delta>0$, що $|f(x;\ y)-A|<\varepsilon$, якщо тільки $|x-a|<\delta$ і $|y-b|<\delta$ (причому *x* береться з *X*, а *y* з *Y*). Зафіксуємо *y* так, щоб виконувалась нерівність $|y-b|<\delta$ і перейдемо в $|f(x;\ y)-A|<\varepsilon$ до границі при $x\to a$.

За умовою 2) $f(x;\ y)$ прямує до $\varphi(y)$, тому

$$|\varphi(y)-A|\le\varepsilon.$$

При фіксованому *y* з *Y*, що задовольняє умову $|y-b|<\delta$, маємо $A=\lim_{y\to b}\varphi(y)=\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x;\ y)$, що й треба було довести.

Якщо поряд з умовами 1) і 2) при будь-якому *x* з *X* існує (скінченна) звичайна границя по *y* $\psi(x)=\lim_{y\to b} f(x;\ y)$, то, як випливає з доведеного, існує також і друга повторна границя $\lim_{x\to a}\psi(x)=\lim_{x\to a} f(x;\ y)$, що дорівнює також числу *A* (в цьому випадку обидві повторні границі однакові).

З теореми 5 випливає, що в прикладах 1) і 2) подвійна границя не існує.

У прикладі 3), навпаки, подвійна границя існує: з нерівності $\left|x\cdot\sin\dfrac{1}{y}\right|\le|x|$ випливає, що вона дорівнює нулю.

Не обов'язково існування подвійної границі необхідне для рівності повторних.

У прикладі $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ обидві повторні границі існують і рівні 0, але подвійної границі немає.

15.2.2. Неперервність функції двох змінних.

Означення. Функція $z = f(x;y)$ називається *неперервною* в точці $P_0(x_0;y_0)$, якщо $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y) = f(x_0;y_0)$.

Означення. Функція $z = f(x;y)$ називається *неперервною* в області (замкненій чи відкритій), якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

Приклад.

Розглянемо функцію двох незалежних змінних

$$f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x^2+y^2>0) \\ 0, & (x^2+y^2=0) \end{cases}$$

Ця функція має розрив у точці (0; 0), бо в точці для функції $f(x;y)$ границі не існує (див. приклад в 15.1.5).

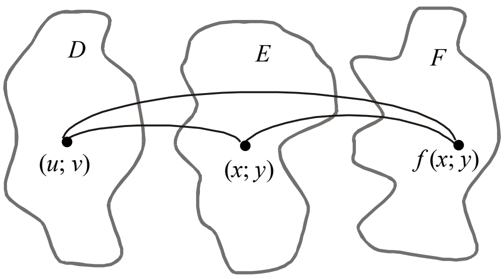
Тут ми спостерігаємо цікаве явище. Функція, що розглядається, не є неперервною в точці (0; 0) по двох змінних водночас, але є неперервною по змінних *x* та *y* окремо.

Приклад.

Точки розриву можуть бути не тільки ізольованими, як у попередньому прикладі, а й заповнювати лінії, поверхні і т.п. Так, функції двох змінних $f(x;y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$, $f(x;y) = \dfrac{1}{x^2+y^2-1}$ мають розриви: перша — прямі $y = \pm x$, друга — окіл $x^2+y^2=1$.

Для функції трьох змінних $f(x;\ y;\ z) = \dfrac{x+y+z}{xy-z}$, $f(x;\ y;\ z) = \ = \dfrac{1}{x^2+y^2-z^2}$ розриви заповнюють у першому випадку гіперболічний параболоїд $z = xy$, а в другому — конус $z^2 = x^2 + y^2$.

Означення. Нехай функція $z = f(x;y)$ визначена на множині *E*, а змінні *x* і *y*, у свою чергу, залежать від змінних *u* та *v* і $x = x(u;v)$, $y = y(u;v)$, де обидві функції $x(u;v)$ та $y(u;v)$ визначені на множині *D*. Якщо для будь-якого $(u;v)\in D$ значення $x(u;v)$, $y(u;v)$ такі, що $(x;y)\in E$ (рис.), то кажуть, що на множині *D* визначена *складна функція* $z = f(x;y)$, де $x = x(u;v)$, $y = y(u;v)$; *x*, *y* — проміжні змінні, *u*, *v* — незалежні змінні.



Приклад.

Функція $z = x^3 + y^3$, де $x = \sin(u+v)$, $y = \cos(u-v)$ — складна функція. Вона визначена на координатній площині. Її можна записати у вигляді $z = \sin^3(u+v) + \cos^3(u-v)$.

Означення. Функцію $z = f(x;\ y)$, яка визначена на множині $D \in R^2$, називають *неперервною по множині* $x \in D$ в точці $(x_0;\ y_0)\in D$, якщо $\lim\limits_{\substack{(x;\ y)\to(x_0;\ y_0)\\ (x;\ y)\in D}} f(x;\ y) = f(x_0;\ y_0)$.

Теорема 6.

Нехай на множині D визначено складну функцію $z = f(x;y)$, де $x = x(u;v)$, $y = y(u;v)$, і нехай функції $x = x(u;v)$, $y = y(u;v)$ неперервні в точці $(u_0;v_0)$, а функція $f(x;y)$ неперервна в точці $(x_0;y_0)$, де $x_0 = x(u_0;v_0)$, $y_0 = y(u_0;v_0)$. Тоді складна функція $z = f(x(u;v); y(u;v))$ неперервна в точці $(u_0;v_0)$.

Властивості неперервної функції двох змінних.

Теорема 7.

Якщо функція неперервна в точці, то вона обмежена деяким околом цієї точки.

Теорема 8.

Якщо функції $f(x;y)$ та $g(x;y)$ неперервні в точці $(x_0;y_0)$, то в цій точці будуть неперервними $f(x;y)\pm g(x;y)$, $f(x;y)\cdot g(x;y)$, $f(x;y)/g(x;y)$ при $g(x_0;y_0)\neq 0$.

Теорема 9.

Якщо функція $f(x;y)$ неперервна на замкненій обмеженій множині, то вона обмежена на цій множині.

Теорема 10.

Якщо функція $f(x;y)$ неперервна на замкненій обмеженій множині, то серед її значень на цій множині є як найменші, так і найбільші.

Теорема 11 (про нуль неперервної функції).

Нехай функція $f(x;y)$ неперервна на зв'язній множині D і набуває у двох точках A і B цієї множини значень різних знаків. Тоді у множині D знайдеться така точка, що в ній функція перетворюється на нуль.

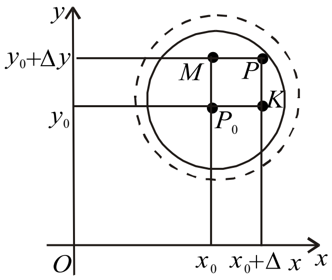
Теорема 12 (про проміжне значення).

Нехай функція $f(x;y)$ неперервна на зв'язаній множині D й у двох будь-яких точках A та B цієї множини набуває нерівних значень $f(A)$ та $f(B)$. Тоді на цій множині вона набуває будь-яких значень μ, яке лежить між $f(A)$ і $f(B)$, тобто існує така точка $c\in D$, що $f(c)=\mu$.

15.3. Диференційованість функції двох змінних.

15.3.1. Частинні та повний прирости функції двох змінних.

Нехай функція $z = f(x;y)$ визначена в деякому околі точки $P_0(x_0;y_0)$. Надамо незалежним змінним *x* та *y* приросту відповідно Δx та Δy так, щоб точка $P(x_0+\Delta x;\ y_0+\Delta y)$ не виходила за межі вказаного околу. Тоді й точки $K(x_0+\Delta x;y_0)$, $M(x_0;y_0+\Delta y)$ також належатимуть розглядуваному околу (рис.).



Означення. Різницю $f(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y)-f(x_0;y_0)$ *називають повним приростом* функції $z = f(x;y)$ при переході від точки $(x_0;y_0)$ до точки $(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y)$ і позначають Δz. Різницю $f(x_0+\Delta x;y_0)-f(x_0;y_0)$ називають *частинним приростом за x*, а різницю $f(x_0;y_0+\Delta y)-f(x_0;y_0)$ — *частинним приростом за y* функції $z = f(x;y)$; їх позначають відповідно $\Delta_x z$ і $\Delta_y z$. Таким чином,

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y)-f(x_0;y_0)$$

$$\Delta_x z = f(x_0+\Delta x;y_0)-f(x_0;y_0)$$

$$\Delta_y z = f(x_0;y_0+\Delta y)-f(x_0;y_0)$$

Зауваження. Аналогічно визначаються прирости функції більш ніж двох змінних.

15.3.2. Диференційованість функції двох змінних

Означення. Функція $z = f(x; y)$ називається *диференційованою* у точці $(x_0; y_0)$, якщо її повний приріст Δz можна подати у вигляді:

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

де A, B — числа, α, β — нескінченно малі при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Головна лінійна частина приросту функції, тобто $A\Delta x + B\Delta y$, називається *повним диференціалом функції* (точніше першим диференціалом) двох змінних $f(x; y)$ у точці (x_0, y_0) і позначається dz:

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

Теорема 13.

Якщо функція $z = f(x; y)$ диференційована в точці $(x_0; y_0)$, тоді існують границі $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ та $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$ і вони дорівнюють відповідно A і B.

Означення. Нехай функція $z = f(x; y)$ визначена в точці $(x_0; y_0)$ і в її деякому околі. Якщо існує границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} \left(\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta x} \right)$, то вона називається *частинною похідною за x (за y)* функції $z = f(x; y)$ у точці $(x_0; y_0)$ і позначається $\frac{\partial z}{\partial x}$, або z'_x, або $f_x(x_0; y_0)$. Таким чином, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = Z'_x$, $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = Z'_y$. Із означення частинних похідних матимемо, що вони шукаються за тими правилами, що й похідні функції однієї змінної. Треба лише пам'ятати, що при знаходженні z'_x y вважається **сталою**, а при знаходженні z'_y змінна x вважається **сталою**.

Тепер можна сформулювати **теорему 13** інакше:

Теорема 14 (необхідна умова диференційованості функції $z = f(x; y)$ у точці).
Якщо функція $z = f(x; y)$ диференційована в точці $(x_0; y_0)$, то в цій точці існують частинні похідні z'_x і z'_y.

Приклад.

Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ для функції $z = x^3 y + \sin\left(x^2 + \sqrt{y}\right) + \ + \operatorname{tg} x + \ln y$.

Знайдемо $\frac{\partial z}{\partial x}$. Вважаючи, що $y = \text{const}$, дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y + \cos\left(x^2 + \sqrt{y}\right) \cdot 2x + \frac{1}{\cos^2 x}.$$

При знаходженні $\frac{\partial z}{\partial y}$ вважаємо, що $x = \text{const}$. Дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 + \cos\left(x^2 + \sqrt{y}\right)\frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{y}.$$

Приклад. Знайти z'_x і z'_y для функції $z = x^2 y + xy^2$.

Знайдемо z'_x, вважаючи $y = \text{const}$

$$z'_x = 2xy + y^2.$$

Знайдемо z'_y, вважаючи $x = \text{const}$:

$$z'_y = x^2 + 2xy.$$

Приклад.

Для функції $f(x;\ y) = \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-(x-a)^2/4y}$ знайти f'_x і f'_y:

$$f'_x = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{-(x-a)}{2y} e^{-(x-a)^2/4y}, \quad f'_y = \left(-\frac{1}{2y^{3/2}} + \frac{(x-a)^2}{4y^{5/2}}\right) e^{-(x-a)^2/4y}.$$

Диференціали незалежних змінних збігаються з їхніми приростами: $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$. Тоді, як випливає із означення повного диференціала і теореми 13, повний диференціал функції $z = f(x; y)$ можна обчислити за формулою

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

Аналогічно повний диференціал функції трьох аргументів $u = f(x; y; z)$ обчислюється за формулою

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

Приклад.

Знайти du, якщо $u = x^{y^2 z}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z x^{y^2 z - 1}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2 z} \ln x 2yz, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^2 z} \ln x y^2.$$

Отже, $du = y^2 z x^{y^2 z - 1} dx + 2yz x^{y^2 z} \ln x dy + y^2 x^{y^2 z} \ln x dz$.

Приклад.

Знайти dz, якщо $z = \ln(x + \ln y)$.

$dz = z'_x dx + z'_y dy$, де

$$z'_x = \frac{1}{x + \ln y};$$

$$z'_y = \frac{1}{x + \ln y} \cdot \frac{1}{y}, \text{ отже,}$$

$$dz = \frac{1}{x + \ln y}\left(dx + \frac{1}{y} dy\right).$$

Геометричний зміст частинних похідних. Якщо функцію $z = f(x; y)$, що має частинні похідні в точці $(x_0;\ y_0)$, розглядати за умови $y = y_0$, то геометрично це означає, що поверхня $z = f(x; y)$ перетинається площиною $y = y_0$, паралельно координатній площині Oxz; у перерізі дістаємо лінію. Тоді $f'_x(x_0; y_0)$ є *кутовим коефіцієнтом дотичної* до *зазначеного перерізу* в точці $(x_0;\ y_0)$, тобто *тангенсом* кута нахилу цієї дотичної до *додатного напряму* осі Ox. Аналогічно, $f'_y(x_0;\ y_0)$ є кутовим коефіцієнтом дотичної, що проходить через точку $(x_0;\ y_0)$, до кривої, яка утворюється в результаті перетину поверхні $z = f(x;\ y)$ з площиною $x = x_0$.

15.3.3. Достатня умова диференційованості функції двох змінних у точці.

Для функції однієї змінної твердження щодо її диференційованості та існування похідної є рівносильними. У випадку функції двох змінних ми маємо інше: існування частинних похідних — необхідна умова диференційованості функції в точці, але не є достатньою умовою диференційованості: наприклад, для функції

$$z = f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x;y) \neq (0;\ 0) \\ 0, & (x;y) = (0;\ 0) \end{cases}$$

у точці (0; 0): $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$. Але ця функція розривна в точці (0; 0), а тому функція не може бути диференційованою в цій точці. Таким чином, для диференційованості функції $z = f(x;y)$ у точці $(x_0;y_0)$ недостатньо тільки існування частинних похідних: потрібно додатково вимагати неперервності частинних похідних, що випливає з поданої далі теореми.

Теорема 15.

Якщо функція $z = f(x;y)$ у деякому околі точки $(x_0;\ y_0)$ має неперервні частинні похідні, тоді вона диференційована в точці $(x_0;\ y_0)$.

Зауваження. Можна навести твердження про зв'язок між поняттями неперервності і диференційованості функції двох змінних у точці, аналогічні до тих, що виконуються для функції однієї змінної.

Теорема 16.

Якщо функція $z = f(x;y)$ диференційована в точці $(x_0;\ y_0)$, то вона неперервна в цій точці. Обернене твердження неправильне.

15.3.4. Диференціювання складної функції.

Теорема 17.

Нехай на множині D визначена складна функція $z = f(u;v)$, де $u = u(x;y)$, $v = v(x;y)$, і нехай функції $u(x;y)$, $v(x;y)$ мають у деякому околі точки $(x_0;y_0) \in D$ неперервні частинні похідні, а функція $z = f(u;v)$ — неперервні частинні похідні в деякому околі точки $(u_0;v_0)$, де $u_0 = u(x_0;y_0)$, $v_0 = v(x_0;y_0)$. Тоді складна функція $z = f(u(x,y);\ v(x,y))$ диференційована в точці $(x_0;\ y_0)$, причому

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

Приклад.

Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ для функції $z = \left(\sqrt[3]{xy}\right)^2 + \left(\sqrt[5]{\dfrac{x}{y}}\right)^3$.

Маємо $z = u^2 + v^3$, де $u = \sqrt[3]{xy}$, $v = \sqrt[5]{\dfrac{x}{y}}$.

Тоді $\dfrac{\partial z}{\partial u} = 2u$, $\dfrac{\partial z}{\partial v} = 3v^2$, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \sqrt[3]{y}\,\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \sqrt[3]{x}\,\dfrac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{y}} \cdot \dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{1}{5}\sqrt[5]{x} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[5]{y^6}}$.

Таким чином, $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2u}{3}\sqrt[3]{\frac{y}{x^2}}+\frac{3v^2}{5\sqrt[5]{x^4y}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2u}{3}\sqrt[3]{\frac{x}{y^2}}-\frac{3v^2}{5}\sqrt[5]{\frac{x}{y^6}}$, або після підставляння виразів u і v дістанемо $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{y^2}{x}}+\frac{3}{5}\sqrt[5]{\frac{1}{x^2y^3}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{x^2}{y}}-\frac{3}{5}\sqrt[5]{\frac{x^3}{y^8}}$.

15.3.5. Дотична площина та нормаль.

Якщо функція $z=f(x;\ y)$ диференційована в точці $(x_0;\ y_0)$, то виконується рівність

$$\Delta z\approx A\Delta x+B\Delta y,$$

або

$$f(x_0+\Delta x;\ y_0+\Delta y)-f(x_0;\ y_0)\approx f'_x(x_0;\ y_0)\Delta x+f'_y(x_0;\ y_0)\Delta y.$$

Узявши в цій наближеній рівності $a=x_0+\Delta x$, $b=y_0+\Delta y$, дістанемо:

$$f(a;\ b)\approx f(x_0;\ y_0)+f'_x(x_0;\ y_0)(a-x_0)+f'_y(x_0;\ y_0)(b-y_0). \quad (15.3)$$

На формулі (15.3) ґрунтується *алгоритм використання диференціала для наближених обчислень*. Крім того, якщо в рівності (15.3) взяти $a=x$, $b=y$, дістанемо

$$z=f(x;\ y)\approx f(x_0;\ y_0)+f'_y(x_0;\ y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0;\ y_0)(y-y_0).$$

Це рівняння *дотичної площини*, що проходить через точку $(x_0;\ y_0;\ z_0)$.

Якщо поверхню задано у просторі рівнянням $F(x;\ y;\ z)=0$, то рівняння дотичної площини до поверхні $F(x;\ y;\ z)=0$ в точці $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ має вигляд:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0, \qquad (15.4)$$

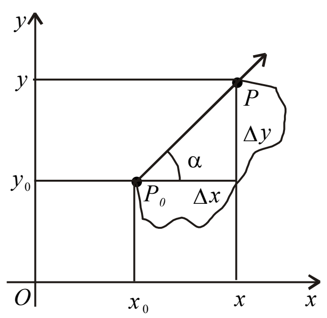
де $A=F'_x(x_0;\ y_0;\ z_0)$, $B=F'_y(x_0;\ y_0;\ z_0)$, $C=F'_z(x_0;\ y_0;\ z_0)$.

Нормаль до поверхні в точці $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ — це пряма, що проходить через точку $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ і перпендикулярна до дотичної площини. Отже, її рівняння

$$\frac{x-x_0}{F'_x}=\frac{y-y_0}{F'_y}=\frac{z-z_0}{F'_z}.$$

15.3.6. Похідна за напрямом. Градієнт.

Означення. Нехай функція $z=f(x;y)$ визначена в деякому околі точки $P_0(x_0;y_0)$; l — деякий промінь з початком у точці $P_0(x_0;y_0)$; $P(x;y)$ — точка на цьому промені, яка належить околу, що розглядається (рис.); Δl — довжина відрізка P_0P.



Границя $\lim\limits_{\Delta l\to 0}\frac{f(P)-f(P_0)}{\Delta l}$, якщо вона існує, називається *похідною функції* $z=f(x;y)$ *за напрямом*

$\vec{l}$ *у точці* P_0 і позначається $\dfrac{\partial z}{\partial l}$.

Зокрема,

$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ є похідна функції $z = f(x; y)$ за додатним напрямом осі Ox, а

$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ — похідна функції $z = f(x; y)$ за додатним напрямом осі Oy.

Похідна за напрямом $\dfrac{\partial z}{\partial \vec{l}}$ *характеризує швидкість змінювання функції* $z = f(x; y)$ *у точці* $P_0(x_0; y_0)$ *за напрямом* $\vec{l}$.

Теорема 18.

Якщо функція $z = f(x; y)$ ***має в точці*** $P_0(x_0; y_0)$ ***неперервні частинні похідні, тоді в цій точці існує похідна*** $\dfrac{\partial z}{\partial \vec{l}}$ ***за будь-яким напрямом*** $\vec{l} = (\cos\alpha; \cos\beta)$***, причому***

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}\right|_{P_0} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0} \cos\alpha + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0} \cos\beta$$

де $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0}$ ***і*** $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0}$ ***— значення частинних похідних функції*** $z = f(x; y)$ ***у точці*** $P_0(x_0; y_0)$***.***

Приклад.

Знайти похідну функції $u = x^2 + y^2$ у точці (1; 1) за напрямом $\vec{l} = (\cos 30^\circ;\ \cos 60^\circ)$.

Знайдемо та обчислимо частинні похідні в точці (1;1) функції $u = x^2 + y^2$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1;1)} = 2x|_{(1;1)} = 2, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1;1)} = 2y|_{(1;1)} = 2.$$

Тоді за формулою похідної за напрямом дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = 2\cos 30^\circ + 2\cos 60^\circ = 1 + \sqrt{3}.$$

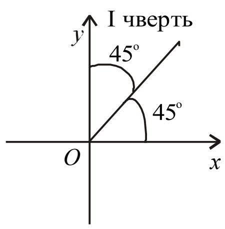
Приклад.

Знайти похідну функції $z = \mathrm{arctg}\, xy$ у точці $(1;1)$ за напрямом бісектриси першого координатного кута.

Знайдемо значення z'_x, z'_y у точці (1; 1):

$$z'_x\big|_{(1;\,1)} = \left.\frac{y}{1 + x^2 y^2}\right|_{(1;\,1)} \frac{1}{2};$$

$$z'_y\big|_{(1;\,1)} = \left.\frac{y}{1 + x^2 y^2}\right|_{(1;\,1)} = \frac{1}{2}.$$



Отже,

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{1}{2}\cos 45^{\circ}+\frac{1}{2}\cos 45^{\circ}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Означення. Вектор з координатами $\left(\frac{\partial z}{\partial x};\frac{\partial z}{\partial y}\right)$, який характеризує напрям максимального зростання функції $z=f(x;y)$ у точці $P_0(x_0;y_0)$, називається *градієнтом функції* $z=f(x;y)$ у цій точці і позначається $\overrightarrow{\text{grad}}\ z$ ($\vec{i},\vec{j}$ — одиничні орти):

$$\overrightarrow{\textbf{grad}}\ \boldsymbol{z}=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0}\vec{i}+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0}\vec{j}.$$

Аналогічно для функції трьох змінних $u=u(x;y;z)$ похідна за напрямом $\vec{l}=(\cos\alpha;\ \cos\beta;\cos\gamma)$ подається у вигляді:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_{P_0}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_0}\cos\alpha+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{P_0}\cos\beta+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{P_0}\cos\gamma.$$

Для функції трьох змінних $u=u(x;\ y;\ z)$ градієнт у точці $P_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ визначається так:

$$\overrightarrow{\textit{grad}}\ \boldsymbol{u}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_0}\vec{i}+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{P_0}\vec{j}+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{P_0}\vec{k},$$

де $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ — одиничні орти і $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_0},\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{P_0},\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{P_0}$ обчислені в точці $P_0(x_0;y_0;z_0)$.

Похідна за напрямом $\vec{l}$ функції $z=f(x;y)$ та градієнт пов'язані співвідношенням $\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}=\overrightarrow{\text{grad}}\ z\cdot\vec{l}$.

Приклад.

Знайти градієнт функції $u=4-x^2-2y^2-xy+z^2y^2$ у точці (1; 2; –1).
Знайдемо та обчислимо частинні похідні в точці (1; 2; –1):

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1;2;-1)}=(-2x-y)|_{(1;2;-1)}=-4,\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1;2;-1)}=\left(-4y-x+2z^2y\right)\Big|_{(1;2;-1)}=-2,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1;2;-1)}=2zy^2{}_{(1;2;-1)}=-8.$$

Тоді $\overrightarrow{\text{grad}}\ u=-4\vec{i}-2\vec{j}-8\vec{k}$.

Приклад.

Знайти точки, в яких модуль градієнта функції $z=\left(x^2+y^2\right)^{3/2}$ дорівнює 2.
Знайдемо z'_x і z'_y:

$$z'_x=\frac{3}{2}\cdot 2x\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}},\ z'_y=\frac{3}{2}\cdot 2y\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Модуль градієнта дорівнює 2 в деякій точці $(x_0;\ y_0)$:

$$|\text{grad z}|=2=\sqrt{9x_0^2\left(x_0^2+y_0^2\right)+9y_0^2\left(x_0^2+y_0^2\right)}=3\left(x_0^2+y_0^2\right).$$

Отже, $x_0^2+y_0^2=\frac{3}{2}$, тобто в точках кола з центром у точці (0; 0) і радіусом $\sqrt{\frac{3}{2}}$ модуль градієнта заданої функції дорівнює 2.

15.3.7. Частинні похідні і повні диференціали вищих порядків.

Нехай функція $z = f(x;y)$ має частинні похідні в усіх точках множини D. Візьмемо будь-яку точку $(x;y) \in D$; у цій точці існують частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, які залежать від x і y, тобто вони є функції двох змінних. Отже, можна ставити питання про знаходження їхніх частинних похідних. Якщо вони існують, то називаються *похідними другого порядку* і позначаються так:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \text{ або } z''_{xx},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \equiv \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \text{ або } z''_{yy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \text{ або } z''_{xy},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y \partial x} \equiv \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \text{ або } z''_{yx}.$$

Аналогічно визначаються і позначаються частинні похідні третього і вищих порядків, наприклад:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) \equiv \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) \equiv \frac{\partial^3 z}{\partial y \, \partial x^2}.$$

Означення. *Диференціалом другого порядку* від функції $z = f(x;y)$ називається диференціал від її повного диференціала першого порядку, тобто $d^2 z = d(dz)$.

Аналогічно визначаються диференціали третього і вищих порядків

$$d^3 z = d(d^2 z)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$d^n z = d(d^{n-1} z).$$

Приклад.

Знайти $d^2 z$, якщо $z = \sin x \cdot \sin y$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x \sin y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \sin x \cos y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin x \sin y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos x \cos y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\sin x \sin y,$$

$$d^2 z = -\sin x \sin y dx^2 + 2\cos x \cos y \, dx \, dy - \sin x \sin y dy^2.$$

Приклад.

Знайти $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ для функції $z = x^2 y^3$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6xy^2, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = 12xy.$$

Приклад.

Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функції $z = \sin(x^2 + y^2)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\cos(x^2 + y^2), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -4xy\sin(x^2 + y^2),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y\cos(x^2 + y^2), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -2xy\sin(x^2 + y^2).$$

У попередньому прикладі ми дістали, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$. Виявляється, що ця рівність виконується в багатьох випадках, що випливає з такої теореми.

Теорема 19.

Якщо функція $z = f(x;\, y)$ визначена в області D і в цій області існують перші похідні f'_x та f'_y, а та-кож другі мішані похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, які до того ж як функції від x і y неперервні в точці $(x_0; y_0) \in D$, то в цій точці $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

15.3.8. Похідна неявної функції.

Якщо існує неперервна функція однієї змінної $y = f(x)$, така що відповідні пари $(x;\, y)$ задовольняють умову $F(x;\, y) = 0$, тоді ця умова називається *неявною формою функції* $f(x)$, а сама функція $f(x)$ називається *неявною функцією*, яка задовольняє умову $F(x; y) = 0$.

Припустимо, що неперервна функція $y = f(x)$ задана в неявній формі $F(x, y) = 0$ і що $F'_y(x, y) \neq 0$. Похідну $\frac{dy}{dx}$ обчислюємо за формулою

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$$

$F'_y(x, y) \neq 0$

Приклад.

Знайти похідну від неявної функції $y^5 + 2x^2y^2 + xy - -42 = 0$ в точці $x = 1$, $y = 2$.

Маємо $F'_x = 4xy^2 + y$, $F'_y = 5y^4 + 4x^2y + x$, звідки

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4xy^2 + y}{5y^4 + 4x^2y + x}.$$

Для $x = 1$, $y = 2$ маємо $\frac{dy}{dx} = -\frac{18}{89}$.

Аналогічно частинні похідні функції двох незалежних змінних $z = f(x;\, y)$, яку задано за допомогою рівняння $F(x;\, y;\, z) = 0$, де $F(x;\, y;\, z)$ — диференційована функція змінних x, y, z, можуть бути обчислені за формулами

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \text{за умови, що } \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0 \qquad (15.5)$$

Приклад.

Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $z^3 - 3xyz = 5$.

У даному разі $F(x, y, z) = z^3 - 3xyz - 5$. Знайдемо $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -3yz, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -3xz, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 - 3xy.$$

Тоді за формулами (15.5)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{-3yz}{3z^2 - 3xy} = \frac{yz}{z^2 - xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{-3xz}{3z^2 - 3xy} = \frac{xz}{z^2 - xy}.$$

15.3.9. Економічний зміст частинних похідних.

Аналогічно поняттю еластичності функції однієї змінної ми можемо ввести поняття *частинних еластичностей функції двох змінних.*

Припустимо, що функції $x_1 = f_1(p_1; p_2)$ і $x_2 = f_2(p_1; p_2)$ виражають попит на товари A і B, який залежить від ціни на ці товари. Частинні еластичності попиту відносно цін p_1 і p_2 подаються у вигляді:

$$E_{11} = \frac{p_1}{x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial p_1}, \qquad E_{12} = \frac{p_2}{x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial p_2},$$

$$E_{21} = \frac{p_1}{x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial p_1}, \qquad E_{22} = \frac{p_2}{x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial p_2}.$$

Частинна еластичність E_{11} попиту на товар A відносно ціни товару A приблизно означає відсоток підвищення (або зниження) попиту на товар A, якщо ціна товару A зростає на 1%, а товару B залишається незмінною.

Частинна еластичність E_{12} попиту на товар A відносно ціни товару B приблизно означає відсоток підвищення (або зниження) попиту на товар A, якщо ціна товару B зростає на 1%, а товару A залишається без змін, і т. ін.

Приклад.

Припустимо, що функція попиту на товар A є

$$x_1 = f(p_1; p_2) = 25 - 2p_1 + p_2.$$

Знайти частинні показники еластичностей.

Маємо $E_{11} = \dfrac{-2p_1}{25 - 2p_1 + p_2}$, $E_{12} = \dfrac{p_2}{25 - 2p_1 + p_2}$.

Для $p_1 = 3$, $p_2 = 1$ дістаємо $E_{11} = -\dfrac{6}{20} = -0{,}3$.

Це означає, що коли ціна товару A зростає на 1%, а товару B залишається без змін, тоді попит на товар знижується на 0,3%. Далі, $E_{12} = \dfrac{1}{20} = 0{,}05$, тобто якщо ціна товару B зростає на 1% при незмінній ціні товару A, попит на товар A зростає приблизно на 0,05%.

15.3.10. Економічні задачі.

Задача 1. А. Виробнича функція Кобба—Дугласа має вигляд $Y = K^{\alpha}\text{const}\, L^{1-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Перевірте, чи відповідає виробнича функція припущенням:

1) перші похідні додатні;
2) похідні другого порядку від'ємні;
3) мішані похідні зникають.

В. Перевірити умови 1) — 3) для функції

$$Y = K^{\alpha} + L^{1-\alpha}.$$

Розв'язання. А. 1) $\dfrac{\partial Y}{\partial K} = \alpha K^{\alpha-1}\text{const}\, L^{1-\alpha}$,

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = (1-\alpha)K^{\alpha}L^{-\alpha}.$$

При $\alpha \in (0; 1)$ $\dfrac{\partial Y}{\partial K} > 0$, $\dfrac{\partial Y}{\partial L} > 0$.

2) $\dfrac{\partial^2 Y}{\partial K^2} = (\alpha^2 - \alpha)K^{\alpha-2}L^{1-\alpha}\text{const}$,

$\dfrac{\partial^2 Y}{\partial L^2} = (\alpha^2 - \alpha)K^{\alpha}L^{-\alpha-1}\text{const}$.

При $\alpha \in (0;\, 1)$ $\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} < 0$, $\frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} < 0$.

3) $\frac{\partial Y}{\partial K \partial L} = \frac{\partial Y}{\partial L \partial K} = (\alpha - \alpha^2) K^{\alpha-1} L^{-\alpha} \neq 0$.

Мішані похідні не зникають.

В. При $\alpha \in (0;\, 1)$ маємо: 1) $\frac{\partial Y}{\partial K} = LK^{\alpha-1} > 0$;

2) $\frac{\partial Y}{\partial L} = (1-\alpha) L^{-\alpha} < 0$,

$\frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} = -\alpha(1-\alpha) L^{-\alpha-1} < 0$;

3) $\frac{\partial^2 Y}{\partial K \partial L} = \frac{\partial^2 Y}{\partial L \partial K} = 0$.

Припущення 1) — 3) функція задовольняє.

Задача 2. Задано функцію прибутку

$$P = 6\left(K^{0,75} + L^{0,25}\right) - 1{,}5K - 0{,}6L.$$

Обчислити попит на робочу силу, інвестиційний попит і товарну пропозицію за умови, що початковий капітал K_0 дорівнює 16.

Розв'язання. Продиференціюємо функцію за N і K. Прирівнювання похідних до нуля дасть змогу визначити значення використаної робочої сили і капіталу:

$$\frac{\partial P}{\partial L} = 4{,}5L^{-0,25} - 1{,}5 = 0 \Rightarrow L = 81;$$

$$\frac{\partial P}{\partial K} = 3K^{-0,5} - 0{,}6 = 0 \Rightarrow K = 25.$$

Товарну пропозицію дістанемо підставлянням знайдених значень L і K на початок періоду у виробничу функцію.

Інвестиційний попит — це різниця між значеннями кінцевого і початкового капіталу:

$$Y = 81^{0,75} + 16^{0,5} \Rightarrow Y = 31;$$

$$I = K - K_0 = 25 - 16 = 9.$$

Задача 3. Нехай реальний грошовий попит народного господарства описується рівнянням $\frac{M}{P} = \exp\left(-\alpha\pi^e\right)$, де $\alpha > 0$, $\alpha = \text{const}$, π^e — очікуваний індекс інфляції. При цьому реальний грошовий обіг при зростаючій інфляції знижується, оскільки з інфляцією зростають можливі витрати грошей. Обчислити фактичний індекс інфляції $\pi = \left(\frac{dp}{dt}\right) : P$ (при цьому реальні прибутки передбачаються незмінними). Чи збігається він з темпом зростання грошової маси?

Вказівка. Логарифмічним диференціюванням за часом дістаємо:

$$d(\ln P)/\,dt = \pi.$$

Розв'язання. Прологарифмуємо рівняння грошового попиту:

$$\ln M - \ln P = -\alpha\pi^e.$$

Згідно з правилом логарифмічного диференціювання похідна за часом має вигляд

$$\frac{d(\ln M)}{dt} - \frac{d(\ln P)}{dt} = -\alpha \frac{d\pi^e}{dt}.$$

Підставивши $\frac{d(\ln P)}{dt} = \frac{d(\ln M)}{dt} + \alpha \frac{d\pi^e}{dt}$ в рівняння

$$\pi = \frac{d \ln P}{dt},$$

дістанемо:

$$\pi = \frac{d(\ln M)}{dt} + \alpha \frac{d\pi^e}{dt}.$$

Індекс підвищення цін лежить вище від індексу зростання грошової маси, якщо очікуваний індекс інфляції протягом часу зростає $\left(\frac{d\pi^e}{dt} > 0\right)$. У цьому випадку падає коефіцієнт утримання грошей і відповідно зростає швидкість обігу грошей, що має додатковий інфляційний вплив.

15.4. Дослідження функції двох змінних.
15.4.1. Екстремум функції двох змінних.

Означення. Нехай функція $z = f(x; y)$ визначена в деякому околі точки $(x_0;\ y_0)$ і неперервна в цій точці. Якщо для всіх точок $(x;\ y)$ цього околу виконується нерівність $f(x;\ y) \le f(x_0;\ y_0)$ $[f(x;\ y) \ge f(x_0;\ y_0)]$, тоді ця точка $(x_0,\ y_0)$ називається *точкою максимуму* (*мінімуму*) функції $z = f(x;\ y)$.

Точки максимуму й мінімуму називаються *точками екстремуму*.

Теорема 20 (необхідна умова екстремуму).

Якщо функція $z = f(x; y)$ має екстремум у точці (x_0, y_0), тоді в цій точці частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ або дорівнюють нулю, або хоча б одна з них не існує.

Теорема 21 (достатня умова екстремуму).

Нехай функція $z = f(x; y)$ має екстремум у точці $(x_0;\ y_0)$ неперервні частинні похідні першого й другого порядку, причому $f'_x(x_0; y_0) = 0$ та $f'_y(x_0; y_0) = 0$, а також $f''_{x^2}(x_0; y_0) = A$, $f''_{xy}(x_0; y_0) = B$, $f''_{y^2}(x_0; y_0) = C$. Якщо:

1) $AC - B^2 > 0$ і $A < 0$, тоді $(x_0;\ y_0)$ точка максимуму функції $z = f(x; y)$;

2) $AC - B^2 > 0$ і $A > 0$, тоді $(x_0;\ y_0)$ точка мінімуму функції $z = f(x; y)$;

3) $AC - B^2 < 0$, тоді в точці $(x_0; y_0)$ немає екстремуму.

4) $AC - B^2 = 0$, тоді потрібні додаткові дослідження.

Алгоритм дослідження функції $z = f(x; y)$ на екстремум

1. Знайти перші частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$.
2. Знайти стаціонарні точки, тобто точки, в яких $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.
3. Знайти частинні похідні другого порядку $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.
4. Обчислити значення частинних похідних другого порядку в стаціонарних точках.
5. Для кожної стаціонарної точки знайти $\Delta = AC - B^2$ і зробити висновки на базі теореми 5.21.

Приклад.

Розглянемо функцію $f(x; y) = 2x + 8y - x^2 - 2y^2$.

1. Знайдемо $\frac{\partial f}{\partial x} = 2 - 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 8 - 4y$.

2. Необхідна умова існування екстремуму полягає в тому, що $\begin{cases} 2-2x=0 \\ 8-4y=0 \end{cases}$. Розв’язком цієї системи є точка з координатами $x=1$, $y=1$. Таким чином, у точці (1; 2) функція може мати екстремум.

3. Знайдемо похідні другого порядку $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=0$, звідки дістаємо, що $\Delta = 8$.

4. Як випливає з пункту 5 алгоритму знаходження екстремуму — екстремум у точці (1; 2) існує. Це максимум, бо $A<0$.

Приклад.

Дослідити на екстремум функцію двох змінних:

$$z=\frac{x^2}{2a}+\frac{y^2}{2b} \quad (a>0,\, b>0).$$

Знайдемо z'_x і z'_y:

$$z'_x=\frac{x}{a},\ z'_y=\frac{y}{b}.$$

2. Необхідна умова екстремуму: $\begin{cases} \frac{x}{a}=0 \\ \frac{x}{b}=0 \end{cases}$.

Отже, (0; 0) — стаціонарна точка.
3. Знайдемо z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}:

$$z''_{xx}=\frac{1}{a},\ z''_{xy}=0,\ z''_{yy}=\frac{1}{b}.$$

4. У точці (0; 0)

$$a_{11}=\frac{1}{a},\ a_{12}=0,\ a_{22}=\frac{1}{b}.$$

$$\Delta=\frac{1}{ab}>0.$$

5. Точка (0;0) — мінімум, хоча це ясно і безпосередньо.

Зауваження. Ми навели певні аналітичні ознаки для знаходження екстремумів. Існують і більш строгі ознаки. Але в деяких випадках встановити, чи має функція мінімум або максимум, можна за умовою задачі.

Приклад.

Показати, що прямокутний паралелепіпед з найбільшою бічною поверхнею є куб.
Нехай $x,\ y,\ z$ — ребра паралелепіпеда.
Якщо V — об’єм, S — бічна поверхня паралелепіпеда, то

$$V=xyz,\ S=2(xy+yz+xz).$$

Серед змінних $x,\ y,\ z$ дві незалежні, нехай це будуть x і y, тоді

$$z=\frac{S-2xy}{2(x+y)}.$$

Отже, $V=\frac{xy(S-2y)}{2(x+y)}$,

$$V'_x=\frac{y^2}{2}\left[\frac{S-2x^2-4xy}{(x+y)^2}\right]=0,$$

$$V'_y = \frac{x^2}{2}\left[\frac{S - 2y^2 - 4xy}{(x+y)^2}\right] = 0.$$

Значення $x = 0$, $y = 0$, очевидно, не можуть дати максимуму. Отже,

$$S - 2x^2 - 4xy = 0,\;\; S - 2y^2 - 4xy = 0..$$

Розв'язавши ці рівняння разом із рівнянням

$$S - 2xy - 2yz + 2zx,$$

дістанемо $x = y = z = \sqrt{\frac{S}{6}}$.

Ці рівняння мають єдиний розв'язок, і ним визначається максимум.

Приклад.

На площині

$$x + 2y + 3z - 14 = 0$$

знайти точку, найменш віддалену від початку координат.

Відстань деякої точки $(x;\ y;\ z)$ на заданій площині від початку координат є

$$l = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Коли ця відстань досягає мінімуму, то

$$dl = \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 0,$$

тобто

$$xdx + ydy + zdz = 0.$$

Із рівняння площини маємо:

$$dx + 2dy + 3dz = 0.$$

Координати $x,\ y,\ z$ пов'язані тільки рівнянням площини. Отже, $dx,\ dy,\ dz$ можуть набувати будь-яких значень, що задовольняють останнє рівняння. Із цього рівняння знайдемо dz через dx і dy і підставимо в попереднє рівняння. Дістанемо

$$\left(x - \frac{1}{3}z\right)dx + \left(y - \frac{2}{3}z\right)dy = 0.$$

Якщо $x,\ y,\ z$ — координати точки мінімуму, то коефіцієнти при $dx,\ dy$ мають дорівнювати 0:

$$x - \frac{1}{3}z = 0,\;\; y - \frac{2}{3}z = 0.$$

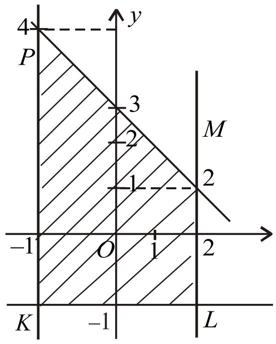
Отже, $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$, враховуючи, що точка $(x;\ y;\ z)$ лежить на площині $x + 2y + 3z - 14 = 0$. Матимемо, що точка $(1;\ 2;\ 3)$ дає шуканий мінімум.

15.4.2. Знаходження найбільшого та найменшого значень неперервної функції на замкненій обмеженій множині.

Як випливає з теореми 11, функція, що неперервна на замкненій обмеженій множині D, досягає на ній найбільшого та найменшого значень. Цих значень вона може набувати як у внутрішніх точках множини D (кожна така точка є точкою екстремуму функції, у цій точці перші частинні похідні дорівнюють нулю або не існують), так і на її межі, тобто необхідне спеціальне дослідження межових точок множини D.

Приклад.

Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в області, обмеженій прямими $x = -1$, $x = 2$, $y = -1$, $y = 3 - x$ (рис.).



1. Дослідимо поводження функції всередині області *KLMP*. Знайдемо перші частинні похідні функції $z = x^3 + y^3 - 3xy$: $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x$. Прирівнявши їх до нуля, дістанемо стаціонарні точки $O(0;\ 0)$ та $E(1;\ 1)$.

2. Дослідимо поводження функції на межі області. Відрізок KL має рівняння $y = -1$, $-1 \le x \le 2$. Підставивши $y = -1$ у задану функцію, дістанемо $z = x^3 - 1 + 3x$. Треба знайти найбільше та найменше значення цієї функції на відрізку $[-1;\ 2]$.

Маємо $z' = 3x^2 + 3 > 0$, отже, функція зростає і тому досягає найбільшого значення на кінцях відрізка, тобто в точках $K(-1;\ -1)$ і $L(2;\ -1)$.

Відрізок LM має рівняння $x = 2$, $-1 \le y \le 1$. Підставивши $x = 2$ у задану функцію, дістанемо функцію *z* як функцію від змінної *y*: $z = 8 + y^3 - 6y$. Маємо $z' = 3y^2 - 6 < 0$ на відрізку $[-1;\ 1]$.

Отже, функція $z = 8 + y^3 - 6y$ досягає найбільшого та найменшого значень на кінцях відрізка, тобто в точках $L(2;\ -1)$ і $M(2;\ 1)$.

Відрізок PM має рівняння $y = 3 - x$, $-1 \le x \le 2$. Підставивши $y = 3 - x$ у задану функцію, дістанемо функцію *z* як функцію від змінної *x*: $z = x^3 + (3 - x)^3 - 3x(x - 3)$, тобто $z = 27 - 36x + 12x^2$. Маємо $z' = 24x - 36$, звідки $z' = 0$ при $x = \frac{3}{2}$. Отже, на відрізку PM функція може досягати найбільшого та найменшого значень у точках $M(2;\ 1)$, $P(-1;\ 4)$ та $T\left(\frac{3}{2};\ \frac{3}{2}\right)$.

Відрізок KP має рівняння $x = -1$, $-1 \le y \le 4$. Підставивши $x = -1$ у задану функцію, дістанемо $z = -1 + y^3 + 3y$. Маємо $z' = 3y^2 + 3 > 0$, отже, функція досягає найбільшого та найменшого значень на кінцях відрізка, тобто в точках $K(-1;\ -1)$, $P(-1;\ 4)$.

Таким чином, функція $z = x^3 + y^2 - 3xy$ може досягти найбільшого та найменшого значень тільки в таких точках: $O(0;0)$, $E(1;\ 1)$, $K(-1;-1)$, $L(2;-1)$, $M(2;1)$, $P(-1;4)$, $T\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Знаходимо $f(0;0) = 0$, $f(1;1) = -1$, $f(-1;-1) = -5$, $f(2;-1) = 13$, $f(2;1) = 3$, $f(-1;4) = 75$, $f\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right) = 0$.

Отже, $z_{\min} = -5$, і це значення досягається в точці $(-1;-1)$, $z_{\max} = 75$, і це значення досягається в точці $(-1;4)$.

15.4.3. Умовний екстремум для функції двох змінних

Нехай на відкритій множині $D \subset R^2$ задано функції $u = f(x;y)$, $v = \varphi(x;y)$ і E — множина точок, що задовольняють рівняння

$$\varphi(x;\ y) = 0 \qquad (15.6)$$

Означення. Рівняння (15.6) називають *рівнянням зв'язку*. Точку $(x_0;y_0) \in E$ називають *точкою умовного строгого максимуму* функції $u = f(x;y)$ відносно рівняння зв'язку (15.6), якщо існує такий окіл точки $(x_0;\ y_0)$, для всіх точок якого $(x;y)\neq(x_0;y_0)$, що задовольняють рівняння зв'язку, справджується нерівність $f(x;\ y)< f(x_0;\ y_0)$.

Якщо за таких умов виконується $f(x;\ y)> f(x_0;\ y_0)$, тоді точку $(x_0;\ y_0)$ називають *точкою умовного строгого мінімуму* функції $u = f(x;\ y)$ при обмеженнях (15.6).

Аналогічно вводяться поняття нестрогого умовного екстремуму.

Точки умовного максимуму та мінімуму називають точками *умовного екстремуму*. Умовний екстремум іноді називають *відносним екстремумом*.

15.4.4. Метод Лагранжа знаходження точок умовного екстремуму

Нехай функції $u = f(x;y)$ та $v=\varphi(x;y)$ неперервно-диференційовані в околі $(x_0;y_0)$ і ранг матриці Якобі $\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\end{pmatrix}$ дорівнює 1 у точках, що задовольняють рівняння зв'язку.

Означення. Функцію $L(x;y)= f(x;y)+\lambda\varphi(x;y)$ називають *функцією Лагранжа*, параметр λ — *множником Лагранжа*.

Теорема 22. ***(Необхідна умова існування умовного екстремуму.)***

Для того щоб точка $(x_0;\ y_0)$ була точкою умовного екстремуму функції $u = f(x;\ y)$ при рівнянні зв'язку $\varphi(x;\ y)=0$, необхідно, щоб її координати при деяких значеннях λ задовольняли систему рівнянь:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L(x;y)}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial L(x;y)}{\partial y}=0\\ \varphi(x;y)=0.\end{cases}$$

Ці умови означають, що точка $(x_0,\ y_0)$ є стаціонарною точкою функції Лагранжа і її координати задовольняють рівняння зв'язку.

Теорема 23. ***(Достатня умова умовного екстремуму.)***

Нехай функції $u = f(x;\ y)$, $v=\varphi(x;\ y)$ подвійно неперервно-диференційовані в околі точки $(x_0;\ y_0)$ і нехай у цій точці виконуються необхідні умови існування екстремуму функції $f(x;\ y)$ при обмеженні $\varphi(x;\ y)=0$. Тоді якщо за умови

$$d\varphi(x_0,y_0)=\frac{\partial\varphi(x_0,y_0)}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi(x_0,y_0)}{\partial y}dy=0,\ dx^2+dy^2>0 \quad (15.7)$$

другий диференціал $d^2L(x_0;y_0)$ функції Лагранжа є додатно (від'ємно) визначеною квадратичною формою, то функція $u = f(x;\ y)$ у точці $(x_0;\ y_0)$ має умовний строгий мінімум (максимум).

Якщо за умов (15.7) другий диференціал $d^2L(x_0;\ y_0)$ є невизначеною квадратичною формою, то в точці $(x_0;\ y_0)$ умовного екстремуму немає.

Приклад.

Знайти умовний екстремум функції $u = f(x;y)= \ =6-5x-4y$ відносно рівняння зв'язку $\varphi(x;y)=x^2-y^2-9=0$.

Функції f і φ подвійно неперервно-диференційовані. Матриця Якобі в даному випадку має вигляд $(2x-2y)$, і її ранг дорівнює 1 в усіх точках, що задовольняють рівняння зв'язку. Отже, можна скористатися методом Лагранжа. Запишемо функцію Лагранжа

$$L(x;y)=6-5x-4y+\lambda\left(x^2-y^2-9\right).$$

Згідно з необхідними умовами дістанемо систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = -5 + 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = -4 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 - y^2 - 9 = 0, \end{cases}$$

з якої знаходимо $x = -5$, $y = 4$ при $\lambda = -\frac{1}{2}$; $x = 5$, $y = -4$ при $\lambda = \frac{1}{2}$. Таким чином, функція f може мати умовний екстремум тільки в двох точках (–5; 4) і (5; – 4).

Обчислимо другий диференціал функції Лагранжа: $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = -2\lambda$, тоді $d^2L = 2\lambda\left(dx^2 - 2y^2\right)$.

Знайдемо перший диференціал функції $\varphi(x;\ y)$.

У точках (–5; 4) і (5; – 4) диференціали dx і dy пов'язані рівністю: $5dx + 4dy = 0$, $dy = -\frac{5}{4}dx$. При виконанні цієї умови другий диференціал функції Лагранжа в точці (–5; 4) є додатно визначеною квадратичною формою $d^2L = \frac{9}{16}dx^2$, а в точці (5; –4) — від'ємно визначеною формою $d^2L = -\frac{9}{16}dx^2$.

Отже, функція f у точці (–5; 4) має умовний мінімум $u(-5;\ 4) = 15$, а в точці (5; –4) — умовний максимум $u(5;\ -4) = -3$.

15.4.5. Метод найменших квадратів.

1. Лінійна залежність $y = a + bx$.

Нехай x_1, x_2, ... , x_n — послідовність значень незалежної змінної, а y_1, y_2, ... , y_n — послідовність відповідних значень залежної змінної.

Необхідно дібрати пряму, яка «найліпше» виражала б залежність між x_i і y_i $\left(i = \overline{1, n}\right)$. Це означає, що відхилення фактичних значень функції від дібраної прямої мають бути мінімальними.

Нехай $\hat{y} = a + bx$ є рівняння цієї прямої. Маємо $\hat{y}_1 = a + bx_1$, $\hat{y}_2 = a + bx_2$, ... , $\hat{y}_n = a + bx_n$.

Відхилення від фактичних значень функцій становлять:

$$y_i - \hat{y}_i = y_i - (a + bx_i) = y_i - a - bx_i \quad \left(i = \overline{1, n}\right).$$

Ці відхилення мають бути додатними або від'ємними, тому пряма добирається так, щоб сума квадратів відхилень

$$f = (y_1 - a - bx_1)^2 + (y_2 - a - bx_2)^2 + .. + (y_n - a - bx_n)^2$$

була найменшою. Отже, треба визначити a і b так, щоб функція f досягала мінімуму. Необхідна умова існування мінімуму полягає в тому, що $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial b} = 0$.

Маємо $(y_i - a - bx_i)^2 = y_i^2 + a^2 + b^2x_i^2 - 2ay_i + 2abx_i - 2bx_iy_i$, отже,

$$f = \sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + na^2 + b^2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \\ - 2a\sum_{i=1}^{n} y_i + 2ab\sum_{i=1}^{n} x_i - 2b\sum_{i=1}^{n} x_iy_i.$$

Обчислимо

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 2na - 2\sum_{i=1}^{n} y_i + 2b\sum_{i=1}^{n} x_i = 0,$$

звідки

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = na + b\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ і } \frac{\partial f}{\partial b} = 2b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2a\sum_{i=1}^{n} x_i - 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0,$$

звідки

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 .$$

Таким чином, ми дістанемо два рівняння з двома змінними — a і b:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = na + b\sum_{i=1}^{n} x_i , \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 .$$

Розв’язування цих двох рівнянь дає значення a і b, які визначають пряму, що найліпше відбиває хід змінювання функції.

Приклад.

Виробництво цементу x_i (у сотнях тонн) і витрати електроенергії y_i (на 1 тонну цементу за рік) за визначений період роботи цементної промисловості характеризуються значеннями, які зведено в такій таблиці:

i	x_i	y_i
1	8	80
2	10	72
3	12	65
4	13,5	70
5	14	68

Знайти пряму, яка відбиває залежність y від x.

Складаємо таку таблицю:

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
1	8	80	640	64
2	10	72	720	100
3	12	65	780	144
4	13,5	70	945	182,25
5	14	68	952	196
Сума	57,5	355	4037	686,25

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 57{,}5, \qquad \sum_{i=1}^{5} y_i = 355, \qquad \sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 4037, \ \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 686{,}25 .$$

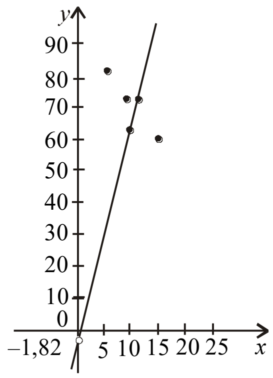
Отже, необхідна умова існування мінімуму суми квадратів відхилень подається так:

$$\begin{cases} 5a + 57{,}5b = 355 \\ 57{,}5a + 686{,}25b = 4037 \end{cases}$$

$$a=\frac{\begin{vmatrix}355 & 57{,}5\\ 4037 & 686{,}25\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5 & 57{,}5\\ 57{,}5 & 686{,}25\end{vmatrix}}=11{,}93,$$

$$b=\frac{\begin{vmatrix}5 & 355\\ 57{,}5 & 4037\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5 & 57{,}5\\ 57{,}5 & 686{,}25\end{vmatrix}}=-1{,}82\,.$$

Таким чином, шукана пряма є $y=11{,}93x-1{,}82$ (рис.).



2. Параболічна залежність $y=a_0+a_1x+a_2x^2$.

Нехай $x_1,\ x_2,\ldots,x_n$ — послідовність значень незалежної змінної *x*, а $y_1,\ y_2,\ldots,y_n$ — послідовність відповідних значень залежної змінної.

Точки $(x_1;\ y_1)$, $(x_2;\ y_2),\ldots,(x_n;\ y_n)$ утворюють деяку лінію. Нехай необхідно дібрати параболу, яка б «найліпше» виражала залежність *y* від *x*. При цьому термін «найліпше» означає, що сума квадратів відхилень дійсних значень функції від дібраної параболи мінімальна.

Нехай

$$\hat{y}=a_0+a_1x+a_2x^2$$

є дібрана парабола. Тоді

$$\hat{y}_1=a_0+a_1x_1+a_2x_1^2,$$
$$\hat{y}_2=a_0+a_1x_2+a_2x_2^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\hat{y}_n=a_0+a_1x_n+a_2x_n^2.$$

Параболу дібрано найліпшим чином, якщо сума квадратів відхилень

$$f(a_0,\ a_1,\ a_2)=\left(a_0+a_1x_1+a_2x_1^2-y_1\right)^2+\left(a_0+a_1x_2+a_2x_2^2-y_2\right)^2+$$
$$+\ldots+\left(a_0+a_1x_n+a_2x_n^2-y_n\right)^2$$

мінімальна.

Необхідні умови існування мінімуму функції подаються залежностями:

$$\frac{\partial f}{\partial a_0}=0\,,\ \frac{\partial f}{\partial a_1}=0\,,\ \frac{\partial f}{\partial a_n}=0\,.$$

Маємо

$$f(a_0,\ a_1,\ a_2)=\sum_{i=1}^{n}\left(a_0+a_1x_i+a_2x_i^2-y_i\right)^2,$$

звідки

$$\frac{\partial f}{\partial a_0} = \sum_{i=1}^{n} 2\left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i\right) \cdot 1 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial a_1} = \sum_{i=1}^{n} 2\left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i\right) \cdot x_i = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial a_2} = \sum_{i=1}^{n} 2\left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i\right) \cdot x_i^2 = 0.$$

Ділячи обидві частини рівнянь на 2 і розбиваючи суми на доданки, дістаємо

$$\begin{cases} n a_0 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему, знаходимо невідомі коефіцієнти a_0, a_1, a_2.