

УДК 539.3:624.071.34

И.М. Чаюн, д-р техн. наук, проф.,  
А.В. Непомнящий, инженер,  
Одес.нац. политехн. ун-т

## ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ ПРИ СИЛОВОМ И ТЕМПЕРАТУРНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

*И.М. Чаюн, О.В. Непомнящий. Энергетичний метод визначення переміщень в стержневих системах при силівій та температурній дії.* Розроблено метод, що базується на використанні комплексу жорсткостей системи, які відповідають як силівій, так і температурній дії і визначаються на основі потенційної енергії пружної деформації системи.

*Ключові слова:* кабель, жорсткість, деформація, потенційна енергія.

*И.М. Чаюн, А.В. Непомнящий. Энергетический метод определения перемещений в стержневых системах при силовом и температурном воздействии.* Разработан метод, базирующийся на использовании комплекса жесткостей системы, которые соответствуют как силовому, так и температурному воздействию и определяются на основе потенциальной энергии упругой деформации системы.

*Ключевые слова:* кабель, жесткость, деформация, потенциальная энергия.

*I.M. Chayun, A.V. Nepomnyashchii. Energy method of displacement determination inside bar systems under the strain stress and thermal action.* A method based on the use of the complex of system rigidities that correspond to both strain stress, and thermal action, is developed. The rigidities themselves are determined on the basis of the potential energy of the system elastic deformation.

*Keywords:* cable, rigidity, deformation, potential energy.

При расчетах на прочность и жесткость статически неопределимых конструкций используется два основных метода: метод сил и метод перемещений [1...3]. В состав обоих методов входит определение перемещений на основе составления и совместного решения геометрических, статических и физических уравнений. Целью работы было создание энергетического метода определения перемещений в стержневых конструкциях при силовом и температурном воздействии, который значительно сократит трудоемкость расчета, т.к. обходится без составления статических уравнений и последующего совместного решения.

Суть метода рассмотрим на примере стержневой системы (рис. 1) в которой  $\Delta$  представляет перемещение узла (сечения)  $B$  от силового и температурного воздействия.

При действии силы  $F$  (рис. 1, *a*)  $\Delta l_1; \dots; \Delta l_i$  — упругие изменения длины стержней

$$\Delta l_i = \Delta \cos \alpha_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, s, \quad (1)$$

где  $s$  — количество стержней.

При температурном воздействии (рис. 1, *б*)  $\Delta l_{1T}; \dots; \Delta l_{iT}$  — изменение длины стержней от действия температуры  $T$  °С, которые они имели бы в свободном состоянии;

$\Delta l_1; \dots; \Delta l_i$  — упругие укорочения либо удлинения стержней по отношению к  $\Delta l_{1T}; \dots; \Delta l_{iT}$  в составе конструкции

$$\Delta l_i = \Delta \cos \alpha_i + \nu_i l_i T, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad (2)$$

где  $\nu_i$  — температурный коэффициент длины;

$l_i$  — длина  $i$ -го стержня;

$T$  — изменение температуры.

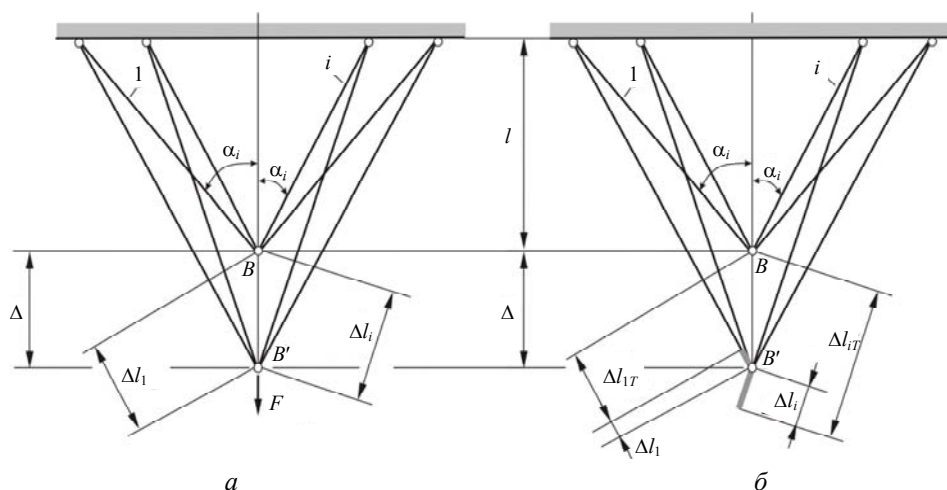


Рис. 1. Расчетная схема деформирования при силовом (а) и температурном (б) воздействии

Выражение (2) представляет уравнения совместности перемещений. При этом среди  $s$  стержней конструкции часть их будет растянутыми, а другая часть сжатыми.

Все энергетические методы используют выражения потенциальной энергии  $U$  упругой деформации системы. Применительно к рисунку 1

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \Delta l_i^2 \bar{\Phi}_{pi}, \quad (3)$$

где  $\bar{\Phi}_{pi} = (EA)/\ell$  — жесткость  $i$ -го стержня ( $E$  — модуль упругости материала;  $A$  — площадь поперечного сечения).

При этом удобнее использовать удельную потенциальную энергию  $u$  (например, для канатов, кабелей, проводов ЛЭП):

— при силовом воздействии

$$u = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \varepsilon^2 \Phi_{pi} \cos^3 \alpha_i, \quad (4)$$

где  $\varepsilon = \Delta/\ell$  — продольная деформация детали;

$\Phi_{pi} = (EA)_i$  — жесткость сечения  $i$ -го стержня;

— при температурном воздействии

$$u = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \Phi_{pi} (\varepsilon^2 \cos^3 \alpha + 2\nu_i T \varepsilon \cos \alpha_i + \nu_i^2 T^2 \cos^{-1} \alpha_i). \quad (5)$$

Основой предлагаемого метода являются жесткостные характеристики конструкции, определяемые по теореме: вторая частная производная от удельной потенциальной энергии упругого деформирования по деформации равна соответствующей жесткости сечения (например, каната, кабеля, провода ЛЭП) [4].

Так, вторая частная производная от выражения (4) по деформации  $\varepsilon$  представляет продольную жесткость, которая проявляется при растяжении силой  $F$ ,

$$G_{\varepsilon\varepsilon} = \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \varepsilon^2 \Phi_{pi} \cos^3 \alpha_i \right) = \sum_{i=1}^s \Phi_{pi} \cos^3 \alpha_i. \quad (6)$$

Исследования показали, что указанная теорема применима и при температурном воздействии. Причем вторая частная производная по деформации равна продольной жесткости (6), а смешанная производная представляет продольно-температурную жесткость

$$G_{\varepsilon T} = \frac{\partial^2 u}{\partial \varepsilon \partial T} = \sum_{i=1}^s \Phi_{pi} v_i \cos \alpha_i. \quad (7)$$

Физический смысл продольно-температурной жесткости — это продольное усилие, которое действует на конструкцию при изменении температуры на  $1^\circ\text{C}$ .

Отсюда определение деформации (перемещения) при температурном воздействии выражается как

$$\varepsilon = \pm T \frac{G_{\varepsilon T}}{G_{\varepsilon \varepsilon}}, \quad (8)$$

где знак  $\pm$  зависит от направления изменения температуры.

Предлагаемый метод применим к различным видам конструкций. Рассмотрим пример конструкции (рис. 2).

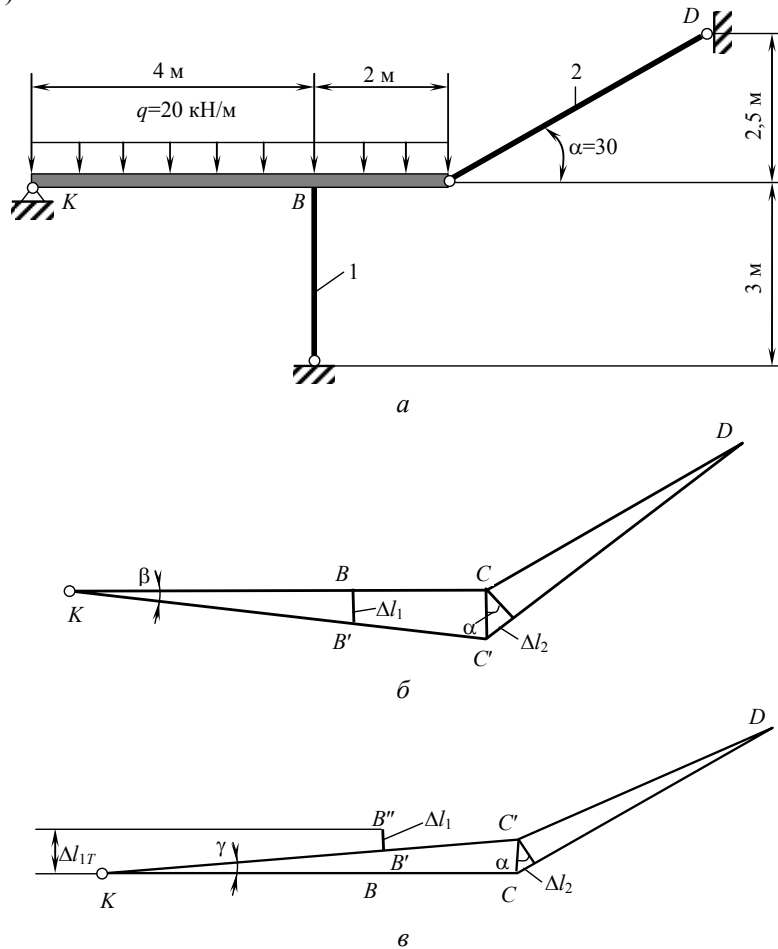


Рис. 2. Стержневая система

Определить угол поворота  $\beta$  абсолютно жесткой балки  $KBC$  (рис. 2, а, б) от действия нагрузки  $q$  и угол поворота  $\gamma$  от изменения температуры стержня 1 на  $T = +20^\circ\text{C}$  (рис. 1, в).  
Материал стержней 1 и 2 сталь:  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ;  $\nu = 125 \cdot 10^{-7}$ ; площади поперечных сечений стержней  $A_1 = 641 \text{ мм}^2$ ;  $A_2 = 320,5 \text{ мм}^2$ .

Расчетные схемы деформированных состояний показаны на рис. 2, б, в.

При действии нагрузки  $q$  укорочение-удлинение стержней

$$\Delta l_1 = 4\beta; \Delta l_2 = 6\beta \sin 30^\circ = 3\beta. \quad (9)$$

Потенциальная энергия упругого деформирования

$$U = f(\beta) = \frac{1}{2} \sum \Delta l_i^2 \bar{\Phi}_i = \frac{1}{2} \left( (4\beta)^2 \frac{EA_1}{l_1} + (3\beta)^2 \frac{EA_2}{l_2} \right) = (16\bar{\Phi}_1 + 9\bar{\Phi}_2) \beta^2. \quad (10)$$

При действии температуры на стержень 1

$$\Delta l_1 = \nu_1 T l_1 - 4\gamma; \Delta l_2 = 3\gamma. \quad (11)$$

Потенциальная энергия упругого деформирования

$$U = f(\gamma) = \frac{1}{2} \sum \Delta l_i^2 \bar{\Phi}_i = \frac{1}{2} (\nu_1^2 T^2 l_1^2 \bar{\Phi}_1 + 8\nu_1 T l_1 \bar{\Phi}_1 + (16\bar{\Phi}_1 + 9\bar{\Phi}_2) \gamma^2). \quad (12)$$

Вторые частные производные от потенциальной энергии (10), (12) представляют соответствующие жесткости:

— при действии нагрузки

$$G_{\beta\beta} = \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \left( \frac{1}{2} (16\bar{\Phi}_1 + 9\bar{\Phi}_2) \beta^2 \right) = 16\bar{\Phi}_1 + 9\bar{\Phi}_2; \quad (13)$$

— при действии температуры

$$G_{\gamma\gamma} = \frac{\partial^2 U}{\partial \gamma^2} = 16\bar{\Phi}_1 + 9\bar{\Phi}_2; \quad (14)$$

$$G_{\gamma T} = \frac{\partial^2 U}{\partial \gamma \partial T} = 4\Phi_1 \nu. \quad (15)$$

Обобщение выражений (6), (7) и (9) ... (15) позволяет представить жесткости в виде

$$G_{\beta\beta} = G_{\gamma\gamma} = \sum_{i=1}^s K_i \bar{\Phi}_i; \quad (16)$$

$$G_{\gamma T} = \sum_{i=1}^s K_{Ti} \Phi_i \nu_i, \quad (17)$$

где  $K_i$  и  $K_{Ti}$  — конструктивные коэффициенты, численно зависящие от геометрического расположения стержней в конструкции:  $K_1 = 16$ ,  $K_2 = 9$ ;  $K_{T1} = 4$ ; в случае стержней, сходящихся в одном узле, согласно (6), (7)  $K_i \cos^3 \alpha_i$ ;  $K_{Ti} = \cos \alpha_i$  (см. рисунок 2).

Определяем численные значения жесткостей конструкции на поворот ее абсолютно жесткой балки при силовом и температурном воздействии по формулам (13)... (15)

$$G_{\beta\beta} = G_{\gamma\gamma} = 16\bar{\Phi}_1 + 9\bar{\Phi}_2 = 2 \cdot 10^5 \left( \frac{16 \cdot 641}{3} + \frac{9 \cdot 320,5}{5} \right) = 7991 \cdot 10^5 \text{ Нмм}^2;$$

$$G_{\gamma T} = 4\Phi_1 \nu_1 = 4 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 641 \cdot 125 \cdot 10^7 = 6410 \text{ Нмм}.$$

Углы поворота абсолютно жесткой балки  $KBC$ :

— от действия нагрузки  $q$

$$\beta = \frac{M}{G_{\beta\beta}} = \frac{q \cdot 6 \cdot 3}{G_{\beta\beta}} = \frac{20 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 10^6}{7991 \cdot 10^5} = 0,45 \text{ рад};$$

— от температурного действия по (8)

$$\gamma = T \frac{G_{\gamma T}}{G_{\gamma \gamma}} = 20 \frac{6410}{7991 \cdot 10^5} = 16 \cdot 10^{-5} \text{ рад.}$$

Значения  $\beta$  и  $\gamma$  совпадают с результатами, полученными ранее [3], на основании известного метода перемещений, что свидетельствует о точности предлагаемого метода.

Таким образом, в работе представлен разработанный энергетический метод определения перемещений (деформаций) в стержневых системах от силового и температурного действия, который значительно проще в применении по сравнению с известными методами, т.к. не требует составления уравнений статики и их совместного решения с уравнениями перемещений. Его дальнейшее развитие позволит решать комплексные задачи деформированного и напряженного состояния сложных стержневых систем.

### Литература

1. Подскребко, М.Ф. Сопrotivlenie materialov / М.Ф. Подскребко. — Минск: Вышэйшая шк., 2007. — 797 с.
2. Чаюн, І.М. Опір матеріалів / І.М. Чаюн. — Одеса: Астропринт, 2005. — 342с.
3. Глушко М.Ф. Расчет канатов и биметаллических тросов линий электропередач с учетом температурных воздействий / М.Ф. Глушко, В.Ф. Волоконский, Л.М. Мамаев // Стальные канаты. Вып. 5. — К.: Техніка, 1968. — С. 157 — 161.
4. Чаюн, І.М. Жорсткість конструкцій та їх елементів / І.М. Чаюн // Тр. Одес. політехн. ун-та. — Одеса, 2010. — Вип. 1(33) — 2(34). — С. 11 — 16.

### References

1. Podskrebko, M.F. Soprotivlenie materialov [Strength of Materials] / M.F. Podskrebko. — Minsk: Vi-sheyshaya shkola, 2007. — 797 p.
2. Chayun, I.M. Opr materialiv [Strength of Materials] / I.M. Chayun. — Odessa: Astroprint, 2005. — 342 p.
3. Glushko, M.F. Raschet kanatov i bimetallicheskih trosov linii elektropere-dach s uchetom temperatur-nikh vozdeystvii / [The Analysis of Cables and Bimetallic Ropes of the Transmission Lines with regard for Thermal Effect] / M.F. Glushko, V.F. Volokonskii, L.M. Mamaev // Steel Cables. Iss. 5. — K.: Technics, 1968. — P. 157 — 161.
4. Chayun, I.M. Zhorstkist' konstrukcii ta yikh elementiv [Rigidity of Constructions and their Elements] / I.M. Chayun // Proc. of the Odessa Polytechnic University. — Odessa, 2010. — Iss. 1(33) — 2(34). — P. 11 — 16.

Рецензент д-р техн. наук, проф. Одес. нац. политехн. ун-та, Малиновский В.А.

Поступила в редакцию 17 октября 2012 г.