МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

ОДЕССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕРИАЛЫ XXIII СЕМИНАРА

«МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРИКЛАДНЫХ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ»

XXIII

ОДЕССА
2015

СОДЕРЖАНИЕ

ЭЛЛИПТИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ В ОБРАБОТКЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Прокопович И.В., Оборский Г.А., Шмараев А.В.

Во многих процессах, относящихся к понятию «измерение», первичная информация от объекта измерения поступает в виде изображения, например, цифровой фотографии. Такая информация из-за своего огромного объема (до сотен мегабайт) не может быть встроена в автоматизированные системы управления или проектирования, а используемые при этом экспертные оценки по принципу «посмотрел – решил» отличаются низкой точностью. Единственным приемлемым методом является преобразование первичной информации к одному числу – результату измерения с помощью дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Благодаря появившимся в последнее время компьютерным методам численной интерпретации таких уравнений, область их эффективного использования значительно расширилась.

Поэтому актуальными могут быть новые методы преобразования многомерной измерительной информации к единому числу с помощью дифференциальных уравнений в частных производных.

Целью настоящей работы является создание метода преобразования многомерной измерительной информации к единому числу с помощью дифференциальных уравнений в частных производных и их конечно-разностного представления.

Для свертки в число неподвижных изображений (например, цифровой фотографии) используются уравнения, не содержащие временного параметра, в частности, уравнение Лапласа – дифференциальное статическое (независящее от времени) эллиптическое уравнение в частных производных, которое в трехмерных декартовых координатах имеет следующий вид:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=0\,, \qquad (1)$$

где u – некоторая фазовая переменная, x, y и z – декартовы координаты на плоскости.

Уравнение Лапласа возникает во многих физических задачах механики, теплопроводности, электростатики, гидравлики. В частности, многие двухмерные статические задачи теплопроводности описываются выражением:

$$\left(\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)=0\,, \qquad (2)$$

где фазовая переменная T – температура, λ – коэффициент теплопроводности, x и y – декартовы координаты на плоскости.

Поскольку в теплофизике величина коэффициента теплопроводности λ всегда больше нуля, задача (2) сводится к двухмерному варианту задачи (1).

Введем понятие «коэффициент S» и придадим ему такие свойства: он всегда неотрицателен и может принимать только два значения, соответствующих границам яркости: 0 (черный) или 255 (белый). Тогда выражение вида (2) распадается на два уравнения, связанных логическим союзом «или» (очевидный союз «и» опускаем):

Здесь необходимо ввести понятие (или дать более исчерпывающее пояснение) о коэффициенте S

$$S = 0 \text{ или } \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0, \tag{3}$$

что позволяет решать их уже не только относительно u, но и относительно S. Для этого условимся, что S = 255 в том единственном допускаемом условиями (2) случае, когда справедливо второе уравнение из (3). Тогда это решение выглядит так:

$$S = 0\Big|_{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\neq 0}; \tag{4}$$

$$S = 255\Big|_{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0}. \tag{5}$$

Таким образом, если в результате какого-либо преобразования функции $u(x, y)$ удается подтвердить или опровергнуть равенство нулю правой части (3), то тем самым будет однозначно определено значение бинарной переменной S.

Пусть (x, y) – координаты точки некоторого плоского изображения, а $u_{xy}(x, y)$ – яркость этой точки. Поскольку минимальная единица изображения пиксель конечного размера, преобразуем непрерывное уравнение (2) в уравнение в конечных разностях:

$$S\left(\frac{\partial^2 u_{xy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{xy}}{\partial y^2}\right) \Leftrightarrow S\frac{a_{(i+1),j} - 2a_{i,j} + a_{(i-1),j}}{\Delta i^2} + S\frac{a_{i,(j+1)} - 2a_{i,j} + a_{i,(j-1)}}{\Delta j^2} = 0, \tag{6}$$

где i, j – дискретные координаты (номера) пикселей вдоль осей x и y, соответственно; a_{ij} – дискретная яркость пикселя с координатами i и j:

$$\begin{aligned} &x \Leftrightarrow i, && i = 0, 1, 2, \ldots, N \text{ с шагом в 1 пиксель;} \\ &y \Leftrightarrow j, && j = 0, 1, 2, \ldots, M \text{ с шагом в 1 пиксель;} \\ &u_{xy} \Leftrightarrow a_{ij}, && a_{ij} = 0, 1, 2, \ldots, 255 \text{ с шагом в 1 градацию яркости.} \end{aligned} \tag{7}$$

Согласно принятым в выражениях (7) размерностям, конечные разности $\Delta i = \Delta j = 1$. Поэтому дискретное выражение (6), так же, как и непрерывное выражение (2), в свою очередь, распадается на два выражения, связанных логическим «или»:

$$S = 0 \bigcup a_{(i+1),j} + a_{(i-1),j} + a_{i,(j+1)} + a_{i,(j-1)} = 4a_{i,j}. \tag{8}$$

Т.е. если правое уравнение в (8) выполняется, то $S = 255$, если нет, – то $S = 0$.

Расчетная схема для эллиптического уравнения в конечных разностях имеет следующий вид (рис. 1).

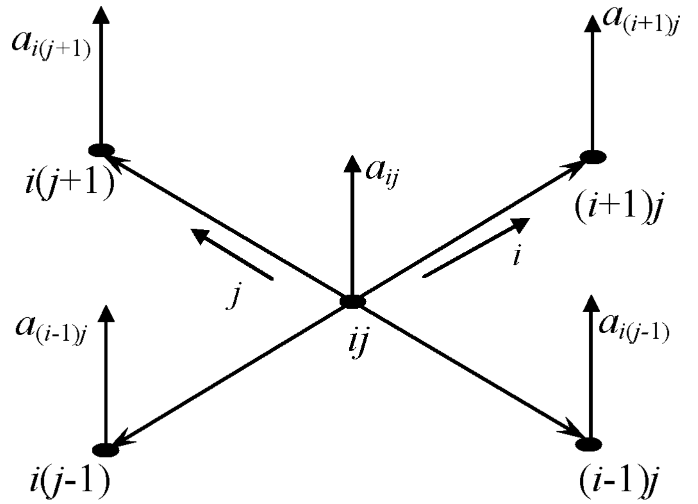

Рисунок 1 – Расчетная схема для эллиптического уравнения в конечных разностях

Коэффициентов $S_{i,j}$ в изображении столько, сколько в нем пикселей. Если считать каждый из них новым (после эллиптического преобразования) значением яркости соответствующего пикселя, получим сеточное поле дискретных (0 – черный; 255 – белый) яркостей $S_{i,j}$ размерностью $M \times N$ или, фактически, новое изображение, которое представляет собой *результат эллиптического преобразования (РЭП) начального изображения* (рис. 2):

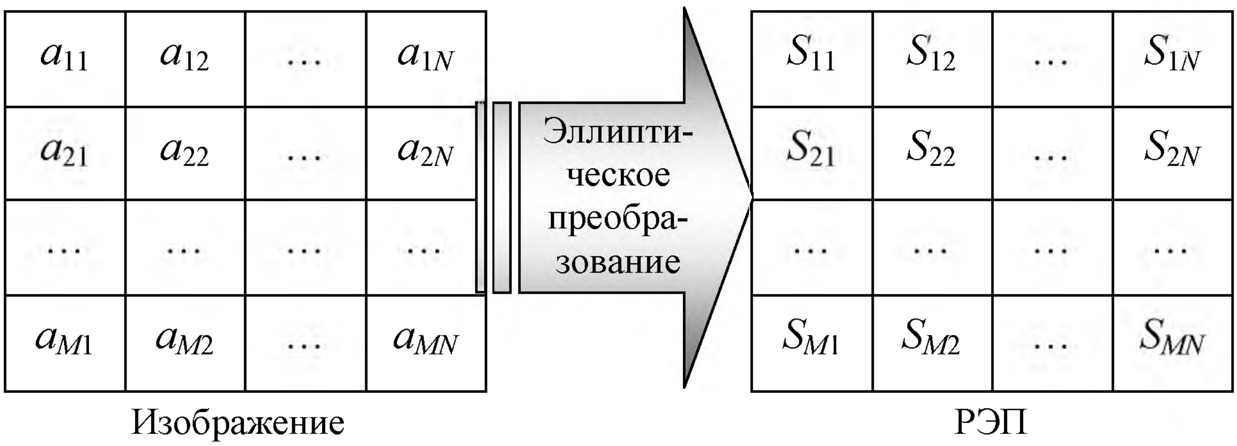

Рисунок 2 – Результат эллиптического преобразования (РЭП) начального изображения

Схема алгоритма эллиптического преобразования приведена на рис. 3. Из (7) непосредственно вытекает, что, если изображение состоит из пикселей одинаковой яркости, то для всех его пикселей правая часть (7) всегда равна 0, а S всегда равен 255 и РЭП выглядит как белое изображение.

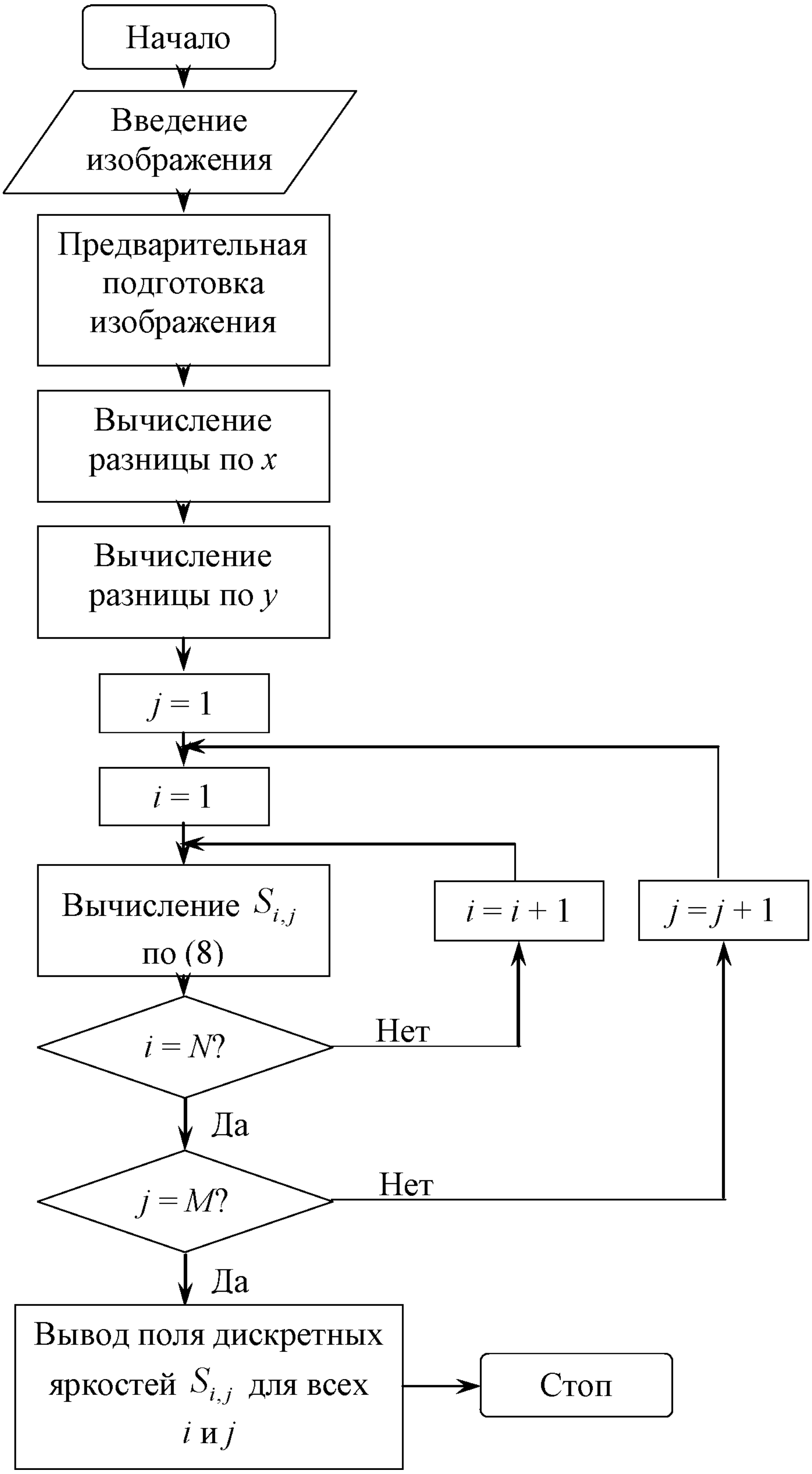

Рисунок 3 – Схема алгоритма эллиптического преобразования

При появлении на изображении участков, отличающихся яркостью от фона, на РЭП, в свою очередь, появляются «черные» (S = 0) линии границ этих участков, по суммарной площади которых (одно число!) можно судить о распространенности последних.