DOI 10.15276/imms.v12.no3.209
УДК 519.972.5:004.942.001.57

Informatics and Mathematical Methods in Simulation
Vol. 12 (2022), No. 3, pp. 209-218

АНАЛІЗ ПОХИБОК МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ, ЯКІ ОПИСУЮТЬСЯ ІНТЕГРАЛЬНИМИ РІВНЯННЯМИ

А.Ю. Прокофьєв

Національний університет «Одеська політехніка»
пр.-т Шевченка, 1, Одеса, 65022, Україна; e-mail: fallbrick1985@gmail.com

Вибір інтегральних рівнянь при математичному моделюванні, в залежності від досліджуваного явища, обумовлено наступними факторами: неможливість складання інших рівнянь (суть — математичних моделей досліджуваних явищ); необхідність зниження мірності рівнянь (тобто кількості незалежних змінних) при розв'язуванні задач для суцільних середовищ; можливість компактного формулювання граничних задач; досягнення спрощень при обчисленнях; можливість простого та природного переходу до систем кінцевовимірних рівнянь (при дискретизації неперервних задач). Слід підкреслити особливу роль інтегральних рівнянь при розв'язуванні граничних задач та аналізі випадкових, в тому числі динамічних процесів. Застосування методу математичного моделювання, який являє собою сукупність прийомів визначення математичних зв'язків між відомими вихідними даними та невідомою характеристикою об'єкта, що досліджується у вигляді інтегральних рівнянь чи перетворень, є важливим не тільки тому, що це питання недостатньо висвітлено в літературі, але також і тому, що своєрідність інтегральних співвідношень та умов їх складання у значній мірі визначають вибір обчислювальних методів та засобів при числовій реалізації. Насамперед зазначена особливість полягає у аналізі точності обчислювальних процедур, які застосовуються в ході математичного моделювання із застосуванням моделей об'єктів у вигляді інтегральних рівнянь, оскільки в якості вхідних даних при цьому використовуються експериментальні дані, точність яких визначається застосованою вимірювальною апаратурою та впливом зовнішніх завад при вимірюваннях. Тому аналіз похибок математичного моделювання динамічних об'єктів на основі моделей у вигляді інтегральних рівнянь має актуальне значення при розв'язуванні більш широких задач моделювання та управління динамічними об'єктами.

Ключові слова: математичне моделювання, інтегральні рівняння, похибка розв'язку, динамічні об'єкти.

Вступ

Застосування інтегральних перетворень та рівнянь дозволяє сформулювати деякі загальні властивості такого способу математичного моделювання:

1. Принципова та практична можливість використання в задачах, що мають стохастичну природу, і в задачах, математичне моделювання яких засновано на оцінці сумарного впливу відомих (шуканих) величин на характеристики, що спостерігаються (досліджуються), причому вказані дані, або їх частина, має експериментальне походження.

2. Висока універсальність математичних співвідношень, які отримуються, що досягається як за рахунок компактного формулювання граничних задач, так і за рахунок того, що до одного і того ж типу інтегральних рівнянь зводяться задачі, кожна з яких може бути описана власним, відмінним від інших, диференціальним рівнянням.

3. Можливість єдинообразного переходу до розрахункових виразів з використанням ефективних прийомів обчислювальної математики.

Невідомим етапом математичного моделювання є використання виразів, що описують явище, яке досліджується, для отримання числових результатів, тобто конкретних відомостей, за ради яких, у багатьох випадках, і проводиться дослідження. Цей етап має назву числової реалізації математичних моделей (ММ) і зводиться до розв'язування рівнянь, які відповідають прийнятій формі математичного моделювання.

Розв'язування практичних задач, сформульованих у вигляді інтегральних рівнянь, потребує застосування *наближених числових методів* розв'язку, для реалізації яких, як правило, необхідно застосування певних (переважно таких, що потребують застосування обчислювальної техніки) засобів обчислювання. Тому, поряд з удосконаленням теорії інтегральних рівнянь, отримали розвиток числові *комп'ютерно-орієнтовані* методи їх розв'язування.

Задача *числової реалізації інтегральних моделей*, з огляду на її складність, неодмінно трансформується в проблему машинної (*комп'ютерної*) реалізації, яка, в залежності від конкретних умов та мети дослідження, може зводитися до сукупності питань вибору та використання обчислювальних методів та засобі, а у багатьох випадках — і до їх розробки. Дійсно, ММ може бути використана для отримання лише числових результатів розв'язку — тоді це *задача обчислення*; для достатньо багатостороннього відтворення та довготривалого відтворення явища або об'єкта, що досліджується, — це *задача моделювання*; для формування управляючих впливів у іншому об'єкті чи явищі — *задача управління*. Часто метою дослідження є спільний розв'язок вказаних задач.

Основою числових розв'язування прикладних задач є досконало розроблені числові методи. Значна кількість та різноманіття цих методів пояснюється намаганням до їх удосконалення та наявністю різних типів рівнянь, неможливістю охоплення яких єдиним універсальним методом є об'єктивним фактом [1 – 3].

Сказане вище дозволяє вважати, що методи математичного моделювання на основі інтегральних рівнянь у сукупності з методами розв'язування (та прикладними програмами) потребують уваги як з точки зору їх розвитку, так і з точки зору застосування.

Враховуючи важливість задач математичного моделювання при розв'язуванні прикладних задач моделювання та управління динамічними об'єктами, окремою важливою проблемою постає оцінка точності отриманих розв'язків, яка напряму пов'язана з аналізом похибок останніх.

Мета роботи

Мета роботи полягає у отриманні аналітичних виразів, які дозволяють апріорно оцінити точність (похибки) процедур математичного моделювання при розв'язуванні прикладних задач моделювання та управління динамічними об'єктами, ММ яких представлено у вигляді інтегральних рівнянь.

Основна частина

Інтегральні рівняння є досить загальною формою математичного опису різних динамічних об'єктів. Лінійні нестаціонарні об'єкти, в загальному випадку, може бути описано лінійним рівнянням Вольтери другого роду

$$y(x)+\int_0^x \left[K(x,s)\,y(s)\right]ds = f(x), \tag{1}$$

де $K(x,s)$ — ядро; $f(x)$ — відома функція (права частина); $y(x)$ — шукана функція.

Частинним випадком (1) може бути опис *стаціонарних лінійних* об'єктів у вигляді:

$$y(x)+\int_0^x [K(x-s)\,y(s)]ds = f(x), \tag{2}$$

ядро якого залежить від різниці аргументів x та s і, тому називається *різницевим*.

Нелінійні об'єкти може бути описано рівнянням наступного виду:

$$y(x)+\int_0^x \{K(x,s)F[y(s)]\}ds = f(x) \tag{3}$$

або більш загальним рівнянням

$$y(x)+\int_0^x \{K[x,s,y(s)]\}ds = f(x), \tag{4}$$

причому, у випадку стаціонарних об'єктів (як зазначалося — частинного випадку), ядро в рівняннях (3), (4) є різницевим.

При комп'ютерному розв'язуванні рівнянь (1) — (4) за допомогою методів математичного моделювання *актуальною* є задача отримання уявлень щодо можливих *похибок розв'язків*, які неодмінно виникають у зв'язку із застосуванням числових (тобто *наближених*) методів моделювання. Така ж задача є актуальною і при пошуку *управління*, оскільки *синтез управляючих функцій* (суть — *зворотна* задача) ґрунтується на реалізації ММ динамічних (або стаціонарних — у частинному випадку) об'єктів, як етапу такого синтезу.

Відомий ряд робіт [4], в яких розглядаються питання *аналізу точності* розв'язування традиційних для комп'ютерних засобів диференціальних рівнянь. Отримані результати може бути частково використано у застосуванні до інтегральних рівнянь, одначе є також низка *якісних особливостей*, які слід враховувати.

При комп'ютерному розв'язуванні наведених рівнянь (1) — (4), як було зазначено вище, використовують наближені (числові) методи. Одначе, без попередніх спеціальних перетворень, можливе розв'язування лише рівнянь виду:

$$y(x)+\int_0^x \left[a_1 + a_2(x-s)+\ldots+a_n\,\frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!}\right]y(s)ds = f(x), \tag{5}$$

які описують лінійні стаціонарні об'єкти із зосередженими параметрами (ЗП-об'єкти) та еквівалентні диференціальним рівнянням виду

$$\frac{d^n\varphi(x)}{dx^n}+a_1\,\frac{d^{n-1}\varphi(x)}{dx^{n-1}}+\ldots+a_n\varphi(x)=\psi(x), \tag{6}$$

де

$$y(x)=\frac{d^n\varphi(x)}{dx^n}.$$

Права частина (5) визначається функцією $\psi(x)$ та початковими умовами для рівнянь (6).

В якості способу безпосереднього моделювання рівняння (5) зручно прийняти аналогову форму розв'язування рівняння (6), яка полягає у застосуванні замкнутої моделюючої схеми, яка містить послідовний ланцюжок з n інтеграторів.

Якщо розв'язується рівняння (2) з довільним різницевим ядром, то для застосування методу безпосереднього моделювання необхідно виконати попередню апроксимацію ядра.

Слід зазначити, що для лінійних та таких, які добре лінеаризуються, інтегральних рівнянь похибка може виражена за допомогою фундаментальної формули похибок [5]. Дійсно, комп'ютерний розв'язок можна представити таким, що залежить від ряду величин $q_1, q_2, .., q_n$, які характеризують параметри ММ, вхідні впливи тощо, відхилення яких і викликають похибку отримуваного результату. За наявності відхилень реальний розв'язок шляхом розкладання у обмежений ряд Тейлора може бути представлено наступним чином:

$$
\begin{aligned}
Y(x, q_1 + \Delta q_1, q_2 + \Delta q_2, ..., q_n + \Delta q_n) \cong Y(x, q_1, q_2, ..., q_n) + \\
+ [u_1(x)\Delta q_1 + u_2(x)\Delta q_2 + ... + u_n(x)\Delta q_n],
\end{aligned}
\tag{7}
$$

де $u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x)$ — коефіцієнти *впливу* або *чутливості*.

Віднімаючи з правої частини (7) точний розв'язок $Y(x, q_1, q_2, ..., q_n)$ — тобто перший доданок — можна записати похибку

$$
\Delta Y(x) = u_1(x)\Delta q_1 + u_2(x)\Delta q_2 + ... + u_n(x)\Delta q_n. \tag{8}
$$

Таким чином, для достатньо наближеного визначення похибки розв'язку необхідно знати *відхилення* параметрів $q_1, q_2, .., q_n$ (або їх *вірогіднісні характеристики*) та визначити коефіцієнти їх впливу.

Для віднаходження коефіцієнтів чутливості (у випадку лінійного рівняння) можна отримати відповідне рівняння. Будемо вважати, що параметри $q_1, q_2, .., q_n$ визначаються внутрішніми властивостями ММ, тобто входять до ядра рівняння, що розв'язується комп'ютерними засобами, і яке, в такому випадку, має вигляд:

$$
Y(x) + \int_0^x [K_{\text{м}}(x, s, q_1, q_2, .., q_n) Y(s)] ds = f(x). \tag{9}
$$

Виконуючи диференціювання обох частин (1.49) по параметрах $q_i \; (i = \overline{1, n})$, отримаємо

$$
\frac{\partial Y(x)}{\partial q_i} + \int_0^x \left[\frac{\partial K_{\text{м}}(x, s, q_1, q_2, .., q_n)}{\partial q_i} Y(s) \right] ds = 0. \tag{10}
$$

Уводячи позначення

$$
\frac{\partial Y(x)}{\partial q_i} = u_i(x), \;\; \frac{\partial K_{\text{м}}(x, s, q_1, q_2, .., q_n)}{\partial q_i} = K'_{\text{м} q_i}(x, s, q_1, q_2, .., q_n)
$$

отримаємо шукані рівняння:

$$
\begin{aligned}
u_i(x) + \int_0^x [K_{\text{м}}(x, s, q_1, q_2, .., q_n) u_i(x)] ds = \\
= -\int_0^x \left[K'_{\text{м} q_i}(x, s, q_1, q_2, .., q_n) Y(s) \right] ds.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

В якості функції $Y(s)$ в правій частині (1.51) можна використати наближений розв'язок. Як видно, для визначення коефіцієнтів чутливості можна використати основну ММ, що реалізується комп'ютерними засобами, оскільки ядро рівняння (11) співпадає з ядром рівняння (1), яке розв'язується.

Таким самим образом можна отримати рівняння чутливості для нелінійного рівняння (1.43). Відповідне йому машинне рівняння має вигляд:

$$Y(x)+\int_0^x \left\{K_{\text{м}}(x,s,q_1,q_2,..,q_n)F[Y(s)]\right\}ds=f(x). \tag{12}$$

Диференціювання (12) дає

$$\frac{\partial Y(x)}{\partial q_i}+\int_0^x \left\{\frac{\partial K_{\text{м}}(x,s,q_1,q_2,..,q_n)F[Y(s)]}{\partial q_i}\right\}ds=0$$

або

$$\frac{\partial Y(x)}{\partial q_i}+\int_0^x \left\{K'_{\text{м}q_i}(x,s,q_1,q_2,..,q_n)F[Y(s)]+\right.$$

$$\left.+K_{\text{м}}(x,s,q_1,q_2,..,q_n)F'(s)\frac{\partial Y(s)}{\partial q_i}\right\}ds=0. \tag{13}$$

Враховуючи уведене раніше позначення для $u_i(x)$, можна отримати:

$$u_i(x)+\int_0^x \left[K_{\text{м}}(x,s,q_1,q_2,..,q_n)F'(s)u_i(s)\right]ds=$$

$$=-\int_0^x \left\{K'_{\text{м}q_i}(x,s,q_1,q_2,..,q_n)F[Y(s)]\right\}ds;\; i=\overline{1,n}. \tag{14}$$

Отримані рівняння чутливості є лінійними, на відміну від вихідного рівняння (3). Для їх розв'язування може бути використано ММ, яка реалізується комп'ютерними засобами, в якій нелінійне перетворення шуканої функції по закону $F[\cdot]$ замінено множенням її на змінний коефіцієнт $F'[\cdot]$. Для відтворення правої частини (14) також можна використати отриману раніше комп'ютерним розв'язуванням функцію $Y(x)$.

Слід зазначити, що загальне рівняння (4) може бути приведено до більш простому виду (3), який допускає *дослідження похибок*.

Якщо функцію $K[x,s,y(s)]$ може бути розкладено у ряд Маклорена [6] по ступенях $x(t)$:

$$K[x,s,y(s)]\cong\sum_{i=0}^{\infty}\frac{K_x^{(i)}[x=0,s,y(s)]}{x!}x^i$$

і ряд збігається в області зміни x та s, то можна виконати наближену заміну

$$K[x,s,y(s)]\cong\sum_{i=0}^{m}\frac{K_x^{(i)}[x=0,s,y(s)]}{x!}x^i;\; i=\overline{1,m}$$

та розв'язувати наближене рівняння

$$y(x)+\int_0^x\sum_{i=0}^{m}\frac{K_x^{(i)}[x=0,s,y(s)]}{i!}x^i=f(x).$$

Як і у випадку диференційних рівнянь, для лінійних інтегральних рівнянь можна отримати *рівняння для похибки*. Можна вважати, що при розв'язуванні (1) машинне рівняння має вигляд:

$$\tilde{y}(x) + \int_0^x \left[\tilde{K}(x,s)\tilde{y}(s)\right] ds = \tilde{f}(x), \tag{15}$$

де ядро $\tilde{K}(x,s)$ враховує *первинні похибки моделювання* (*методичну* та *інструментальну* похибки) та являє собою суму

$$\tilde{K}(x,s) = K(x,s) + \Delta K(x,s),$$

права частина $\tilde{f}(x)$ містить *похибку зовнішнього збудження* та

$$\tilde{f}(x) = f(x) + \Delta f(x),$$

$\tilde{y}(x)$ — наближений розв'язок, що визначається співвідношенням

$$\tilde{y}(x) = y(x) + \Delta y(x),$$

де $\Delta y(x)$ — *сумарна похибка* розв'язку.

Тоді, віднімаючи вираз (1) з (15), можна отримати

$$\Delta y(x) + \int_0^x \{[K(x,s) + \Delta K(x,s)][y(x) + \Delta y(x)] - K(x,s)\, y(s)\} ds = \Delta f(x).$$

Розкриваючи дужки під інтегралом і вважаючи похибки $\Delta K(x,s)$ та $\Delta y(x)$ настільки малими, що їх добутком можна знехтувати, отримаємо шукане рівняння

$$\Delta y(x) + \int_0^x [K(x,s)\Delta y(s)] ds = \Delta f(x) - \int_0^x [\Delta K(x,s)\, y(s)] ds. \tag{16}$$

Цим рівнянням для обчислення похибки $\Delta y(x)$ складно скористатися з огляду через невизначеність завдання первинних похибок, яка зазвичай має місце, а також у зв'язку з тим, що замість істинного розв'язку $y(s)$ в правій частині необхідно використовувати наближене. Одначе воно може використовуватися для *якісного дослідження похибок*, оскільки, зокрема, показує що різні складові сумарної похибки можуть бути визначені окремо (залишаючи в правій частині тільки $\Delta f(x)$, можна визначити *наслідкову похибку* результату, а залишаючи лише інтеграл — *похибку моделювання*). Крім того, рівняння для похибки дозволяє виконати *оцінку похибки*.

Зокрема (у вигляді тестової задачі), якщо (x,s) належить області D ($(x,s) \in D$); $0 \le x \le a$, $0 \le s \le b$ і, при цьому, можна завдати обмеження

$$\max_{(x,s)\in D}|K(x,s)| \le K, \quad \max_{(x,s)\in D}|\tilde{K}(x,s)| \le \tilde{K}, \quad \max_{(x,s)\in D}|\Delta K(x,s)| \le \delta,$$

$$\max_{(x,s)\in D}|\tilde{f}(x)| \le f, \quad \max_{(x,s)\in D}|\Delta f(x)| \le \eta,$$

то, використовуючи вище наведені результати, можна отримати оцінку

$$\Delta y(x) \le \left[f\,\delta \frac{e^{(K-\tilde{K})x} - 1}{K - \tilde{K}} + \eta \right] e^{\tilde{K}x}.$$

При $K = \tilde{K}$ дана оцінка спрощується :

$$\Delta y(x) \le \left(f\,\delta x + \eta\right)e^{Kx}.$$

Таким чином, з наведеного аналізу випливає, що існує декілька шляхів отримання відомостей щодо *похибок розв'язків інтегральних рівнянь*, які виникають при числовій реалізації їх (як відповідних ММ динамічних об'єктів) із застосуванням комп'ютерно-орієнтованих методів.

В якості прикладного аспекту аналізу похибок наразі розглянемо застосування методу модельних прикладів при реалізації ММ динамічних об'єктів у вигляді інтегральних рівнянь (зокрема, для конкретності викладення — рівнянь Фредгольма першого роду, що, одначе, не знижує загального характеру цього викладення).

Як зазначалося вище, постановка задачі відшукання невідомої характеристики у вигляді (1.41) є некоректною. Не зважаючи на те, що у розвитку теорії наближених методів розв'язування некоректних задач отримано значні конструктивні результати [7], проблема ефективної та формалізованої реалізації методів регуляризації і до тепер залишається ще гострою [8, 9]. Одним з розповсюджених методів при визначенні параметру регуляризації є *метод модельних прикладів*, суть якого викладено, зокрема в [9]. Обґрунтування (з використанням оціночних нерівностей) та процедура методу модельних прикладів полягає в наступному.

Нехай завдано операторне рівняння першого роду, що відповідає (1.41):

$$Ay = f,\ y \in Y,\ f \in F, \tag{17}$$

де y — шуканий, а f — заданий елементи лінійних нормованих просторів Y та F; A — лінійний безперервний оператор $A : Y \to F$.

Відомо [9] (як зазначалося вище), що задача розв'язування рівняння (17) є некоректною і повинна розв'язуватися певними методами, які набули назву методів регуляризації [8, 9].

Так, в *методі регуляризації Лаврентьєва* [8, 9], замість рівняння (17) розв'язується рівняння

$$\alpha y + Ay = f, \tag{18}$$

де α — параметр регуляризації, а в *методі Тихонова* [9], замість (17) розв'язується рівняння

$$\alpha y + A^* Ay = A^* f, \tag{19}$$

де A^* — оператор, сполучений з оператором A.

Найбільш трудомісткою та складною є задача визначення параметру α, для розв'язування якої запропоновано декілька методів [9], у тому числі *метод модельних прикладів*.

Визначення 1.1. *Модельним прикладом* (рівнянням) по відношенню до деякої практичної задачі (рівнянню) P називається приклад Q, який має такий самий набір параметрів $M = (m_1, m_2, ..., m_k)$, що і задача P.

Якщо задачу P та приклад Q розв'язувати при одному й тому ж значенні параметра α, то цілком раціонально вважати, що оцінки відносних похибок розв'язків в обох випадках будуть однаковими. Це дає можливість вважати рівняння P та Q, в певному сенсі «близькими», не зважаючи на можливе розходження в правих частинах. Природно, співпадіння оцінок не гарантує рівності відносних похибок $\|\Delta y_P\| / \|y_P\|$ та

$\|\Delta y_Q\|/\|y_Q\|$ відповідних розв’язків (похибки рівні лише у випадку, коли $f_Q(x) = g f_P(x)$, де $g = \mathrm{const} \neq 0$).

Смисл уведення модельного прикладу полягає у можливості мати «близьке» до рівняння, яке розв’язується, інше — з відомим розв’язком y_Q.

Метод модельних прикладів полягає у наступному.

1. Для заданого рівняння P, яке підлягає розв’язуванню, складається штучний модельний приклад Q, в якому задається *точний розв’язок* $y_Q(s)$ такий, щоб функція $f_Q(x)$, яку визначається обчисленням інтегралу в лівій частині рівняння (рівняння *Фредгольма першого порядку*)

$$Ay = \int_a^b [K(x,s)\, y(s)]\, ds = f(x),\ c \le x \le d\,, \tag{20}$$

де ядро $K(x,s) \in L_K$ та права частина $f(x) \in L_f$ — відомі функції, $y(s) \in Y$ — шукана функція, був би (тобто точний розв’язок $y_Q(s)$), за можливістю, «близьким» до правої частини $f_P(x)$ рівняння P, яке розв’язується (наприклад, з точністю до деякого постійного множника $g = \mathrm{const} \neq 0$). При цьому, будуючи функцію $y_Q(s)$, необхідно враховувати можливу апріорну інформацію щодо шуканої функції $y_P(s)$.

2. До значень $f_Q(x)$ за допомогою генератора випадкових чисел додаються такі похибки, при яких приблизно співпадають величини $\|\Delta f_Q\|/\|f_Q\|$ та $\|\Delta f_P\|/\|f_P\|$ (вочевидь, точної рівності не можна досягнути, оскільки Δf_P на практиці зазвичай відома з похибкою).

3. Шляхом числового розв’язування модельного прикладу Q, відповідно до одного з методів регуляризації (19), (20), для ряду значень α визначається оптимальне значення $\alpha = \alpha_{\text{опт}}$ таке, при якому

$$\left\| y_{Q_\alpha} - y_Q \right\| \to \min. \tag{21}$$

Тут y_{Q_α} — числовий розв’язок рівнянь регуляризації (20), відповідно за методами Лаврентьєва та Тихонова:

$$\alpha y\left[(x-c)\frac{b-a}{\alpha - c} + \alpha\right] + \int_a^b [K(x,s)\, y(s)]\, ds = f(x);\ c \le x \le d\,, \tag{22}$$

$$\alpha y(x) + \int_a^b [K(x,s)\, y(s)]\, ds = \omega(x);\ a \le x \le b\,, \tag{23}$$

де

$$K(x,s) = \int_c^d [K(t,x) K(t,s)]\, dt,\ \ \omega(x) = \int_c^d [K(t,x) f(t)]\, dt\,.$$

4. Віднайдене значення $\alpha_{Q_{\text{опт}}}$, будучи близьким до шуканого $\alpha_{P\,\text{опт}}$, використовується у подальшому для розв'язування вихідного рівняння P.

Строге математичне обґрунтування методу модельних прикладів ускладнено. Одначе, в прикладному сенсі, метод еталонних прикладів може бути орієнтовано для оперативного розв'язування некоректних задач (особливо *задач управління в реальному масштабі часу*) з однаковими наборами вихідних даних $M = (m_1, m_2, ..., m_k)$. При цьому розв'язування широкого кола практичних задач свідчить про ефективність даного методу. Крім розглянутих, певного поширення при числовій реалізації інтегральних рівнянь, набули методи: резольвент [10], зведення до алгебраїчних рівнянь [11], заміни інтеграла кінцевою сумою [11].

Висновки

Отримано вирази, які визначають похибку розв'язку інтегральних рівнянь, які використовуються в якості математичних моделей при розв'язуванні задач моделювання та управління динамічними об'єктами. Показано, що частинна задача аналізу похибки розв'язку інтегрального рівняння по складності може наближатися до власно первинної задачі моделювання або управління. Також показано, що при обчисленні похибки $\Delta y(x)$ в процесі розв'язування інтегральних рівнянь (як математичних моделей відповідних динамічних об'єктів) слід звертати увагу на невизначеність завдання первинних похибок (похибок вимірювання вхідних даних), що, зазвичай, має місце для прикладних задач.

Одначе, отримані вирази дають змогу виконати якісне дослідження похибок розв'язку інтегральних рівнянь (суть — реалізації моделей динамічних об'єктів), оскільки, зокрема, показують складові сумарної похибки, які, в свою чергу, можна оцінити (обчислити) окремо, та визначити вплив кожної з цих складових на сумарну похибку.

Список літератури

1. Задачін В.М., Конюшенко І.Г. Чисельні методи. Х.: Вид-во ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014. 180 с.
2. Гончаров О.А. Л. В. Васильєва А. М. Юнда. Чисельні методи розв'язання прикладних задач. Суми: Сумський державний університет, 2020. 142 с.
3. Андрунік В.А., Висоцька В.А., Пасічник В.В. Чисельні методи в комп'ютерних науках. Львів: Новий світ– 200, 2017. 470 с.
4. Третинник В.В., Любашенко Н.Д. Методи обчислень: Чисельні методи алгебри К.: КПІ ім.І.Сікорського, 2019. 139 с.
5. Семенко Л. Г. Информационные технологии. М.: ГП ЦНИИС, 2003. 379 с.
6. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 680 с.
7. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издание, 2009. 457 с.
8. Engl H., Hanke M., Neuebauer A. Regularization of Inverse Problems. London: Kluwer, 1996. 376 p.
9. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
10. Канунников А. Л. Алгебра. Ч 3 — Метод резольвент Лагранжа. М.: СОЛИС, 2005. 147 с.
11. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Физматгиз, 1978. 832 с.

ERROR ANALYSIS OF MATHEMATICAL MODELING OF DYNAMIC OBJECTS WHICH ARE DESCRIBED BY INTEGRAL EQUATIONS

A.Yu. Prokofiev

National Odesa Polytechnic University
Shevchenko ave., 1, Odesa, Ukraine; e-mail: fallbrick1985@gmail.com

The choice of integral equations in mathematical modeling, depending on the investigated phenomenon, is determined by the following factors: the impossibility of compiling other equations (the essence is mathematical models (MM) of the investigated phenomena); the need to reduce the dimensionality of equations (that is, the number of independent variables) when solving problems for continuous environments; the possibility of a compact formulation of boundary problems; achieving simplifications in calculations; the possibility of a simple and natural transition to systems of finite-dimensional equations (when discretizing continuous problems). It should be emphasized the special role of integral equations in solving boundary value problems and analyzing random, including dynamic, processes. The application of the mathematical modeling method, which is a set of techniques for determining mathematical relationships between known initial data and an unknown characteristic of the object under investigation in the form of integral equations or transformations, is important not only because this issue is not sufficiently covered in the literature, but also because the peculiarity of the integral relations and the conditions of their compilation largely determine the choice of computational methods and tools for numerical implementation. First of all, the specified feature consists in the analysis of the accuracy of computational procedures that are used in the course of mathematical modeling using the MM of objects in the form of integral equations, since experimental data are used as input data, the accuracy of which is determined by the used measuring equipment and the influence of external interference during measurements. Therefore, the analysis of errors of mathematical modeling of dynamic objects based on MM in the form of integral equations is of urgent importance in solving broader problems of modeling and control of dynamic objects.

Keywords: mathematical modeling, integral equations, solution error, dynamic objects.