ISSN 2076-2429 (print)
ISSN 2223-3814 (on line)

УДК 519.856:004.94:658.51
О.М. Васьків, магістр, Львів. нац. ун-т ім. І. Франка

СТОХАСТИЧНА МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО ВИКОРИСТАННЯ РЕСУРСІВ ТА ІНФОРМАЦІЙНА ТЕХНОЛОГІЯ ЇЇ РЕАЛІЗАЦІЇ

О.М. Васьків. **Стохастична модель оптимального використання ресурсів та інформаційна технологія її реалізації.** Розглядається завдання оптимального використання ресурсів для забезпечення виробничо-господарської діяльності підприємства. Враховується, що мінливість ринкового середовища породжує випадковість багатьох виробничих показників, які необхідні під час розроблення виробничої програми випуску продукції. Побудовано економіко-математичну модель оптимального використання виробничих ресурсів у стохастичній постановці. Проведено комп'ютерну реалізацію конкретної виробничої задачі з використанням пакету прикладних програм для математичних обчислень MathCad 2000 Professional. Розрахунки у програмі здійснюються згідно з розробленою інформаційною технологією.
Ключові слова: оптимізація виробництва, економіко-математична модель, максимізація прибутку, інформаційна технологія.

О.М. Васькив. **Стохастическая модель оптимального использования ресурсов и информационная технология ее реализации.** Рассматривается задача оптимального использования ресурсов для обеспечения производственно-хозяйственной деятельности предприятий. Учитывается, что изменчивая рыночная среда порождает случайность многих производственных факторов, которые необходимы при разработке производственной программы выпуска продукции. Построена экономико-математическая модель оптимального использования ресурсов в стохастической постановке. Произведена компьютерная реализация конкретной производственной задачи с использованием пакета прикладных программ для математических вычислений MathCad 2000 Professional. Расчеты в программе осуществляются в соответствии разработанной информационной технологией.
Ключевые слова: оптимизация производства, экономико-математическая модель, максимизация прибыли, информационная технология.

O.M. Vas'kiv. **Stochastic model of optimal use of resources and information technology of its implementation.** The problem of optimal use of resources for providing production and business activities of enterprises is considered. I is taken into account that the variability of the market environment creates fortuity of many performance indicators that are required during the development of the production program of output. An economic-mathematical model of optimal utilization of resources in the stochastic setting is constructed. Computer implementation of a specific production problem with the use of application package for mathematical calculations MathCad 2000 Professional is performed. The calculations in the program are carried out according to the developed information technology.
Keywords: optimization of production, an economic-mathematical model, maximization of profit, information technology.

При запровадженні ринкових методів господарювання зростає потреба в оперативності прийняття управлінських рішень, у визначенні варіантів можливих напрямків діяльності. Виникає необхідність проведення точніших розрахунків, що особливо актуально для новостворених і реструктуризованих підприємств, коли відбуваються великі капіталовкладення в їхню ресурсну базу і у зв'язку з цим можливі великі втрати.

Для розв'язування завдань планування господарської діяльності і розроблення виробничих програм підприємств в умовах ринкової мінливості й ризику найбільш перспективним є застосування методів економіко-математичного моделювання і сучасних комп'ютерних засобів. До них належать, зокрема, засоби стохастичного програмування, які дають змогу максимально враховувати всі види невизначеності та нестабільності економіки [1, 2].

Проблемі економіко-математичного моделювання виробничо-господарської діяльності підприємства у стохастичній постановці присвячені праці, де обґрунтовано застосування показникового розподілу випадкових величин, що описують ресурсне забезпечення виробництва [1; 2].

Мета статті полягає у побудові економіко-математичної моделі оптимального використання техніко-матеріальних ресурсів для розвитку виробничих потужностей підприємства за умов ринкової невизначеності і розробленні інформаційної технології комп'ютерної реалізації створеної моделі.

Процес становлення виробництва під час реструктуризації підприємства, його переоснащення на випуск нової продукції супроводжується освоєнням значних обсягів матеріально-технічних ресурсів, нераціональне управління якими спонукає до збільшення логістичних витрат [1].

Підвищення ефективності використання матеріально-технічних ресурсів дає можливість суб'єкту господарювання зменшувати загальні витрати, тобто збільшувати свій прибуток. У цьому випадку цільова функція для максимізації очікуваного прибутку від виробництва та реалізації продукції матиме вигляд [1]

$$Z_{prod}^{vur} = \sum_{j=1}^{n} z_{rj}^{d} - \left(\sum_{j=1}^{n} v_{zv} \cdot x_j + v_{pv} \right) \to \max , \quad (1)$$

де Z_{prod}^{vur} — прибуток, отриманий унаслідок реалізації виробленої продукції;

z_{rj}^{d} — дохід від реалізації j-го виду продукції;

x_j — кількість виробленої продукції j-го виду, шт.;

v_{zv} — змінні витрати на одиницю продукції;

v_{pv} — постійні витрати за досліджуваний період.

Обмеження у цій моделі

$$\sum_{j=1}^{n} S_{ij}^{vut} \cdot x_j \le R_i^{vur} ,$$

де S_{ij}^{vut} — норма витрат i-го виробничого ресурсу, що використовується на виробництво одиниці j-го виду продукції і залежить від кількості деталей у модельній продукції;

R_i^{vur} — кількість одиниць i-го виду виробничого ресурсу на заданий період часу;

$i = \overline{1,m}$; $l_j \le x_j \le q_j$, $x_j \ge 0$, $j = \overline{1,n}$.

У загальному випадку записані залежності нелінійні й імовірнісні, тому що на доход і витрати підприємства зазвичай впливають різні випадкові чинники.

Враховуючи зазначене, можна стверджувати, що задані величини z_{rj}^{d}, S_{ij}^{vut} та R_i^{vur} є випадковими і мають стохастичну природу, і лише параметри l_j і q_j, які встановлюють гранично допустимі значення x_j, детерміновані.

Крім визначених обмежень на ресурс потрібно враховувати обмеження на суму коштів, що затрачається на виготовлення всієї кількості продукції. Наявна величина коштів, що затрачається на виготовлення всієї продукції, має бути менша або дорівнювати сумі, яка затрачається на загальний обсяг виробничого процесу за мінусом деякої суми, що підприємство відкладає для вирішення непередбачуваних ситуацій від здійснення виробничої діяльності,

$$\sum_{j=1}^{n} c_j^{vur} \cdot x_j \le C_{pidp} - \sum_{j=1}^{n} c_{vj}^{vur} , \; j = \overline{1,n} ,$$

де c_j^{vur} — кошти підприємства, що затрачаються на виготовлення одиниці продукції певного виду;

C_{pidp} — наявні у підприємства кошти на здійснення господарської діяльності;

 ISSN 2076-2429 (print)
ISSN 2223-3814 (on line)

c_{vj}^{vur} — кошти на покриття непередбачуваних ситуацій у виробничій діяльності підприємства.

Обмеження на перевищення доходів підприємства над його витратами можна записати як

$$z_{rj}^{d} + z_{in} \geq v_{pv} + v_{in},$$

де z_{rj}^{d} — дохід від реалізації *j*-го виду продукції;

z_{in} — обсяг інших доходів від здійснення господарської діяльності у наступному розрахунковому періоді;

v_{pv} — постійні витрати, пов'язані із здійсненням виробничої діяльності у досліджуваному періоді;

v_{in} — обсяг інших витрат від діяльності підприємства у наступному періоді.

Величини постійних витрат v_{pv} підприємства у разі здійснення виробничої діяльності у певному періоді розраховують як суму виробничих витрат підприємства v_{vurp_j}, адміністративних витрат від діяльності v_{adm} та витрат на реалізацію продукції v_{rp_j}.

Отже, модель діяльності підприємства за критерієм максимізації прибутку можна записати як

$$Z_{prod}^{vur} = \sum_{j=1}^{n} z_{rj}^{d} - \left(\sum_{j=1}^{n} v_{zv} \cdot x_j + v_{pv} \right) \to \max;$$

$$\sum_{j=1}^{n} S_{ij}^{vut} \cdot x_j \leq R_i^{vur}; \quad \sum_{j=1}^{n} c_j^{vur} \cdot x_j \leq C_{pidp} - \sum_{j=1}^{n} c_{vj}^{vur}; \tag{2}$$

$$z_{rj}^{d} + z_{in} \geq v_{pv} + v_{in}, \quad x_j \geq 0, \quad l_j \leq x_j \leq q_j.$$

Оптимальний план розвитку виробництва підприємства може бути записаний у вигляді задачі стохастичного програмування [1, 3].

Величина Z_{prod}^{vur} залежить від керованих змінних, тому завдання полягає в знаходженні найкращого розподілу цієї величини, а критерієм визначення оптимального розв'язку задачі є максимізація її математичного сподівання

$$Z_{prod}^{vur} = \sum_{j=1}^{n} \overline{z}_{rj}^{d} - \left(\sum_{j=1}^{n} v_{zv} \cdot x_j + v_{pv} \right) \to \max,$$

де $\overline{z}_{rj}^{d}$ — математичне сподівання випадкової величини z_{rj}^{d}.

Очевидно, що нарощування потужностей випуску продукції відбувається за певним законом розподілу неперервної випадкової величини. Щоб вивести цей закон, використовується залежність

$$K(t) = m_{\text{розшир}}^{\text{вир}} \cdot H_{rj} \cdot x_j(t) \cdot N_{\text{пот}}^{\text{вир}},$$

де $K(t)$ — обсяг капіталовкладень, спрямований у виробництво;

$m_{\text{розшир}}^{\text{вир}}$ — частина прибутку, яку використовують на розширення виробництва;

H_{rj} — ціна одиниці продукції *j*-го виду;

$x_j(t)$ — кількість виготовленої продукції *j*-го виду;

$N_{\text{пот}}^{\text{вир}}$ — частка виробничих потужностей виготовлення певного виду продукції.

Розширення виробництва приведе до збільшення випуску продукції, тобто, якщо $K = K(t) > 0$, буде збільшення випуску продукції, у випадку $K(t) = 0$ капіталовкладення лише покривають амортизаційні витрати і рівень випуску продукції залишається незмінним, а зменшення рівня випуску продукції буде в тому випадку, коли $K(t) < 0$. На підставі цього можна стверджувати, що тенденція збільшення виготовленої продукції $(x'(t))$ в момент часу t пропорційна наявній кількості капіталовкладень $K(t)$. У результаті отримується рівняння

$$x'(t) = h \cdot K(t),$$

де h — коефіцієнт пропорційності, який приймається сталим [2].

Залежність $x_j(t)$ розглядається як функція часу. За змістом задачі $x_j(t) > 0$, тому зі збільшенням величини t буде зростати функція x_j. Ця зміна буде пропорційною кількості використовуваного часу та обсягові капіталовкладень [2], тобто $dx_j(t) = \omega(t)dt$, $\omega(t)$ — деякий коефіцієнт, значення якого підлягає визначенню.

Нехай $\omega(t)$ пропорційно залежить від виділеного обсягу капіталовкладень у розширене виробництво і найбільш можливого забезпечення цим капіталом кількості виробленої продукції $x_j(t)$ до деякого максимального значення $x_{j\max}(t)$.

Для цього випадку можна припустити, що

$$\omega(t) = m_{\text{розшир}}^{\text{вир}} \cdot H_{rj} \cdot x_{j\max}(t) \cdot N_{\text{пот}}^{\text{вир}} \cdot h - m_{\text{розшир}}^{\text{вир}} \cdot H_{rj} \cdot x_j(t) \cdot N_{\text{пот}}^{\text{вир}} \cdot h,$$

де $x_j(t)$ — кількість виробленої продукції за час t.

Після здійснення математичних перетворень отримується загальний розв’язок рівняння $x_j(t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t_j}$ [4]: і, враховуючи все сказане, розглянемо задачу з імовірнісними обмеженнями в такій постановці

$$P\left[\sum_{j=1}^{n} S_{ij}^{vut} \cdot x_j + 1 \le R_i^{vur}\right] \ge \beta,$$

де β $\left(0 \le \beta \le 1\right)$ — деякий заданий параметр [3].

Використовуючи методи математичної статистики та теорії імовірності, статистичні характеристики випадкових величин можна записати у вигляді

$$\overline{Y}_i = \overline{R}_i^{vur} - \sum_{j=1}^{n} \overline{S}_{ij}^{vut} \cdot x_j - 1.$$

Враховуючи вираз, що визначає математичне сподівання показникової функції , а саме $\overline{Y}_i \ge \dfrac{1}{\ln\dfrac{1}{\beta}}$ для $P\left[\overline{Y}_i \ge 1\right] \ge \beta$, у формалізованому вигляді модель набуває вигляду

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \overline{S}_{ij}^{vut} \cdot x_j + \frac{1}{\ln\dfrac{1}{\beta}} + 1 + \delta_i \le \overline{R}_i^{vur}\right) \ge \beta, \tag{3}$$

де $\sum_{j=1}^{n} \overline{S}_{ij}^{vut} \cdot x_j + 1$ — споживана кількість ресурсу, яка розрахована за математичним сподіванням норм витрат;

$\dfrac{1}{\ln\dfrac{1}{\beta}}$ — додаткова кількість ресурсу, викликана ймовірнісним характером норм витрат і ресурсу;

δ_i — залишковий ресурс.

ISSN 2076-2429 (print)
ISSN 2223-3814 (on line)

Враховуючи $P\left[\overline{Y}_i \geq 1\right] \geq \beta$, рівняння, яке описує динаміку поточної зміни виготовлення продукції *j*-го виду підприємством легкої промисловості, $x_j(t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t_j}$ та співвідношення, що визначає математичне сподівання функції $\overline{Y}_i \geq \dfrac{1}{\ln\dfrac{1}{\beta}}$, можна отримати

$$\sum_{j=1}^{n} z_{rj}^{d} \cdot (P(1 \leq \overline{Y}_i \leq \infty) \geq \beta) = \sum_{j=1}^{n} z_{rj}^{d}(x_j) \cdot e^{-\frac{1}{\overline{Y}_i}} .$$

Отже, після деяких математичних перетворень економіко-математична модель розвитку виробництва підприємства за критерієм максимізації математичного сподівання із врахуванням $\overline{Y}_i \geq \dfrac{1}{\ln\dfrac{1}{\beta}}$ матиме вигляд

$$Z_{prod}^{vur} = \sum_{j=1}^{n} z_{rj}^{d} \cdot \exp\left(-\frac{1}{\ln\dfrac{1}{\beta}} \right) - \left(\sum_{j=1}^{n} v_{zv} \cdot x_j + v_{pv} \right) \to \max , \tag{4}$$

за наявності таких обмежень

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \overline{S}_{ij}^{vut} \cdot x_j + \frac{1}{\ln\dfrac{1}{\beta}} + 1 + \delta_i \leq \overline{R}_i^{vur} \right) \geq \beta , \quad j = \overline{1, n} , \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j^{vur} \cdot x_j \leq C_{pidp} - \sum_{j=1}^{n} c_{vj}^{vur} ; \; z_{rj}^{d} \cdot \exp\left(-\frac{1}{\ln\dfrac{1}{\beta}} \right) + \overline{z}_{in} \geq v_{pv} + \overline{v}_{in} ; \; x_j \geq 0 , \; l_j \leq x_j \leq q_j . \tag{6}$$

Пошук та використання інформаційних технологій обробки вхідних даних дає можливість забезпечити прийняття оптимальних рішень та сприяє ефективній діяльності суб’єкта господарювання.

Побудову розв’язків математичної моделі (4...6) можна знайти, використовуючи пакет прикладних програм для математичних обчислень MathCad 2000 Professional. Використання MathCad дає можливість отримати розв’язок у вигляді матриці, яка містить шукані значення $(x1, x2, ..., x10)$, та розрахувати максимальне значення функції. У цьому випадку технологія складається з виконання таких операцій [2]:

— Задання діапазону цілих чисел. Для розрахунку економіко-математичної моделі, використовуючи панель Калькулятор, задається запис діапазону $j := 0...9$.

— Запис функції для знаходження максимального її значення.

— Присвоєння змінній початкових значень. Використовуючи кнопку “Присвоїти” здійснюється присвоєння змінній певного результату (значення). Задаються значення відомих параметрів (початкові значення).

— Здійснення проміжних розрахунків. З використанням панелі Калькулятор та діалогового вікна Вставка функції здійснюються проміжні розрахунки, а саме розрахунок відносного збільшення ресурсу та відносного резерву кожного ресурсу.

— Запис блоку розв’язку задачі з ключовим словом Given. Для розв’язку задачі та нерівностей застосовується блок розв’язку, що починається із ключового слова Given (“дано”), після якого записуються логічні твердження, що задають обмеження на значення шуканих величин, тобто рівняння і нерівності. Для пошуку значень змінних $(x1, x2, ..., x10)$ використовується функція $\max imize(f1, x1, x2, ..., x10)$. Функція обчислює вектор невідомих, коли вона приймає максимальне значення.

— Розв'язок економіко-математичної задачі. Для практичної реалізації технології розв'язування завдання розподілу ресурсів підприємства використано виробництво чоловічого взуття з метою максимізації прибутку. Розрахунок отримано у вигляді матриці, яка містить шукані величини $(x1, x2, ..., x10)$. Під час розрахунку отримано максимальне значення функції.

$$\mathbf{B} := Maximize(f1, x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10),$$

$$f1(B_0, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8, B_9) = 1{,}005 \cdot 10^5,$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 148 \\ 1 & 145 \\ 2 & 175 \\ 3 & 155 \\ 4 & 152 \\ 5 & 150 \\ 6 & 196 \\ 7 & 172 \\ 8 & 192 \\ 9 & 170 \end{pmatrix}.$$

Знайдені розв'язки моделі визначають оптимальну кількість виготовленої продукції: x_1 — 148 шт., x_2 — 145 шт., x_3 — 175 шт., x_4 — 155 шт., x_5 — 152 шт., x_6 — 150 шт., x_7 — 196 шт., x_8 — 172 шт., x_9 — 192 шт., x_{10} — 170 шт. для отримання максимального прибутку.

Здійснюючи свою виробничу діяльність з виробництва чоловічого взуття з використанням певного обсягу ресурсів, підприємство має можливість отримати максимальний прибуток у розмірі 100,5 тис. грн, враховуючи умови ефективного його функціонування.

Висновки. Динаміка ресурсів підприємства описується задачею стохастичного програмування, знаходження розв'язків якої здійснюється за допомогою інформаційної технології з використанням засобів пакету прикладних програм для математичних обчислень MathCad 2000 Professional. Інформаційна технологія дає можливість отримати розв'язок задачі, сформувавши алгоритм її розв'язку, що визначає послідовність дій, які в подальшому реалізуються в обчислювальній процедурі.

Література

1. Юринець, В.Є. Оптимальне використання ресурсів за умов невизначеності / В.Є. Юринець, О.М. Васьків // Вісн. Львів. держ. фінансової акад. — 2006. — № 10. — С. 365 — 371.
2. Понтрягин, Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учеб. пособие [для ун-тов] / Л.С. Понтрягин. — М.: Наука, 1974. — 331 с.
3. Васьків, О.М. Математична модель процесу розвитку виробничої діяльності підприємства в невизначеному ринковому середовищі / О.М. Васьків // Статистич. оцінка соціал.-економ. розвитку: Зб. наук. пр / Львів. нац. ун-т ім. І. Франка. — 2010. — С. 205 — 207.
4. Васьків, О.М. Економіко-математичне моделювання затрат ресурсів на випуск продукції підприємства легкої промисловості / О.М. Васьків // Наук. вісн.: Зб. наук.-техн. пр. / Львів. нац. ун-т ім. І. Франка. — 2009. — Вип. 19.2. — С. 290 — 296.

ISSN 2076-2429 (print)
ISSN 2223-3814 (on line)

5. Ивановский, Р.И. Компьютерные технологии в науке. Практика применения систем MatCAD 7.0 Pro, MatCAD 8.0 Pro, MatCAD 2000 Pro: учеб. пособие / Р.И. Ивановский — СПб: Из-во С.-Петерб. гос. техн. ун-та, 2001. — 200 с.

References

1. Yurynets, V.E. Optymalne vukorystannya resursiv za umov nevuznachenjsti [Optimal Use of Resources under Uncertainty] / V.E. Yurynets, O.M. Vaskiv // Visnyk Lvivskoyi derzhavnoyi finansovoyi akademiyi [Bulletin of the Lviv State Academy of Finance]. — 2006. — # 10. — PP. 365 — 371.
2. Pontryagin, L.S. Obyknovennye differentsialnye uravneniya: ucheb. posobie [dlya un-tov] [Ordinary Differential Equations: Study Guide [for Universities] / L.S. Pontryagin. — M.: Nauka , 1974. — 331 p.
3. Vaskiv, O.M. Matematychna model protsesu rozvytku vyrobnychoyi diyalnosti pidpryyemstva v nevyznachenomu rynkovomu seredovyshchi [Mathematical Model of the Production Process of the Company in an Uncertain Market Environment] / O.M. Vaskiv // Statystychna otsinka sotsialno-ekonomichnoho rozvytku: Zb. nauk. prats [Statistical Evaluation of Socio-Economic Development: Coll. sci. papers / Lviv Nat. I. Franko Univ.]. — 2010. — PP. 205 — 207.
4. Vaskiv, O.M. Ekonomiko-matematychne modelyuvannya zatrat resursiv na vypusk produktsiyi pidpryyemstva lehkoyi promyslovosti [Economic and Mathematical Modeling of Costs of Resources for Production at Light Industry Enterprises] / O.M. Vaskiv // Naukovyy visnyk: Zbirnyk naukovo-tekhnichnykh prats [Research Bulletin: Coll. sci. papers]. — 2009. —Vyp. 19.2 [no. 19.2]. — PP. 290 — 296.
5. Ivanovskiy, R.I. Kompyuternye tekhnolohiyi v nauke. Praktika primeneniya sistem MatCAD 7.0 Pro, MatCAD 8.0 Pro, MatCAD 2000 Pro: ucheb. posobiye [Computer Technologies in Science. Practical Application of Systems MatCAD 7.0 Pro, MatCAD 8.0 Pro, MatCAD 2000 Pro: Textbook] R.I. Ivanovskiy — SPb: Iz-vo SPbGTU [Out of SPbGTU], 2001. — 200 p.

Рецензент д-р техн. наук, проф. Одес. нац. політехн. ун-ту Соколовська З.М.

Надійшла до редакції 21 червня 2012 р.