

УДК 539.378

В.П. Белоус, магистр, Одес. нац. политехн. ун-т

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ДЕЙСТВИИ ОСЕВОГО СЖАТИЯ И ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ

В.П. Белоус. Стійкість підкріплених циліндричних оболонок при дії осевого стиску і зовнішнього тиску. Розглянуто тонкостінну циліндричну оболонку при одночасній дії осевих стискальних зусиль і зовнішнього тиску у випадку її підкріплення набором кільцевих і поздовжніх ребер. За результатами проведених чисельних експериментів запропоновано методику визначення зони стійкості при комбінації критичних навантажень.

Ключові слова: циліндрична оболонка, ребра жорсткості, стійкість, критичні навантаження.

В.П. Белоус. Устойчивость подкрепленных цилиндрических оболочек при действии осевого сжатия и внешнего давления. Рассмотрена тонкостенная цилиндрическая оболочка при одновременном действии осевых сжимающих усилий и внешнего давления в случае ее подкрепления набором кольцевых и продольных ребер. По результатам проведенных численных экспериментов предложена методика определения зоны устойчивости при комбинации критических нагрузок.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, ребра жесткости, устойчивость, критические нагрузки.

V.P. Belous. Stability of supported cylindrical shells under the action of axial compression and external pressure. The thin-walled cylindrical shell is considered at simultaneous action of axial compressing efforts and external pressure in case of its reinforcement by a set of rings and longitudinal ribs. By results of the carried out numerical experiments the method of definition of a zone of stability is offered with a combination of critical loadings.

Keywords: cylindrical shell, stiffening ribs, stability, critical loadings.

Во многих машиностроительных и строительных конструкциях корпусные тонкостенные цилиндрические оболочечные элементы подвергаются одновременному действию нагрузок разного типа. При этом в случае, если эти нагрузки являются сжимающими, особое значение имеет устойчивость оболочек. Далее рассматривается определение критических нагрузок при таком нагружении цилиндрических оболочек, когда одновременно действуют осевые сжимающие усилия и внешнее давление. Сочетание этих нагрузок характерно, например, для высоких башен резервуаров, используемых в химической промышленности, когда в нижнем поясе башни возникают сжимающие напряжения от ее собственного веса, и при этом внутри башни может иметь место вакуум.

Для повышения устойчивости оболочек в сравнении с увеличением толщины стенок целесообразным считается их подкрепление, как правило снаружи, ребрами жесткости: кольцевыми и продольными. Они могут соединяться с оболочечной обечайкой любым способом, лишь бы соединение обеспечивало совместную работу ребер и стенки обечайки. В случае, если ребра находятся на большом расстоянии друг от друга, они рассматриваются как дискретные элементы, и тогда можно получить только численное решение соответствующей задачи [1]. Наиболее эффективным широко используемым современным средством такого решения, позволяющим учесть многие сложные геометрические и силовые факторы, является применение метода конечных элементов (МКЭ). Одним из наиболее мощных коммерческих продуктов, использующих МКЭ, является комплекс ANSYS/Structural, среда которого Buckling Analysis позволяет определять формы потери устойчивости и критические нагрузки, что и было использовано в расчетах на устойчивость неподкрепленных и подкрепленных круговых цилиндрических оболочек.

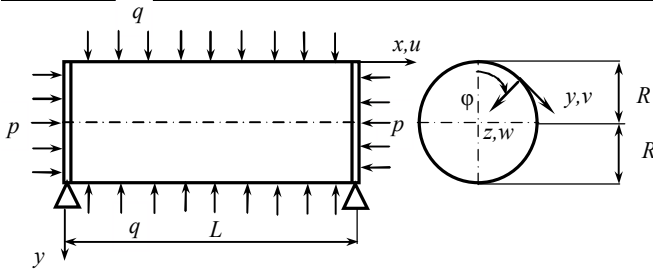


Рис. 1. Расчетная схема цилиндрической оболочки при действии поверхностного внешнего давления и осевых сжимающих усилий

Известны решения задач устойчивости цилиндрических оболочек при их подкреплении набором кольцевых и продольных ребер для случаев отдельного действия сжимающих осевых усилий и внешнего давления [2], однако соответствующие аналитические исследования при одновременном наличии этих двух нагружений практически отсутствуют из-за математических трудностей. В этой связи проведенное рассмотрение данного вопроса на базе численных эксперимен-

тов с последующими методическими рекомендациями расчетного характера можно считать вполне актуальным для проблемы устойчивости подкрепленных оболочечных элементов.

Для случая свободного опирания торцов предварительно рассматривалась тонкостенная цилиндрическая оболочка радиуса R , длиной L и толщиной стенки h , находящаяся под действием внешнего давления q и осевого погонного сжимающего усилия p , изотропный материал которой имеет модуль упругости E и коэффициент Пуассона μ . Примем для срединной поверхности недеформированной оболочки правую подвижную цилиндрическую систему координат xuz . Направим ось x по верхней образующей цилиндра, ось y — по дуге окружности, а ось z — нормально к срединной поверхности, считая положительным ее направление к центру кривизны, причем угол $\phi = y/R$. Обозначим перемещения точки срединной поверхности вдоль осей x, y, z соответственно через u, v, w (рис. 1).

Решение задачи об устойчивости цилиндрической оболочки при таком нагружении в линейной постановке базируется на следующем исходном уравнении для оболочек средней длины [3]:

$$D \cdot \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{Eh}{R^2} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + ph \cdot \nabla^2 \nabla^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + qR \cdot \nabla^2 \nabla^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \quad (1)$$

Геометрические размеры таких оболочек удовлетворяют условию

$$\sqrt{\frac{h}{R}} < \frac{R}{L} < \sqrt{\frac{R}{h}},$$

а присутствующая в уравнении (1) цилиндрическая жесткость оболочки $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$.

Так как граничные условия свободного опирания торцов оболочки имеют вид

$$w|_{x=0,L} = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0,L} = 0, \quad (2)$$

то, приняв для прогиба выражение

$$w = f_m \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y, \quad (\lambda_m = m\pi/L; \quad \lambda_n = n/R),$$

где m — число полуволн изогнутой поверхности оболочки по прямолинейной образующей, а n — число полных волн вдоль ее круговой направляющей, в случае потери устойчивости ($f_{mn} \neq 0$), после введения в рассмотрение безразмерных параметров

$$\bar{p} = \frac{p}{E} \cdot \frac{R}{h}; \quad \bar{q} = \frac{q}{E} \cdot \frac{R^2}{h^2}; \quad \eta = \frac{\lambda_n}{\lambda_m} = \frac{n}{m\pi} \cdot \frac{L}{R}; \quad \chi = \lambda_m^2 R h = m^2 \pi^2 \cdot \frac{R h}{L^2}, \quad (3)$$

получено уравнение, определяющее комбинацию критических нагрузок \bar{p} и \bar{q} [3]

$$\bar{q} \cdot \eta^2 + \bar{p} = \bar{q} \cdot \left(\eta^2 + \frac{\bar{p}}{\bar{q}} \right) = \frac{(1 + \eta^2)^2 \cdot \chi}{12(1 - \mu^2)} + \frac{1}{(1 + \eta^2) \cdot \chi}. \quad (4)$$

Очевидно, что при определенных значениях параметров η и χ критические значения величин \bar{p} и \bar{q} связаны между собой линейной зависимостью (рис. 2).

Следует отметить, что точки A и B соответствуют критическим нагрузкам осевого сжатия \bar{p}_{0c} и внешнего давления \bar{q}_{0c} , приложенным отдельно друг от друга.

В случае отсутствия внешнего давления, когда $\bar{q} = 0$,

$$\bar{p}_0 = \frac{(1 + \eta^2)^2 \cdot \chi}{12(1 - \mu^2)} + \frac{1}{(1 + \eta^2) \cdot \chi},$$

а соответствующее минимальное (критическое) значение при $\mu = 0,3$

$$\bar{p}_{0c} = \frac{1}{\sqrt{3(1 - \mu^2)}} = 0,6052. \quad (5)$$

Аналогично, при отсутствии осевого сжатия, $\bar{p} = 0$,

$$\begin{aligned} \bar{q}_0 &= \frac{(1 + \eta^2)^2 \cdot \chi}{12(1 - \mu^2) \cdot \eta^2} + \frac{1}{(1 + \eta^2) \cdot \eta^2 \chi}, \\ \bar{q}_{0c} &= \frac{\pi\sqrt{6}}{9\sqrt{(1 - \mu^2)}} \cdot \frac{R}{L} \sqrt{\frac{h}{R}} = 0,9177 \cdot \frac{R}{L} \sqrt{\frac{h}{R}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Точки прямой A и B определяют комбинацию критических значений \bar{p} и \bar{q} , которые соответствуют уравнению для границы зоны устойчивости

$$\frac{\bar{p}}{\bar{p}_{0c}} + \frac{\bar{q}}{\bar{q}_{0c}} = 1,$$

или, с учетом выражений (5) и (6),

$$\frac{\bar{p}}{0,6052} + \frac{\bar{q}}{0,9177} \cdot \frac{L}{R} \cdot \sqrt{\frac{R}{h}} = 1. \quad (7)$$

Результаты расчётов критических нагрузок согласно уравнению (7) \bar{p}_c , \bar{q}_c и с помощью комплекса ANSYS \bar{p}_k , \bar{q}_k для неподкреплённой цилиндрической оболочки длиной $L = 6$ м, радиусом $R = 3$ м и толщиной стенки $h = 0,02$ м приведены в таблице.

Критические нагрузки для неподкреплённой цилиндрической оболочки

\bar{p} / \bar{q}	0	0,5	5	10	20	30	40	50	∞
\bar{q}_c	0,0384	0,0372	0,0291	0,0235	0,0169	0,0132	0,0109	0,0093	0
\bar{q}_k	0,0416	0,0406	0,0318	0,0250	0,0175	0,0135	0,0110	0,0093	0
\bar{p}_c	0	0,0186	0,1457	0,2348	0,3383	0,3966	0,4340	0,4663	0,6052
\bar{p}_k	0	0,0203	0,159	0,2504	0,3502	0,4056	0,4396	0,4650	0,5876

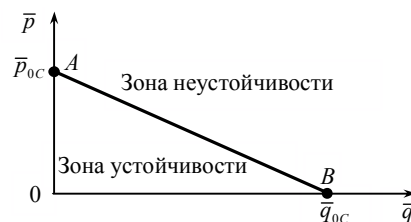


Рис. 2. График для определения комбинации критических нагрузок при совместном действии осевого сжатия и внешнего давления

Следует отметить, что в случае часто встречающегося в инженерных приложениях всестороннего сжатия, когда отношение $\bar{p} / \bar{q} = 0,5$ ($ph = qR / 2$), осевое сжатие практически не влияет на критическое давление \bar{q}_c и его можно не учитывать.

Соответствующие графики, иллюстрирующие зоны устойчивости, представлены на рис. 3. Слегка выпуклая кривая 2 практически совпадает (расхождения не превышали 3%) с прямой 1, которую можно использовать в первом приближении при определении комбинации критических нагрузок \bar{p}_c и \bar{q}_c . При этом очевидно, что эти нагрузки будут определены с некоторым запасом.

Для цилиндрической оболочки с теми же геометрическими параметрами в случае подкрепления ее равномерно распределенными четырьмя шпангоутами и восемью стрингерами прямоугольного сечения (шириной 0,20 м и высотой 0,30 м) с помощью комплекса ANSYS были проведены расчеты по определению критических нагрузок как при отдельном, так и одновременном действии осевого сжатия и внешнего давления. В этом случае график, соответствующий результатам расчета, также несущественно отличается (расхождения не превышали 7%) от прямой, представление которой на рис. 4, иллюстрирует существенное расширение зоны устойчивости оболочки в случае ее подкрепления набором взаимно перпендикулярных ребер.

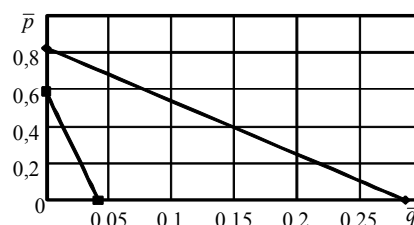
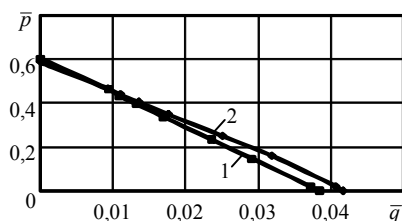


Рис. 3. График для определения зоны устойчивости для неподкрепленной цилиндрической оболочки при комбинированной нагрузке: 1 — согласно уравнению (7); 2 — с помощью комплекса ANSYS

В результате проведенных исследований для подкрепленных цилиндрических оболочек рекомендуется методика определения двухпараметрической зоны их устойчивого поведения и комбинации критических нагрузок при одновременном действии осевого сжатия и внешнего давления. Достаточно найти критические нагрузки \bar{q}_{0c} и \bar{p}_{0c} отдельно для каждого вида нагружения и, далее, в системе координат $\bar{p} - \bar{q}$ соединить эти точки прямой. Наиболее эффективной эта методика является для оболочек с геометрически сложными наборами подкрепляющих ребер, когда практически невозможно получение соответствующего аналитического решения.

Литература

1. Теребушко, О.И. Устойчивость и закритические деформации оболочек, подкрепленных редко расставленными ребрами / О.И. Теребушко // Расчет пространствен. конструкций. — М.: Госстройиздат, 1967. — С. 131 — 160.
2. Расчет и прочность деталей машин. Справочник / И.А. Биргер, Б.Ф. Шорр, Г.Б. Иосилевич. — М.: Машиностроение, 1979. — 702 с.
3. Вольмир, А.С. Устойчивость деформируемых систем / А.С. Вольмир. — М.: Наука, 1967. — 984 с.

References

1. Terebushko, O.I. Ustoychivost' i zakriticheskie deformatsii obolochek, podkreplennykh redko rasstavlennymi rebrami [Stability and Supercritical Deformation of Shells, Reinforced by Widely Spaced Ribs]

-
- / O.I. Terebushko. // Raschet prostranstven. konstruksiy [Calculation of Spatial Structures]. — Moscow, 1967. — pp. 131 — 160.
2. Raschet i prochnost' mashin. Sprav [Calculation and Durability of Machine Parts. Handbook] / I.A. Birger, B.F. Shor, G.B. Ioselevich. — Moscow, 1979. — 702 p.
 3. Volmir, A.S. Ustoychivost' deformiruemyykh sistem [Stability of Deformable Systems] / A.S. Volmir. — Moscow, 1967. — 984 p.

Рецензент д-р техн. наук, проф. Одес. нац. политехн. ун-та Дашенко А.Ф.

Поступила в редакцию 17 апреля 2012 г.