

УДК 681.3.06

**НЕСКІНЧЕННІ СІМЕЙСТВА ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ПЕЛІ  
З ОПТИМАЛЬНИМ ПІК-ФАКТОРОМ СПЕКТРА УОЛША-АДАМАРА**

*Соколов А.В., Гаркуша О.О.*

*Одеський національний політехнічний університет,  
65044, Україна, м. Одеса, пр-т Шевченка, 1.  
radiosquid@gmail.com*

**БЕСКОНЕЧНЫЕ СЕМЕЙСТВА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ПЭЛИ  
С ОПТИМАЛЬНЫМ ПИК-ФАКТОРОМ СПЕКТРА УОЛША-АДАМАРА**

*Соколов А.В., Гаркуша А.А.*

*Одесский национальный политехнический университет,  
65044, Украина, г. Одесса, пр-т Шевченко, 1.  
radiosquid@gmail.com*

**INFINITE FAMILIES OF PALEY SEQUENCES  
WITH OPTIMAL PAPR OF WALSH-HADAMARD SPECTRUM**

*Sokolov A.V., Garkusha A.A.*

*Odessa National Polytechnic University,  
ave. Shevchenko, 1, 65044, Odessa, Ukraine.  
radiosquid@gmail.com*

**Анотація.** Стаття присвячена питанню зниження пік-фактора сигналів у системах з кодовим розділенням каналів MC-CDMA за рахунок застосування кодів постійної амплітуди (С-кодів). Проведена оптимізація вибору матриці ортогонального перетворення 28-го порядку, в рамках чого знайдено розподілення пік-фактора повного коду відносно матриць конструкцій Пелі та Уільямсона. Проведені дослідження показали перевагу матриці Уолша-Адамара конструкції Пелі. Розроблено регулярний метод синтезу повного класу з  $J=1456$  послідовностей, що володіють оптимальним значенням пік-фактора спектра Уолша-Адамара довжини  $N = 28$ . На основі синтезованих послідовностей запропонований рекурентний метод синтезу послідовностей, що володіють оптимальним значенням пік-фактора  $\kappa=9/7 \approx 1,2857$  довжин  $N=2^{2k} \cdot 28$ ,  $k \in N$ . Синтезовані послідовності застосовні в існуючих системах бездротового зв'язку, що використовують технологію MC-CDMA, а також, як основа для подальших досліджень структурних властивостей послідовностей, що володіють мінімальним значенням пік-фактора спектра Уолша-Адамара і розробки регулярних методів їх синтезу.

**Ключові слова:** пік-фактор, матриця Адамара, конструкція Пелі, оптимальна послідовність, що кодує.

**Аннотация.** Статья посвящена вопросу снижения пик-фактора сигналов в системах с кодовым разделением каналов MC-CDMA за счет применения кодов постоянной амплитуды (С-кодов). Произведена оптимизация выбора матрицы ортогонального преобразования 28-го порядка, в рамках чего найдено распределение пик-фактора полного кода относительно матриц конструкций Пэли и Уильямсона. Проведенные исследования показали преимущество матрицы Уолша-Адамара конструкции Пэли. Разработан регулярный метод синтеза полного класса из  $J=1456$  последовательностей, обладающих оптимальным значением пик-фактора спектра Уолша-Адамара длины  $N = 28$ . На основе синтезированных последовательностей предложен рекуррентный метод синтеза последовательностей, обладающих оптимальным значением пик-фактора  $\kappa=9/7 \approx 1,2857$  длин  $N=2^{2k} \cdot 28$ ,  $k \in N$ . Синтезированные последовательности применимы в существующих системах беспроводной связи, использующих технологию MC-CDMA, а также, как основа для дальнейших исследований структурных свойств последовательностей, обладающих минимальным значением пик-фактора спектра Уолша-Адамара и разработки регулярных методов их синтеза.

---

*Соколов А.В., Гаркуша О.О.*

163

**Ключевые слова:** пик-фактор, матрица Адамара, конструкция Пэли, оптимальная кодирующая последовательность.

**Abstract.** This paper is devoted to solution of the problem of reducing of PAPR of signals in a MC-CDMA systems by applying a constant amplitude codes (C-codes). Optimization of the choice of orthogonal transform matrix of the 28th order is performed. The distribution of the PAPR values of full code with respect to Walsh-Hadamard matrices of Paley and Williamson designs is built. Performed research shown the advantage of Walsh-Hadamard matrix of Paley design. A regular synthesis method of a complete class of  $J = 1456$  sequences having the optimal PAPR value of Walsh-Hadamard spectrum of length  $N = 28$  is developed. On the basis of the synthesized sequences we propose a recurrent synthesis method of sequences having optimal value of PAPR  $\kappa = 9/7 \approx 1,2857$  of lengths  $N = 2^{2k} \cdot 28$ ,  $k \in N$ . The synthesized sequences are applicable in existing wireless communication systems employing MC-CDMA technology as well as they can be the basis for further reseach of the structural properties of the sequences with minimum value of the PAPR of Walsh-Hadamard spectrum and development of the regular methods of their synthesis.

**Key words:** PAPR, Hadamard matrix, Paley's design, optimal coding sequence.

Повсюдне практичне застосування технології кодового розділення каналів MC-CDMA (Multi-Code Code Division Multiple Access) в бездротових мережах передачі даних робить актуальною задачу подальшого її розвитку.

Технологія MC-CDMA володіє багатьма безперечними перевагами: висока гнучкість розподілу ресурсів мережі серед абонентів, здатність протистояти природним і штучним завадам, енергоефективність та ін., які досягаються за рахунок застосування таких досконалих алгебраїчних конструкцій, як ортогональні системи сигналів.

Так, ключовим об'єктом в технології MC-CDMA, що визначає її ефективність, є застосовувана в ній система ортогональних функцій, в якості яких часто використовуються функції Уолша [1]. У системі MC-CDMA вектор бінарних даних  $B = \{b_i\}$ ,  $i = 0, N-1$  піддається ортогональному перетворенню. Кожен біт даних  $b_i$  змінює знак однієї з  $N$  ортогональних функцій дискретного часу  $h_i(t)$ , а вихід є сумою цих  $N$  модульованих функцій, в цьому випадку сигнал, що передається, являє собою спектр Уолша-Адамара послідовності  $B$

$$S_B(t) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i h_i(t). \quad (1)$$

Використання в якості застосовуваних у системі сигналів коефіцієнтів перетворення Уолша-Адамара призводить до появи істотного недоліку системи, пов'язаного з високим значенням пік-фактора [2]

$$\kappa = \frac{P_{\max}}{P_{\text{cp}}} = \frac{1}{N} \max_t \{|S_B(t)|^2\}. \quad (2)$$

Високі значення пік-фактора призводять до ускладнення й удорожчання апаратури, яка використовується, неефективної витрати електроенергії, істотних нелінійних спотворення у системі зв'язку та ін.

Розробці методів зниження пік-фактора сигналів у системах з MC-CDMA останнім часом присвячено досить багато уваги дослідників [2, 3, 4], більшість з яких сходиться на думці, що найбільш перспективним методом зниження пік-фактора є застосування регулярно-конструйованих С-кодів. У даний час активно розробляються С-коди різних довжин [5], проте питання побудови С-кодів довжин, кратних довжині  $N = 28$ , в літературі висвітлені недостатньо, тоді як, з точки зору практичного застосування технології MC-CDMA важлива наявність широкого асортименту систем сигналів різних довжин.



Розгляд даних табл. 1 показує, що матриця Адамара  $H_{pal}$  конструкції Пелі володіє значною кількістю оптимальних послідовностей зі значенням пік-фактора  $\kappa = 9/7 \approx 1,2857$ .

Таким чином, матриця конструкції Пелі є більш ефективною з практичної точки зору.

**Визначення.** Послідовність довжини  $N = 2^{2k} \cdot 28$ ,  $k \in N$ , що володіє мінімальним значенням пік-фактора  $\kappa = 9/7 \approx 1,2857$ , назвемо оптимальною послідовністю, що кодує (ОКП).

Далі запропоновано регулярний метод побудови повного класу ОКП щодо матриці Пелі. Розглянемо одну з оптимальних послідовностей (ОКП):

$$T_1 = \{- - - - + + + - - - - + + + - - - + + + + + + + + +\}, \quad (4)$$

а також її спектральні коефіцієнти

$$S_1 = \{6 \ 6 \ 2 \ 6 \ -6 \ -2 \ -6 \ -2 \ 6 \ 6 \ -2 \ -6 \ -2 \ -6 \ -6 \ 6 \ 6 \ 6 \ -6 \ -2 \ -6 \ -6 \ -6 \ -6 \ -6 \ -2 \ -6\}. \quad (5)$$

До будь-якої ОКП можливо застосувати наступні правила розмноження.

**Правило 1.** Інверсія ОКП.

Для нашого прикладу ми отримуємо нову ОКП  $i$ , відповідно, її спектральні коефіцієнти

$$T_2 = -T_1 = \{+ + - + - - - + + + - - - + + + - - - - - - - - -\};$$

$$S_1 = -S = \{-6 \ -6 \ -2 \ -6 \ 6 \ 2 \ 6 \ 2 \ -6 \ -6 \ 2 \ 6 \ 2 \ 6 \ 6 \ -6 \ -6 \ -6 \ 6 \ 2 \ 6 \ 6 \ 6 \ 6 \ 6 \ 2 \ 6\}. \quad (6)$$

**Правило 2.** Уявімо деяку вихідну ОКП, що володіє мінімальним значенням пік-фактора в узагальненому вигляді

$$ОКП = \{h_0 h_1 h_2 h_3 h_4 h_5 h_6 h_7 h_8 h_9 h_{10} h_{11} h_{12} h_{13} h_{14} h_{15} h_{16} h_{17} h_{18} h_{19} h_{20} h_{21} h_{22} h_{23} h_{24} h_{25} h_{26} h_{27} h_{28}\}. \quad (7)$$

Найважливішим і універсальним правилом побудови ОКП є наступна конструкція, розроблена на основі врахування структурних властивостей вихідної матриці Пелі:

$$H_v = [h_0 \ cat \ D^v \{h_1, h_2, \dots, h_{14}\} \ cat \ h_{15} \ cat \ D^v \{h_{16}, h_{17}, \dots, h_{28}\}], \quad v = 0, \dots, 13, \quad (8)$$

де  $D^v$  – оператор циклічного зсуву елементів послідовності на величину  $v$ ;

$cat$  – оператор горизонтальної конкатенації.

Наприклад, розглянемо нашу вихідну послідовність (4) і застосуємо до неї розроблений нами оператор (8), в результаті чого отримуємо 14 нових послідовностей

$$ОКП_v = \left\{ \begin{array}{l} v=0: \quad - - - - + + + - - - - + + + - - - + + + + + + + + + \\ v=1: \quad - + - + - + + + - - - - + + + - - - + + + + + + + + + \\ v=2: \quad - + + - + - + + + - - - - + + + - - - + + + + + + + + + \\ v=3: \quad - + + + - + - + + + - - - - + + + - - - + + + + + + + + + \\ v=4: \quad - - + + + - + - + + + - - - - + + + + - - - + + + + + + + + + \\ v=5: \quad - - - + + + - + - + + + - - + + + + + - - - + + + + + + + + + \\ v=6: \quad - - - - + + + - + - + + + - + + + + + + - - - + + + + + + + + + \\ v=7: \quad - - - - - + + + - + - + + + + + + + + + - - - + + + + + + + + + \\ v=8: \quad - + - - - - + + + - + - + + + + + + + + + - - - + + + + + + + + + \\ v=9: \quad - + + - - - - + + + - + - + + + + + + + + + - - - + + + + + + + + + \\ v=10: \quad - + + + - - - - + + + - + - + + + + + + + + + - - - + + + + + + + + + \\ v=11: \quad - - + + + - - - - + + + - + - + + + + + + + + + - - - + + + + + + + + + \\ v=12: \quad - + - + + + - - - - + + + - + - - + + + + + + + + + - - - + + + + + + + + + \\ v=13: \quad - - + - + + + - - - - + + + - - - + \end{array} \right. \quad (9)$$

Усі отримані послідовності володіють спектральними коефіцієнтами з мінімальним значенням пік-фактора серед послідовностей довжини  $N = 28$ .

Дослідження алгебраїчної конструкції (9) дозволяє зробити висновок, що через структурні особливості ОКП (4), послідовності при  $v=0$  і  $v=13$  повністю збігаються. Дослідження показують, що в загальному випадку з повної множини ОКП може бути виділений породжуючий клас, який породжує всі інші існуючі ОКП на основі Правил 1 і Правил 2. У табл. 2 надано породжуючий клас ОКП, що складається зі 112 послідовностей, а також поряд проставлені допустимі значення циклічних зсувів, які можуть бути застосовані до вихідної послідовності для отримання унікальних структур ОКП.

Таблиця 2 – Породжуючий клас ОКП

ОКП	Зсуви	$\lambda$	ОКП	Зсуви	$\lambda$	ОКП	Зсуви	$\lambda$	ОКП	Зсуви	$\lambda$
D1E1C00	1-9	9	DB59390	1,2,3,5,6,10,11	7	10EFD68	1,2,4,7,9	5	D9DD594	1,3,5,6,9,11	6
91FB500	1-7,9,11	9	4CB7250	1-3,5,7,8,10,11	8	50AB7E8	1,2,4,11	4	084FAD4	1,3,5,8,10	5
2E15D00	1-7,9	8	0EE7150	1-3,5,7,9...11	8	AF17FE8	1,2,4	3	22215D4	1,3,5,9,11	5
6A85700	1-7,11	8	2E81550	1-3,5,7,9,11	7	DFB7A58	1,2,5,7,8,10	6	2409CB4	1,3,6,8,9	5
6F0FF00	1-7	7	D1FDD50	1,2,3,5,7,9	6	20CBE58	1,2,5,7,8	5	5BD59B4	1,3,6,9,10	5
E349240	1-5,7,8,10,11	9	2619C30	1,2,3,6-9	7	294BBD8	1,2,5,10	4	77B7ACC	1,4,5,8,10	5
D579740	1-5,7,11	7	F1E5930	1,2,3,6,7,9,10	7	F8994B8	1,2,6,8,9,11	6	5ED96CC	1,4,5,8,11	5
AA01DC0	1-5,9	6	D9F5CB0	1,2,3,6,8,9	6	0F674B8	1,2,6,8,9,11	6	AA31DCC	1,4,5,9	4
93E7820	1-4,6,7,8,9,10	9	F36DA70	1,2,3,7,8,10	6	87656B8	1,2,6,8,11	5	108F5AC	1,4,6,9,11	5
6C1FC20	1-4,6-9	8	F17D570	1,2,3,7,9,11	6	709B6B8	1,2,6,8,11	5	30E3E6C	1,4,7,8	4
4E19920	1-4,6,7,9,10	8	0E01D70	1,2,3,7,9	5	7AB93B8	1,2,6,10,11	5	CA91B6C	1,4,7,10	4
90E3F20	1-4,6,7	6	0E95370	1,2,3,7,10,11	6	304BA78	1,2,7,8,10	5	CF1BF6C	1,4,7	3
1CB1260	1-4,7,8,10,11	8	F14B370	1,2,3,7,10,11	6	CF37E78	1,2,7,8	4	EB53DEC	1,4,9	3
8C11B60	1-4,7,10	6	60FDEF0	1,2,3,8	4	700B578	1,2,7,9,11	5	1DCDD5C	1,5,7,9	4
71EDF60	1-4,7	5	6757988	1,2,4,5,6,9,10	7	7169378	1,2,7,10,11	5	D6B3BDC	1,5,10	3
0DF30E0	1-4,8-11	8	90ABD88	1,2,4,5,6,9	6	8EB7378	1,2,7,10,11	5	C797B7C	1,7,10	3
C20F3E0	1-4,10,11	6	88ABB88	1,2,4,5,6,10	6	8F91F78	1,2,7	3	306DF7C	1,7	2
63EDBE0	1-4,10	5	7F57F88	1,2,4,5,6	5	9F05EF8	1,2,8	3	FD17EAA	2,4,6,8	4
9E11FE0	1-4	4	68E9EC8	1,2,4,5,8	5	8F577F8	1,2,11	3	336DB6A	2,4,7,10	4
B35B210	1-3,5-8,10,11	9	D717EC8	1,2,4,5,8	5	70EBFF8	1,2	2	B711EEA	2,4,8	3
81F3E10	1,2,3,5-8	7	55EDDC8	1,2,4,5,9	5	6D5B924	1,3,4,6,7,9,10	7	BB11DEA	2,4,9	3
D159110	1-3,5-7,9-11	9	FF1FE28	1,2,4,6,7,8	6	9267524	1,3,4,6,7,9,11	7	40EDFEA	2,4	2
6E27510	1-3,5-7,9,11	8	91EDD28	1,2,4,6,7,9	6	6F9FF24	1,3,4,6,7	5	C6F7B5A	2,5,7,10	4
2CA5310	1-3,5-7,10,11	8	6F13D28	1,2,4,6,7,9	6	21394A4	1,3,4,6,8,9,11	7	9335EDA	2,5,8	3
266F490	1-3,5,6,8,9,11	8	988F8A8	1,2,4,6,8,9,10	7	92879A4	1,3,4,6,9,10	6	CC95B7A	2,7,10	3
26A5190	1-3,5,6,9-11	8	00EBEA8	1,2,4,6,8	5	D243664	1,3,4,7,8,11	6	5A73FB6	3,6	2
2E29D90	1,2,3,5,6,9	6	EF775A8	1,2,4,6,9,11	6	9BDDA94	1,3,5,6,8,10	6	4A65EF6	3,8	2
D1D3D90	1,2,3,5,6,9	6	EE11D68	1,2,4,7,9	5	A421994	1,3,5,6,9,10	6	4AEBEEE	4,8	2

На основі даних табл. 2 може бути побудований повний клас ОКП довжини  $N = 28$  та потужності  $J = 1456$ . Однак, практичний інтерес складає побудова нескінченних множин ОКП довжин  $N = 2^{2k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  на основі повного класу ОКП довжини  $N = 28$ .

Подальше збільшення порядку матриці Пелі можливо за рахунок використання конструкції Сільвестра, яка визначається наступним співвідношенням [7]



ЛИТЕРАТУРА:

1. Бакулин М.Г. Технология OFDM / [Бакулин М.Г., Крейнделин В.Б., Шлома А.М., Шумов А.П.] – М.: Горячая линия – Телеком, 2016. – 360 с.
2. Paterson K. G. Sequences For OFDM and Multi-code CDMA: two problems in algebraic coding theory / K.G. Paterson // Sequences and their applications. Seta 2001. Second Int. Conference (Bergen, Norway, May 13–17, 2001). Proc. Berlin: Springer, 2002. – P. 46–71.
3. Sokolov A.V. Regular synthesis method of the sequences of length  $N=24$  with optimal PAPR of Walsh-Hadamard spectrum / A.V. Sokolov // Far East Journal of Electronics and Communications. – Vol. 16. – No. 2. – P. 459–469.
4. Гепко И.А. Формирование частотно-компактных сигналов с минимальным пик-фактором для систем MC-CDMA с расширением спектра в частотной области / И. А. Гепко // Изв. вузов. Радиоэлектроника. – 2001. – 44. – № 11–12, [ч. 1]. – С. 15–25.
5. Соколов А.В. Конструктивный метод синтеза последовательностей длины  $N = 20$  с оптимальным спектром Уолша-Адамара / А.В. Соколов // Научные труды ОНАС им. А.С. Попова. – 2015. – № 2. – С. 118–126.
6. Sloane N. J. A. A Library of Hadamard Matrices [Electronic Resource]. – <http://neilsloane.com/hadamard/>
7. Мазурков М.И. Системы широкополосной радиосвязи / Мазурков М.И. – Одесса: Наука и Техника, 2010. – С. 340.

REFERENCES:

1. Bakulin M.G. The OFDM Technology / [M.G. Bakulin, V.B. Kreyndelin, A.M. Shlomo, A.P. Shumov]. – Moscow.: Hotline - Telecom. – P. 360.
2. Paterson K. G. Sequences For OFDM and Multi-code CDMA: two problems in algebraic coding theory / K.G. Paterson // Sequences and their applications. Seta 2001. Second Int. Conference (Bergen, Norway, May 13-17, 2001). Proc. Berlin: Springer, 2002. – P. 46-71.
3. Sokolov A.V. Regular synthesis method of the sequences of length  $N = 24$  with optimal PAPR of Walsh-Hadamard spectrum / A.V. Sokolov // Far East Journal of Electronics and Communications. – Vol. 16. – No. 2. – P. 459 – 469.
4. Gepko I.A. Formation of compact frequency signals with minimal PAPR for MC-CDMA systems, spreading in frequency domain / I.A. Gepko. – Proc. of universities. Radioelectronics. – 2001. – 44, No. 11–12, [h. 1]. – P. 15–25.
5. Sokolov A.V. constructive synthesis method of sequences of length  $N = 20$  with optimal Walsh-Hadamard spectrum / A.V. Sokolov // Proc. of ONAT named after A.S. Popov, 2015. – № 2. – S. 118–126.
6. Sloane N. J. A. A Library of Hadamard Matrices [Electronic Resource]. <http://neilsloane.com/hadamard/>.
7. Mazurkov M.I. Broadband radio systems / M.I. Mazurkov – Odessa: Science and Technology, 2010. – P. 340.