МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

«ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

Кафедра кібербезпеки та програмного забезпечення

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять за темою

«ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ»

з дисципліні **«ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА»**

для здобувачів першого (бакалаврського) рівня освіти

спеціальностей 122 Комп'ютерні науки; 125 Кібербезпека

Одеса 2023

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

«ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

Кафедра кібербезпеки та програмного забезпечення

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять за темою

«ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ»

з дисципліні **«ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА»**

для здобувачів першого (бакалаврського) рівня освіти

спеціальностей 122 Комп'ютерні науки; 125 Кібербезпека

Затверджено
на засіданні кафедри КБПЗ
Протокол № 1 від 26.08.2022р.

Одеса 2023

Методичні вказівки до практичних занять за темою «Основи математичної логіки» з дисципліні «Дискретна математика» для здобувачів першого (бакалаврського) рівня освіти спеціальностей 122 Комп'ютерні науки, 125 Кібербезпека / Укл. А.А. Кобозєва, І.І.Бобок, Г.В.Шаповалов. ── Одеса: Одеська політехніка, 2023. ── 21 с.

Укладачі: А.А. Кобозєва, д.т.н., профессор

І.І.Бобок, д.т.н., доцент

Г.В.Шаповалов, к.т.н.

ЗМІСТ

Вступ

Математична логіка є одним з розділів дисципліни «Дискретна математика», що відповідно до плану навчального процесу входить у цикл обов'язкових дисциплін для студентів галузі знань 12 - Інформаційні технології спеціальностей 122 - Комп'ютерні науки, 125 - Кібербезпека.

Математична логіка надзвичайно важлива для студентів зазначених спеціальностей, оскільки сприяє розвитку здатності приймати правильні рішення. Математика в цілому, зокрема математична логіка, є базою ефективного розв'язування завдань програмування, адміністрування баз даних, захисту і передачі інформації, розпізнавання образів, розробки програмного забезпечення тощо, сприяє формуванню у майбутніх фахівців математичної та інформаційної культури, розвитку логічного та абстрактного мислення, інтелектуальної підготовки до вирішення практичних задач, пов'язаних з професійною діяльністю.

Дані методичні вказівки призначені для практичних занять по темах «Рівносильні формули алгебри логіки» і «Досконалі нормальні форми логічних формул», розглянуто питання побудови досконалих диз'юнктивної й кон'юнктивной нормальних форм шляхом рівносильних перетворень логічних формул, а також з використанням таблиць істинності.

1. Рівносильні логічні формули

Дві логічні формули U_1 и U_2 називаються *рівносильними,* якщо при будь-яких значеннях X_1, X_2, …, X_n, де X_1, X_2, …, X_n - це сукупність всіх змінних висловлень, що входять в U_1 і U_2, ці формули приймають однакові значення. Наприклад, $\overline{\overline{A}}$ рівносильна A, $A \& \overline{A} \vee B$ рівносильна B.

Рівносильність логічних формул може бути встановлена шляхом побудови таблиць істинності для кожної з них: якщо таблиці містять однакові значення в стовпцях для результуючих формул при однакових значеннях всіх вхідних у формули змінних, то формули рівносильні.

Приклади рівносильних формул:

$\overline{\overline{X}}$	рівносильна	X	(1)
$X \& Y$	рівносильна	$Y \& X$	(2)
$(X \& Y) \& Z$	рівносильна	$X \& (Y \& Z)$	(3)
$X \vee Y$	рівносильна	$Y \vee X$	(4)
$(X \vee Y) \vee Z$	рівносильна	$X \vee (Y \vee Z)$	(5)
$X \& (Y \vee Z)$	рівносильна	$X \& Y \vee X \& Z$	(6)
$X \vee (Y \& Z)$	рівносильна	$(X \vee Y) \& (X \vee Z)$	(7)

$X \vee (X \& Y)$	рівносильна	X	(8)
$X \& (X \vee Y)$	рівносильна	X	(9)
$\overline{X \vee Y}$	рівносильна	$\overline{X} \& \overline{Y}$	(10)
$\overline{X \& Y}$	рівносильна	$\overline{X} \vee \overline{Y}$	(11)
$X \vee X$	рівносильна	X	(12)
$X \vee \overline{X}$	рівносильна	1	(13)
$X \& X$	рівносильна	X	(14)
$X \& \overline{X}$	рівносильна	0	(15)
$X \& 1$	рівносильна	X	(16)
$X \vee 0$	рівносильна	X	(17)

Формули (8) і (9) аналогічні законам поглинання в теорії множин і є широко використовуваними й дуже корисними при проведенні рівносильних перетворень логічних формул. Закони (8) і (9) можуть бути узагальнені в такий спосіб:

$$X \vee (X \& F) = X,$$

$$X \& (X \vee F) = X,$$

де F - довільна логічна формула.

Формули (10) і (11) є своєрідними аналогами для законів де-Моргана в теорії множин: $\overline{X \vee Y} = \overline{X} \& \overline{Y}, \ \overline{X \& Y} = \overline{X} \vee \overline{Y}$.

Кожна з наведених формул у лівій частині розглядає заперечення над операцією (кон'юнкцією або диз'юнкцією), виконуваної над двома операндами. Використовуючи принцип математичної індукції (див. Методичні вказівки для самостійної роботи з теми «Теорія графів» по дисципліні «Дискретна математика» для студентів спеціальностей 122 - Інформаційні технології й комп'ютерні науки, 125 - Кібербезпека), можна довести більше загальний вид рівносильностей (10), (11), а саме:

$$\overline{X_1 \vee X_2 \vee \ldots \vee X_n} = \overline{X}_1 \& \overline{X}_2 \& \ldots \& \overline{X}_n,$$

$$\overline{X_1 \& X_2 \& \ldots \& X_n} = \overline{X}_1 \vee \overline{X}_2 \vee \ldots \vee \overline{X}_n,$$

які корисні при виконанні рівносильних перетворень логічних формул.

Формули (6) і (7) називаються відповідно першим й другим дистрибутивними законами й відіграють ключову роль при побудові нормальних форм логічних формул.

Розглянемо перший дистрибутивний закон

$$X \& (Y \vee Z) = X \& Y \vee X \& Z$$

більш докладно:

$$X \& \left(Y \vee Z\right) = \left[\textit{враховуючи } (2)\right] = \left(Y \vee Z\right) \& X \tag{18}$$

$$X \& Y \vee X \& Z = \left[\textit{враховуючи } (2)\right] = Y \& X \vee Z \& X \tag{19}$$

Дорівнюючи праві частини (18) і (19), отримуємо рівносильний вид першого дистрибутивного закону:

$$\left(Y \vee Z\right) \& X = Y \& X \vee Z \& X$$

Абсолютно аналогічно, з використанням рівносильності (4), отримуємо рівносильний вид другого дистрибутивного закону:

$$Y \& Z \vee X = \left(Y \vee X\right) \& \left(Z \vee X\right) \tag{20}$$

Дистрибутивні закони (6) і (7) можна узагальнити в такий спосіб:

$$F \& \left(Y \vee Z\right) = F \& Y \vee F \& Z \tag{21}$$

$$\left(Y \vee Z\right) \& F = Y \& F \vee Z \& F \tag{22}$$

$$F \vee Y \& Z = \left(F \vee Y\right) \& \left(F \vee Z\right) \tag{23}$$

$$Y \& Z \vee F = \left(Y \vee F\right) \& \left(Z \vee F\right) \tag{24}$$

де F - довільна логічна формула.

Розглянемо логічну формулу: $X \& \left(Y \vee Z \vee T\right)$, яка містить у другому множнику не два (як у першому дистрибутивному законі (6)), а три доданки. Для неї мають місце рівносильні перетворення:

$$X\ \&\left(Y\vee Z\vee T\right)=X\ \&\left(Y\vee\left(Z\vee T\right)\right)=\left[\begin{array}{l}\textit{Розглядаємо другий множник}\\ \left(Y\vee\left(Z\vee T\right)\right)\textit{ як суму двох доданків}\\ Y\ i\ \left(Z\vee T\right)\textit{, використовуємо формулу}(6)\end{array}\right]=$$

$$=X\ \&Y\vee X\ \&\left(Z\vee T\right)=\left[\begin{array}{l}\textit{Для другого доданку } X\ \&\left(Z\vee T\right)\\ \textit{використовуємо формулу } (6)\end{array}\right]=$$

$$=X\ \&Y\vee X\ \&Z\vee X\ \&T.$$

Отриманий результат можна узагальнити:

$$X\ \&\left(Y_1\vee Y_2\vee\ldots\vee Y_n\right)=X\ \&Y_1\vee X\ \&Y_2\vee\ldots\vee X\ \&Y_n. \qquad (25)$$

Аналогічне узагальнення має місце для другого дистрибутивного закону:

$$X\vee Y_1\ \&Y_2\ \&\ldots\&Y_n=\left(X\vee Y_1\right)\&\left(X\vee Y_2\right)\&\ldots\&\left(X\vee Y_n\right). \qquad (26)$$

Розглянемо приклади на застосування узагальнених дистрибутивних законів.

Приклад 1. Побудувати рівносильну формулу для логічної формули $\left(X\to Y\right)\&(X\vee Y)$, використовуючи (узагальнені) дистрибутивні закони.

$$\left(X\to Y\right)\&(X\vee Y)=\left[\begin{array}{l}\textit{скористаємося законом } (21)\textit{, який є}\\ \textit{узагальненням } 1-\textit{го дистрибутивного закону}\end{array}\right]=$$

$$=\left(X\to Y\right)\&\ X\vee\left(X\to Y\right)\&Y.$$

Приклад 2. Побудувати рівносильну формулу для логічної формули $\left(Z\vee T\right)\&(X\vee Y)$, використовуючи (узагальнені) дистрибутивні закони.

$$\left(Z\vee T\right)\&(X\vee Y)\overset{\textit{формула } (22)}{=}\left(Z\vee T\right)\&\ X\vee\left(Z\vee T\right)\&Y=\left[\begin{array}{l}\textit{Для кожного з}\\ \textit{доданків}\left(Z\vee T\right)\&\ X\\ i\ \left(Z\vee T\right)\&Y\\ \textit{скористаємося першим}\\ \textit{дистрибутивним}\\ \textit{законом}\end{array}\right]=$$

$$=Z\ \&\ X\vee T\ \&\ X\vee Z\ \&Y\vee T\ \&Y.$$

Логичні операції $\&, \vee, \to, \leftrightarrow, \overline{}$ не є незалежними:

$$X \to Y = \overline{X} \vee Y \tag{27}$$

$$X \leftrightarrow Y = (X \to Y)\&(Y \to X) = (\overline{X} \vee Y)\&(\overline{Y} \vee X) \tag{28}$$

Таким чином, для запису будь-якої логічної формули можна завжди скористатися тільки трьома логічними операціями: $\&, \vee, \overline{}$.

Кількість операцій, через які виражаються всі інші, можна зменшити до двох. Це пари: $\&, \overline{}$ чи $\vee, \overline{}$. Дійсно, з огляду на рівносильні формули (1) - (17), отримуємо:

$$X \vee Y \overset{\textit{формула}\ (1)}{=} \overline{\overline{X}} \vee \overline{\overline{Y}} \overset{\textit{формула}\ (11)}{=} \overline{\overline{X} \& \overline{Y}},$$

тобто диз'юнкція виражається через заперечення й кон'юнкцію, а тому всі основні логічні операції можна виразити тільки через $\&, \overline{}$.

Аналогічно, оскільки має місце

$$X \& Y \overset{\textit{формула}\ (1)}{=} \overline{\overline{X}} \& \overline{\overline{Y}} \overset{\textit{формула}\ (10)}{=} \overline{\overline{X} \vee \overline{Y}},$$

тобто кон'юнкція виражається через заперечення й диз'юнкцію, то всі основні логічні операції можна виразити тільки через $\vee, \overline{}$.

2. Нормальні форми

Елементарним добутком називається кон'юнкція (добуток) змінних і/або їхніх заперечень. При цьому вхідні в елементарний добуток змінні або їхні заперечення будуть називатися множниками.

Приклад 3. $\overline{X} \& X$, $\overline{X} \& Y \& Z \& \overline{T}$. Для останньої формули $\overline{X}, Y, Z, \overline{T}$ - множники.

Елементарною сумою називається диз'юнкція (сума) змінних і/або їхніх заперечень. При цьому вхідні в елементарну суму змінні або їхні заперечення будуть називатися доданками.

Приклад 4. $\overline{X} \vee X$, $\overline{X} \vee Y \vee Z$. Для останньої формули $\overline{X}, Y, Z$ - доданки.

Логічна формула, рівносильна даній формулі й представлена сумою елементарних добутків, називається *диз'юнктивною нормальною формою* (ДНФ) даної формули.

Для кожної логічної формули існує ДНФ, що будується із використанням І дистрибутивного закону.

Логічна формула, рівносильна даній формулі й представлена добутком елементарних сум, називається *кон'юнктивною нормальною формою* (КНФ) даної формули.

Для кожної логічної формули існує КНФ, що будується із використанням II дистрибутивного закону.

Приклад 5. Побудувати ДНФ і КНФ для логічної формули: $X \to Y \to Z$. Логічна формула, що розглядається, містить дві імплікації. Оскільки їхні пріоритети рівні, то операції виконуються в порядку їхнього проходження зліва направо, тобто $(X \to Y) \to Z$ (дужки у формулі поставлені для того, щоб показати, що імплікація $X \to Y$ виконується першою).

При побудові нормальних форм, у першу чергу, необхідно, виконуючи рівносильні перетворення, виразити всі присутні у формулі логічні операції через основні: $\&, \vee, \overline{}$, які і фігурують в ДНФ і КНФ.

$$(X \to Y) \to Z = \left[\begin{array}{l} \textit{Для імплікації, заключенням якої є } Z, \\ \textit{посилкою є } X \to Y. \textit{ Для будь-якої імплікації} \\ \textit{ПОСИЛКА} \to \textit{ЗАКЛЮЧЕННЯ вона замінюється} \\ \textit{по формулі } (27): \overline{\textit{ПОСИЛКА}} \vee \textit{ЗАКЛЮЧЕННЯ} \end{array}\right] =$$

$$= \overline{X \to Y} \vee Z = [\textit{Імплікація } X \to Y \textit{ розкривається по формулі } (27)] =$$

$$= \overline{\overline{X} \vee Y} \vee Z$$

Заперечення в ДНФ і КНФ може стосуватися тільки окремого змінного висловлення, тому частину $\overline{\overline{X} \vee Y}$ останньої формули $\overline{\overline{X} \vee Y} \vee Z$ перетворимо, з використанням (10):

$$\overline{\overline{X} \vee Y} \vee Z = \left(X \,\&\, \overline{Y}\right) \vee Z .$$

Дужки в останній формулі в частині $\left(X \,\&\, \overline{Y}\right)$ були поставлені для того, щоб уникнути помилки при можливому неврахуванні пріоритету логічних операцій: оскільки у формулі $\overline{\overline{X} \vee Y} \vee Z$ операція $\overline{\overline{X} \vee Y}$ повинна була бути виконана до операції диз'юнкції зі змінним висловленням Z, то і її рівносильна частина повинна бути виконана до диз'юнкції зі змінним висловленням Z. Однак, з урахуванням пріоритету логічних операцій, дужки у формулі $\left(X \,\&\, \overline{Y}\right) \vee Z$ можуть бути усунені, оскільки:

$$\left(X \,\&\, \overline{Y}\right) \vee Z = X \,\&\, \overline{Y} \vee Z . \qquad (29)$$

Остання формула (29) є ДНФ вхідної логічної формули $X \to Y \to Z$, оскільки є рівносильною для неї й представляє із себе суму двох елементарних добутків: $X \& \overline{Y}$ і Z.

Для того, щоб отримати КНФ, застосуємо до (29) другий дистрибутивний закон у вигляді (20):

$$X \& \overline{Y} \vee Z = (X \vee Z) \& (\overline{Y} \vee Z).$$

Приклад 6. Побудувати ДНФ і КНФ для логічної формули: $X \to (Y \leftrightarrow \overline{Z})$.

Виконуючи рівносильні перетворення, виразимо всі присутні у формулі логічні операції через основні: $\&, \vee, \overline{\ \ }$:

$$X \to (Y \leftrightarrow \overline{Z}) \overset{\text{Применяем формулу (27) для импликации}}{=} \overline{X} \vee (Y \leftrightarrow \overline{Z}) =$$

$$\overset{\text{Применяем формулу (28)}}{=} \overline{X} \vee (\overline{Y} \vee \overline{Z}) \& (Z \vee Y) \overset{\substack{\text{Раскрываем скобки, используя} \\ \text{первый дистрибутивный закон в виде (21)}}}{=}$$

$$= \overline{X} \vee \overline{Y} \& Z \vee \overline{Y} \& Y \vee \overline{Z} \& Z \vee \overline{Z} \& Y.$$

У результаті для заданої логічної формули отримана ДНФ: $\overline{X} \vee \overline{Y} \& Z \vee \overline{Y} \& Y \vee \overline{Z} \& Z \vee \overline{Z} \& Y$. З огляду на, що отримана ДНФ містить тотожно хибні доданки $\overline{Y} \& Y, \overline{Z} \& Z$ (формула (15)), скориставшись формулою (17), можемо отримати ДНФ в іншому виді:

$$\overline{X} \vee \overline{Y} \& Z \vee \overline{Y} \& Y \vee \overline{Z} \& Z \vee \overline{Z} \& Y = \overline{X} \vee \overline{Y} \& Z \vee 0 \vee 0 \vee \overline{Z} \& Y =$$

$$= \overline{X} \vee \overline{Y} \& Z \vee \overline{Z} \& Y$$

Таким чином, формула $\overline{X} \vee \overline{Y} \& Z \vee \overline{Z} \& Y$ також є ДНФ для $X \to (Y \leftrightarrow \overline{Z})$.

Скористаємося останнім видом ДНФ для отримання КНФ, застосовуючи для цього різні варіанти другого дистрибутивного закону.

$$\overline{X}\vee\overline{Y}\,\&\,Z\vee\overline{Z}\,\&\,Y=\begin{bmatrix}\textit{Застосуємо узагальнення другого дистрибу}-\\ \textit{тивного закону до суми }\overline{Y}\,\&\,Z\vee\overline{Z}\,\&\,Y\end{bmatrix}=$$

$$=\overline{X}\vee\left(\overline{Y}\vee\overline{Z}\right)\&\left(\overline{Y}\vee Y\right)\&\left(Z\vee\overline{Z}\right)\&\left(Z\vee Y\right)=\left[\textit{Скористаємося формулою }(26)\right]=$$

$$=\left(\overline{X}\vee\overline{Y}\vee\overline{Z}\right)\&\left(\overline{X}\vee\overline{Y}\vee Y\right)\&\left(\overline{X}\vee Z\vee\overline{Z}\right)\&\left(\overline{X}\vee Z\vee Y\right)$$

Таким чином, КНФ для вхідної формули має вигляд: $\left(\overline{X}\vee\overline{Y}\vee\overline{Z}\right)\&\left(\overline{X}\vee\overline{Y}\vee Y\right)\&\left(\overline{X}\vee Z\vee\overline{Z}\right)\&\left(\overline{X}\vee Z\vee Y\right)$. Застосовуючи до неї рівносильні перетворення, можна отримати КНФ в іншому виді:

$$\left(\overline{X}\vee\overline{Y}\vee\overline{Z}\right)\&\left(\overline{X}\vee\underbrace{\overline{Y}\vee Y}_{=1\,(\textit{формула}\,(13))}\right)\&\left(\overline{X}\vee\underbrace{Z\vee\overline{Z}}_{=1\,(\textit{формула}\,(13))}\right)\&\left(\overline{X}\vee Z\vee Y\right)=$$

$$=\left(\overline{X}\vee\overline{Y}\vee\overline{Z}\right)\&\left(\underbrace{\overline{X}\vee 1}_{=1}\right)\&\left(\underbrace{\overline{X}\vee 1}_{=1}\right)\&\left(\overline{X}\vee Z\vee Y\right)=$$

$$=\left(\overline{X}\vee\overline{Y}\vee\overline{Z}\right)\&1\&1\&\left(\overline{X}\vee Z\vee Y\right)\overset{\textit{формула}(16)}{=}\left(\overline{X}\vee\overline{Y}\vee\overline{Z}\right)\&\left(\overline{X}\vee Z\vee Y\right)$$

Таким чином, як КНФ, так і ДНФ для логічної формули визначаються неоднозначно. Більше того, їх можна побудувати нескінченно багато, використовуючи рівносильні перетворення. Дійсно, нехай для логічної формули F побудоава деяка КНФ K, тоді формула $K\,\&1=K\,\&\left(X\vee\overline{X}\right)$, будучи рівносильною для K (в силу формул (16) і (13)), а тому і для F також є КНФ для F. За аналогією ми можемо отримати нескінченно багато різних КНФ. Аналогічно з ДНФ.

3. Досконалі нормальні форми

Нехай логічна формула $U\left(X_1,X_2,\ldots,X_n\right)$ не є тотожно хибною.

Визначення. Досконалою диз'юнктивною нормальною формою (ДДНФ) формули $U\left(X_1,X_2,\ldots,X_n\right)$, яка містить n різних змінних $X_1,X_2,\ldots,X_n$, називається така ДНФ, що має наступні властивості:

1. У ній немає двох однакових доданків;
2. Жодний доданок не містить двох однакових множників;
3. Ніякий доданок не містить змінної разом з її запереченням;

4. У кожному доданку міститься як множник або змінна X_i, або її заперечення $\overline{X}_i$, де $i = 1,2,\ldots,n$.

Нехай дана довільна формула $U(X_1, X_2,\ldots,X_n)$. Для отримання її СДНФ необхідно:

- привести її спочатку до якої-небудь ДНФ;
- якщо який-небудь доданок, що позначимо через B, взагалі не містить змінну X_i, то замінити його рівносильною формулою: $X_i \& B \vee \overline{X}_i \& B$, оскільки

$$B = 1 \& B = \left(X_i \vee \overline{X}_i\right) \& B = X_i \& B \vee \overline{X}_i \& B. \qquad (30)$$

Таким чином, умова 4 буде виконана;
- при наявності однакових доданків, видалити всі з них, крім одного. При наявності в доданках однакових множників, видалити всі з них, крім одного.
- Видалити всі ті доданки, які містять якусь змінну із її запереченням, тому що такі доданки являють собою тотожно хибні вирази. Результат – ДДНФ.

Якщо $U(X_1, X_2,\ldots,X_n)$ - тотожно хибна формула, то в процесі побудови ДДНФ всі доданкі будуть видалені, ми не отримаємо ДДНФ.

ДДНФ для логічної формули визначається однозначно.

Приклад 7. Для формули $X \vee Y \& \left(X \vee \overline{Y}\right)$ побудувати ДДНФ.

Спочатку побудуємо якусь ДНФ для заданої формули:

$$X \vee Y \& \left(X \vee \overline{Y}\right) \overset{(6)}{=} X \vee Y \& X \vee Y \& \overline{Y} = \begin{bmatrix} \text{Оскільки задана формула} \\ \text{залежить від двох змінних } X \text{ і } Y, \\ \text{а в першому доданку відсутня } Y, \\ \text{то замінимо перший доданок } X \text{ на} \\ X \& Y \vee X \& \overline{Y} \end{bmatrix} =$$

$$= X \& Y \vee X \& \overline{Y} \vee Y \& X \vee Y \& \overline{Y} = \begin{bmatrix} \text{перший } X \& Y \text{ і третій } Y \& X \\ \text{доданки співпадають, тому} \\ \text{залишим з них тільки один} \end{bmatrix} =$$

$$= X \,\&\, Y \vee X \,\&\, \overline{Y} \vee Y \,\&\, \overline{Y} = \left[\begin{array}{l} \textit{останній доданок містить змінну} \\ \textit{і її заперечення, тому цей доданок} \\ \textit{видаляється} \end{array} \right] =$$

$$= X \,\&\, Y \vee X \,\&\, \overline{Y}$$

ДДНФ для заданої формули має вид: $X \,\&\, Y \vee X \,\&\, \overline{Y}$.

Аналогічним чином визначається досконала кон'юнктивна нормальна форма (ДКНФ) логічної формули.

Нехай логічна формула $U(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ не є тотожно істинною.

Визначення. Досконалою кон'юнктивною нормальною формою (ДКНФ) формули $U(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, яка містить *n* різних змінних $X_1, X_2, \ldots, X_n$, називається така КНФ, яка має такі властивості:

1. В ній немає двох однакових множників;
2. Жоден множник не містить двох однакових доданків;
3. Ніякий множник не містить змінної разом з її запереченням;
4. У кожному множнику міститься в якості доданка або змінна X_i, або її заперечення $\overline{X}_i$, де $i = 1, 2, \ldots, n$.

Нехай дана довільна формула $U(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Для отримання її ДКНФ необхідно:

- привести її спочатку до якої-небудь КНФ;
- якщо який-небудь множник, який позначимо через B, взагалі не містить змінну X_i, то замінити його рівносильною формулою: $(X_i \vee B) \,\&\, (\overline{X}_i \vee B)$, оскільки

$$B = 0 \vee B = (X_i \,\&\, \overline{X}_i) \vee B = (X_i \vee B) \,\&\, (\overline{X}_i \vee B). \qquad (31)$$

  Таким чином, умова 4 буде виконана;
- при наявності однакових множників, видалити всі з них, крім одного. При наявності у множнику однакових доданків, видалити всі з них, крім одного.
- Видалити всі ті множники, які містять якусь змінну із її запереченням, тому що такі множники є тотожно істинними.Результат – ДКНФ.

Приклад 8. Раніше при розгляді прикладу 5 для формули: $X \to Y \to Z$, що залежить від 3-х змінних висловлень X, Y, Z, були отримані ДНФ $X \,\&\, \overline{Y} \vee Z$ і КНФ $(X \vee Z) \,\&\, (\overline{Y} \vee Z)$. Побудуємо для $X \to Y \to Z$ ДДНФ і ДКНФ.

Для побудови ДДНФ скористаємося вже наявною ДНФ $X\&\overline{Y}\vee Z$. Ця ДНФ містить 2 доданки. Кожний з цих доданків в якості множників має обов'язково містити X чи $\overline{X}$, Y чи $\overline{Y}$, Z чи $\overline{Z}$. Але при цьому в першому доданку $X\&\overline{Y}$ відсутня змінна Z, а в другому доданку Z відсутні X,Y. Для введення потрібних множників в доданки скористаємося правилом (30):

$$X\&\overline{Y}\vee Z = X\&\overline{Y}\&1\vee Z\&1\&1 = X\&\overline{Y}\&\left(Z\vee\overline{Z}\right)\vee Z\&\left(X\vee\overline{X}\right)\&\left(Y\vee\overline{Y}\right)=$$

$$=\left[\textit{Скористаємося узагальненнями першого дистрибутивного закону}\right]=$$

$$= X\&\overline{Y}\&Z\vee X\&\overline{Y}\&\overline{Z}\vee\left(Z\&X\vee Z\&\overline{X}\right)\&\left(Y\vee\overline{Y}\right)=$$

$$= X\&\overline{Y}\&Z\vee X\&\overline{Y}\&\overline{Z}\vee Z\&X\&Y\vee Z\&\overline{X}\&Y\vee Z\&X\&\overline{Y}\vee Z\&\overline{X}\&\overline{Y}$$

Таким чином, умова 4 визначення ДДНФ виконана.

У кожному доданку останньої формули множники розташуємо в порядку, що відповідає X,Y,Z для того, щоб зручніше було вибирати з них такі, що збігаються:

$$X\&\overline{Y}\&Z\vee X\&\overline{Y}\&\overline{Z}\vee X\&Y\&Z\vee\overline{X}\&Y\&Z\vee X\&\overline{Y}\&Z\vee\overline{X}\&\overline{Y}\&Z.$$

В останній формулі однаковими є перши і п'ятий доданки: $X\&\overline{Y}\&Z$. Відповідно до пункту 1 визначення ДДНФ, залишаємо тільки один доданок $X\&\overline{Y}\&Z$:

$$X\&\overline{Y}\&Z\vee X\&\overline{Y}\&\overline{Z}\vee X\&Y\&Z\vee\overline{X}\&Y\&Z\vee\overline{X}\&\overline{Y}\&Z. \qquad (32)$$

Жодний доданок в (32) не містить однакових множників. Жодний доданок не містить змінну із її запереченням. Таким чином, всі пункти визначення ДДНФ виконані, формула (32) – ДДНФ для $X\to Y\to Z$.

Для побудови ДКНФ скористаємося вже наявною КНФ $\left(X\vee Z\right)\&\left(\overline{Y}\vee Z\right)$. Ця КНФ містить 2 множника. Кожен з цих множників в якості доданків повинен обов'язково містити X чи $\overline{X}$, Y чи $\overline{Y}$, Z чи $\overline{Z}$. Але при цьому в першому множнику $\left(X\vee Z\right)$ відсутня змінна Y, а в другому множнику $\left(\overline{Y}\vee Z\right)$ вісутня X. Для введення потрібних доданків в множники скористаємося правилом (31):

$$(X \vee Z)\&(\overline{Y} \vee Z) = (X \vee Z \vee 0)\&(\overline{Y} \vee Z \vee 0) = (X \vee Z \vee Y \& \overline{Y})\&(\overline{Y} \vee Z \vee X \& \overline{X}) =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \textit{В кожному множнику} (X \vee Z \vee Y \& \overline{Y}) \; \textit{і} \; (\overline{Y} \vee Z \vee X \& \overline{X}) \; \textit{скористаємося} \\ \textit{узагальненнями другого дистрибутивного закону} \end{array}\right] =$$

$$= (X \vee Z \vee Y)\&(X \vee Z \vee \overline{Y})\&(\overline{Y} \vee Z \vee X)\&(\overline{Y} \vee Z \vee \overline{X}) =$$

$$= (X \vee Y \vee Z)\&(X \vee \overline{Y} \vee Z)\&(X \vee \overline{Y} \vee Z)\&(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z).$$

Таким чином, умова 4 визначення ДКНФ виконана.

В останній формулі однаковими є другий і третій множники: $(X \vee \overline{Y} \vee Z)$. Відповідно до пункту 1 визначення ДКНФ, залишаємо тільки один множник $(X \vee \overline{Y} \vee Z)$:

$$(X \vee Y \vee Z)\&(X \vee \overline{Y} \vee Z)\&(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z). \qquad (33)$$

Жоден множник в (33) не містить однакових доданків. Жоден множник не містить змінну із її запереченням. Таким чином, всі пункти визначення ДКНФ виконані, формула (33) – ДКНФ для $X \to Y \to Z$.

Приклад 9. Раніше при розгляді прикладу 6 для формули: $X \to (Y \leftrightarrow \overline{Z})$, що залежить від 3-х змінних висловлень X, Y, Z, були отримані ДНФ $\overline{X} \vee \overline{Y} \& Z \vee \overline{Z} \& Y$ і КНФ $(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z})\&(\overline{X} \vee Z \vee Y)$. Щодо КНФ очевидно, що вона є ДКНФ. Побудуємо для $X \to (Y \leftrightarrow \overline{Z})$ ДДНФ.

Для побудови ДДНФ скористаємося вже наявною ДНФ $\overline{X} \vee \overline{Y} \& Z \vee \overline{Z} \& Y$. Ця ДНФ містить 3 доданки. Кожний з цих доданків в якості множників повинен обов'язково містити X чи $\overline{X}$, Y чи $\overline{Y}$, Z чи $\overline{Z}$. Але при цьому в першому доданку $\overline{X}$ відсутні змінні Y, Z , в другому доданку $\overline{Y} \& Z$ відсутня X , і в третьому доданку $\overline{Z} \& Y$ відсутня X . Для введення потрібних множників в доданки скористаємося правилом (30):

$$\overline{X} \vee \overline{Y} \& Z \vee \overline{Z} \& Y = \overline{X} \& (Y \vee \overline{Y})\&(Z \vee \overline{Z}) \vee (X \vee \overline{X})\&\overline{Y} \& Z \vee (X \vee \overline{X})\&\overline{Z} \& Y =$$

$$== \overline{X} \& Y \& Z \vee \overline{X} \& \overline{Y} \& Z \vee \overline{X} \& Y \& \overline{Z} \vee \overline{X} \& \overline{Y} \& \overline{Z} \vee X \& \overline{Y} \& Z \vee \overline{X} \& \overline{Y} \& Z \vee$$

$$\vee X \& Y \& \overline{Z} \vee \overline{X} \& Y \& \overline{Z}.$$

Таким чином, умова 4 визначення СДНФ виконана.

В останній формулі однаковими є другий та шостий доданки: $\overline{X}\,\&\,\overline{Y}\,\&\,Z$, а також третій і восьмий: $\overline{X}\,\&\,Y\,\&\,\overline{Z}$. Відповідно до пункту 1 визначення ДДНФ, залишаємо по одному з однакових доданків:

$$\overline{X}\,\&\,Y\,\&\,Z \vee \overline{X}\,\&\,Y\,\&\,\overline{Z} \vee \overline{X}\,\&\,\overline{Y}\,\&\,\overline{Z} \vee X\,\&\,\overline{Y}\,\&\,Z \vee \overline{X}\,\&\,\overline{Y}\,\&\,Z \vee \vee X\,\&\,Y\,\&\,\overline{Z}. \quad (34)$$

Жодний доданок в (34) не містить однакових множників. Жодний доданок не містить змінну із її запереченням. Таким чином, всі пункти визначення ДДНФ виконані, формула (34) – ДДНФ для $X \to \left(Y \leftrightarrow \overline{Z}\right)$.

Приклад 10. Побудуємо ДКНФ для логічної формули $\overline{\left(A \to B\right)\&\,A} \to B$.

Побудову ДКНФ почнемо з отримання якоїсь КНФ, виражаючи присутні в даній формулі імплікації через основні логічні операції: кон'юнкцію, диз'юнкцію, заперечення:

$$\overline{\left(A \to B\right)\&\,A} \to B = \left[\begin{array}{l} \textit{Застосуємо формулу } (27), \textit{враховуючи,} \\ \textit{що для другої по порядку імплікації} \\ \overline{\left(A \to B\right)\&\,A} \to B \textit{ посилкою є } \overline{\left(A \to B\right)\&\,A} \end{array}\right] =$$

$$= \overline{\left(\overline{A} \vee B\right)\&\,A} \vee B = \left[\begin{array}{l} \textit{В нормальних формах заперечення може стосуватися} \\ \textit{тільки змінного висловлення, тому} \\ \textit{скористаємося формулами } (10), (11) \end{array}\right] =$$

$$= \overline{\left(\overline{A} \vee B\right)} \vee \overline{A} \vee B = \overline{\overline{A}}\,\&\,\overline{B} \vee \overline{A} \vee B = A\,\&\,\overline{B} \vee \overline{A} \vee B = \left[\begin{array}{l} \textit{Скористаємося} \\ \textit{узагальненням другого} \\ \textit{дистрибутивного} \\ \textit{закону } (24) \end{array}\right] =$$

$$= \left(A \vee \overline{A} \vee B\right)\&\left(\overline{B} \vee \overline{A} \vee B\right)$$

Таким чином, КНФ для вхідної формули має вигляд:

$$\left(A \vee \overline{A} \vee B\right)\&\left(\overline{B} \vee \overline{A} \vee B\right). \quad (35)$$

Для того, щоб з КНФ отримати ДКНФ, необхідно, дотримуючись визначення ДКНФ (п.3: ніякий множник не містить змінну разом з її запереченням), перетворити отриману КНФ:

$$\Big(\underbrace{A\vee\overline{A}}_{=1}\vee B\Big)\&\Big(\underbrace{\overline{B}\vee B}_{=1}\vee\overline{A}\Big)=\underbrace{(1\vee B)}_{=1}\&\underbrace{(1\vee\overline{A})}_{=1}=1,$$

Таким чином, ДКНФ для заданої формули $(A\to B)\&A\to B$ не існує, оскільки ця формула є тотожно істинною, і в процесі побудови ДКНФ все множники були замінені на тотожні одиниці. У тотожній істинності вхідної формули можна переконатися, по-перше, використовуючи таблицю істинності:

A	B	$A\to B$	$(A\to B)\&A$	$(A\to B)\&A\to B$
0	0	1	0	**1**
0	1	1	0	**1**
1	0	0	0	**1**
1	1	1	1	**1**

а, по-друге, аналізуючи отриману КНФ (35) для неї: $(A\vee\overline{A}\vee B)\&(\overline{B}\vee\overline{A}\vee B)$. Кожен множник КНФ містить в якості доданків деяку змінну із її запереченням: в першому множнику $(A\vee\overline{A}\vee B)$ присутні доданки A і $\overline{A}$, в другому множнику $(\overline{B}\vee\overline{A}\vee B)$ - доданки B і $\overline{B}$, а це, виходячи з твердження 1 лекції 7 конспекту лекцій з дискретної математики, говорить про тотожну істинність вхідної формули.

Приклад 11. Для формули $\overline{B}\vee\overline{A}\leftrightarrow\overline{AC}$ побудувати ДДНФ, ДКНФ. У запропонованій побудові не будуть явно вказуватися ті логічні правила і формули, які використовуються при логічних рівносильних перетвореннях вхідної формули. Для кращого розуміння і запам'ятовування розглянутого матеріалу рекомендується самостійно обгрунтовувати кожне перетворення, посилаючись на відповідну формулу.

Почнемо з побудови ДКНФ, першим кроком чого є отримання КНФ:

$$\overline{B}\vee\overline{A}\leftrightarrow\overline{AC}=(\overline{B}\vee\overline{A}\to\overline{AC})\&(\overline{AC}\to\overline{B}\vee\overline{A})=(\overline{\overline{B}\vee\overline{A}}\vee\overline{AC})\&(\overline{\overline{AC}}\vee\overline{B}\vee\overline{A})=$$

$$=(B\&A\vee\overline{A}\vee\overline{C})\&(AC\vee\overline{B}\vee\overline{A})=$$

$$=(B\vee\overline{A}\vee\overline{C})\&(A\vee\overline{A}\vee\overline{C})\&(A\vee\overline{B}\vee\overline{A})\&(C\vee\overline{B}\vee\overline{A})$$

Перетворимо КНФ на ДКНФ:

$$\left(B\vee\overline{A}\vee\overline{C}\right)\&\left(A\vee\overline{A}\vee\overline{C}\right)\&\left(A\vee\overline{B}\vee\overline{A}\right)\&\left(C\vee\overline{B}\vee\overline{A}\right)=$$

$$=\left(B\vee\overline{A}\vee\overline{C}\right)\&\left(C\vee\overline{B}\vee\overline{A}\right).$$

Таким чином, ДКНФ для поданої формули має вид:

$$\left(B\vee\overline{A}\vee\overline{C}\right)\&\left(C\vee\overline{B}\vee\overline{A}\right).$$

Скористаємося ДКНФ для отримання ДНФ:

$$\left(B\vee\overline{A}\vee\overline{C}\right)\&\left(C\vee\overline{B}\vee\overline{A}\right)=BC\vee\overline{A}C\vee\overline{C}C\vee B\overline{B}\vee\overline{A}\overline{B}\vee\overline{C}\overline{B}\vee B\overline{A}\vee\overline{A}\overline{A}\vee\overline{C}\overline{A}.$$

З отриманої ДНФ шляхом рівносильних логічних перетворень отримаємо ДДНФ:

$$BC\vee\overline{A}C\vee\overline{C}C\vee B\overline{B}\vee\overline{A}\overline{B}\vee\overline{C}\overline{B}\vee B\overline{A}\vee\overline{A}\overline{A}\vee\overline{C}\overline{A}=$$

$$=BC\vee\overline{A}C\vee\overline{A}\overline{B}\vee\overline{C}\overline{B}\vee B\overline{A}\vee\overline{A}\vee\overline{C}\overline{A}=BC\vee\overline{C}\overline{B}\vee\overline{A}=$$

$$=\left(A\vee\overline{A}\right)BC\vee\left(A\vee\overline{A}\right)\overline{C}\overline{B}\vee\overline{A}\left(B\vee\overline{B}\right)\left(C\vee\overline{C}\right)=$$

$$=ABC\vee\overline{A}BC\vee A\overline{B}\overline{C}\vee\overline{A}\overline{B}\overline{C}\vee\overline{A}BC\vee\overline{A}\overline{B}C\vee\overline{A}B\overline{C}\vee\overline{A}\overline{B}\overline{C}=$$

$$=ABC\vee\overline{A}BC\vee A\overline{B}\overline{C}\vee\overline{A}\overline{B}\overline{C}\vee\overline{A}\overline{B}C\vee\overline{A}B\overline{C}.$$

Таким чином, ДДНФ для поданої формули має вид:

$$ABC\vee\overline{A}BC\vee A\overline{B}\overline{C}\vee\overline{A}\overline{B}\overline{C}\vee\overline{A}\overline{B}C\vee\overline{A}B\overline{C}.$$

Досконалі нормальні форми можна отримати і іншим шляхом: використовуючи таблицю істинності відповідної логічної формули. Розглянемо це питання детально.

Нехай $F\left(X_1,X_2,...,X_n\right)$ - довільна функція, що залежить від n змінних $X_1,X_2,...,X_n$, причому й змінні, й сама функція приймають тільки два значення - ІСТИНА й НЕПРАВДА (1 і 0).

Таку функцію можна представити за допомогою логічної формули:

$$F(1,1,\dots,1)\,\&\,X_1\,\&\,X_2\,\&\dots\&\,X_n \vee F(1,\dots,1,0)\,\&\,X_1\,\&\dots\&\,X_{n-1}\,\&\,\overline{X}_n \vee$$

$$\vee F(1,\dots,1,0,0)\,\&\,X_1\,\&\dots\&\,\overline{X}_{n-1}\,\&\,\overline{X}_n \vee\dots\vee F(0,0,\dots,0)\,\&\,\overline{X}_1\,\&\dots\&\,\overline{X}_{n-1}\,\&\,\overline{X}_n \qquad (36)$$

Кожний доданок суми (36) - це добуток, у якому перший множник є значенням функції $F\left(X_1, X_2,\dots, X_n\right)$ при деяких певних значеннях змінних $X_1, X_2,\dots, X_n$, інші ж множники є змінними $X_i, i=1,2,\dots,n,$ або запереченнями цих змінних. Під знаком заперечення знаходяться ті й тільки ті змінні, які в першому множнику мають значення НЕПРАВДА. Розглянута сума (36) містить усілякі доданки такого виду. Формула (36) визначає функцію $F\left(X_1, X_2,\dots, X_n\right)$. Дійсно, дамо певні значення змінним, наприклад, $X_1=0,$ $X_2=1,\dots,$ $X_n=1$. Значення поданої функції – це $F(0,1,\dots,1)$. Розглянемо доданок з (36):

$$F(0,1,\dots,1)\,\&\,\overline{X}_1\,\&\,X_2\,\&\dots\&\,X_n \qquad (37)$$

У цьому доданку всі множники, крім, можливо, першого, мають значення ІСТИНА. Тоді значення $F(0,1,\dots,1)\,\&\,\overline{X}_1\,\&\,X_2\,\&\dots\&\,X_n$ буде співпадати зі значенням $F(0,1,\dots,1)$. У всякому іншому доданку знаки заперечення над змінними розподіляються інакше, ніж в (37), але тоді в добуток множником увійде або НЕПРАВДА без заперечення, або ІСТИНА із запереченням, а значить такий добуток буде дорівнювати НЕПРАВДі. Таким чином, при розглянутій підстановці в змінні значень ІСТИНА й НЕПРАВДА всі доданки, крім одного - (37), мають значення НЕПРАВДА, а доданок (37) - значення $F(0,1,\dots,1)$. Тоді вся сума (36) має значення $F(0,1,\dots,1)$. Очевидно, що формула (36) визначає функцію $F\left(X_1, X_2,\dots, X_n\right)$ у вигляді ДДНФ.

Приклад. Нехай функція $F\left(A,B,C\right)$ визначена в вигляді таблиці:

A	B	C	$F\left(A,B,C\right)$	Відповідний доданок у логічній формулі
0	0	0	0	$F(Л,Л,Л)\&\overline{A}\&\overline{B}\&\overline{C}=0\&\overline{A}\&\overline{B}\&\overline{C}=0$
0	0	1	0	$F(Л,Л,И)\&\overline{A}\&\overline{B}\&C=0\&\overline{A}\&\overline{B}\&C=0$
0	1	0	1	$F(Л,И,Л)\&\overline{A}\&B\&\overline{C}=1\&\overline{A}\&B\&\overline{C}=\overline{A}\&B\&\overline{C}$
0	1	1	0	$F(Л,И,И)\&\overline{A}\&B\&C=0\&\overline{A}\&B\&C=0$
1	0	0	1	$F(И,Л,Л)\&A\&\overline{B}\&\overline{C}=1\&A\&\overline{B}\&\overline{C}=A\&\overline{B}\&\overline{C}$
1	0	1	1	$F(И,Л,И)\&A\&\overline{B}\&C=1\&A\&\overline{B}\&C=A\&\overline{B}\&C$
1	1	0	1	$F(И,И,Л)\&A\&B\&\overline{C}=1\&A\&B\&\overline{C}=A\&B\&\overline{C}$
1	1	1	0	$F(И,И,И)\&A\&B\&C=0\&A\&B\&C=0$

У логічну формулу внесемо лише ненульові доданки:

$$F\left(A,B,C\right)=\overline{A}\&B\&\overline{C}\vee A\&\overline{B}\&\overline{C}\vee A\&\overline{B}\&C\vee A\&B\&\overline{C}.$$

Очевидно, що отримана формула є ДДНФ, а при її побудові враховуються лише ті елементарні добутки, що відповідають ненульовим значенням логічної функції.

Для логічної функції $F\left(X_1, X_2,..., X_n\right)$ існує і інша форма її представлення у вигляді логічної формули:

$$\left(F(1,1,...,1)\vee \overline{X}_1 \vee \overline{X}_2 \vee ... \vee \overline{X}_n\right)\&\left(F(1,...,1,0)\vee \overline{X}_1 \vee ... \vee \overline{X}_{n-1} \vee X_n\right)\&$$
$$\&\left(F(1,...,1,0,0)\vee \overline{X}_1 \vee ... \vee \overline{X}_{n-2} \vee X_{n-1} \vee X_n\right)\&...\&\left(F(0,0,...,0)\vee X_1 \vee ... \vee X_{n-1} \vee X_n\right) \tag{38}$$

Кожний множник добутку (38) - це сума, у якій перший доданок є значенням функції $F\left(X_1, X_2,..., X_n\right)$ при деяких певних значеннях змінних $X_1, X_2,..., X_n$, інші ж доданки є змінними $X_i, i=1,2,...,n,$ або запереченнями цих змінних. Під знаком заперечення знаходяться ті й тільки ті змінні, які в першому множнику мають значення ІСТИНА. Розглянутий добуток (38) містить усілякі множники такого виду. Формула (38) також визначає функцію $F\left(X_1, X_2,..., X_n\right)$. Дійсно, дамо певні значення змінним, наприклад, $X_1 = 0,\ \ X_2 = 1, \ldots,\ \ X_n = 1$. Значення поданої функції – це $F(0,1,...,1)$. Розглянемо множник з (38):

$$F(0,1,...,1)\vee X_1 \vee \overline{X}_2 \vee ... \vee \overline{X}_n \tag{39}$$

У цьому множнику всі доданки, крім, можливо, першого, мають значення НЕПРАВДА. Тоді значення $F(0,1,...,1)\vee X_1 \vee \overline{X}_2 \vee ... \vee \overline{X}_n$ буде співпадати зі значенням $F(0,1,...,1)$. У всякому іншому множнику знаки заперечення над змінними розподіляються інакше, ніж в (39), але тоді в суму доданком увійде або ІСТИНА без заперечення, або НЕПРАВДА із запереченням, а значить така сума буде дорівнювати ІСТИНІ. Таким чином, при розглянутій підстановці в змінні значень ІСТИНА й НЕПРАВДА всі множники, крім одного - (39), мають значення ІСТИНА, а множник (39) - значення $F(0,1,...,1)$. Тоді весь добуток (38) має значення $F(0,1,...,1)$. Очевидно, що формула (38) визначає функцію $F\left(X_1, X_2,..., X_n\right)$ у вигляді ДКНФ.

Приклад. Нехай функція $F\left(A, B, C\right)$ визначена в вигляді таблиці, що фігурувала в попередньому прикладі:

A	B	C	$F\left(A,B,C\right)$	Відповідний множник у логічній формулі
0	0	0	0	$F(0,0,0)\vee A\vee B\vee C = 0\vee A\vee B\vee C = A\vee B\vee C$
0	0	1	0	$F(0,0,1)\vee A\vee B\vee \overline{C} = 0\vee A\vee B\vee \overline{C} = A\vee B\vee \overline{C}$
0	1	0	1	$F(0,1,0)\vee A\vee \overline{B}\vee C = 1\vee A\vee \overline{B}\vee C = 1$
0	1	1	0	$F(0,1,1)\vee A\vee \overline{B}\vee \overline{C} = 0\vee A\vee \overline{B}\vee \overline{C} = A\vee \overline{B}\vee \overline{C}$

1	0	0	1	$F(1{,}0{,}0)\vee\overline{A}\vee B\vee C=1\vee\overline{A}\vee B\vee C=1$
1	0	1	1	$F(1{,}0{,}1)\vee\overline{A}\vee B\vee\overline{C}=1\vee\overline{A}\vee B\vee\overline{C}=1$
1	1	0	1	$F(1{,}1{,}0)\vee\overline{A}\vee\overline{B}\vee C=1\vee\overline{A}\vee\overline{B}\vee C=1$
1	1	1	0	$F(1{,}1{,}1)\vee\overline{A}\vee\overline{B}\vee\overline{C}=0\vee\overline{A}\vee\overline{B}\vee\overline{C}=\overline{A}\vee\overline{B}\vee\overline{C}$

У логічну формулу внесемо лише множники, що не дорівнюють 1:

$$F(A,B,C)=(A\vee B\vee C)\&\left(A\vee B\vee\overline{C}\right)\&\left(A\vee\overline{B}\vee\overline{C}\right)\&\left(\overline{A}\vee\overline{B}\vee\overline{C}\right).$$

Очевидно, що отримана формула є ДКНФ, а при її побудові враховуються лише ті елементарні суми, що відповідають нульовим значенням логічної функції.

Додаткові завдання для самостійної роботи

Шляхом рівносильних логічних перетворень знайти ДДНФ і ДКНФ наступних логічних формул або пояснити відсутність досконалих нормальних форм (правильність отриманих ДДНФ, ДКНФ звірити з наведеними відповідями).

1. $\overline{B}\&\overline{A}\to AB$
   Відповіді: ДКНФ: $A\vee B$,
   ДДНФ: $AB\vee A\overline{B}\vee\overline{A}B$.
2. $\overline{B}\&A\leftrightarrow\overline{A}B$
   Відповіді: ДКНФ: $\left(\overline{A}\vee B\right)\left(A\vee\overline{B}\right)$,
   ДДНФ: $AB\vee\overline{A}\overline{B}$.
3. $AB\to\overline{A}\to B$
   Відповіді: ДКНФ: $(A\vee B)\left(\overline{A}\vee B\right)$,
   ДДНФ: $AB\vee\overline{A}B$
4. $ABC\leftrightarrow\overline{A\vee B}$
   Відповіді: ДКНФ: $\left(\overline{A}\vee\overline{B}\vee\overline{C}\right)(A\vee B\vee C)\left(A\vee B\vee\overline{C}\right)$,
   ДДНФ: $A\overline{B}C\vee A\overline{B}\overline{C}\vee AB\overline{C}\vee\overline{A}BC\vee\overline{A}B\overline{C}$
5. $XY\vee Z\to\overline{XY}$
   Відповіді: ДКНФ $\left(\overline{X}\vee\overline{Y}\vee Z\right)\&\left(\overline{X}\vee\overline{Y}\vee\overline{Z}\right)$
   ДДНФ: $\overline{X}\overline{Y}\overline{Z}\vee\overline{X}\overline{Y}Z\vee\overline{X}Y\overline{Z}\vee\overline{X}YZ\vee X\overline{Y}\overline{Z}\vee X\overline{Y}Z$
6. $X\to Y\leftrightarrow\left(X\to\overline{Y}\right)$
   Відповіді: ДКНФ: $\left(\overline{X}\vee Y\right)\&\left(\overline{X}\vee\overline{Y}\right)$
   ДДНФ: $\overline{X}\overline{Y}\vee\overline{X}Y$
7. $X\to YZ\to\overline{X}Y\overline{Z}$
   Відповіді: ДДНФ: $\overline{X}Y\overline{Z}\vee X\overline{Y}\overline{Z}\vee X\overline{Y}Z\vee XY\overline{Z}$,

ДКНФ$\left(X \vee Y \vee Z\right)\&\left(X \vee Y \vee \overline{Z}\right)\&\left(X \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}\right)\&\left(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}\right)$

8. $X \vee YZ \leftrightarrow \overline{X}\,\overline{Z}$

   Відповіді: ДДНФ: $\overline{X}\,\overline{Y}Z$

   ДКНФ:

   $\left(X \vee Y \vee Z\right)\&\left(X \vee \overline{Y} \vee Z\right)\&\left(X \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}\right)\&\left(\overline{X} \vee Y \vee Z\right)\&\left(\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z}\right)\&$

   $\&\left(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z\right)\&\left(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}\right)$

9. $\overline{XYZ} \vee \left(XY \to X \vee Z\right)$

   Відповіді: ДКНФ відсутня;

   ДДНФ:

   $\left(X \vee Y \vee Z\right)\&\left(X \vee \overline{Y} \vee Z\right)\&\left(X \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}\right)\&\left(\overline{X} \vee Y \vee Z\right)\&\left(\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z}\right)\&$

   $\&\left(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z\right)\&\left(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}\right)\&\left(X \vee Y \vee \overline{Z}\right)$

10. $\left(XY \leftrightarrow X\overline{Y}\right) \leftrightarrow \overline{X}Y$

   Відповіді: ДДНФ: $\overline{X}Y \vee X\overline{Y} \vee XY$

   ДКНФ: $X \vee Y$

Знайти ДДНФ, ДКНФ логічної функції, користуючись таблицею істинності.

11.

A	*B*	*C*	*F(A,B,C)*
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Відповіді: ДДНФ: $\overline{A}\,\overline{B}C \vee \overline{A}B\overline{C} \vee A\overline{B}\,\overline{C}$

ДКНФ: $\left(A \vee B \vee C\right)\&\left(A \vee \overline{B} \vee \overline{C}\right)\&\left(\overline{A} \vee B \vee \overline{C}\right)\&\left(\overline{A} \vee \overline{B} \vee C\right)\&\left(\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C}\right)$

Література

1. Математична логіка. практикум [Електронний ресурс]: навч. посіб. / О. Л.Темнікова ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 76 с. https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/42844/1/WorkshopLogicTemnikova.pdf
2. З.П. Халецька, В.В. Нарадовий. Математична логіка та теорія алгоритмів: Навчальний посібник. – Кропивницький: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2017. – 128 с. https://phm.cuspu.edu.ua/images/Metod_233.pdf

3. Гасяк О.С. Формальна логіка. Розв'язкові процедури, алгоритми, словник базових термінів і понять: навч. Посібник / О.С.Гасяк. – Вид. 2 -ге, переробл. та доповн. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2014. – 544 с. http://www.philosophy.chnu.edu.ua/res/philosophy/F.L.%20text.pdf
4. Stephen G. Simpson. Mathematical Logic. October 17, 2013 Department of Mathematics The Pennsylvania State University University Park, State College PA 16802 http://www.math.psu.edu/simpson/