

ОЦЕНКА ПЕРСПЕКТИВНОСТИ ВЕТВЕЙ В МЕТОДЕ ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА

Ю. М. Бастриков, А. Н. Гапизов, М. Ю. Кузнецов, Л. И. Протасова

Одесский национальный политехнический университет

Аннотация. В статье рассмотрен вариант повышения эффективности решения задачи коммивояжера с применением расширенной оценки ветвей в методе ветвей и границ. Предложен алгоритм и приведены результаты решения тестовых задач. Численный эксперимент по решению серии задач показал, что для задач с числом городов больше 300 вероятность получения улучшенного решения приближается к 100 %.

Ключевые слова: задача коммивояжера, метод ветвей и границ, дерево поиска решения, алгоритм решения задачи, оценка ветви, выбор ветви, расширенная оценка ветви.

Введение

Широко известным подходом к решению задачи коммивояжера является [3 – 10], метод ветвей и границ, который относят к специальным типам поиска с ограничениями [6, 10]. Задача коммивояжера (ЗК) является типичной задачей оптимизации. В этой задаче коммивояжер должен посетить n городов и возвратиться в исходный пункт, при этом требуется минимизировать общую стоимость транспортных расходов, т.е. найти маршрут минимальной стоимости (минимальной длины). Переезжая из города i в город j , коммивояжер терпит убыток a_{ij} .

Получение точного решения задачи возможно только при использовании метода полного перебора. Этот метод может быть применен для задач с числом городов не более 13.

Практическая важность решения задач большей размерности объясняет появление ряда методов и алгоритмов – случайный перебор, метод ближайшего соседа, метод включения ближайшего города, метод самого дешевого включения, метод минимального остовного дерева, метод имитации отжига и др.

На практике используются метод ветвей и границ, метод генетических алгоритмов, алгоритм муравьиной колонии.

Перечисленные эвристические методы не могут гарантировать получение точного решения, т.е. получения гамильтонова контура минимальной длины (стоимости).

Простота формулировки и трудность поиска решения привлекает к ЗК внимание большого количества исследователей (профессионалов и любителей математики). Ведущие университеты

используют ЗК в качестве учебного задания при изучении комбинаторных проблем. В настоящее время ЗК приобретает актуальность для решения задач логистики и других важных практических задач.

К этой задаче легко применить метод ветвей и границ, получая алгоритм, который возвращается всякий раз, когда стоимость текущего частичного решения равняется или превосходит стоимость лучшего решения, найденного ранее.

Целью работы является повышение эффективности алгоритма решения задачи коммивояжера при использовании метода ветвей и границ за счет применения расширенной оценки ветвей, участвующих в построении искомого пути коммивояжера.

1. Основная часть

Алгоритм ветвей и границ, предложенный в [11] и подробно рассмотренный в [6], является одним из ряда эвристических алгоритмов, предложенных для решения ЗК.

В процессе решения ЗК строится дерево поиска решения. При построении дерева, на каждом шаге выбирается некоторая ветвь. Выбор ветви осуществляется на основе оценки. Оценка определяет, на сколько увеличится искомый путь, если оцениваемую ветвь не использовать в этом пути. Из оценок ветвей поддеревья формируется оценка поддеревья и в процессе поиска решения текущая оценка сравнивается с оценками других поддеревьев и при превышении или равенстве, алгоритм предполагает продолжение поиска с использованием других, более выгодных (с точки зрения используемой оценки) поддеревьев. Т.е. алгоритм ветвей и границ является вариантом поиска с возвратением.

При выборе ветви в процессе поиска решения используется ветвь, дающая наибольший рост оценки поддеревья в случае ее не использо-

© Ю. М. Бастриков, А. Н. Гапизов, М. Ю. Кузнецов, Л. И. Протасова, 2019

вания. Выбор такой ветви осуществляется по следующему алгоритму: в исходной матрице стоимостей из каждой строки и каждого столбца вычитается минимальный элемент. Получаем преобразованную матрицу. При этом в каждой строке и столбце появляется элемент нулевой стоимости (длины). Ветви нулевой стоимости рассматриваются как возможные ветви для построения искомого пути [6].

Далее каждый нулевой элемент матрицы заменяется на бесконечность и определяется минимальный элемент в каждой строке и столбце. Получаем оценку для каждой из ветвей нулевой стоимости, т.е. оцениваем проигрыш в случае не использования оцениваемой ветви.

Т.е. , т.е. для оценки ветви можно записать

$$\Delta a_{ij} = \max \left\{ \min \left\{ a_{ik} \right\}_{k \neq j} + \min \left\{ a_{kj} \right\}_{k \neq i} \right\}, \quad (1)$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, (n-1), n,$$

где Δa_{ij} – оценка ветви.

Выражение (1) учитывает элементы i -той строки и j -того столбца матрицы стоимостей, соответствующие анализируемой ветви. Оценку ветви можно расширить, учитывая большее количество элементов матрицы стоимостей, а именно ветви входящие в узел i , и ветви, выходящие из узла j , т.е. j -тую строку и i -тый столбец и увеличить, таким образом, в два раза число анализируемых элементов матрицы стоимостей. Это соответствует остальным ветвям смежным с ветвью a_{ij} , и пока не используемым для оценки ветви.

Тогда для расширенной оценки можно записать

$$\Delta_p a_{ij} = \max \left\{ \begin{array}{l} \min \left\{ a_{ik} \right\}_{k \neq j} + \min \left\{ a_{kj} \right\}_{k \neq i} - \\ - \min \left\{ a_{jk} \right\}_{k \neq i} - \min \left\{ a_{ki} \right\}_{k \neq j} \end{array} \right\}, \quad (2)$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, (n-1), n,$$

где $\Delta_p a_{ij}$ – расширенная оценка ветви.

Выражение (2) учитывает дополнительные ветви, участвующие в расширенной оценке. Эти ветви на рис. 1 выделены уменьшенной толщиной линий.

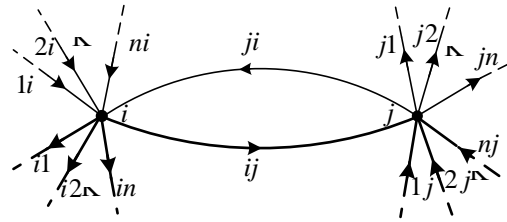


Рис. 1. Дополнительные ветви, используемые в расширенной оценке

Дополнительные ветви, используемые в расширенной оценке (2), дают возможность выделить ветви, имеющие наилучшее продолжение, т.е. продолжение минимальной длины. Таким образом, оценка (2) позволяет выделить кратчайшую цепь, состоящую из трех ветвей, в то время как оценка (1) выделяет одну ветвь, т.е. цепь, состоящую из одной ветви.

Более подробно алгоритм метода ветвей и границ и пример решения ЗК изложен в популярной монографии [6, с.140 – 145].

2. Алгоритм решения ЗК с использованием расширенной оценки

Эвристические алгоритмы не гарантируют получения точного решения, но и не исключают, в частном случае, получение решения близкого либо совпадающего с точным. Алгоритм, предлагаемый в настоящей работе, использует как основу алгоритм, описанный в [6].

В исходной матрице стоимостей из каждой строки и каждого столбца вычитается минимальный элемент. Получаем преобразованную матрицу. При этом в каждой строке и столбце появляется элемент нулевой стоимости (длины). Ветви нулевой длины рассматриваются как возможные ветви для построения искомого пути.

Сумма вычтенных элементов матрицы является так называемой нижней оценкой искомого решения на данном этапе построения пути. Нижняя оценка указывает на тот факт, что искомым путь не может быть меньше этой оценки.

Далее каждый нуль заменяется на бесконечность и из соответствующих строки и столбца вычитается минимальный элемент. Получаем оценки для каждой нулевой ветви. Эта оценка показывает, каков будет проигрыш, если рассматриваемую ветвь не включить в искомым путь коммивояжера. Выбирается ветвь с самой большой оценкой.

После выбора ветви из матрицы стоимостей исключаются соответствующие строка и столбец и диагональный элемент.

Получаем матрицу на единицу меньшего порядка. В полученной матрице производится вычитание минимальных элементов из строк и столбцов и уточняется нижняя оценка.

Повторяя рассмотренную процедуру, получаем n ветвей необходимых для построения искомого пути коммивояжера.

Использование двух оценок приводит к появлению двух конкурирующих ветвей – ветвь, выделенная с помощью выражения (1) и ветвь, полученная с использованием выражения (2). Для каждой из выделенных ветвей вычисляются две нижние оценки – нижняя оценка строящегося поддерева с включенной выбранной ветвью и нижняя оценка для поддерева, не включающего выбранную ветвь. Таким образом, если в алгоритме использованы, например, две оценки ветвей, то при выборе очередной ветви необходимо вычислить четыре нижних оценки и выбрать из них минимальную. Это дает возможность выбрать одну из двух ветвей и решить вопрос об использовании или неиспользовании выбранной ветви.

В таблице 1 приведены результаты сравнения «классического» алгоритма ветвей и границ [6] и алгоритма ветвей и границ использующего две оценки – оценку (1) и оценку (2). Сравнение проводилось при решении задач со случайными матрицами стоимостей. Для каждой случайной матрицы находился лучший путь с использованием «классического» алгоритма и того же алгоритма, но использующего две оценки.

Таблица 1

Результаты численного эксперимента по определению эффективности расширенной оценки

n	100	200	300	400	500
Отношение количества улучшенных решений при использовании оценок (1) и (2) к количеству решений с использованием оценки (1)	10 %	50 %	90 %	100 %	100 %

Для каждого значения n вычисления повторялись для 100 случайных матриц, при этом фиксировалось количество решений лучших по сравнению с решением, полученным при использовании «классического» алгоритма ветвей и границ.

Данные эксперимента, приведенные в таблице, показывают, что для задач имеющих размерность более 300, практически для каждой случайной задачи при использовании расширенной оценки получаем решение лучшее по срав-

нению с решением, полученным при использовании выражения (1).

В работе при исследовании алгоритмов использовался язык программирования C#, время расчета одной случайной задачи для $n = 200$ составляет 10,5 секунд.

Таким образом, программа, использующая алгоритм ветвей и границ, заметно повышает вероятность получения лучшего решения для случайной задачи за счет использования расширенной оценки.

Выводы

Предложенная расширенная оценка позволяет увеличить эффективность алгоритма ветвей и границ для решения задачи коммивояжера. Эффективность алгоритма растет при увеличении размерности задачи. При $n=200$, где n – размерность задачи, каждое второе решение случайной задачи оказывается лучше при использовании расширенной оценки. При $n=300$ и более практически каждое решение при использовании расширенной оценки оказывается лучше, чем при использовании классического алгоритма.

Можно предположить, что дальнейшее расширение оценки приведет к большему повышению эффективности алгоритма.

Список использованной литературы

1. А. с. 750502 СССР, МКИ³ G 06 G 7/122. Устройство для решения экстремальных комбинаторных задач / Ю. М. Бастриков, Л. И. Гутенмахер, В. С. Янина (СССР). – № 2592268/18-24; заявл. 20.03.78; опубл. 23.07.80, Бюл. № 27 // Открытия. Изобрет. Пром. образцы. Товар. знаки. – 1980. – № 27. – с. 248.
2. А. с. 1716548 СССР, МКИ⁵ G 06 G 7/48. Устройство для решения экстремальных комбинаторных задач / Ю. М. Бастриков, А. В. Фрид (СССР). – № 465779/24; заявл. 02.03.89; Опубл. 28.02.92, Бюл. №8 // Изобретения. – 1992. – № 8. – с. 215–216.
3. Вагнер, Г. Основы исследования операций. Т.2 [Текст] / Г. Вагнер. – М.: Мир, 1973. – 488 с.
4. Липский, В. Комбинаторика для программистов [Текст] / В. Липский. – М.: Мир, 1988. – 200 с.
5. Основы теории оптимального управления [Текст] / [Кротов, В. Ф., Лагоша Б. А., Лобанов С. М. и др.]; под ред. В. Ф. Кротова. – М.: Высш. шк., 1990. – 430 с., ил.
6. Рейнгольд, Э. Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика [Текст] / Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н.; пер. с англ. Е. П. Липатова – М.: Мир. 1980. – 476 с.

7. Сухарев, А. Г. Курс методов оптимизации: учеб. пособие [Текст] / А. Г. Сухарев, А. В. Тимохов, В. В. Федоров. – [2-е изд.] – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 368 с.

8. Танаев, В. С. Теория расписаний. Многостадийные системы [Текст] / В. С. Танаев, Ю. Н. Сотсков, В. А. Струевич. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1989. – 328 с. – (Экон.-мат б-ка)

9. Gomory, R. E. The traveling Salesmen Problem, in Proceedings of the IBM Scientific Computing Symposium on Combinatorial Problems [Text], IBM Data Processing Division, White Plains, N. Y., 1966. – p. 93–121.

10. Ху, Т. Ч. Комбинаторные алгоритмы [Текст] / Т. Ч. Ху, М. Т. Шинг; пер. с англ. В. Е. Алексеева [и др.]. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского гос. ун-та им. Н. И. Лобачевского, 2004. – 330 с.

11. Little, J. D. C., Murty, K. G., Sweeney, D. W., Katel, C., An Algorithm for the Travelling Salesman Problem [Text], Operations Research, 11. – 1963, 898 с.

References

1. С. с. the 750502 the USSR, МКЕ³ G 06 G 7/122. Device for the decision of extreme combinatorics tasks / of Y. M. Bastrikov, L. E. Gutenmacher, V. S. Janena (the USSR). – № 2592268/18-24; 20.03.78 is declared; Published 23.07.80, Bulletin № 27 // Opening. Inventions. Industrial standards. Commodity. signs. – 1980. – № 27. – p. 248. (in Russian)

2. С. с. 1716548 the USSR, МКЕ⁵ G 06 G 7/48. Device for the decision of extreme combinatorics tasks / of Y. M. Bastrikov, A. V. Frid (the USSR). – № 465779/24; 02.03.89 is declared; Published 28.02.92, Bulletin №8 // Inventions. – 1992. – № 8. – p. 215–216. (in Russian)

3. Wagner, G. (1973), Is Bases of analysis of operations. V. 2. [Osnovy issledovanya. T. 2. Per. s angl.], World, Moscow, 488 p. (in Russian)

4. Lipsky, V. (1988), Combinatorics for programmers. [Combinatorika dlya programmistov], World, Moscow, 200 p. (in Russian)

5. Croto, V. F., Lagosha, B. A. and Lobanov, S. M. (1990), Bases of theory of optimal management: Studies. manual for steward. Institutions. [Osnovy teorii optimalnogo upravleniya], High school, Moscow, 430 p., with illustrations. (in Russian)

6. Reinhold, E., Nivergelt, U. and Deo, N. (1980), Combinatorial algorithms. Theory and Practice. trans. from English. [Combinatornye algoritmy. Teoriya i praktika. Per. s angl.], World, Moscow, 476 p. (in Russian)

7. Sukharev, A. G., Timochov, A. G. and Fedorov, V. V. (2005), Course of methods of optimization: Studies. Manual. [Kurs metodov optimizatsii: uchebnoe posobie, 2-e izd.], FIZMATLIT, Moscow, 368 p. (in Russian)

8. Tanaev, V. S., Sotсков, Y. N. and Strusevich, V. A. (1989), Theory of time-tables. Much phasic systems. [Teoriya raspisaniy. Mnogostadii nye sistemy], Science, Main release of physicist-mathematician of literature, Moscow, 328 p., (Economic-mathematical library). (in Russian).

9. Gomory, R. E. (1966), The traveling Salesmen Problem, in Proceedings of the IBM Scientific Computing Symposium on Combinatorial Problems, IBM Data Processing Division, White Plains, N. Y., p. 93–121. (in English)

10. Hu, T. Ch. and Shing, M. T. (2004), Combinatorial algorithms. [Combinatornye algoritmy. Per. s angl.], Publishing House of Nizhny Novgorod State University N. I. Lobachevsky, Nizhny Novgorod, 330 p. (in Russian)

11. Little, J. D. C., Murty, K. G., Sweeney, D. W. and Katel C., An Algorithm for the Travelling Salesman Problem. Operations Research, 11. – 1963, 898 с. (in English)

ESTIMATION OF PERSPECTIVITY OF BRANCHES IN THE METHOD OF BRANCHES AND BORDERS WHEN SOLVING THE TRADITIONAL TRAFFIC TASK

Y. M. Bastrikov, A. N. Hapizov, M. Y. Kuznetcov, L. I. Protasova

Odessa National Polytechnic University

Abstract. The article discusses the option of improving the efficiency of solving the traveling salesman problem by applying an extended branch estimate in the branch and bound method. The algorithm for assessing the «perspective» of some a_{ij} branch operates on the cost of the branches leaving node i and the branches included in node j . The algorithm considers the branches of zero length and selects the branch, with the replacement of which to infinity, you can subtract the largest number from the row and column corresponding to this branch.

The algorithm considers the branches of zero length and selects the branch, with the replacement of which to infinity, you can subtract the largest number from the row and column corresponding to this branch. The branch estimate can be expanded, taking into account the greater number of elements of the cost matrix, namely, the branches included in node i , and the branches leaving node j , that is, the j row and i column, thus doubling the number of analyzed elements of the matrix. The proposed extended estimate allows to increase the efficiency of the algorithm.

The work in the study of algorithms used the programming language C#. The efficiency of the algorithm increases with increasing dimension of the problem. The results of solving test tasks are given. The numerical experiment showed that for problems with more than 300 cities, each solution using the extended estimate turns out to be better than using the classical algorithm, the probability of obtaining an improved solution approaches 100 %.

Key words: traveling salesman problem, branch and bound method, decision search tree, algorithm for solving a problem, branch estimation, branch selection, extended branch estimation, transformation of the cost matrix.

ОЦІНКА ПЕРСПЕКТИВНОСТІ ГІЛОК У МЕТОДІ ГІЛОК І МЕЖ ПРИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОМІВОЯЖЕРА

Ю. М. Бастриков, А. Н. Гапізов, М. Ю. Кузнєцов, Л. І. Протасова
Одеський національний політехнічний університет

Анотація. У статті розглянуто варіант підвищення ефективності вирішення задачі комівояжера з застосуванням розширеної оцінки гілок в методі гілок і меж. Алгоритм для оцінки «перспективності» деякої a_{ij} гілки оперує вартістю гілок, що виходять з вузла i та гілок, що входять у вузол j . Алгоритм розглядає гілки нульової довжини, і вибирає гілку, при заміні якої на нескінченність, можна відняти найбільше число з рядка i стовпця, відповідних даної гілки. Оцінку гілки можна розширити, з огляду на більшу кількість елементів матриці вартостей, а саме гілки що входять в вузол i , i гілки, що виходять з вузла j , тобто j -тий рядок і i -тий стовець і збільшити, таким чином, в два рази число аналізованих елементів матриці. Запропонована розширена оцінка дозволяє збільшити ефективність алгоритму.

У роботі при дослідженні алгоритмів використовувалася мова програмування C#. Ефективність алгоритму зростає при збільшенні розмірності задачі. Наведено результати вирішення тестових завдань. Чисельний експеримент показав, що для задач з числом міст більше 300 кожне рішення при використанні розширеної оцінки виявляється краще, ніж при використанні класичного алгоритму, ймовірність отримання поліпшеного рішення наближається до 100 %. Можна припустити, що подальше розширення оцінки призведе до більшого підвищення ефективності алгоритму. Таким чином, програма, яка використовує алгоритм гілок і меж, помітно підвищує ймовірність отримання кращого рішення для випадкової завдання за рахунок використання розширеної оцінки.

Ключові слова: задача комівояжера, метод гілок і меж, дерево пошуку рішення, алгоритм рішення задачі, оцінка гілки, вибір гілки, розширена оцінка гілки, природи матриці вартостей першого і другого порядку, перетворення матриці вартостей.

Получено 04.02.2019



Бастриков Юрий Максимович, Одесский национальный политехнический университет, кандидат технических наук, доцент кафедры компьютеризованных систем управления. Просп. Шевченко, 1, Одесса, Украина, E-mail: yurimaxbas@gmail.com, тел. +38-048-705-84-36

Yury Bastrikov, Odessa National Polytechnic University, PhD, Docent of the Department of computerized control systems, Shevchenko ave., 1, Odessa, Ukraine, E-mail: yurimaxbas@gmail.com, tel. +38-048-705-84-36

ORCID 0000-0002-3976-5516



Протасова Людмила Ивановна, Одесский национальный политехнический университет, старший преподаватель кафедры компьютеризованных систем управления. Просп. Шевченко, 1, Одесса, Украина, E-mail: ludmilaivp@gmail.com, тел. +38-048-705-84-36

Ludmila Protasova, Odessa National Polytechnic University, Senior lecture of the Department of computerized control systems, Shevchenko ave., 1, Odessa, Ukraine, E-mail: ludmilaivp@gmail.com, tel. +38-048-705-84-36

ORCID 0000-0002-8531-9357



Гапизов Арслан Николаевич, Одесский национальный политехнический университет, студент кафедры компьютеризованных систем управления. Просп. Шевченко, 1, Одесса, Украина, E-mail: arslangapizov@gmail.com, тел. +38-063-379-20-99

Arslan Napizov, Odessa National Polytechnic University, student of the Department of computerized control systems, Shevchenko av., 1, Odessa, Ukraine, E-mail: arslangapizov@gmail.com, тел. +38-063-379-20-99

ORCID 0000-0001-6651-554X



Кузнецов Максим Юрьевич, Одесский национальный политехнический университет, студент кафедры компьютеризованных систем управления. Просп. Шевченко, 1, Одесса, Украина, E-mail: maxenssss@gmail.com, тел. +38-073-493-78-54

Maksim Kuznetsov, Odessa National Polytechnic University, student of the Department of computerized control systems, Shevchenko av., 1, Odessa, Ukraine, E-mail: maxenssss@gmail.com, тел. +38-073-493-78-54

ORCID 0000-0002-2497-5879