

## References

1. Kavalero, G.I. Pervichnye izmeritel'nye preobrazovateli (datchiki), vypuskaemye firmami SSHA [Transducers (sensors) made in USA] / G.I. Kavalero, V.V. Kovalevskaya // Priborostroenie [Instrument Making], 1986. — #10 — pp. 13 — 21.
2. Felikson, E.I. Uprugie elementy siloizmeritelnykh priborov [Elastic elements of force measuring devices]. — Moscow, 1977. — 160 p.
3. Timoshenko, S.P. Plastinki i obolochki [Plates and Shells] / S.P. Timoshenko, S. Voynovsky-Krityar. — Moscow, 1963. — 635 p.

Рецензент д-р техн. наук, проф. Одес. нац. политехн. ун-та Оробей В.Ф.

Поступила в редакцию 18 марта 2013 г.

УДК 539.377

В.П. Белоус, магистр, Одес. нац. политехн. ун-т

# ОСОБЕННОСТИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПАНЕЛЕЙ ПРИ ВНЕШНЕМ ДАВЛЕНИИ ПОСЛЕ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ

*В.П. Білоус. Особливості деформування циліндричних панелей при зовнішньому тиску після втрати стійкості.* Розглянута циліндрична панель при зовнішньому тиску з боку випуклості її поверхні. На базі теорії гнучких оболонок у залежності від кривизни поверхні одержані вирази для критичних тисків і прогинів після втрати стійкості.

*Ключові слова:* циліндрична панель, кривизна поверхні, втрата стійкості, прогін, критичний тиск.

*В.П. Белоус. Особенности деформирования цилиндрических панелей при внешнем давлении после потери устойчивости.* Рассмотрена цилиндрическая панель при внешнем давлении со стороны выпуклости ее поверхности. На базе теории гибких оболочек в зависимости от кривизны поверхности получены выражения для критических давлений и прогибов после потери устойчивости.

*Ключевые слова:* цилиндрическая панель, кривизна поверхности, потеря устойчивости, прогиб, критическое давление.

*V.P. Belous. Features of deformation of cylindrical panels at external pressure after the loss of stability.* A cylindrical panel is considered at external pressure on the side of its surface convex. On the basis of the theory of flexible shells in dependence on the curvature of the surface, the expressions for critical pressures and the deflections after the loss of stability, are obtained.

*Keywords:* cylindrical panel, curvature of a surface, loss of stability, deflection, critical pressure.

Корпусные элементы многих машиностроительных конструкций представляют собой тонкостенные оболочки, обычно подкрепленные системой продольных и кольцевых ребер жесткости. Части оболочки, ограниченные этими ребрами (так называемые панели обшивки), при работе конструкции, как правило, подвергаются действию той или иной “местной” нагрузки, а также воспринимают “основные” нагрузки вместе с другими элементами конструкции, например, от общего сжатия корпуса при резком торможении транспортных средств. Особенности

деформирования цилиндрических панелей при сжатии после потери устойчивости были исследованы ранее [1]. Рассматривается случай, когда такие панели подвергаются действию поперечной нагрузки, направленной со стороны выпуклости нормально к их поверхности. Этот вид нагрузки характерен для корпусов, испытывающих давление жидкости или газа, а также для резервуаров, испытывающих избыточное внешнее давление.

В данной задаче, в отличие от ситуации [1], уже с самого начала нагружения панелей приходится учитывать их моментное напряженно-деформированное состояние, когда они способны и после потери устойчивости нести закритическую нагрузку. В этом случае, очевидно, что соответствующую закритическую деформацию следует рассматривать, используя положения теории гибких оболочек (оболочек большого прогиба), что отвечает нелинейной постановке задачи. Отдельные теоретические исследования закритического деформирования цилиндрических панелей в случае произвольного соотношения их сторон фрагментарны и не всегда имеют завершение в форме выражений для критических нагрузок. В этой связи аналитическое рассмотрение деформирования таких панелей при внешнем давлении после потери устойчивости, являющееся целью данной работы, можно считать вполне актуальным для соответствующих инженерных задач.

Пусть цилиндрическая панель радиуса  $R$ , длиной  $a$ , шириной  $b$  и толщиной  $h$  с центральным углом охвата  $\theta = b/R$  находится под действием равномерно распределенного по ее поверхности нормального давления  $q$  (рис. 1). В качестве геометрической характеристики панели используется ее относительную кривизну  $k = \theta \cdot b/h = b^2/(Rh)$  при соотношении сторон  $\varphi = a/b \geq 1$ . Края панели считаются шарнирно опертыми на абсолютно жесткие ребра.

Пусть началом координат является угловая точка срединной поверхности панели, координата  $x$  отсчитывается вдоль прямолинейной образующей, координата  $y$  — вдоль дуги (криволинейной направляющей), а координата  $z$  — по нормали к срединной поверхности. Перемещения точки срединной поверхности вдоль осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  обозначим соответственно через  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . Положительное перемещение  $w$ , которое называют прогибом панели, отвечает направлению к центру кривизны.

Разрешающие уравнения теории гибких оболочек в случае цилиндрической оболочки при действии только внешней нормальной нагрузки  $q$  имеют вид системы смешанного типа двух уравнений относительно прогиба  $w$  и функции усилий  $\Phi$ :

$$D \cdot \nabla^2 \nabla^2 w = q + \frac{N_y}{R} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \quad (1)$$

$$\frac{1}{Eh} \cdot \nabla^2 \nabla^2 \Phi = -\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2, \quad (2)$$

где  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$  — цилиндрическая жесткость оболочки;

$E, \mu$  — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки;

$N_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$ ;  $N_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$ ;  $N_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$  — внутренние усилия в срединной поверхности.

При шарнирном опирании панели для функции прогиба  $w$  на ее краях

$$w|_{x=0,a} = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}|_{x=0,a} = 0; \quad w|_{y=0,b} = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}|_{y=0,b} = 0. \quad (3)$$

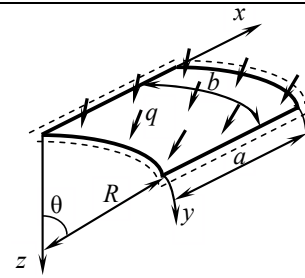


Рис. 1. Цилиндрическая панель при действии внешнего нормального давления

При отсутствии внешних сжимающих нагрузок для функции усилий  $\Phi$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \Big|_{x=0,a} = 0; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \Big|_{y=0,b} = 0; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \Big|_{x=0,a} = 0. \quad (4)$$

Примем следующее выражение для функции прогиба  $w$ , удовлетворяющее граничным условиям (3),

$$w(x, y) = f \cdot \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y, \quad (\lambda_m = m\pi / a; \lambda_n = n\pi / b), \quad (5)$$

где  $f$  — амплитуда прогиба;

$m$  и  $n$  — число полуволен вдоль образующей и по дуге, соответственно.

Тогда, после подстановки выражения (5) в уравнение (2) и его интегрирования с учетом условий (4), функция усилий примет вид

$$\Phi(x, y) = \frac{Eh}{32} \left( \frac{\lambda_n^2}{\lambda_m^2} \cos 2\lambda_m x + \frac{\lambda_m^2}{\lambda_n^2} \cos 2\lambda_n y \right) f^2 + \frac{Eh}{R} \frac{\lambda_m^2}{(\lambda_m^2 + \lambda_n^2)^2} f \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y. \quad (6)$$

Подставляя выражения (5) для прогиба  $w$  и (6) для функции усилий  $\Phi$  в уравнение (1) и применяя метод Бубнова-Галеркина, после его интегрирования по площади панели

$$D(\lambda_m^2 + \lambda_n^2)^2 f + \frac{Eh}{R^2} \frac{\lambda_m^4 f}{(\lambda_m^2 + \lambda_n^2)^2} + \frac{Eh}{16} (\lambda_m^2 + \lambda_n^2) f^3 - \frac{32}{3\phi b^2} \frac{Eh}{R} \frac{\lambda_n^2}{\lambda_m^2} \left[ \frac{\lambda_n^2}{(\lambda_m^2 + \lambda_n^2)^2} + \frac{1}{16} \right] f^2 = \frac{16q}{mn\pi^2}.$$

Введем в рассмотрение безразмерные давление, прогиб и параметры волнообразования

$$\bar{q} = \frac{q a^2 b^2}{E h^4}; \quad \zeta = \frac{f}{h}; \quad \vartheta = \frac{l_y}{l_x} = \frac{m}{n\phi} = \frac{\lambda_m}{\lambda_n}; \quad \eta = \frac{\pi^2 R h}{l_y^2} = \frac{n^2 \pi^2}{k} = \lambda_n^2 R h, \quad (7)$$

где  $l_y = b / n$  и  $l_x = a / m$  — длины полуволен по дуге и вдоль образующей, соответственно.

Для параметров (7) из последнего выражения получена зависимость между давлением  $\bar{q}$  и прогибом  $\zeta$

$$\begin{aligned} \bar{q}(\zeta) = & \frac{\pi^6}{256} \frac{\vartheta^4 + 1}{\vartheta^2} m^3 n^3 \cdot \zeta^3 - \frac{\pi^2 k}{24} \left[ \frac{16\vartheta^2}{(\vartheta^2 + 1)^2} + \frac{1}{\vartheta^2} \right] m^2 \cdot \zeta^2 + \\ & + \left[ \frac{\pi^6}{192(1 - \mu^2)} \frac{(\vartheta^2 + 1)^2}{\vartheta^2} m^3 n^3 + \frac{\pi^2 k^2}{16} \frac{\vartheta^2}{(\vartheta^2 + 1)^2} m^2 \right] \cdot \zeta. \end{aligned} \quad (8)$$

Очевидно, что минимальное давление  $\bar{q}$  будет при  $m = 1$ , т.е. прогиб вдоль образующей будет иметь только одну полуволну и в силу (7)  $n\phi = \vartheta^{-1}$ .

Зависимость (8), представляющую собой кубическое уравнение относительно прогиба  $\zeta$ , представим как

$$\bar{q}(\zeta) = A \cdot \zeta^3 - B k \cdot \zeta^2 + (C k^2 + D) \cdot \zeta, \quad (9)$$

где выражения для коэффициентов имеют вид

$$\begin{aligned} A = & \frac{\pi^6 n}{256} \left( n^4 \varphi^2 + \frac{1}{\varphi^2} \right); \quad B = \frac{2\pi^2}{3} \left[ \left( n\varphi + \frac{1}{n\varphi} \right)^{-2} + \frac{n^2 \varphi^2}{16} \right]; \\ C = & \frac{\pi^2}{16} \left( n\varphi + \frac{1}{n\varphi} \right)^{-2}; \quad D = \frac{\pi^6 n^2}{192(1 - \mu^2)} \left( n^2 \varphi + \frac{1}{\varphi} \right)^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Из условия

$$\partial \bar{q} / \partial \zeta = 3A \cdot \zeta^2 - 2B k \cdot \zeta + (C k^2 + D) = 0 \quad (11)$$

получим выражение для прогибов, соответствующее точке максимума или минимума графика функции  $\bar{q}(\zeta)$ ,

$$\zeta_{B,H} = \left(\frac{B}{3A}\right) \cdot k \mp \sqrt{\left(\frac{D}{3A}\right) \cdot \left(\frac{k^2}{k_*^2} - 1\right)}, \quad (12)$$

где параметр  $k_* = \sqrt{\frac{3AD}{B^2 - 3AC}}$ .

Далее, из условия

$$\partial^2 \bar{q} / \partial \zeta^2 = 6A \cdot \zeta - 2Bk = 0 \quad (13)$$

получим выражение для прогиба, соответствующее точке перегиба на графике функции  $\bar{q}(\zeta)$ ,

$$\zeta_c = \left(\frac{B}{3A}\right) \cdot k. \quad (14)$$

Если кривизна  $k$  больше параметра  $k_*$ , который назовем пороговой кривизной панели, то согласно выражению (12) будет два вещественных корня уравнения (11). Тогда график зависимости  $\bar{q}(\zeta)$  имеет вид, представленный на рис.2, на котором прогибам  $\zeta_B$ ,  $\zeta_H$ ,  $\zeta_C$  соответствуют точки:  $a$  — максимума,  $b$  — минимума и  $c$  — перегиба.

Согласно характеру графика зависимости  $\bar{q}(\zeta)$ , выражение для прогибов (12) можно представить в виде

$$\zeta_B = \zeta_C - \Delta\zeta, \quad \zeta_H = \zeta_C + \Delta\zeta, \quad (15)$$

где  $\Delta\zeta = \zeta_C - \zeta_B = \zeta_H - \zeta_C = \sqrt{\left(\frac{D}{3A}\right) \cdot \left(\frac{k^2}{k_*^2} - 1\right)}$ .

Подставляя значения прогибов (15) в выражение (9), получим верхнее и нижнее критические давления, соответственно,

$$\bar{q}_B(\zeta) = A \cdot \zeta_B^3 - Bk \cdot \zeta_B^2 + (Ck^2 + D) \cdot \zeta_B; \quad \bar{q}_H(\zeta) = A \cdot \zeta_H^3 - Bk \cdot \zeta_H^2 + (Ck^2 + D) \cdot \zeta_H.$$

Последние выражения, если учесть зависимости (11) и (15), после несложных преобразований можно представить в виде

$$\bar{q}_B = A \cdot (3\zeta_C - 2\zeta_B) \zeta_B^2 = A \cdot \zeta_B^2 (\zeta_B + 3\Delta\zeta); \quad (16)$$

$$\bar{q}_H = A \cdot (3\zeta_C - 2\zeta_H) \zeta_H^2 = A \cdot \zeta_H^2 (\zeta_H - 3\Delta\zeta). \quad (17)$$

При пороговой кривизне цилиндрической панели  $k = k_*$  ( $\Delta\zeta = 0$ ) с учетом выражений (15)

$$\zeta_B = \zeta_H = \zeta_C = \zeta_* = 0,333 Bk_* / A; \quad \bar{q}_B = \bar{q}_H = \bar{q}_C = \bar{q}_* = A \cdot \zeta_*^3. \quad (18)$$

Если кривизна  $k$  превышает значение  $k_*$ , то при повышении внешнего давления до значения  $\bar{q}_B$  произойдет прощелкивание-хлопок панели (по линии  $ad$  на рисунке 2), а при последующем уменьшении его до значения  $\bar{q}_H$  произойдет ее прощелкивание-выхлоп (по линии  $be$ ). Такое поведение рассматриваемой панели отвечает реальному характеру потери устойчивости тонкостенных оболочек [3].

В рассмотренном тестовом примере были определены значения критических давлений для квадратной цилиндрической панели ( $\varphi = a/b$ ) при  $n=1$ . Соответствующие коэффициенты следующие:  $A = 7,511$ ;  $B = 2,056$ ;  $C = 0,1542$ ;  $D = 22,01$  ( $\mu = 0,3$ ). Пороговое значение кривизны  $k_* = 25,66$  отвечает значениям внешнего давления  $\zeta_* = 2,341$  и прогиба  $\bar{q}_* = 96,42$ . Результаты расчетов верхних и нижних критических давлений — в зависимости от кривизны панели по формулам (16) и (17) (рис. 3).

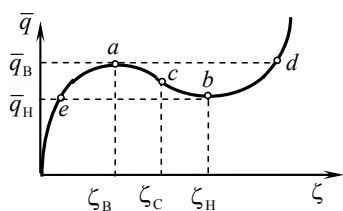


Рис. 2. Зависимость между внешним нормальным давлением и прогибом панели

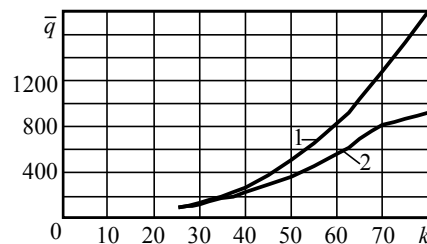


Рис. 3. Зависимости между верхним критическим  $\bar{q}_B$  (1) и нижним критическим  $\bar{q}_H$  (2) давлениями и кривизной поверхности панели

Очевидно, что для нормальной работы конструкций отмеченное прощелкивание цилиндрических панелей нежелательно. В то же время требование, при котором кривизна панели должна быть меньше пороговой, когда ее поведение мало отличается от поведения пластины тех же размеров, не может обеспечить достаточной жесткости конструкции [4]. Именно поэтому для практических приложений важно исследование прогибов панелей в нелинейной постановке, что позволяет более точно определять верхние и нижние критические давления, используя графики, аналогичные приведенным на рис. 3. Так как реальное критическое давление всегда больше нижнего критического и меньше верхнего, то при таком подходе можно обеспечить устойчивость цилиндрических панелей с некоторым запасом.

#### Литература

1. Белоус, В.П. Особенности деформирования цилиндрических панелей при внешнем давлении после потери устойчивости / В.П. Белоус // Пр. Одес. політехн. ун-ту. — Одеса, 2012. — Вип.2(39). — С. 15 — 20.
2. Алфутов, Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем / Н.А. Алфутов. — М.: Машиностроение, 1991.— 336 с.
3. Farshad, M. Stability of structures / M. Farshad. — London: Elsevier Science Publishing Ltd, 1994. — 425 p.
4. Yoo Chai, H. Stability of structures: principles and applications / H. Yoo Chai, C. Lee Sung. — London: Elsevier Science Publishing Ltd, 2011. — 529 p.

#### References

1. Belous, V.P. Osobennosti deformirovaniya tsilindricheskikh paneley pri vneshnem davlenii posle poteri ustoychivosti [The strain features of cylindrical panels under external pressure after the loss of stability] / V.P. Belous // Pr. Odes. politekh. un-tu [Proc. of the Odesa polytech.univ.]. — Odessa, 2012. — Iss. 2(39). — pp. 15 — 20.
2. Alfutov, N.A. Osnovy rascheta na ustoychivost' uprugikh sistem [Principles of calculating the stability of elastic systems]. / N.A. Alfutov. — Moscow, 1991, — 336 p.
3. Farshad, M. Stability of structures / M. Farshad. — London: Elsevier Science Publishing Ltd, 1994, — 425 p.
4. Yoo Chai, H. Stability of structures: principles and applications / H. Yoo Chai, C. Lee Sung. — London: Elsevier Science Publishing Ltd, 2011. — 529 p.

Рецензент д-р техн. наук, проф. Одес. нац. политехн. ун-та Дащенко А.Ф.

Поступила в редакцию 15 мая 2013 г.