УДК 532.527

С.В. Сурков, канд. техн. наук, доц., Одес. нац. политехн. ун-т

ПРИНЦИП МИНИМУМА ДИССИПИРУЕМОЙ ЭНЕРГИИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ДВУМЕРНЫМ ТЕЧЕНИЯМ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

С.В. Сурков. **Принцип мінімуму дисипованої енергії стосовно до двовимірних течій нестисливої рідини.** Показано, що потенційні течії нестисливої рідини задовольняють варіаційному принципу мінімуму дисипованої енергії, що пояснює розповсюдженість течій цього класу.

S.V. Surkov. **The principle of dissipated energy minimum as applied to the two-dimensional flows of incompressible fluids.** It is shown, that potential flows of incompressible fluid satisfy the variational principle of the minimum of dissipated energy. This explains the wide spreading of this kind of flows.

В механике жидкости и газа широко используется теория плоских потенциальных течений несжимаемой жидкости. В частности, считается, что при обтекании тел потоком жидкости силы вязкого трения проявляются только в тонком пристенном слое – пограничном слое, а за его пределами течение потенциальное. Отмечается, что потенциальные течения являются приближенной моделью, которая хорошо согласуется с экспериментальными данными. Возможность существования потенциальных течений обосновывается теоремами Кельвина и Лагранжа [1, 2]. Однако отсутствует объяснение, почему течения жидкости в незамкнутом объеме приближаются именно к потенциальным.

С другой стороны, известно, что, по крайней мере, в некоторых случаях решения уравнений Навье-Стокса не обладают свойством единственности [3]. Это означает, что при заданных граничных условиях может существовать несколько решений этих уравнений, и нужен дополнительный критерий, чтобы выбрать то решение, которое соответствует реально существующему течению вязкой жидкости.

Для ответа на поставленные вопросы можно воспользоваться принципом минимума диссипируемой энергии, сформулированным Гельмгольцем: механическая энергия, диссипируемая при действительном стационарном движении вязкой несжимаемой жидкости в некотором объеме не больше, чем в аналогичном произвольном движении несжимаемой жидкости с темже распределением скоростей на поверхности, ограничивающей этот объем.

В случае двумерного течения несжимаемой жидкости мощность, диссипируемую в точке жидкости, можно записать в виде

$$N_d = 2\mu\left[\left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)^2\right], \qquad (1)$$

где μ — динамическая вязкость жидкости, Па · с.

Если использовать для плоского течения функцию тока ψ, то проекции скорости жидкости имеет вид

$$u_y = \frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad u_z = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad (2)$$

а уравнение несжимаемости выполняется автоматически.

С учетом (2) выражение (1) преобразуется к виду

$$N_d = \mu\left[\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right)^2 + 4\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial y}\right)^2\right],$$

или, если ввести обозначения $r = \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$, $s = \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z}$, $t = \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$, то

$$N_d = \mu(r^2 - 2rt + t^2 + 4s^2) \quad .$$

В дальнейших преобразованиях выражение, стоящее в скобках, обозначим через F.

Если течение существует в какой-то области A, то применение принципа минимума диссипируемой энергии требует отыскания минимума функционала

$$N = \mu \iint_A (r^2 - 2rt + t^2 + 4s^2) dA \tag{3}$$

в этой области.

В вариационном исчислении такая задача сводится к решению дифференциального уравнения Эйлера [4]

$$F_\psi - \frac{\partial}{\partial y}\{F_p\} - \frac{\partial}{\partial z}\{F_q\} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\{F_r\} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\{F_s\} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\{F_t\} = 0 \, . \tag{4}$$

В уравнении (4) используются так называемые полные частные производные: при вычислении полагают, что величины, стоящие в фигурных скобках, зависят только от одной из пространственных координат (x, y или z), но в любом случае зависят от величин r, s и t.

Частные производные, вычисленные при этих условиях, равны

$$\{F_r\} = 2(r - t) \, ,$$

$$\{F_t\} = 2(t - r) \, ,$$

$$\{F_s\} = 8s \, ,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\{F_r\} = 2\left(\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right) = 2\left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} - \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^2 \partial y^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\{F_t\} = 2\left(\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 r}{\partial z^2}\right) = 2\left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} - \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^2 \partial z^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\{F_s\} = 8\frac{\partial^2 s}{\partial y \partial z} = 8\frac{\partial^4 \psi}{\partial y^2 \partial z^2} \, .$$

Тогда уравнение Эйлера (4) принимает вид

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} + 2\frac{\partial^4 \psi}{\partial y^2 \partial z^2} = 0 \, . \tag{5}$$

Если ввести двумерный оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \, ,$$

уравнение (5) записывается в виде

$$\Delta^2 \psi = 0 \, . \tag{6}$$

Это бигармоническое уравнение, которое используется, например, в теории упругости. Из него, в частности, следует, что известные плоские потенциальные течения, удовлетворяющие гармоническому уравнению $\Delta\psi = 0$, удовлетворяют также принципу минимума диссипируемой энергии (6).

Таким образом, удается объяснить, почему реально существующие течения в незамкнутых областях приближаются к потенциальным. В то же время, в замкнутых областях потенциальные течения не могут существовать, и для описания возникающих там потоков необходимо использовать теорию вихревых течений.

Литература

1. Емцев Б.Т. Техническая гидромеханика. — М.: Машиностроение, 1987. — 440 с.
2. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1987. — 840 с.
3. Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. — М.: Мир, 1981. — 408 с.
4. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Наука, 1965. — 424 с.

Поступила в редакцию 15 марта 2005 г.