

УДК 621.391

Ю.К. Филипский, д-р техн. наук, проф.,  
Л.С. Фонарь, магистр,  
Одес. нац. политехн. ун-т

## ЧАСТОТНО-ВРЕМЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ ЧЕБЫШЕВА И БАТТЕРВОРТА

*Ю.К. Филипський, Л.С. Фонарь. Частотно-часові характеристики цифрових фільтрів Чебишева та Баттерворта.* Розглянуто амплітудно-частотні, фазо-частотні, перехідні та імпульсні характеристики фільтрів Чебишева та Баттерворта другого порядку. Показано переваги синтезу фільтрів за допомогою  $z$ -перетворення. Розглянуто роботу фільтрів у динамічному стані.

*Ю.К. Филипский, Л.С. Фонарь. Частотно-временные характеристики цифровых фильтров Чебышева и Баттерворта.* Рассмотрены амплитудно-частотные, фазо-частотные, переходные и импульсные характеристики фильтров Чебышева и Баттерворта второго порядка. Показаны преимущества синтеза фильтров с помощью  $z$ -преобразования. Рассмотрена работа фильтров в динамическом режиме.

*Yu.K. Filipsky, L.S. Fonar. Frequency-time characteristics of Chebyshev and Butterworth digital filters.* Frequency and time characteristics of Chebyshev and Butterworth 2-nd order filters are considered. The advantages of filter synthesis with  $z$ -transformation are shown. The filter's operation in dynamic mode is considered.

При исследовании работы цифровых фильтров в реальном масштабе времени необходимо учитывать переходные процессы, которые при постоянном изменении параметров сигнала могут существовать бесконечно. Для этого требуется проводить анализ устройств в динамическом режиме.

Недостатки присущие цифровым фильтрам при синтезе по аналоговому прототипу методом инвариантной импульсной характеристики [1] — невозможность получить бесконечно малую полосу пропускания, возникновение эффекта наложения спектров на краях диапазона за счет дискретизации и т.д.

Предлагается определять частотно-временные характеристики цифровых фильтров Баттерворта и Чебышева второго порядка, необходимые для анализа динамических режимов их работы и определения их динамических погрешностей методом  $z$ -преобразования [2], который позволяет исключить указанные недостатки. В этом случае в качестве исходных данных используется операторный коэффициент передачи

$$K(p) = M(p)/N(p),$$

где  $M(p)$  и  $N(p)$  — полиномы, которые задаются путем выбора типа фильтра, например Баттерворта, Чебышева, Золотарева [3]. При этом производится замена оператора

$$p = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}, \quad (1)$$

где  $T$  — период дискретизации.

В результате получается новое выражение

$$K(z) = M(z)/N(z).$$

Фильтр Баттерворта второго порядка описывается операторным коэффициентом передачи

$$K_1(p) = \frac{1}{p^2 + \sqrt{2}p + 1}, \quad (2)$$

фильтр Чебышева второго порядка —

$$K_2(p) = \frac{0,5}{p^2 + 0,645p + 0,707}. \quad (3)$$

Амплитудно-частотная характеристика фильтра Баттерворта второго порядка описывается выражением

$$K_1(\omega) = \left| \frac{1}{(j\omega)^2 + \sqrt{2}j\omega + 1} \right|, \quad (4)$$

фильтра Чебышева второго порядка —

$$K_2(\omega) = \left| \frac{0,5}{(j\omega)^2 + 0,645j\omega + 0,707} \right|. \quad (5)$$

С помощью программы MathCad рассчитаны амплитудно-частотные характеристики фильтров по формулам (4) и (5) (рис. 1)

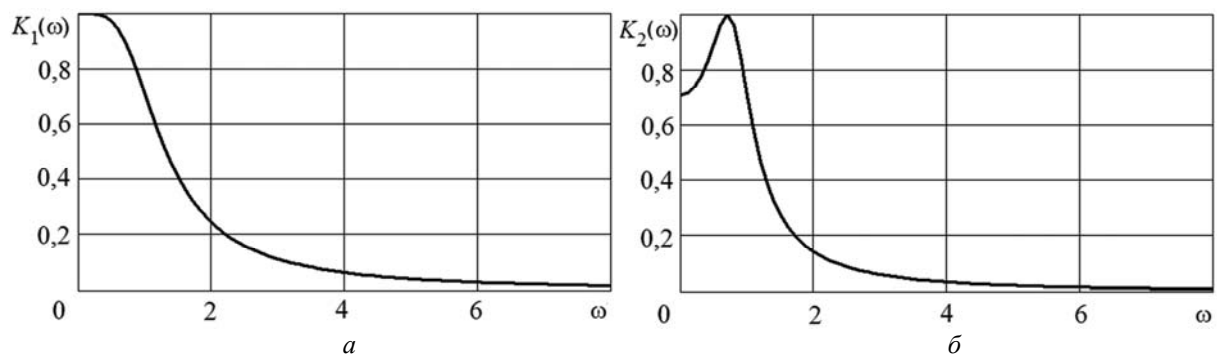


Рис. 1. АЧХ фильтров второго порядка Баттерворта (а) и Чебышева (б)

Частотные характеристики фильтров Баттерворта и Чебышева, построенные на основании (4) и (5) без использования метода  $z$ -преобразования, достигают нуля на бесконечной частоте. Для цифровых фильтров частотный диапазон ограничивают частотой  $\omega_m$ , т.е. хвост характеристики обрезается, что приводит к погрешностям в дальнейших расчетах. Для избежания наложения спектров предлагается переход к  $z$ -преобразованию путем замены оператора  $p$  на основании (1), предварительно денормируя коэффициенты передачи (2) и (3)

$$K_1(p) = \frac{\omega_c^2}{p^2 + p\omega_c\sqrt{2} + \omega_c^2}, \quad (6)$$

$$K_2(p) = \frac{0,5\omega_c^2}{p^2 + 0,645p\omega_c + 0,707\omega_c^2}, \quad (7)$$

где  $\omega_c$  — частота среза фильтра.

После подстановки (1) в (6) и (7) получены коэффициенты передачи для фильтра Баттерворта и Чебышева, соответственно,

$$K_1(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{R^2 + \sqrt{2}R + 1 + 2z^{-1}(1 - R^2) + z^{-2}(R^2 - \sqrt{2}R + 1)}, \quad (8)$$

$$K_2(z) = \frac{0,5 + z^{-1} + 0,5z^{-2}}{R^2 + 0,645R + 0,707 + 2z^{-1}(0,707 - R^2) + z^{-2}(R^2 - 0,645R + 0,707)}. \quad (9)$$

В расчетах используется коэффициент  $R = \frac{\omega_T}{\pi\omega_c}$ , который связывает тактовую частоту  $\omega_T$  с частотой  $\omega_c$  среза фильтра через количество выборок частотной характеристики  $N$ , а через  $r$  — количество выборок в пределах полосы пропускания, тогда  $R = \frac{N}{\pi r}$ .

Для перехода из  $z$ -области в частотную область следует осуществить в (8) и (9) замену  $z = e^{j\omega T}$ .

Вычислены модули и фазы комплексных коэффициентов передачи  $K_1(j\omega)$  и  $K_2(j\omega)$ , определены выборки амплитудно-частотных (АЧХ) и фазо-частотных (ФЧХ) характеристик, на основании которых были построены графики (см. рисунки 2 и 3, соответственно).

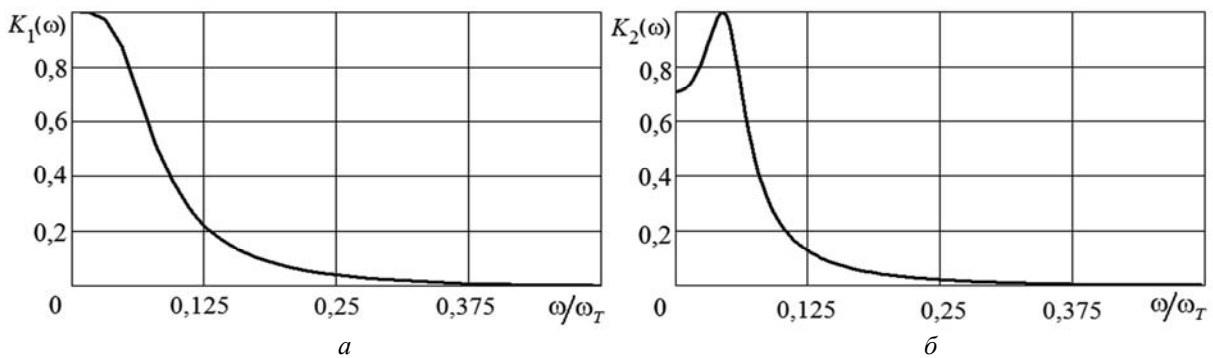


Рис. 2. АЧХ фильтров второго порядка Баттерворта (а) и Чебышева (б), рассчитанные при использовании метода  $z$ -преобразования

Как видно, в данном случае исключается наложение спектров, т.к. амплитудно-частотные характеристики достигают нуля, а фазо-частотные —  $-180^\circ$ . Амплитудно-частотная характеристика фильтра Чебышева имеет более резкий спад, что говорит о большей избирательности фильтра Чебышева по сравнению с фильтром Баттерворта, а значит динамика такого фильтра будет более резко выражена.

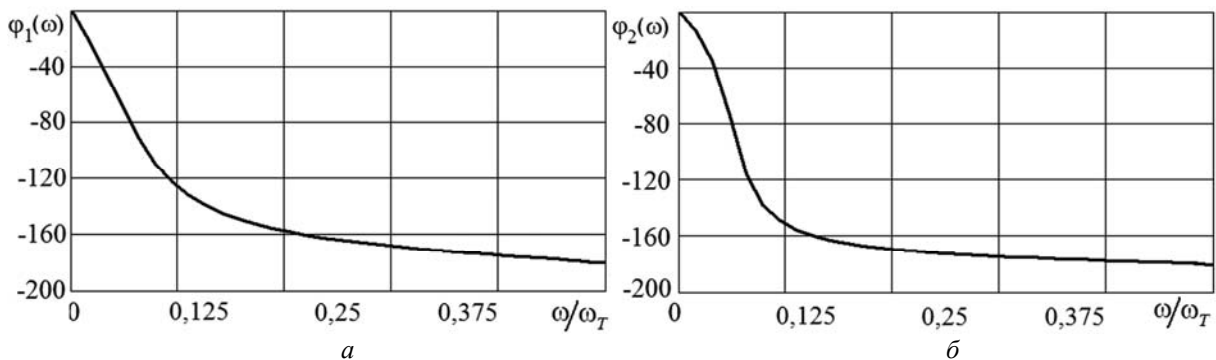


Рис. 3. ФЧХ фильтров второго порядка Баттерворта (а) и Чебышева (б), рассчитанные при использовании метода  $z$ -преобразования

Для анализа работы цифровых фильтров используются дискретные преобразования Фурье (ДПФ): прямое [4]

$$K(jn\Omega) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k e^{-jnk\Omega T} = \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-j\frac{2\pi nk}{N}},$$

и обратное (ОДПФ)

$$h_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} K(jk\Omega) e^{j\frac{2\pi nk}{N}},$$

динамический коэффициент передачи цифровых фильтров описывается выражением

$$K(jn\Omega, kT) = \sum_{k=0}^{kT} h_k e^{-j\frac{2\pi nk}{N}},$$

где  $\Omega = \frac{2\pi}{T_c}$ ;

$T_c$  — время существования сигнала;

$h_k$  — выборки импульсной характеристики;

$n=1, 2, \dots, N-1$ ;

$k=1, 2, \dots, N-1$ ;

$N=T_c/T$  — количество выборок временной и частотной характеристик цепи [4].

С помощью ОДПФ и стандартной программы [ ] по частотным характеристикам фильтров вычислены их временные характеристики — импульсная  $h(t)$  и переходная  $g(t)$  (рис 4).

Прямое и обратное ДПФ рассчитываются с помощью матриц ДПФ и ОДПФ [4]. В первом случае определяется стационарная частотная характеристика  $K(jn\Omega)$ , а во втором — импульсная характеристика фильтра  $h(t)$ . Для анализа работы фильтра в динамическом режиме необходимо произвести усечение матрицы прямого ДПФ, т.е. оставить последнюю выборку импульсной характеристики  $h_k$  на уровне 0,001, 0,01 и т.д. Причем, для анализа отклика фильтра на сигнал с частотой  $n\Omega$  производится построчное вычисление  $n$ -й строки, а для определения АЧХ в динамическом режиме —  $k$ -го столбца.

Вычислена зависимость изменения огибающей фильтра на резонансной частоте (кривая 1) и на границе полосы пропускания (кривая 2) (рис. 5).

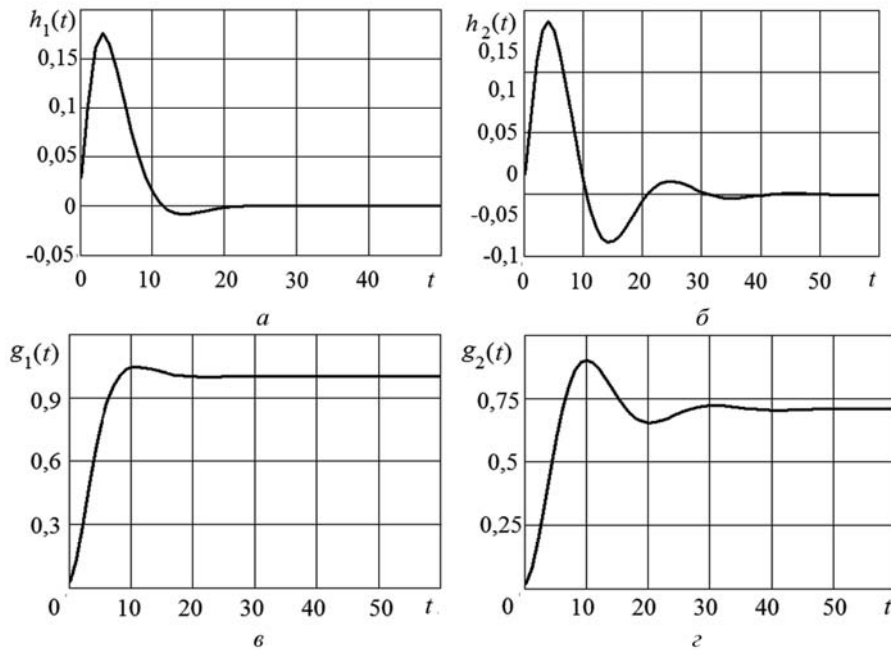


Рис. 4. Импульсные  $h(t)$  и переходные  $g(t)$  характеристики фильтров Баттерворта (а, в) и Чебышева (б, г)

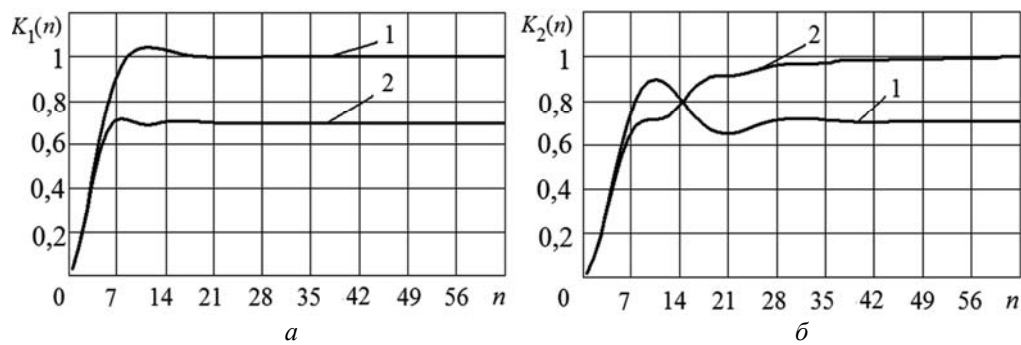


Рис. 5. Изменение огибающей фильтров Баттерворта (а) и Чебышева (б) на резонансной частоте (1) и на границе полосы пропускания (2)

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы:

— синтез цифровых фильтров Чебышева и Баттерворта методом  $z$ -преобразования позволяет получить частотные характеристики без усеченных хвостов, т.е. уменьшить погрешность вычислений;

— АЧХ фильтра Чебышева имеет более резкий спад, что говорит о большей избирательности по сравнению с фильтром Баттерворта;

— для определения динамических характеристик цифровых фильтров после вычисления выборок импульсного отклика следует использовать матрицу ДПФ;

— при частоте  $\Omega=0$  динамические коэффициенты передачи  $K(jn\Omega, kT)$  цифровых фильтров Баттерворта и Чебышева принимают вид переходных характеристик;

— динамические коэффициенты передачи  $K(jn\Omega, kT)$  цифровых фильтров Баттерворта и Чебышева как функция времени при  $t \rightarrow \infty$  плавно переходят к стационарному значению.

**Література**

1. Сергиенко, А. Б. Цифровая обработка сигналов / А. Б. Сергиенко. — 2-е изд. — СПб.: Питер, 2007. — 751 с.
2. Оппенгейм, А. Цифровая обработка сигналов / А. Оппенгейм, Р. Шафер. — 2-е изд.: Пер. с англ. — М.: Техносфера, 2009. — 856 с.
3. Гоноровский, И. С. Радиотехнические цепи и сигналы: учеб. для вузов / И. С. Гоноровский. — 5-е изд., испр. — М.: Дрофа, 2006. — 719 с.
4. Філіпський, Ю. К. Динаміка сигнальних перетворень: навч. посіб. для студентів ВНЗ / Ю. К. Філіпський. — Одеса: ОДПУ, 2006. — 89 с.

Рецензент д-р техн. наук, проф. Одес. нац. политехн. ун-та Баранов П.Е.

Поступила в редакцию 30 июня 2010 г.