УДК 519.711–519.6

Д.В. ДМИТРИШИН, А.В. УСОВ, А.Д. ХАМИТОВА
Одесский национальный политехнический университет

ОГРАНИЧЕНИЯ ПРИМЕНИМОСТИ ЛИНЕЙНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ В НЕЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ

Рассмотрены ограничения применимости линейного управления с запаздывающей обратной связью в нелинейных дискретных системах. Показано, что применение нелинейного управления позволяет стабилизировать хаос в системах со сколь угодно большим множеством дислокации мультипликаторов за счет увеличения числа коэффициентов усиления управления.

Ключевые слова: управление, запаздывание, нелинейные дискретные системы.

Д.В. ДМИТРИШИН, А.В. УСОВ, А.Д. ХАМІТОВА
Одеський національний політехнічний університет

ОБМЕЖЕННЯ ВИКОРИСТАННЯ ЛІНІЙНОГО УПРАВЛІННЯ ІЗ ЗАПІЗНЮЮЧИМ ОБЕРНЕНИМ ЗВЯЗКОМ В НЕЛІНІЙНИХ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМАХ

Розглянуті обмеження використання лінійного управління із запізнюючим оберненим зв'зком в нелінійних дискретних системах. Показано, що використання нелінійного управління дозволяє стабілізувати хаос у системах з якою завгодно великою множиною дислокації мультиплікаторів за рахунок збільшення числа коефіцієнтів посилання управління.

Ключові слова: управління,запізнювання,нелінійні дискретні системи.

D.V. DMITRISHIN, A.V. USOV, A.D. CHAMITOVA
Odessa National Polytechnic University

LIMITATIONS APPLY LINEAR CONTROL WITH DELAYED FEEDBACK NONLINEAR DISCRETE SYSTEMS

We consider limiting the generality of the linear control with delayed feedback nonlinear discrete systems is shown that .primenenie nonlinear control to stabilize the chaos in systems with an arbitrarily large array of multipliers dislocation by increasing the number of gain control.

Keywords: management, lag, nonlinear discrete systems.

Постановка проблемы

Проблема оптимального воздействия на хаотический режим является одной из фундаментальных в нелинейной динамике [1, 2]. Для ее решения были предложены различные схемы, одна из которых связана со специальным представлением запаздывающей обратной связи (DFC) [3], которая позволяет локально стабилизировать положение равновесия или цикл, вообще говоря, неизвестные наперед. Несмотря на физическую простоту реализации схемы DFC, она имеет существенные ограничения в применении, которые связаны с ее линейностью и использованием только одного предшествующего состояния [4]. Чтобы увеличить область применимости схемы DFC в пространстве параметров, предлагались различные обобщения классической схемы: в [5] в управление включалась информация относительно предшествующих состояний; в [6] рассматривалась нелинейная схема DFC с одним запаздыванием и были отмечены преимущества при такой модификации, в частности, управление стало робастным; в [7] была исследована смешанная линейно-нелинейная схема DFC; в [8] изучалась, так называемая, предикативная схема DFC. В [9] были синтезированы идеи [4, 6] и предложен наиболее естественный вид управления – нелинейная схема с несколькими запаздываниями: $u=-\sum_{j=1}^{N-1}\varepsilon_j\left(F\left(x_{n-j}\right)-F\left(x_{n-j+1}\right)\right)$, где коэффициенты усиления должны быть ограниченными, например, $\left|\varepsilon_k\right|<1,\ k=1,\ \dots,\ N-1$.

Несмотря на простой вид классических и обобщенных схем DFC, аналитическое исследование замкнутой системы является сложной задачей. Ее сложность обусловлена геометрией канонической области устойчивости по Шуру многочленов в пространстве их коэффициентов [10]. Проблема нахождения достаточных условий, гарантирующих применимость различных алгоритмов, в общем случае до сих пор не решена.

Для случая нелинейного DFC с несколькими запаздываниями упомянутая проблема для скалярных систем полностью решена в [9], где она была сведена с помощью методов вещественного гармонического анализа к линейной оптимизационной задаче.

Такую же проблему для классической линейной схемы DFC с несколькими запаздываниями свести к линейной оптимизационной задаче не удается принципиально даже в скалярном случае. Эффективным аппаратом исследования условий применимости линейного DFC оказались методы комплексного анализа, связанные со свойствами отображений центрального единичного круга комплексной плоскости, которые получили естественное распространение из класса однолистных в круге функций на произвольные аналитические в круге функции.

Основная часть

Рассматривается разомкнутая векторная нелинейная дискретная система вида

$$x_{n+1} = F_h(x_n),\ x_n \in R^m,\ n = 1, 2, \dots, \tag{1}$$

у которой имеется неустойчивое положение равновесия x^*, быть может, и не единственное. Предполагается, что дифференцируемая функция F_h зависит от конечного числа параметров, и при каждом векторе параметров h из допустимого множества этих параметров H определена на некотором ограниченном односвязном множестве m-мерного пространства и отображает его в себя. От этих параметров зависит положение равновесия x_h^* и спектр $\{\mu_1,\dots,\mu_m\}$ матрицы Якоби $F_h'(x_h^*)$, т.е. мультипликаторы μ_j, $j = 1,\dots,m$, в общем случае известны лишь в оценочном плане.

Требуется найти необходимые условия на множество M, при которых возможно локально стабилизировать положение равновесия x_h^* системы (1) при всех значениях входящих в нее параметров из допустимого множества *одним* управлением вида

$$u_n = -\sum_{j=1}^{N-1} \varepsilon_j \left(x_{n-j} - x_{n-j+1}\right), \tag{2}$$

т. е. при всех $\mu_j \in M$, $j = 1,\dots,m$.

Характеристический полином для линейной части системы (1), замкнутой управлением (2), имеет вид :

$$f(\lambda) = \prod_{j=1}^{m} \left(\lambda^N + \left(-\mu_j + a_1\right)\lambda^{N-1} + a_2\lambda^{N-2} \dots + a_N\right), \tag{3}$$

где $a_1 = -\varepsilon_1,\ a_j = \varepsilon_{j-1} - \varepsilon_j,\ j = 2, \dots, N-1,\ a_N = \varepsilon_{N-1}$. Ясно, что $\sum_{j=1}^{N} a_j = 0$. Мультипликаторы $\{\mu_1,\dots,\mu_m\}$ зависят от вектора параметров h. Обозначим $f(\lambda) = \prod_{j=1}^{m} \chi_{\mu_j}(\lambda)$, где

$$\chi_\mu(\lambda) = \lambda^N + \left(-\mu + a_1\right)\lambda^{N-1} + a_2\lambda^{N-2} \dots + a_N. \tag{4}$$

Считаем, что множество M не пусто, т.е. при некотором $\mu = \mu_0 \in M$ полином (4) устойчив по Шуру. Так как выполнено равенство $\chi_{\mu_0}(1) = 1 - \mu_0$, то $\mu_0 < 1$. Из формул Виета следует, что сумма коэффициентов устойчивого по Шуру полинома не превосходит 2^N, т.е. тогда $1 - \mu_0 < 2^N$. С другой стороны, если $0 < 1 - \mu_0 < 2^N$, то существуют коэффициенты $a_1,\dots,a_N$ ($\sum_{j=1}^{N} a_j = 0$), такие, что полином (4) при $\mu = \mu_0$ устойчив по Шуру [11]. Это означает, что все вещественные числа множества M необходимо принадлежат интервалу $\left(-2^N + 1, 1\right)$.

Существование управления (2), локально стабилизирующего положение равновесия системы (1) при всех допустимых значениях параметров, означает существование вектора $a \in A_N(\mu_0)$ такого, что $M \subseteq M_a$

. Пусть $M_a = \bigcup_{j=1}^{k} M_a^{(j)}$, где k – число граничных компонент множества M_a, $M_a^{(j)}$ – связные множества, $j = 1,\dots,k$. Определим диаметр множеств M_a, $M_a^{(j)}$ ($j = 1,\dots,k$), т.е. величины $d(M_a) = \sup\limits_{\substack{z_1 \in M_a \\ z_2 \in M_a}} (|z_1 - z_2|)$, $d\left(M_a^{(j)}\right) = \sup\limits_{\substack{z_1 \in M_a^{(j)} \\ z_2 \in M_a^{(j)}}} (|z_1 - z_2|)$ ($j = 1,\dots,k$).

Тогда, если диаметр множества M будет больше, чем $\max\limits_{a \in A_N(\mu_0)} \{d(M_a)\}$, или диаметр какой либо связной компоненты множества M будет больше, чем $\max\limits_{\substack{a \in A_N(\mu_0) \\ j \in \{1,\dots,k\}}} \left\{d\left(M_a^{(j)}\right)\right\}$, то заведомо не может существовать управления вида (2), локально стабилизирующего положение равновесия системы (1) при всех допустимых значениях параметров, входящих в эту систему.

Переходим к нахождению оценок диаметров множеств M_a, $M_a^{(j)}$.

Вспомогательные результаты. Из постановки задачи следует, что коэффициенты $a_1,\dots,a_N$ вещественные, причем $\sum_{j=1}^{N} a_j = 0$. В доказательствах утверждений результатов *этого* раздела указанные ограничения на коэффициенты не использовались.

Итак, пусть $a_1,\dots,a_N$ произвольные *комплексные* числа из $A_N(\mu_0)$. Представим полином $\chi_{\Delta\mu+\mu_0}(\lambda)$ в виде $\lambda^N + (-\Delta\mu - \mu_0 + a_1)\lambda^{N-1} + a_2\lambda^{N-2} \dots + a_N = \lambda^N - \Delta\mu\,\lambda^{N-1} + p(\lambda)$.

Обозначим $q(z) = (a_1 - \mu_0)z + \dots + a_N z^N$, $\Phi(z) = \dfrac{z}{1 + q(z)}$.

Лемма 1. Полином $\chi_{\Delta\mu+\mu_0}(\lambda) = \lambda^N - \Delta\mu\,\lambda^{N-1} + p(\lambda)$ устойчив по Шуру тогда и только тогда, когда справедливо включение

$$\frac{1}{\Delta\mu} \in \overline{C} \setminus \Phi(\overline{D}), \tag{5}$$

где $D = \{z \in C : |z| < 1\}$, $\overline{D} = \{z \in C : |z| \le 1\}$.

Введем операцию инверсии комплексного числа по формуле: $(z)^* = \dfrac{1}{\overline{z}}$ (здесь $\overline{z}$ означает число, комплексно сопряженное к z). Инверсное множество будем понимать, как множество, состоящее из инверсных элементов исходного множества. Тогда условие робастной устойчивости (5) равносильно включению $\Delta\mu \in \left(\overline{C} \setminus \Phi_1(\overline{\Delta})\right)^*$, где $\Phi_1(z) = \dfrac{z}{1 + q_1(z)}$, $q_1(z) = (\overline{a}_1 - \overline{\mu}_0)z + \dots + \overline{a}_N z^N$.

Так как полином $\lambda^N + p(\lambda)$ устойчив по Шуру, то все полюса функции $\Phi(z)$ лежат вне круга D, т.е. функция $\Phi(z)$ аналитическая в D. Размеры множества M_a связаны с размерами образа $\Phi(D)$. Образ $\Phi(D)$ открытое, но необязательно односвязное множество. Определим минимальное односвязное множество, целиком содержащее образ $\Phi(D)$. Обозначим его $\Phi^S(D)$.

Лемма 2. Множество $\Phi^S(D)$ целиком содержит круг радиуса $\dfrac{1}{4}$.

Замечание. Лемму 2 можно рассматривать как распространение *Теоремы Кебё* на произвольные отображения единичного круга, необязательно однолистные:
минимальная односвязная область, содержащая образ центрального единичного круга при отображении *любой* аналитической в круге функции вида

$$z + c_1 z + c_2 z^2 + \dots,$$

содержит центральный круг радиуса $\dfrac{1}{4}$.

Лемма 3. Множество $\Phi(D)$ целиком содержит круг радиуса $\frac{1}{16}$.

Основной результат.

Теорема 1. Пусть для некоторого μ_0 множество $A_N(\mu_0)$ непусто, и пусть $a=(a_1,...,a_N)\in A_N(\mu_0)$. Тогда $d(M_a)\le 16$.

Теорема 2. Пусть для некоторого μ_0 множество $A_N(\mu_0)$ непусто, и пусть $a=(a_1,...,a_N)\in A_N(\mu_0)$. Тогда $d(M_a^{(j)})<4$, где, $M_a^{(j)}$ – связная компонента множества M_a, содержащая μ_0.

На рис. 1 изображено множество $\Phi(D)$ при $a_1=2(1-\varepsilon)$, $a_2=1-\varepsilon$ (при $\varepsilon=0.1$). Оно односвязно и целиком содержит центральный круг радиуса $\frac{1}{4}$. Множество M_a является инверсным относительно единичной окружности к внешности множества $\Phi(D)$. Оно целиком содержится в круге радиуса 4, который является инверсией внешности круга радиуса $\frac{1}{4}$ (рис. 2). При уменьшении ε диаметр множества M_a стремится к 4.

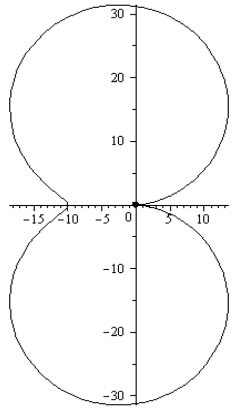

Рис. 1. Образ круга D при отображении $\Phi(z)=\dfrac{z}{1+a_1z+a_2z^2}$ и центральный круг радиуса $\frac{1}{4}$

Теорема 3. Если диаметр множества M больше 16, или диаметр некоторой его связной компоненты больше 4, то ни при каком N не существует управления вида (2), которым возможно было бы локально стабилизировать положение равновесия системы (1) при всех допустимых значениях параметров, входящих в систему.

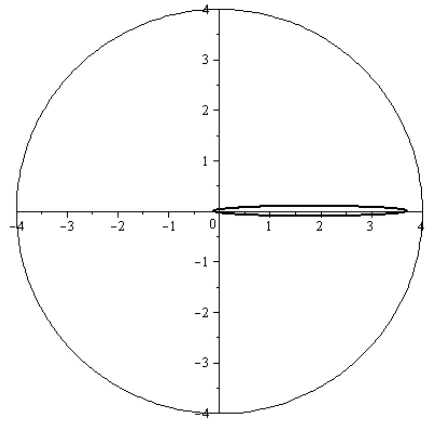

Рис. 2. Область M_a и содержащий ее центральный круг радиуса 4

Теорема 4. Если спектр $\{\mu_1,\ldots,\mu_m\}$ матрицы Якоби $F'(x^*)$ имеет диаметр больше 16, то не существует управления вида (2), стабилизирующего положение равновесия x^*.

Пусть множество M состоит только из вещественных элементов. Тогда возможно сформулировать не только необходимые условия существования стабилизирующего управления (Теорема 5), но и достаточные (Теорема 6).

Теорема 5. Пусть спектр матрицы Якоби системы (1) при всех допустимых значениях параметров вещественный, а множество M односвязно. Тогда для существования стабилизирующего управления вида (2) необходимо, чтобы длина интервала, определенного множеством M, была бы не больше четырех, и все числа этого интервала были бы меньше единицы.

Теорема 6. Пусть $M=(a,b)$, где $-3<a<b<1$. Тогда существует управление $u_n=-\varepsilon(x_{n-1}-x_n)$, локально стабилизирующее положение равновесия системы (1).

Отметим, что даже при выполнении условий Теоремы 6, т.е. когда заведомо существует линейное стабилизирующее управление, оно практически может быть нереализуемо. Как отмечено в [6], бассейн притяжения устойчивого положения равновесия может оказаться чрезвычайно малым.

Пример А. Рассмотрим управляемую хаотическую систему, описываемую уравнением

$$x_{n+1}=h\sin(\pi x_n)+u_n, \tag{6}$$

$$u_n=-\sum_{j=1}^{N-1}\varepsilon_j\left(x_{n-j}-x_{n-j+1}\right), \tag{7}$$

где $h\in\left(-h_0,\frac{1}{\pi}\right)$, $\frac{1}{\pi}<h_0\le 1$. При этом $M=(-\pi h_0,1)$.

Если $h_0\le\frac{3}{\pi}$, то согласно Теореме 6 существует управление (7) при $N=2$, локально стабилизирующее тривиальное положение равновесия $x^*=0$ системы (6) при всех h из допустимого множества. Чем ближе величина h_0 к $\frac{3}{\pi}$, тем меньше становится бассейн притяжения тривиальное положение равновесия.

Пусть $\frac{3}{\pi}<h_0\le 1.$ Для каждого конкретного значения $h\in\left(-h_0,-\frac{3}{\pi}\right)$ существует стабилизирующее управление (7). Т.е. коэффициенты усиления в (7) должны зависеть от h. При этом $\mu\in(-\pi,-3)$, и из условия $2^2<1-\mu\le 2^3$ находим, что $N=3$, и возможна стабилизация двушаговым управлением вида $u_n=-\varepsilon_1(h)(x_{n-1}-x_n)-\varepsilon_2(h)(x_{n-2}-x_{n-1})$.

Однако ни при каком N не существует управления вида (7), не зависящего от h и стабилизирующего тривиальное положение равновесия при всех $h\in(-h_0,1)$.

Пример *B*. Рассмотрим управляемую хаотическую систему, линеаризованную в окрестности положения равновесия:

$$\begin{aligned} x_{n+1}&=\mu_1 x_n+u_n^{(1)} \\ y_{n+1}&=\mu_2 x_n+u_n^{(2)} \end{aligned}, \tag{8}$$

$$u_n=\begin{pmatrix}u_n^{(1)}\\ u_n^{(2)}\end{pmatrix}=-\sum_{j=1}^{N-1}\varepsilon_j\begin{pmatrix}x_{n-j}-x_{n-j+1}\\ y_{n-j}-y_{n-j+1}\end{pmatrix}, \tag{9}$$

где $\mu_j\in M$, $j=1,2$.

Покажем, что существует множество M, диаметр которого больше четырех, и для которого возможна локальная стабилизации тривиального решения системы (8) управлением (9) при всех $\mu_j\in M$, $j=1,2$. Возьмем $\mu_1^0=-\frac{79}{24}$, $\mu_2^0=\frac{23}{24}$. Так как $\mu_1+\mu_2=\frac{17}{4}>4$, то, если стабилизирующее управление существует, то множество M не может быть связным. Определим необходимые условия для N. Так как $1-\mu_1^0\approx 4.29<2^3$, то $N\ge 3$. Если $N=3$, то должны быть устойчивы полиномы

$f_j(\lambda) = \lambda^3 - \mu_j\lambda^2 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$, $j = 1, 2$. Для полиномов степени $N \le 3$ также должны быть устойчивы и все полиномы семейства $\{\vartheta f_j(\lambda) + (1-\vartheta) f_j(\lambda) : \vartheta \in [0,1]\}$ Однако по Теореме 3 это невозможно. Следовательно, $N \ge 4$. Рассмотрим вектор $a = \left(-\frac{7}{6}, \frac{3}{2}, 0, -\frac{1}{3}\right) \in A_4\left(\frac{23}{24}\right)$. Построим образ единичного круга при отображении $\Phi(z) = \dfrac{z}{1 - \frac{23}{24}z - \frac{7}{6}z + \frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{3}z^4}$ (рис. 3). Этот образ не является односвязным множеством (рис. 4).

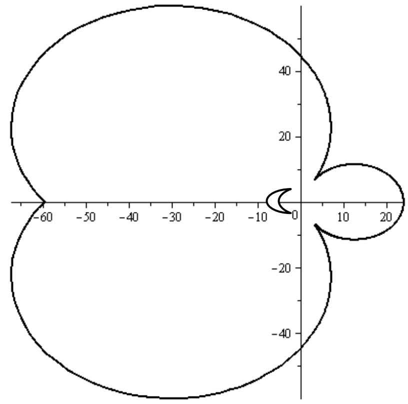

Рис. 3. Образ единичного круга при отображении $\Phi(z)$

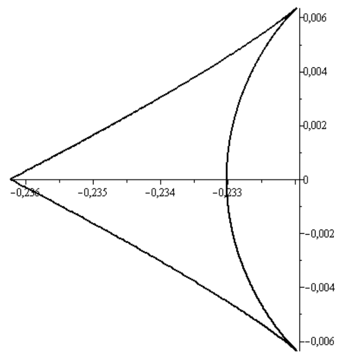

Рис. 4. Множество, не принадлежащее образу единичного круга при отображении $\Phi(z)$

Следовательно, множество $\left(\overline{C} \setminus \Phi_1(\overline{D})\right)^*$ несвязно, и представимо в виде объединения двух односвязных множеств (рис. 5)

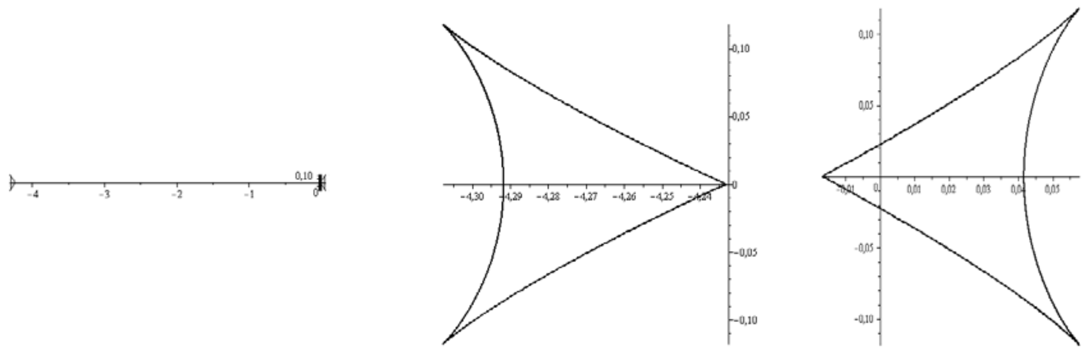

Рис. 5. Область M_1 **возможной дислокации** $\Delta\mu$ **отклонения мультипликаторов** μ **от** μ_2^0

Чтобы существовало стабилизирующее управление, должно выполняться равенство $\mu_1^0 = \mu_2^0 + \Delta\mu$ для некоторого $\Delta\mu \in \left(\overline{C} \setminus \Phi_1(\overline{D})\right)^*$. Действительно, равенство выполнено для $\Delta\mu = -\frac{17}{4}$. Следовательно, при

$M = \left\{ \mu : \ \mu - \mu_2^0 \in M_1 \right\}$ стабилизация возможна, коэффициенты усиления стабилизирующего управления (9) определяются через вектор a: $\varepsilon_1 = \frac{7}{6}$, $\varepsilon_2 = -\frac{1}{3}$, $\varepsilon_3 = -\frac{1}{3}$.

Выводы

Применение *нелинейного* управления позволяет стабилизировать хаос в системах со сколь угодно большим множеством дислокации мультипликаторов за счет увеличения числа N коэффициентов усиления управления $u = -\sum_{j=1}^{N-1} \varepsilon_j \left(F\left(x_{n-j}\right) - F\left(x_{n-j+1}\right) \right)$.

Список использованной литературы

1. Ott E. Controlling chaos / E. Ott, C. Grebodgi, J.A. Yorke // Phys. Rev. – 1990. – Lett. 64. – PP. 1196–1199.
2. Chen G. From chaos to order: Methodologies, Perspectives and Application / G. Chen, X. Dong // World Scientific. – Singapore, 1999.
3. Pyragas K. Continuous control of chaos by self controlling feedback / K. Pyragas // Phys. Rev. – 1992. – Lett. A 170. – PP. 421–428.
4. Ushio T. Limitation of delayed feedback control in nonlinear discrete-time systems / T. Ushio // IEEE Trans. Circ. Syst. – 1996. – V. 43. – PP. 815–816.
5. Socolar J.E.S. Stabilizing unstable periodic orbits in fast dynamical systems / J.E.S. Socolar, D.W. Sukow, D.J. Gauthier // Phys. Rev. – 1994. – E. 50. – PP. 3245–3248.
6. Vieira d.S.M. Controlling chaos using nonlinear feedback with delay / d.S.M. Vieira, A.J. Lichtenberg // Phys. Rev. – 1996. – E. 54. – PP. 1200–1207.
7. Morgul O. Further stability results for a generalization of delayed feedback control / O. Morgul // Nonlinear Dynamics. – 2012. – PP. 1–8.
1. Polyak B.T. Stabilizing chaos with predictive control / B.T. Polyak // Automation and Remote Control. – 2005. – I. 66(11). – PP. 1791–1804.
8. Dmitrishin D. Methods of harmonic analysis in nonlinear dynamics / D. Dmitrishin, A. Khamitova // Comptes Rendus Mathematique. – 2013. – V. 351. – I. 9–10. – PP. 367–370.
9. Fam A.T. A canonical parameter space for linear systems design / A.T. Fam, J.S. Medich // IEEE Trans. Automat. Control. – 1978. – V. AC-23. – № 3. – PP. 454–458.