

ДРОБНЫЕ ПРОПОРЦИОНАЛЬНО-ИНТЕГРАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩИЕ РЕГУЛЯТОРЫ В ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

В. В. Бушер

Одесский национальный политехнический университет

Аннотация. Исследованы замкнутые системы с дробным порядком астатизма от 0,5 до 2. Найдены соотношения параметров дробных пропорционально-интегрирующих и интегрально-дифференцирующих регуляторов, обеспечивающих оптимальные динамические и статические характеристики систем. Предложены методы расчета сигналов дробных регуляторов для применения в микропроцессорных системах управления как медленными, так и быстрыми процессами.

Ключевые слова: электротехническая система, астатическая замкнутая система управления, дробный пропорционально-интегральный регулятор, оптимальные динамические и статические показатели.

Введение

При синтезе замкнутых систем управления для устранения статической ошибки по заданию и возмущению в контур включают интегрирующее звено требуемого порядка, а устойчивость и желаемые динамические показатели обеспечивают дополнительными форсирующими звеньями. Однако возможности настройки получаемых ПИ- или ПИД-регуляторов не всегда позволяют получить оптимальное сочетание быстродействия, перерегулирования и точности. А в некоторых случаях (например, в климатических установках, в электротехнических устройствах с суперконденсаторами, в устройствах с нелинейной зависимостью, близкой к степенной функции с дробным порядком), объект управления может быть описан дифференциальными уравнениями дробного порядка [1,2,7]. Тогда параметры ПИ- или ПИД-регуляторов подбирают по упрощенным моделям с целочисленным порядком, в результате чего добиться соответствия между теоретическими и реальными показателями систем оказывается невозможно. Существенное улучшение сочетания всех показателей может быть получено за счет использования регуляторов с дробным порядком интегрирования, обеспечивающих соответственно дробный порядок астатизма замкнутого контура [3,6,8].

Материалы исследования

Целью работы является синтез систем с дробным порядком астатизма в пределах 0,5...2

© Бушер В. В., 2018

для управления электротехническими объектами, обеспечивающий заданные динамические и статические показатели, с использованием дробных интегрально-дифференцирующих регуляторов.

Рассмотрим систему с единичной отрицательной обратной связью, передаточная функция разомкнутого контура которой:

$$H_{отг}(p) = \frac{bT_v p + 1}{aT_v p^\mu (T_v p + 1)}, \quad (1)$$

где a, b – параметры настройки; T_v – некомпенсированная малая постоянная времени объекта управления; μ – выбираемый порядок астатизма. Рассмотрим системы с $\mu \geq 0,5$, так как дробно-дифференциальные уравнения именно такого порядка описывают некоторые физические процессы, в частности, изменение температуры в объектах управления климатических систем, диффузионные процессы при заряде/разряде суперконденсаторов.

В зависимости от μ, a, b могут быть получены различные показатели качества замкнутого контура. В частности, хорошо известны соотношения настроек на модульный ($\mu=1, a=2, b=0$) и симметричный ($\mu=2, a=8, b=4$) оптимумы с целочисленным порядком астатизма. Необходимо отметить, что при $\mu \in [0,5; 1]$ в (1) можно принять $b=0$, так как даже такая система характеризуется приемлемыми запасами устойчивости.

Исследуем реакцию системы $Y(t)$ на единичный скачок на некотором временном интервале, соответствующем расчету N точек пере-

ходного процесса с шагом Δt . Чтобы обеспечить высокое быстродействие и минимальное перерегулирование при выборе параметров настройки, зададим критерий оценки качества системы следующим образом:

$$F = \sum_{i=1}^N \begin{cases} (1 - Y_i) & \text{при } Y_i < 1 \\ \left(\frac{1}{\delta}(1 - Y_i)\right)^2 & \text{при } Y_i > 1 \end{cases} \rightarrow \text{Min}, \quad (2)$$

где δ – допустимое перерегулирование.

При такой постановке задачи $F(\mu, a, b)$ имеет минимумы во всем исследуемом диапазоне μ .

Зададимся $\delta = 0.05$, удовлетворяющим требованиям большинства технических систем. На рис.1,а показаны графики зависимостей $F(\mu, a)$ в диапазоне $\mu \in [0.5; 1]$. На рис.1,б в качестве примера показаны зависимости $F(\mu, a, b)$ при $\mu = 1.5$, а на рис.1,в – семейства экстремальных точек при некоторых $\mu \in [1; 2]$.

Интерполяция полученных результатов с помощью инженерного пакета программ DataFit позволила получить приближенные аналитические зависимости между параметрами μ, a, b , при которых достигаются минимальные значения F . В области $\mu \in [0.5; 1]$ зависимость между заданным μ и оптимальным значением a приближенно описывается выражением:

$$a = \frac{\mu}{4.683 - 5.897\mu + 1.595\mu^2}. \quad (3)$$

В области $\mu \in [1; 2]$ зависимости между заданным μ и оптимальными значениями a и b приближенно описываются выражениями:

$$\begin{aligned} a &= \exp(-10.27 + 7.831\mu) \\ b &= 7.336 + 0.792a + 3.83 \ln(a). \end{aligned} \quad (4)$$

Расчеты переходных процессов для найденных оптимальных соотношений параметров, выполненные при различных $\mu \in [0.5; 2]$, показали, что система с дробным порядком астатизма может превосходить системы с классическими настройками на модульный (МО) и симметричный (СО) оптимумы по совокупности показателей. В частности, при перерегулировании не более 3% время первого согласования может быть уменьшено в 3-6 раз. Однако при $\mu \in [0.5; 1]$ финальная часть переходного процесса затянута, после достижения максимума наступает просад-

ка выходного сигнала до 7%. При подаче линейно-возрастающего сигнала такая система будет характеризоваться возрастающей скоростной ошибкой.

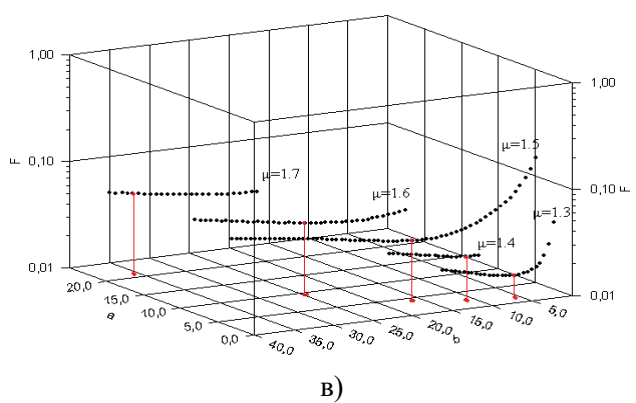
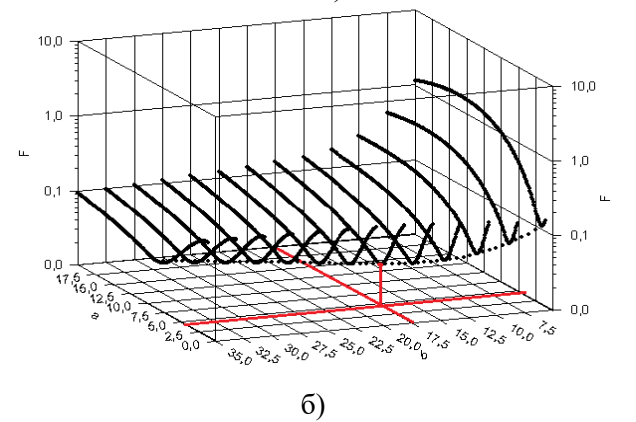
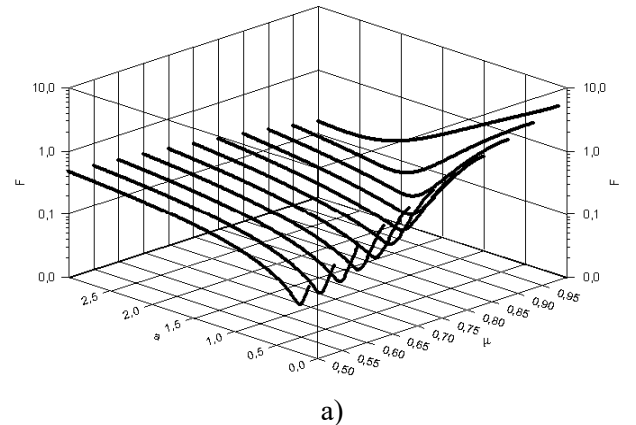
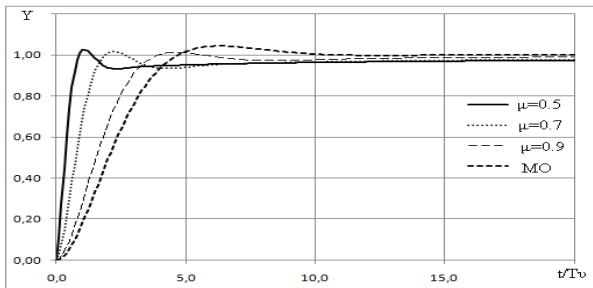


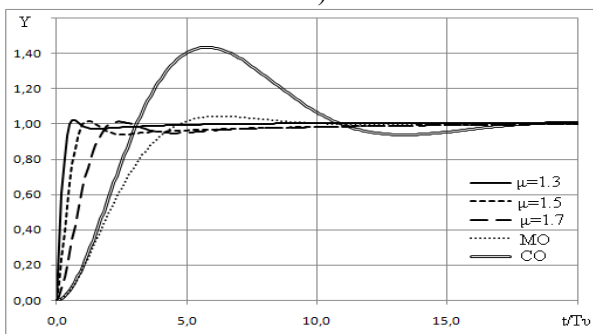
Рис. 1. Зависимости $F(\mu, a, b)$

Если такие свойства не приемлемы, то задавая $1 < \mu < 2$, можно сохранить желаемое быстродействие, уменьшить просадку сигнала до 3%, обеспечить отсутствие статической ошибки при подаче скачка и уменьшающуюся скоростную ошибку при линейно-возрастающем задающем сигнале. На рис.2. показаны нормированные (по оси абсцисс отложено относительное время t/T_v) графики переходных процессов при единичном скачке задания для систем с $0.5 \leq \mu \leq 1$ (рис.2,а) и $1 < \mu < 2$ (рис.2,б).

Желаемое значение μ может быть выбрано равным порядку дробно-инерционного звена или дробно-интегрирующего звена в объекте управления. Но может быть также выбрано по представленным на рис.2 нормированным графикам переходных процессов исходя из требуемого быстродействия системы.



а)



б)

Рис.2. Нормированные переходные функции

Для обеспечения настройки (1) объекта управления с передаточной функцией $H_{OV}(p)$ необходимо использовать регулятор, передаточная функция которого определяется из выражения

$$H_{REG}(p) = \frac{H_{OPT}(p)}{H_{OV}(p)}. \quad (5)$$

В случае, если объект управления является реальным дробно-инерционным звеном

$$H_{OV}(p) = \frac{k_{OV}}{(T_{OV} p^{\mu_{OV}} + 1)(T_v p + 1)}, \quad (6)$$

необходимо использовать регулятор с передаточной функцией

$$H_{REG}(p) = \begin{cases} \frac{T_{OV}}{k_{OV} a T_v p^{\mu - \mu_{OV}}} + \frac{1}{k_{OV} a T_v p^{\mu}} \\ \text{при } \mu \in [0.5; 1] \\ \left(\frac{b}{a} + \frac{1}{a T_v p} \right) \left(\frac{T_{OV}}{k_{OV} p^{\mu-1-\mu_{OV}}} + \frac{1}{k_{OV} p^{\mu-1}} \right) \\ \text{при } \mu \in [1; 2]. \end{cases} \quad (7)$$

В табл. 1 приведено несколько сочетаний значений μ, a, b , удовлетворяющих этому условию, и соответствующие значения $\delta, t_{\max 1}, t_{\max 2}$, что позволяет выбрать необходимые параметры системы.

Таблица 1.

Оптимальные соотношения параметров

μ	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
a	0,113	0,160	0,223	0,302	0,410	0,565	0,790	1,160	1,880
b	1,413	2,000	2,788	3,775	5,125	7,063	9,875	14,500	23,500
δ	0,002	0,005	0,011	0,016	0,022	0,027	0,034	0,041	0,049

Приближенно для произвольного $1,1 \leq \mu \leq 1,9$ значения a и b могут быть определены по эмпирическим формулам:

$$a \approx -0,0384 - \frac{0,33026}{\ln(\mu)} - \frac{0,01351}{\ln(\mu)^2}, \quad (8)$$

$$b = 12,5a.$$

Показатели переходной характеристики также определяются по приближенным зависимостям:

$$t_{\max 1} \approx 0,368\mu^{4,3}, \quad (9)$$

$$t_{\max 2} \approx 11,2\mu - 7,2, \quad (10)$$

$$\delta \approx 0,0262\mu^2 - 0,0191\mu - 0,092. \quad (11)$$

Из (9) – (11) легко могут быть получены обратные зависимости и по требуемым показателям переходного процесса найдено необходимое значение μ и далее по (8) определены a и b .

Для обеспечения выбранных настроек регулятора, включенный последовательно с объектом управления, должен иметь передаточную функцию, определяемую из соотношения

$$H_{REG}(p) = \frac{H_{OPT}(p)}{H_{OV}(p)}, \quad (12)$$

и в его состав могут входить как дробные интегрирующие звенья, так и дробные дифференцирующие звенья.

Передаточные функции регуляторов для некоторых типовых объектов управления при настройках контура с различным порядком астатизма приведены в табл. 2. Видно, что в состав

регуляторов могут входить как дробные интегрирующие звенья, так и дробные дифференцирующие звенья. Очевидно также, что предложенные методы синтеза замкнутого контура мо-

гут быть применены для объектов управления как с дробным, так и целочисленным порядком дифференциальных уравнений.

Таблица 2.

Передаточные функции регуляторов

$H_{OY}(p)$	$H_{PEГ}(p), 0 < \mu \leq 1$	$H_{PEГ}(p), 1 < \mu \leq 2$
$\frac{k_{OY}}{T_{OY} p^{\mu_{OY}}}$	$\frac{1}{aT_v^\mu} \frac{1}{k_{OY}} \frac{T_{OY}}{p^{\mu-\mu_{OY}}}$	$\frac{1}{aT_v^{\mu-1}} \left(1 + \frac{1}{bT_v p}\right) \frac{1}{k_{OY}} \frac{T_{OY}}{p^{\mu-1-\mu_{OY}}}$
$k_{OY} \left(1 + \frac{1}{T_{OY} p^{\mu_{OY}}}\right)$	$\frac{1}{aT_v^\mu} \frac{1}{k_{OY} p^{\mu-\mu_{OY}}} \left(\frac{T_{OY} p^{\mu_{OY}}}{T_{OY} p^{\mu_{OY}} p^{\mu_{OY}} + 1}\right)$	$\frac{1}{aT_v^{\mu-1}} \left(1 + \frac{1}{bT_v p}\right) \frac{1}{k_{OY} p^{\mu-1-\mu_{OY}}} \left(\frac{T_{OY} p^{\mu_{OY}}}{T_{OY} p^{\mu_{OY}} + 1}\right)$
$\frac{k_{OY}}{T_{OY} p^{\mu_{OY}} + 1}$	$\frac{1}{aT_v^\mu} \frac{1}{k_{OY}} \left(\frac{T_{OY}}{p^{\mu-\mu_{OY}}} + \frac{1}{p^\mu}\right)$	$\frac{1}{aT_v^{\mu-1}} \left(1 + \frac{1}{bT_v p}\right) \frac{1}{k_{OY}} \left(\frac{T_{OY}}{p^{\mu-1-\mu_{OY}}} + \frac{1}{p^{\mu-1}}\right)$

Для реализации вычислений дробных интегральных составляющих сигнала регулятора в микропроцессорной системе с периодом квантования Δt целесообразно использовать модифицированную дискретную форму Римана-Лиувилля [7],

$$I^\mu f_i = \sum_{j=1}^i f_{i-j+1} k_j^\mu, \quad (13)$$

где I^μ – символ операции интегрирования порядка μ , k_j^μ – постоянные коэффициенты, вычисляемые по формуле

$$k_j^\mu = \frac{\Delta t^\mu (j^{\mu+1} - (j-1)^{\mu+1})}{\Gamma(2+\mu)} - \sum_{n=1}^{j-1} k_n^\mu. \quad (14)$$

Так как количество слагаемых в реальных системах ограничено объемом запоминающего устройства микропроцессора, то в системе с $\mu < 1$ возникает дополнительная статическая ошибка. При $\mu > 1$ ПИ-звено $1 + \frac{1}{bT_v p}$ компенсирует эту ошибку. Поэтому выбор систем с $\mu > 1$ является предпочтительным.

Сигнал дробных дифференцирующих звеньев может вычисляться также с применением формулы (13) на основании зависимости

$$D^\mu f_i = \frac{d}{dt} I^{1-\mu} f_i = \frac{I^{1-\mu} f_i - I^{1-\mu} f_{i-1}}{\Delta t}. \quad (15)$$

Современные процессоры позволяют вычислять до 1 миллиона операций умножения и сложения чисел в формате *float* в течение 1 с.

Соответственно, сейчас это дает возможность применять методы дробно-интегрального счисления как для управления медленными процессами (в климатических установках, в системах заряда/разряда суперконденсаторов и аккумуляторов с периодом квантования порядка 1 с), так и в относительно быстрых системах, например, управления током в цепи с катушкой индуктивности с учетом кривой намагничивания с периодом квантования порядка 1-10 мс.

Выводы

Выполнено исследование динамических и статических характеристик замкнутых систем с передаточной функцией (1) с дробным порядком астатизма от 0.5 до 2. На основании анализа частотных характеристик и переходных процессов таких систем предложены методы синтеза регуляторов как для $\mu < 1$, так и для $1 < \mu < 2$. Регуляторы, передаточные функции которых определяются по таблице или в общем случае по (12), а параметры выбраны в соответствии с предложенными расчетными зависимостями, обеспечивают ограничение перерегулирования на заданном уровне и быстродействие выше, чем у систем с целочисленным порядком астатизма. Найдены приближенные аналитические выражения (3) и (4), позволяющие рассчитать параметры регуляторов без предварительного расчета переходных процессов. Передаточные функции (7) определяют правила выбора структуры регуляторов, а выражения **Ошибка! Источник ссылки не найден.** и **Ошибка! Источник ссылки не найден.** описывают способ вычисления выходных сигналов ре-

гуляторов с дробными интегральными и дифференцирующими составляющими, применимый в современных микропроцессорных системах управления.

Список использованной литературы

1. Busher, V. Modeling and Identification of Systems with Fractional Order Integral and Differential [Text] / V. Busher, V. Yarmolovich // *Electrotechnical and Computer Systems*. – 2014. – Vol. 15, Issue 91. – P.52–56
2. Busher, V. Modeling of supercapacitors with fractionally integrated section in SIMULINK [Text] / V. Busher // *Ел.-техн. та комп. системи*. – К.: Техніка. № 04(80). – 2011. – С.89–92.
3. Бурого, Н. Г. Вычислительная механика [Текст] / Н. Г. Бурого. – М, 2005. – 247 с.
4. Учайкин, В. В. Дробно-дифференциальная модель динамической памяти [Текст] / В. В. Учайкин // *Математика и механика*. – 2001. – 14 с.
5. Uchaikin, V. V. Anomalous Diffusion and Fractional Stable Distributions [Text] / V. V. Uchaikin // *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. – 2003, No. 4. – p. 810–825.
6. Гильмутдинов, А. Х. Дробные операторы: критерии синтеза и реализация [Текст] / А. Х. Гильмутдинов, П. А. Ушаков, М. М. Гильметдинов // *Нелинейный мир*. – 2008, № 8. – С.452–463.
7. Бушер, В. В. Энергетические показатели и параметры суперконденсаторов в динамических режимах [Текст] / В. В. Бушер, В. В. Мартынюк, Е. В. Найденко // *Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах*. – Хмельницький, 2012 – № 1. – С.44–50.
8. Shantanu, D. Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls [Text] / Shantanu Das // *Springer-Verlag Berlin Heidelberg*. – 2008. – 240 p.

FRACTIONAL PROPORTIONAL-INTEGRAL-DIFFERENTIATING REGULATORS IN ELECTROTECHNIC SYSTEMS

V. BUSER

Odessa National Polytechnic University

Abstract. Fractional $PI^{\alpha}D^{\beta}$ -regulators in astatic closed-loop control systems allow to significantly improve the dynamic performance due to the increase in stability stocks with simultaneous expansion of the bandwidth of the circuit. In addition, when an object can be described by fractional-differential equations, or in its mathematical model power functions of fractional order are present, such regulators more accurately compensate for such features of the object. The aim of the work is research of the dynamic and static characteristics of closed loop systems with a fractional order of astaticism from 0.5 to 2. Based on the analysis of frequency characteristics and transient processes of such systems, methods for the synthesis of regulators for the order of astaticism are proposed, both less than 1 and more 1. Rules for selecting the structure of regulators and necessary transfer functions of regulators for typical control objects. Their parameters are chosen in accordance with the proposed calculation dependencies. This ensures that the overshoot is limited at a

References

1. Busher, V. and Yarmolovich, V. (2014). Modeling and Identification of Systems with Fractional Order Integral and Differential, *Electrotechnical and Computer Systems*, 15 (91), P.52–56. (In English).
2. Busher, V., (2011), Modeling of supercapacitors with fractionally integrated section in Simulink. *Electrotechnical and Computer Systems*, 4 (80), P.89–92. (In English).
3. Burago, N. (2005), *Computation mechanics [Vychislitel'naja mehanika]*. Moscow, 247 p. (In Russian).
4. Uchaikin, V., (2001). Fractional differential model of dynamic memory [Drobno-differencial'naja model dinamicheskoy pamjati], *Mathematics and Mechanics*, 14 p. (In Russian).
5. Uchaikin, V., (2003) Anomalous Diffusion and Fractional Stable Distributions. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. – 2003, No. 4. – P.810–825. (In English).
6. Gilmutdinov, A., and Usakov, P., (2008). Fractal operators. Criteria of synthesis and realization [Drobnyje operatory. Kriterii sinteza i realizacii], *Nonlinear word*, – 2008, № 8. – P.452–463. (In Russian).
7. Busher, V., and Martynjuk, V., and Najdenko, E, (2012). Energy parameters and characteristics of supercapacitors in dynamic modes [Dinamicheskiye pokazateli i parametry superkondensatorov v dinamicheskikh rezhimah]. *Measuring and computing engineering in technological processes – Khmelnytskyi*, – 2012, Vol. 1, – P.44–50. (In Russian).
8. Shantanu, D., (2008). *Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. – 2008. – 240 p. (In English).

given level and the speed is higher than for systems with an integer order of astaticism. Approximate analytical expressions are found that allow us to calculate the parameters of regulators without preliminary calculation of transient processes. A method for calculating the output signals of regulators with fractional integral and differentiating components, which is applicable in microprocessor control systems, is described. Taking into account the processing power of modern single-chip processors, this makes it possible to apply fractional-integral calculus methods both for controlling slow processes (in microclimate appliances, in charge / discharge systems of supercapacitors and accumulators with a quantization period of 1 s), and in relatively fast systems, for example, controlling the current in the circuit with the inductor taking into account the magnetization curve with a quantization period of the order of 1-10 ms.

Keywords: Electrotechnical system, astatic closed loop system, fractional proportional-integrally-differentiating regulator, optimal dynamic and static properties.

ДРОБОВІ ПРОПОРЦІЙНО-ИНТЕГРАЛЬНО-ДИФЕРЕНЦІЙНІ РЕГУЛЯТОРИ В ЕЛЕКТРОТЕХНІЧНИХ СИСТЕМАХ»

В. В. Бушер

Одеський національний політехнічний університет

Анотація. Дробові пропорційно-інтегрально-диференційні регулятори в астатичних замкнених системах управління дозволяють істотно поліпшити динамічні показники за рахунок підвищення запасів стійкості при одночасному розширенні смуги пропускання контуру. Крім того, коли об'єкт може бути описаний дробовими диференційними рівняннями або в його математичній моделі присутні статичні функції дробового порядку, такі регулятори точніше компенсують особливості об'єкта. Метою роботи є дослідження динамічних та статичних характеристик замкнених систем з дробовим порядком астатизму від 0.5 до 2. На підставі аналізу частотних характеристик і перехідних процесів таких систем запропоновано методи синтезу регуляторів для порядку астатизму як менше 1, так і більше 1. Визначено правила вибору структури регуляторів і необхідні передавальні функції регуляторів для типових об'єктів управління. Їх параметри обрано відповідно до запропонованих розрахункових залежностей. Це забезпечує обмеження перерегулювання на заданому рівні і швидкодію вище, ніж у систем з цілочисельним порядком астатизму. Знайдено наближені аналітичні вирази, що дозволяють розрахувати параметри регуляторів без попереднього розрахунку перехідних процесів. Описано спосіб обчислення вихідних сигналів регуляторів з дробовими інтегральними і диференціальними складовими, який можна застосовувати в мікропроцесорних системах управління. З урахуванням обчислювальної потужності сучасних процесорів це дає можливість застосовувати методи дрібово-інтегрального числення як для управління повільними процесами (в кліматичних установках, в системах заряду / розряду суперконденсаторів і акумуляторів з періодом квантування близько 1 с), так і у відносно швидких системах, наприклад, управління струмом в ланцюзі з котушкою індуктивності з урахуванням кривої намагнічування з періодом квантування 1-10 мс.

Ключові слова: електротехнічна система, астатична замкнена система управління, дробовий пропорційно-інтегрально-диференційний регулятор, оптимальні динамічні і статичні показники.

Получено 25.03.2018



Бушер Виктор Владимирович, доктор технических наук, профессор кафедры электромеханических систем с компьютерным управлением Одесского национального политехнического университета. Просп. Шевченко, 1, Одесса, Украина,

Victor Busher, Dr. of Science, Professor of the Department of electromechanical system with computer control, Odessa National Polytechnic University, Shevchenko ave., 1, Odessa, Ukraine

E-mail: victor.v.bousher@gmail.com, c.: +38(050)3908809

ORCID ID: 0000-0002-3268-7519