

**ЕЛЕКТРОНІКА**  
**РАДІОТЕХНІКА**  
**ЗАСОБИ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙ**  
**ELECTRONICS**  
**RADIO ENGINEERING**  
**TELECOMMUNICATION FACILITIES**

УДК 621.372.542

**Ю.К. Филипский**, д-р. техн. наук, проф.,  
**Л.С. Фонарь**, магистр,  
Одес. нац. политехн. ун-т

**ЧАСТОТНО-ВРЕМЕННОЙ АНАЛИЗ ЦИФРОВЫХ  
ГАУССОВЫХ ФИЛЬТРОВ**

*Ю.К. Філіпський, Л.С. Фонарь. Частотно-часовий аналіз цифрових гаусових фільтрів.* Проведено синтез цифрового гаусового фільтра. Показано, що такий фільтр має переваги — високу вибірковість і швидкий перехід в стаціонарний стан. Розглянуто динамічні характеристики цифрового гаусового фільтра.

*Ключові слова:* гауссовий фільтр, динамічні характеристики.

*Ю.К. Филипский, Л.С. Фонарь. Частотно-временной анализ цифровых гауссовых фильтров.* Проведен синтез цифрового гауссового фильтра. Показано, что такой фильтр имеет преимущества — высокую избирательность и быстрый переход в стационарное состояние. Рассмотрены динамические характеристики цифрового гауссового фильтра.

*Ключевые слова:* гауссовый фильтр, динамические характеристики.

*Yu.K. Filipisky, L.S. Fonar. Time-frequency analysis of digital gaussian filters.* The digital Gaussian filter is synthesized. It is shown that the filter has the advantages — high selectivity and rapid transition to a steady state. Dynamic characteristics of digital Gaussian filters are considered.

*Keywords:* gaussian filter, dynamic characteristics.

Цифровые фильтры являются одним из основных блоков современных радиотехнических устройств. Построение таких фильтров первоначально предполагалось на основе аналоговых. Существует общая теория их построения, в основе которой лежит операторный коэффициент передачи, заданный в виде дробно-рациональной функции [1]

$$K(p) = \frac{M(p)}{N(p)}. \quad (1)$$

Аналоговые фильтры описываются именно этими функциями.

На основе аналоговых фильтров возможно построение цифровых. Но тогда для последних рабочий участок частотной характеристики ограничивается частотой

$$\omega_{\max} = \frac{\omega_T}{2}, \quad (2)$$

где  $\omega_T = \frac{2\pi}{T}$  — тактовая частота (частота Найквиста);

$T$  — расстояние между выборками импульсного отклика.

Усечение частотной характеристики путем исключения частот выше  $\omega_{\max}$  приводит к погрешностям в работе фильтров. Если от  $K(p)$  перейти к  $z$ -преобразованию, то такую погрешность можно исключить [2]. При этом формируются фильтры, не имеющие аналоговых прототипов, т.е. они синтезируются на основании операторных характеристик.

Одним из современных фильтров можно считать гауссовый фильтр, имеющий в виде гауссовой кривой импульсную и частотную характеристики [3] соответственно

$$h(t) = e^{-(\alpha t)^2}, \quad (3)$$

$$K(j\omega) = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-\left(\frac{\omega^2}{4\alpha^2} + j\varphi\right)}, \quad (4)$$

где  $\alpha = 1/\tau_{ц}$ ;

$\tau_{ц}$  — постоянная времени цепи;

$\varphi$  — фаза.

Целью работы является исследование частотно-временных характеристик цифрового гауссового фильтра, которые дают представление о работе цепи в динамическом режиме (реальном времени).

Выражения (3) и (4) относятся только к фильтрам нижних частот (ФНЧ). Поэтому дальнейший анализ производится относительно ФНЧ. Характеристики полосового фильтра и фильтра верхних частот можно получить на основании характеристик низкочастотного [4].

После выполнения нормировки по времени  $y = \alpha t$  получено

$$h(y) = e^{-y^2}. \quad (5)$$

Поскольку существует связь между импульсной характеристикой фильтра  $h(t)$  и его коэффициентом передачи  $K(j\omega)$ , то для нулевой частоты у ФНЧ  $K(0) = \int_0^{\infty} h(t) dt = 1$ . Для цифровых фильтров

$$K(0) = \sum_0^{\infty} h_k. \quad (6)$$

Коэффициент передачи фильтра связан с импульсной характеристикой прямым преобразованием Фурье [4]

$$K(j\omega) = \int_0^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (7)$$

Для гауссового фильтра после перехода к нормированному времени  $y$  и частоте  $\Omega = \frac{\omega}{\alpha}$

$$K(j\Omega) = \int_0^{\infty} h(y) e^{-j\Omega y} dy. \quad (8)$$

Для цифровых фильтров выборки импульсного отклика имеют вид

$$h_k = e^{-(k\Delta y)^2}, \quad (9)$$

где  $\Delta y = 0,2$ ;

$k = 0, 1, \dots, N-1$ ;

$N = 64$ .

На рис. 1 представлены графики импульсных характеристик цифровых фильтров, построенных по выборкам, — гауссового и фильтра с характеристикой вида  $e^{-y}$  (кривые, 1, 2, соответственно).

Для вычисления коэффициента передачи цифрового фильтра использована формула дискретного преобразования Фурье

$$K(jn\Omega) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-j2\pi nk/N}, \quad (10)$$

где  $\Omega = \pi/T$ ;  
 $n = 0, 1, \dots, N-1$ ;

Графики амплитудно-частотной  $|K_k|$  (АЧХ) и фазо-частотной  $\varphi(\Omega)$  (ФЧХ) характеристик цифрового гауссового фильтра, построенные по выборкам (9), приведены на рис. 2.

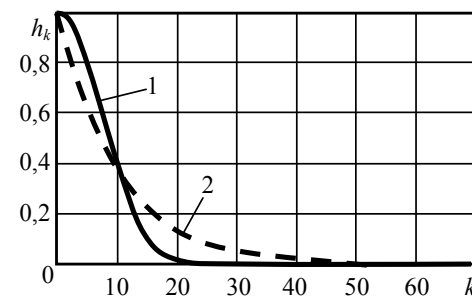


Рис. 1. Импульсные характеристики  $h_k$  фильтров: гауссового (1), с характеристикой вида  $e^{-y}$  (2)

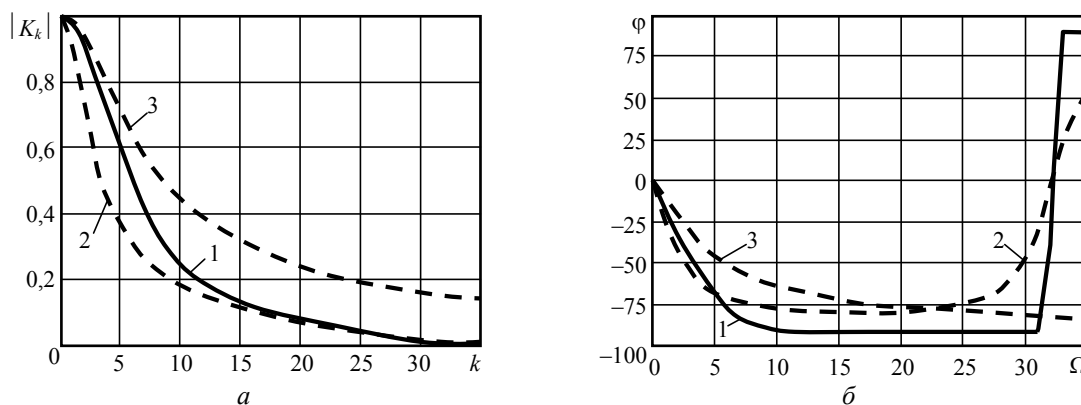


Рис. 2. Амплитудно-частотная  $|K_k|$  (а) и фазо-частотная  $\varphi(\Omega)$  (б) характеристики цифрового гауссового фильтра (1), цифрового фильтра с характеристикой вида  $e^{-y}$  (2) и аналогового фильтра (3)

Для сравнения на этом же рисунке представлены графики АЧХ и ФЧХ цифрового фильтра с характеристикой вида  $e^{-y}$  и аналогового фильтра.

Амплитудно-частотная характеристика гауссового фильтра практически достигает 0, а фазо-частотная характеристика лежит в пределах  $0 \dots -90^\circ$ , как и в случае фильтра, построенного с помощью  $z$ -преобразования [1].

Частотно-временные характеристики цифрового гауссового фильтра получены с применением метода динамического коэффициента передачи (ДКП), который является обобщающим частотно-временным методом [5]. Он позволяет определять характеристики цепей как в частотной, так и во временной областях, которые определяют характеристики цепей в стационарном и динамическом режимах. Наибольший интерес представляет ДКП как функция времени, т.к. в этом случае он дает непосредственно комплексную огибающую на выходе цепи при скачке амплитуды. ДКП отличается от статического тем, что в нем учитывается не только значение мгновенной частоты, но также значения производных фаз.

ДКП цифровых фильтров

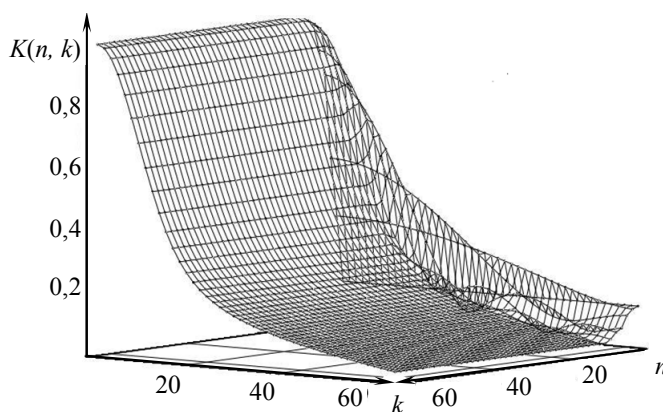


Рис. 3. Динамический коэффициент передачи  $K(jn\Omega, kT)$  цифрового гауссового фильтра

$$K(jn\Omega, kT) = \sum_{k=0}^{kT} h_k e^{-\frac{j2\pi nk}{N}}. \quad (11)$$

График ДКП цифрового гауссового фильтра представлен на рис. 3.

Таким образом, в результате анализа цифрового гауссового фильтра определено, что он имеет преимущества перед другими фильтрами — менее инерционен, т.е. быстрее переходит в стационарное состояние, а его частотная характеристика близка к прямоугольной, что свидетельствует о лучшей избирательности фильтра. Кроме того, этот фильтр позволяет также избежать погрешностей, возникающих за счет ограничения частотного диапазона.

Частотно-временной анализ показал, что динамический коэффициент передачи цифрового гауссового фильтра при частоте  $\Omega = 0$  принимает вид переходной характеристики, а как функция времени при  $t \rightarrow \infty$  плавно переходит к стационарному значению.

### Литература

1. Рабинер, Л. Теория и применение цифровой обработки сигналов: Пер. с англ. / Л. Рабинер, Б. Гоулд. — М.: Мир, 1978. — 835 с.
2. Філіпський, Ю.К. Частотно-часові характеристики цифрових фільтрів 1-го та 2-го порядку без прототипів / Ю.К. Філіпський, Л.С. Прусенкова // Тр. Одес. політехн. ун-та. — Одесса, 2009. — Вып. 1 (31). — С. 97—102.
3. Баскаков, С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. / С.И. Баскаков. — М.: Высш. шк., 2000. — 462 с.
4. Гоноровский, И.С. Радиотехнические цепи и сигналы: учеб. пособие для вузов / И.С. Гоноровский. — [5-е изд.]. — М.: Дрофа, 2006. — 719 с.
5. Філіпський, Ю.К. Динаміка сигнальних перетворень: Навч. посіб. для студентів ВНЗ / Ю. К. Філіпський. — Одесса: ОДПУ, 2006. — 89 с.

### References

1. Rabiner, L. Teoriya i praktika tsifrovoy obrabotki signalov/ [Theory and application of digital signal processing]: transl. from English / L. Rabiner, B. Gould. — Moscow, 1978. — 835 p.
2. Filipyskiy, Yu.K. Chastotno-chasovi kharakterystyky tsyfrovyykh filtriv 1-ho ta 2-ho poriadku bez prototypiv [Frequency-time characteristics of digital filters of the 1-st and 2-nd order with no prototypes] // Yu.K. Filipyskiy, L.S. Prusenkova // Tr. Odes. polytekhn. un-ta [Proc. of the Odessa Polytech. Univ.]. — Odessa, 2009. — # 1(31). — pp. 97 — 102.
3. Baskakov, S. I. Radiotekhnicheskie tsepi i signaly [Radio Circuits and Signals] — Moscow, 2006. — 719 p.
4. Gonorovskiy, I.S. Radiotekhnicheskie tsepi i signaly: ucheb. posobie dlyavuzov [Radio Circuits and Signals: a Manual for higher education] / I.S. Gonorovskiy. — 5th edition. — Moscow, 2006. — 719 p.
5. Filipyskiy, Yu.K. Dynamika syhnalnykh peretvoren: Navch. posib. dlia studentiv VNZ [Dynamics of Signal Change: a teach. manual for students of higher educational establishments] / Yu. K. Filipyskiy. — Odessa, 2006. — 89 p.

Рецензент д-р техн. наук, проф. Одес. нац. политехн. ун-та Баранов П.Е.

Поступила в редакцию 28 июня 2013 г.