Міністерство освіти і науки України

ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

Інститут енергетики та комп`ютерно-інтегрованих систем управління

Кафедра теплових електричних станцій і енергозберігаючих технологій

Методичні вказівки до лабораторних робіт

з дисципліни «Математичні методи та моделювання в розрахунках на ЕОМ»

для студентів першого (бакалаврського) рівня освіти
по спеціальності – 144 Теплоенергетика
зі спеціалізації – Теплоенергетика та менеджмент енергозбереження

Одеса-2021

Міністерство освіти і науки України

ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

Інститут енергетики та комп`ютерно-інтегрованих систем управління

Кафедра теплових електричних станцій і енергозберігаючих технологій

Методичні вказівки до лабораторних робіт з дисципліни «Математичні методи та моделювання в розрахунках на ЕОМ»

для студентів першого (бакалаврського) рівня освіти
по спеціальності – 144 Теплоенергетика
зі спеціалізації –
Теплоенергетика та менеджмент енергозбереження

Затверджено на засіданні
кафедри ТЕСЕТ
Протокол №___ від ______2021 р.

ОДЕСА 2021

Методичні вказівки до лабораторних робіт з дисципліни «Математичні методи та моделювання в розрахунках на ЕОМ» для студентів першого (бакалаврського) рівня освіти по спеціальності – 144 Теплоенергетика, зі спеціалізації – Теплоенергетика та менеджмент енергозбереження / Укл: Баласанян Г.А., Крапива Н.В., Одеса, ОНПУ, 68 с.

Укладачі: Баласанян Г.А., д.т.н., проф.
Крапива Н.В., к. ф-м.н., доц.

Рецензент: Климчук О.А., д.т.н.

Методичні вказівки розроблено з метою забезпечення високого рівня знань майбутніх фахівців з теплоенергетики.

Методичні вказівки призначено для студентів всіх форм навчання за спеціальністю – 144 Теплоенергетика.

ВСТУП

Методичні вказівки до лабораторних робіт містять 8 робіт, які виконуються відповідно до програми дисципліни "Математичні методи та моделювання в розрахунках на ЕОМ" для студентів теплоенергетичного напрямку, які навчаються за програмою бакалавра за спеціальністю 144 – «Теплоенергетика».

Щоб стати фахівцем високого рівня, студент повинен одержати якісну професійну підготовку, мати широкий кругозір, знаходити шляхи розв’язання різноманітних проблем, аналізувати одержані результати, застосовувати на практиці сучасні прикладні пакети ПЕОМ.

Лабораторні роботи спрямовані на розвиток вміння засобами прикладного пакета Mathcad розв’язати ряд конкретних задач, які виникають при моделюванні технічних систем: розв'язання рівнянь і систем рівнянь, знаходження інтегралів функцій, розв'язання диференціальних рівнянь, пошук екстремумів функцій тощо. Для кожної роботи наведені порядок виконання, зразок виконання завдання, таблиця з варіантами завдання, а також контрольні запитання. Кожен студент виконує роботу відповідно до свого варіанта.

Перед виконанням лабораторних робіт студент має ознайомитися із завданням до роботи і відповісти на контрольні запитання керівника занять.

Звіт до лабораторної роботи повинен містити матеріали:

— постановку задачі;

— результати розрахункового експерименту;

— графічні матеріали (якщо це потрібно);

— тексти програм;

— аналіз отриманих результатів.

Лабораторна робота №1

Тема "*Розв'язання нелінійних рівнянь*"

Мета роботи – знайти корені нелінійних рівнянь на підставі типових алгоритмів та внутрішніх функцій Mathcad, порівняти результати.

☑ *Завдання до лабораторної роботи*

Задача 1.1

1. З використанням пакета Mathcad локалізувати корені трансцендентного рівняння $g(x)=0$ графічно.

2. За допомогою вбудованої функції **root** пакета Mathcad знайти корені рівняння $g(x)=0$ на відрізку $[a;b]$ з точністю $\varepsilon=10^{-3}$.

3. Використовуючи метод ***бісекції***, для даного рівняння $g(x)=0$ знайти з точністю $\varepsilon=10^{-3}$ усі корені. Скласти програму відповідно до алгоритму методу. Знайти потрібне число ітерацій.

4. Згідно з п. 3 знайти корені за ***методом хорд, Ньютона, комбінованим методом***.

5. Порівняти отримані результати, зробити висновки щодо ефективності методів.

Задача 1.2

1. З використанням пакета Mathcad знайти дійсні корені алгебраїчного рівняння $f(x)=0$ графічно.

2. За допомогою вбудованої функції **polyroots** пакета Mathcad знайти усі корені цього рівняння.

Контрольні запитання

1. Що називається коренем рівняння?
2. Наведіть класифікацію нелінійних рівнянь.
3. Поясніть визначення інтервалу виділення кореня.
4. Поясніть графічний метод розв'язання рівнянь.
5. У чому суть методу половинного ділення (метод дихотомії)?
6. Чим наближення, отримане методом хорд, відрізняється від наближення, отриманого методом Ньютона (методом дотичних)?
7. У чому суть комбінованого методу?
8. Які недоліки та переваги кожного з методів?

Нижче наведений приклад розв'язання задачі засобами пакета Mathcad.

Варіанти завдань до лабораторної роботи див. у дод. 1.

Приклад розв'язання задач

Задача 1.1

Дано рівняння: $g(x) = 0$ $\quad g(x) := x^3 - x - (\cos(x))^2$

Перша і друга похідні функції:

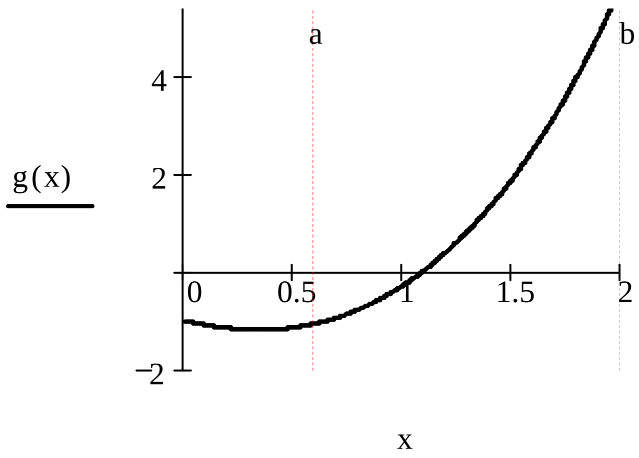
$$\frac{d}{dx}g(x) \rightarrow 3\cdot x^2 - 1 + 2\cdot\cos(x)\cdot\sin(x) \qquad df(x) := \frac{d}{dx}g(x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}g(x) \rightarrow 6\cdot x - 2\cdot\sin(x)^2 + 2\cdot\cos(x)^2 \qquad df2(x) := \frac{d^2}{dx^2}g(x)$$

Відрізки локалізації:

$a := 0.6 \quad b := 2 \qquad [0.6; 2]$

Графік функції



Розв'язання вбудованою функцією **root**: $x2 := 2$ $\text{root}(g(x2), x2) = 1.093$

$$
\begin{array}{l}
xn \leftarrow a \quad \text{otherwise} \\
xn1 \leftarrow a \quad \text{if} \;\; f \cdot df2 > 0 \\
xn1 \leftarrow b \quad \text{otherwise} \\
x1 \leftarrow xn \\
k \leftarrow 0 \\
\text{while} \;\; |xn1 - x1| > 2\varepsilon \\
\quad \left| \begin{array}{l}
dfxn \leftarrow df(xn) \\
fxn \leftarrow g(xn) \\
xn1 \leftarrow xn - \dfrac{fxn}{dfxn} \\
x1 \leftarrow xn \\
xn \leftarrow xn1 \\
k \leftarrow k + 1
\end{array} \right. \\
res \leftarrow \begin{pmatrix} xn \\ k \end{pmatrix} \\
res
\end{array}
$$

Розв'язання

$$\text{nuton}\left(g, a, b, 10^{-5}\right) = \begin{pmatrix} 1.093 \\ 5 \end{pmatrix}$$

корінь

число ітерацій

Програма знаходження кореня за алгоритмом **методу хорд**

$$
\mathrm{hord}(f, a, b, \varepsilon) := \left|
\begin{array}{l}
f1 \leftarrow f(b) \\
df \leftarrow df(b) \\
x0 \leftarrow b \quad \text{if} \quad f1 \cdot df > 0 \\
x0 \leftarrow a \quad \text{otherwise} \\
xn \leftarrow a \quad \text{if} \quad f1 \cdot df > 0 \\
xn \leftarrow b \quad \text{otherwise} \\
fx0 \leftarrow f(x0) \\
xn1 \leftarrow x0 \\
x1 \leftarrow xn \\
k \leftarrow 0 \\
\text{while} \quad |xn1 - x1| > 2\varepsilon \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
fxn \leftarrow f(xn) \\
xn1 \leftarrow xn - \dfrac{fxn \cdot (xn - x0)}{fxn - fx0} \\
x1 \leftarrow xn \\
xn \leftarrow xn1 \\
k \leftarrow k + 1
\end{array}
\right. \\
res \leftarrow \begin{pmatrix} xn \\ k \end{pmatrix} \\
res
\end{array}
\right.
$$

Розв’язання

$$
\mathrm{hord}\left(g, a, b, 10^{-5}\right) = \begin{pmatrix} 1.093 \\ 15 \end{pmatrix}
$$

корінь

число ітерацій

Програма знаходження кореня за алгоритмом **методу бісекції**

$$
\mathrm{bisec}(f, a, b, \varepsilon) := \left|
\begin{array}{l}
an \leftarrow a \\
bn \leftarrow b \\
k \leftarrow 0 \\
\text{while} \quad (bn - an) > 2 \cdot \varepsilon \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
xn \leftarrow \dfrac{an + bn}{2} \\
fa \leftarrow f(an) \\
fb \leftarrow f(bn) \\
fxn \leftarrow f(xn) \\
bn \leftarrow xn \quad \text{if} \quad (fa \cdot fxn \le 0) \\
an \leftarrow xn \quad \text{otherwise} \\
k \leftarrow k + 1
\end{array}
\right. \\
xn \leftarrow \dfrac{an + bn}{2} \\
res \leftarrow \begin{pmatrix} xn \\ k \end{pmatrix} \\
res
\end{array}
\right.
$$

Розв’язання

$$
\mathrm{bisec}\left(g, a, b, 10^{-5}\right) = \begin{pmatrix} 1.093 \\ 17 \end{pmatrix}
$$

корінь

число ітерацій

Програма знаходження кореня за алгоритмом **комбінованого методу**

$$
\mathrm{comb}(g, a, b, \varepsilon) := \left|
\begin{array}{l}
f \leftarrow g(b) \\
df2 \leftarrow df2(b) \\
xn \leftarrow b \quad \text{if} \quad f \cdot df2 > 0 \\
xn \leftarrow a \quad \text{otherwise} \\
xn1 \leftarrow a \quad \text{if} \quad f \cdot df2 > 0 \\
xn1 \leftarrow b \quad \text{otherwise} \\
k \leftarrow 0 \\
\text{while} \quad |xn1 - xn| > 2\varepsilon \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
x1 \leftarrow xn - \dfrac{g(xn)\cdot(xn - xn1)}{g(xn) - g(xn1)} \\
xn \leftarrow x1 \\
x2 \leftarrow xn1 - \dfrac{g(xn1)}{df(xn1)} \\
xn1 \leftarrow x2 \\
k \leftarrow k + 1
\end{array}
\right. \\
xn \leftarrow \dfrac{(xn1 + xn)}{2} \\
res \leftarrow \begin{pmatrix} xn \\ k \end{pmatrix} \\
res
\end{array}
\right.
$$

Розв’язання

$$
\mathrm{comb}\left(g, a, b, 10^{-5}\right) = \begin{pmatrix} 1.093 \\ 5 \end{pmatrix}
$$

корінь

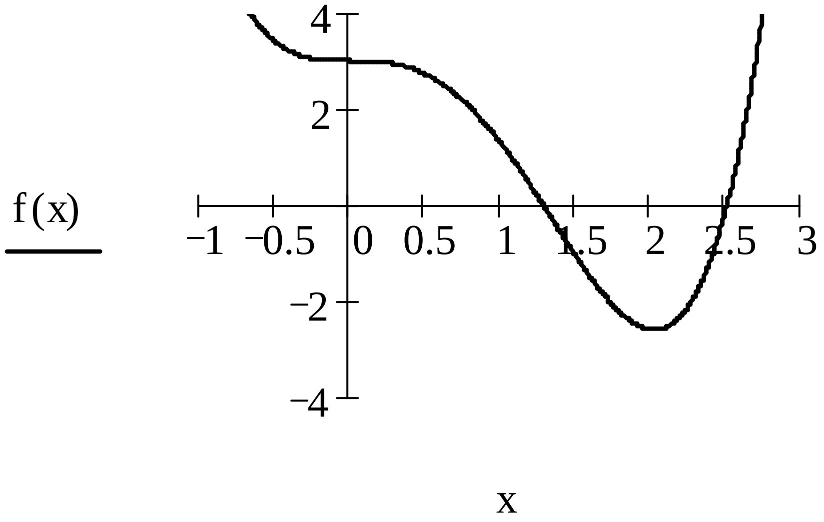
число ітерацій

Висновок: (зробити самостійно).

Задача 1.2

Дано рівняння: $f(x) = 0$ $\quad f(x) := x^4 - 2.7x^3 + 3$

Графічно розв'яжемо рівняння



За допомогою вбудованої функції **polyroots** отримали усі корені алгебраїчного рівняння.

Вектор коефіцієнтів полінома:

$$v := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -2.7 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{polyroots}(v) = \begin{pmatrix} -0.547 + 0.794i \\ -0.547 - 0.794i \\ 1.285 \\ 2.51 \end{pmatrix}$$

Висновок: (зробити самостійно).

Лабораторна робота №2

Тема *"Розв'язання систем лінійних і нелінійних рівнянь"*

Мета роботи – знайти розв'язання систем лінійних і нелінійних рівнянь на підставі типових алгоритмів і внутрішніх функцій Mathcad, порівняти результати.

Завдання до лабораторної роботи

Задача 2.1

1. Для заданої системи лінійних рівнянь задати матрицю $\boldsymbol{A}$ лівої частини і матрицю $\boldsymbol{B}$ правої частини системи. За допомогою вбудованої функції **lsove** пакета Mathcad знайти розв'язок системи $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$. Розв'язок отримати як у символьному так і в звичайному вигляді.

2. Для даної системи лінійних рівнянь задати значення початкових наближень розв'язків і за допомогою вбудованих функцій **Given** і **Find** пакета Mathcad знайти з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$ розв'язки системи.

3. Для даної системи лінійних рівнянь задати поширену матрицю і скласти програму розв'язання системи прямим методом (відповідно до алгоритму методу Гаусса). Знайти розв'язки системи, порівняти отримані результати.

Задача 2.2

1. З використанням пакета Mathcad локалізувати графічно розв’язки системи нелінійних рівнянь.

2. Для даної системи задати значення початкових наближень розв’язків і за допомогою вбудованих функцій **Given** і **Find** пакета Mathcad знайти з точністю $\varepsilon = 10^{-6}$ розв'язки системи.

3. Виконати перевірку точності розв'язків.

4. Показати на графіку розв'язки системи.

Контрольні запитання

1. Що називається розв’язком системи рівнянь?

2. Яка система називається сумісною?

3. На які дві групи розбиваються методи розв'язання систем рівнянь?

4. У чому суть методу Гаусса (метод виключень)?

5. Чим схема методу Гаусса відрізняється від компактної схеми цього методу?

6. Яка система називається заданою у Жордановій формі?

7. У чому суть методу Жордана-Гаусса?

8. Для розв'язання на ЕОМ систем якого порядку використовуються метод Гаусса й ітераційні методи?

9. Які є чисельні методи розв’язання систем нелінійних рівнянь?

Нижче наведений приклад розв’язання задачі засобами пакета Mathcad.

Варіанти завдань до лабораторної роботи див. у дод. 2.

Приклад розв’язання задач

Задача 2.1

Початкова система

$$x1 + 5x2 + 2x3 = 1$$
$$2x1 + 12x2 + 5x3 = 3$$
$$3x1 + 2x2 + 4x3 = 4$$

Розв’язання у матрічній формі

матриця коефіцієнтів системи:

$$a := \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 12 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

кількість змінних

$$\mathrm{rank}(a) = 3$$

вектор правої частини

$$b := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

точність розв’язання

$$TOL := 10^{-3}$$

символьне і звичайне розв'язання системи:

$$\mathrm{lsolve}(a,b) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} \\ \frac{-1}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.667 \\ -0.333 \\ 1.667 \end{pmatrix}$$

Розв'язання у чисельному вигляді

Початкові наближення:

$x1 := 2 \quad x2 := 2 \; x3 := 2$

Початкова система:

Given

$$x1 + 5x2 + 2x3 = 1$$
$$2x1 + 12x2 + 5x3 = 3$$
$$3x1 + 2x2 + 4x3 = 4$$

розв'язання

$$\mathrm{Find}(x1, x2, x3) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} \\ \frac{-1}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.667 \\ -0.333 \\ 1.667 \end{pmatrix} \quad \text{корені}$$

Розв’язання за методом Гаусса

нумерація масивів починається з одиниці: $ORIGIN := 1$

Початкова система:

$$x1 + 5x2 + 2x3 = 1$$
$$2x1 + 12x2 + 5x3 = 3$$
$$3x1 + 2x2 + 4x3 = 4$$

поширена матриця:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 12 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Кількість змінних: $n := rows(A)$ $n = 3$

Програма розв’язання СЛАУ методом Гаусса

```
gauss(A) := | for i ∈ 1 .. n − 1
            |   | c ← A[i,i]
            |   | return "DET=0" if c = 0
            |   | for j ∈ i .. n + 1
            |   |    A[i,j] ← A[i,j] / c
            |   | for k ∈ i + 1 .. n
            |   |    | d ← A[k,i]
            |   |    | for t ∈ i .. n + 1
            |   |    |    A[k,t] ← A[k,t] − A[i,t] · d
            | x[n] ← A[n,n+1] / A[n,n]
            | k ← n − 1
            | while k > 0
            |   | s ← 0
            |   | m ← k + 1
            |   | for j ∈ m .. n
            |   |    s ← s + A[k,j] · x[j]
            |   | x[k] ← A[k,n+1] − s
            |   | k ← k − 1
            | res ← x
```

розв’язання

$$\mathrm{gauss}(A) = \begin{pmatrix} -0.667 \\ -0.333 \\ 1.667 \end{pmatrix}$$ корені

Висновок: (зробити самостійно).

Задача 2.2

Початкова система нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} 1{,}5\,\boldsymbol{cos}(\boldsymbol{x}_1 - 1) + \boldsymbol{x}_2 = 1, \\ 0{,}4\boldsymbol{x}_1^2 + 0{,}9\boldsymbol{x}_2^2 = 1. \end{cases}$$

Записуємо рівняння системи:

$$f1(x1,x2) := x2 + 1.5\cdot\cos(x1-1) - 1$$

$$f2(x1,x2) := 0.9\cdot x2^2 + 0.4\cdot x1^2 - 1$$

Локалізація коренів

Перше рівняння системи розв'язане відносно x2 позначимо g1(x1): $g1(x1) := 1 - 1.5\cdot\cos(x1-1)$

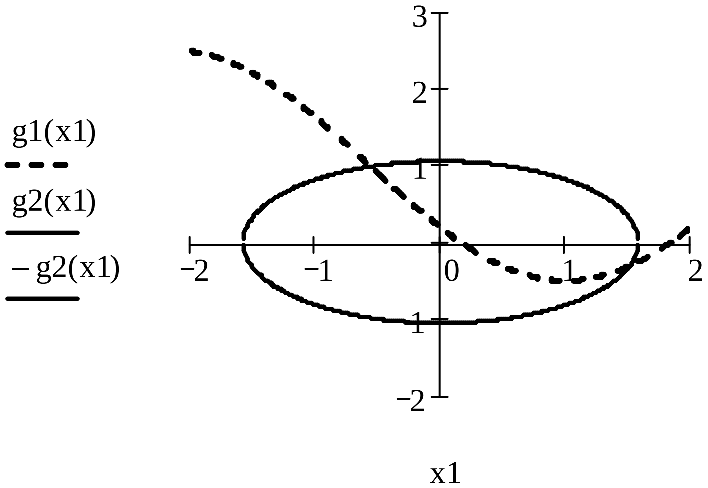
Друге рівняння системи розв'язане відносно x2 позначимо g2(x1): $g2(x1) := \sqrt{\dfrac{1-0.4\cdot x1^2}{0.9}}$

Зауважимо, що коли розв'язуємо відносно x2 друге рівняння, то отримуємо дві функції g2(x1) та -g2(x1).

Побудуємо графіки функцій g1(x1), g2(x1) та -g2(x1), при цьому підбором надаємо x1 такі значення, щоб по графіках можно було локалізувати корені.

Надамо x1 значення у проміжку від -2 до 2, щоб графіки функцій були більш докладними.

$x1 := -2, -2 + 0.01 .. 2$



Шукаємо перший корень

Початкове наближення знайдемо по графіку $x1 := 1.7$ $x2 := -0.5$

Точність для блока Given Find $TOL := 10^{-6}$

Розв'язання системи за допомогою пакета MATHCAD

Given

$$f1(x1, x2) = 0$$

$$f2(x1, x2) = 0$$

$$xr1 := \mathrm{Find}(x1, x2)$$

Отримано наближений розв'язок: $xr1 = \begin{pmatrix} 1.5124471 \\ -0.3073209 \end{pmatrix}$

Перевірка точності розв'язання:

$$f1(xr1_1, xr1_2) = 0$$

$$f2(xr1_1, xr1_2) = 0$$

Шукаємо другий корень

Початкове наближення знайдемо по графіку: $x1 := -1.5$ $\quad x2 := 1$

Розв'язання системи за допомогою пакета MATHCAD

Given

$$f1(x1, x2) = 0$$

$$f2(x1, x2) = 0$$

$$xr2 := \mathrm{Find}(x1, x2)$$

Отримано наближений розв'язок: $xr2 = \begin{pmatrix} -0.561118 \\ 0.9854828 \end{pmatrix}$

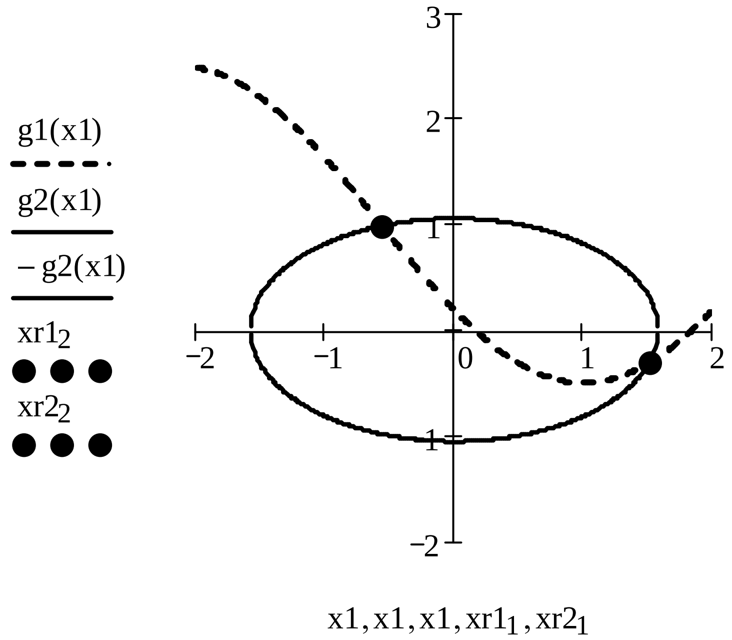
Перевірка точності розв'язку:

$$f1(xr2_1, xr2_2) = 0$$

$$f2(xr2_1, xr2_2) = 0$$

Покажемо на графіку розв'язки системи

$$x1 := -2, -2 + 0.01 .. 2$$



Висновок: (зробити самостійно).

Лабораторна робота №3

Тема *"Чисельні методи інтегрування"*

Мета роботи – обчислити невизначений і визначений інтеграли на підставі типових алгоритмів та внутрішніх функцій Mathcad, порівняти результати. Обчислити невластивий інтеграл першого роду.

Завдання до лабораторної роботи

Задача 3.1

1. Для заданої функції $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ за допомогою вбудованих алгоритмів пакета **Mathcad** обчислити невизначений інтеграл.

2. Задати межі інтегрування. За допомогою вбудованих алгоритмів пакета **Mathcad** знайти чисельний та символьний розв'язки визначеного інтеграла.

3. Скласти програму розв'язання визначеного інтеграла за алгоритмом ***методу трапецій***, задати кількість точок розподілу ділянки інтегрування ***n***, обчислити визначений інтеграл, порівняти отримані результати.

4. Згідно з п. 3. обчислити визначений інтеграл за алгоритмом ***методу Сімпсона***, порівняти отримані результати.

Контрольні запитання

1. Чому виникає необхідність використання чисельних методів інтегрування?
2. У чому сутність чисельних методів інтегрування?
3. Як іменуються формули наближеного інтегрування?
4. Поясніть, на чому заснований метод прямокутників.
5. Поясніть, на чому заснований метод трапецій.
6. У чому сутність методу Сімпсона?

7. Якими співвідношеннями зв'язана точність інтегрування і крок інтегрування для методів прямокутників, трапецій і Сімпсона?

8. Дати означення невластивому інтегралу першого роду.

9. Який невластивий інтеграл називається збіжним?

Нижче наведений приклад розв’язання задачі засобами пакета Mathcad.

Варіанти завдань до лабораторної роботи див. у дод. 3.

Приклад розв’язання задач

Задача 3.1

Інтегрування функції однієї змінної

Початкова функція:

$$f(x) := x^3$$

Невизначений інтеграл:

$$\int f(x)\,dx \to \frac{1}{4}\cdot x^4$$

Границя інтегрування:

$a := 1$ $\quad$ $b := 3$

Обчислення визначеного інтеграла функції

Чисельне розв’язання:

$$\int_a^b f(x)\,dx = 20$$

Символьне розв’язання:

$$\int_a^b f(x)\,dx \to 20$$

Програма обчислення визначеного інтеграла **методом трапецій**

$$\mathrm{trap}(a,b,n) := \begin{array}{|l} h \leftarrow \dfrac{b-a}{n} \\ x \leftarrow a \\ s \leftarrow 0 \\ \text{for } \; i \in 1..n \\ \quad \begin{array}{|l} x \leftarrow x+h \\ s \leftarrow s + f(x) \end{array} \\ s \leftarrow s + \dfrac{(f(a)+f(b))}{2} \\ \varepsilon \leftarrow \dfrac{(b-a)^2}{12\cdot n^2} \\ res \leftarrow h\cdot s \\ res \end{array}$$

розв'язок

$\mathrm{trap}(a,b,1000) = 20.054$

Програма обчислення визначеного інтеграла **методом Сімпсона**

$$\mathrm{simpson}(a,b,n) := \begin{array}{|l} h \leftarrow \dfrac{b-a}{n-1} \\ s \leftarrow 0 \\ xc \leftarrow a \\ xnc \leftarrow a+h \\ \text{while } \; xnc < b \\ \quad \begin{array}{|l} xc \leftarrow xc + 2\cdot h \\ s \leftarrow s + 4\cdot f(xc) \\ xnc \leftarrow xc + 2\cdot h \\ s \leftarrow s + 2\cdot f(xnc) \end{array} \\ s \leftarrow \dfrac{h\cdot(s+f(a)+f(b))}{3} \\ res \leftarrow s \\ res \end{array}$$

розв'язок

$\mathrm{simpson}(a,b,1000) = 20.051$

Висновок: (зробити самостійно).

Лабораторна робота №4

Тема " *Чисельні* методи *розв'язання диференціальних рівнянь* "

Мета роботи – знайти розв'язок задачі Коші для звичайного диференціального рівняння на підставі типових алгоритмів і внутрішніх функцій Mathcad, порівняти результати.

Завдання до лабораторної роботи

Задача 4.1

1. Знайти аналітичний розв'язок задачі Коші для звичайного диференціального рівняння (ЗДР) 1 порядку

$$\begin{cases} y'(t) = f\left(t, y(t)\right) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad t \in [t_0, T]$$

2. Використовуючи функцію **eyler**, знайти наближений розв'язок задачі Коші з кроком ***h*=0.1** за явним методом Ейлера.

3. Використовуючи вбудовану функцію **rkfixed** пакета MATHCAD, знайти наближений розв'язок задачі Коші з кроком ***h*=0.1** за методом Рунге-Кутта 4 порядку точності.

4. Побудувати таблиці значень наближених і точного розв'язків. На однім кресленні побудувати графіки наближених і точного розв'язків.

5. Оцінити похибку наближених розв'язків двома способами:

a) за формулою $\varepsilon = \max\limits_{0 \le i \le N} \left| y(t_i) - y_i \right|$, де $y(t_i)$ і y_i — значення точного і наближеного розв'язків у вузлах сітки t_i, $i = 1,\ldots, N$;

b) за правилом Рунге (за правилом подвійного перерахування).

Контрольні запитання

1. Яке рівняння називається звичайним диференціальним рівнянням?

2. Що називається загальним розв'язком диференціального рівняння?

3. Що таке задача Коші для диференціального рівняння?

4. Чому виникає необхідність застосовувати наближені методи розв'язання диференціального рівняння? Як підрозділяються наближені методи?

5. У чому різниця чисельних методів розв'язання диференціальних рівнянь?

6. У чому полягає ідея методу Ейлера?

7. У чому сутність методу Рунге-Кутта?

8. Як оцінюється похибка різних чисельних методів розв'язання диференціальних рівнянь?

Нижче наведений приклад розв’язання задачі засобами пакета Mathcad.

Варіанти завдань до лабораторної роботи див. у дод. 4.

Приклад розв’язання задач

Задача 4.1

1. Аналітичне розв'язання задачі Коші

Розглядається задача Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння (ЛНДР) першого порядку: $y' = y\cos t + \sin 2t$, $y(0) = -1$. Запишемо рівняння у вигляді $y' + P(t)y = Q(t)$, тобто $y' - \cos t \cdot y = \sin 2t$.

Знайдемо загальний інтеграл ЛНДР за формулою

$$y = \left(\int Q(t) \cdot e^{\int P(t)dt} dt + C \right) \cdot e^{-\int P(t)dt},$$

де C — довільна стала. Оскільки $P(t) = -\cos t$, $Q(t) = \sin 2t$, отримаємо загальний інтеграл

$$y := \left(\int \sin(2t) \cdot e^{\int -\cos(t)\,dt}\, dt + C \right) \cdot e^{-\int -\cos(t)\,dt},$$

$$y \to [1i\cdot(2\cdot 1i\cdot \exp(-\sin(t))\cdot \sin(t) + 2\cdot 1i\cdot \exp(-\sin(t))) + C]\cdot \exp(\sin(t))$$.

Отримаємо частковий інтеграл (тобто розв'язок задачі Коші), для чого знайдемо довільну сталу ***C*** , використовуючи початкові умови $\boldsymbol{y}(0) = -1$.

Маємо $y = [1i\cdot(2\cdot 1i\cdot \exp(-\sin(t))\cdot \sin(t) + 2\cdot 1i\cdot \exp(-\sin(t))) + C]\cdot \exp(\sin(t))$.

Розв'яжемо рівняння відносно ***C***, для чого використовуємо можливості MATHCAD (позначити ***C***, далі виконати команду **Symbolics / Variable / Solve**).

Отримаємо $\dfrac{(y + 2\cdot \exp(\sin(t))\cdot \exp(-\sin(t))\cdot \sin(t) + 2\cdot \exp(\sin(t))\cdot \exp(-\sin(t)))}{\exp(\sin(t))}$.

Тоді $C(y,t) := \dfrac{(y + 2\cdot \exp(\sin(t))\cdot \exp(-\sin(t))\cdot \sin(t) + 2\cdot \exp(\sin(t))\cdot \exp(-\sin(t)))}{\exp(\sin(t))}$

Враховуючи початкові умови, $C(-1,0) = 1$.

Частковий інтеграл (точний розв'язок задачі Коші):

$$y(t) := [i\cdot(2\cdot i\cdot \exp(-\sin(t))\cdot \sin(t) + 2\cdot i\cdot \exp(-\sin(t))) + 1]\cdot \exp(\sin(t))$$.

2. Чисельне розв'язання задачі Коші

Початкові дані

Права частина рівняння: $f(t,y) := y\cdot \cos(t) + \sin(2t)$.

Початкове значення: $y_0 := -1$. Відрізок: $t0 := 0 \quad T := 1$.

Крок сітки: $h := 0.2$. Кількість вузлів сітки: $N := \dfrac{T - t0}{h} \quad N = 5$.

Функція, що реалізує явний метод Ейлера; повертає вектор розв'язку:

$$eyler(f, y0, t0, h, N) := \left| \begin{array}{l} y_0 \leftarrow y0 \\ \text{for } i \in 0..N-1 \\ \quad y_{i+1} \leftarrow y_i + h\cdot f(t0 + i\cdot h, y_i) \\ y \end{array} \right.$$

Вхідні параметри:

f – функція правої частини;
y0 – початкове значення;
t0 – початкова точка відрізка;
h – крок сітки;
N – кількість вузлів сітки.

Розв'язання за **методом Ейлера**: $yE := eyler(f, y_0, t0, h, N)$.

Розв'язання за **методом Рунге-Кутта** (4 порядку точності):

$yRK4 := \mathrm{rkfixed}(y, t0, T, N, f)$ — вбудована функція.

Вхідні параметри:
f – функція правої частини;
y – вектор початкових значень;
t0 – початкова точка відрізка;
T – кінцева точка відрізка;
N – кількість вузлів сітки.

Функція **rkfixed** повертає матрицю, перший стовпець якої містить вузли сітки, а другий – наближене розв'язання в цих вузлах.

Точний розв'язок:

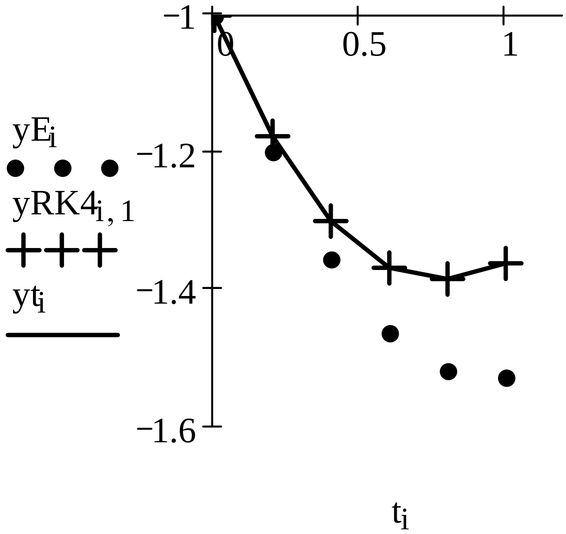
$$Y(t) := [1i\cdot(2\cdot 1i\cdot\exp(-\sin(t))\cdot\sin(t) + 2\cdot 1i\cdot\exp(-\sin(t))) + 1]\cdot\exp(\sin(t))$$

Точний розв'язок у вузлах сітки: $i := 0..N\ \ t_i := t0 + i\cdot h\ \ yt_i := Y(t_i)$

Розв'язання за методом Ейлера — Розв'язання за методом Рунге-Кутта — Точний розв'язок

$$yE = \begin{pmatrix} -1 \\ -1.2 \\ -1.357 \\ -1.464 \\ -1.519 \\ -1.531 \end{pmatrix} \qquad yRK4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0.2 & -1.178 \\ 0.4 & -1.303 \\ 0.6 & -1.37 \\ 0.8 & -1.386 \\ 1 & -1.363 \end{pmatrix} \qquad yt = \begin{pmatrix} -1 \\ -1.17756 \\ -1.302715 \\ -1.370466 \\ -1.385704 \\ -1.363165 \end{pmatrix}$$

3. Графіки наближених і точного розв'язків



4. Розрахунок похибки за правилом Рунге

Наближений розв’язок з кроком **h/2**: $h2 := \frac{h}{2}$ $N2 := \frac{T - t0}{h2}$ $N2 = 10$

$yEh2 := eyler\left(f, y_0, t0, h2, N2\right)$ $yRK4h2 := rkfixed(y, t0, T, N2, f)$

Розрахунок похибки: $i := 0 .. N$

$zE_i := \left|yE_i - yEh2_{2\cdot i}\right|$ $zRK4_i := \frac{\left|\left(yRK4^{\langle 1 \rangle}\right)_i - \left(yRK4h2^{\langle 1 \rangle}\right)_{2\cdot i}\right|}{15}$

Значення похибки:

$\max(zE) = 0.08$ $\max(zRK4) = 8.328 \times 10^{-7}$

Висновок: (зробити самостійно).

Лабораторна робота №5

Тема " *Чисельні методи розв'язання систем диференціальних рівнянь* "

Мета роботи – знайти розв'язок задачі Коші для системи диференціальних рівнянь на підставі внутрішніх функцій Mathcad.

Завдання до лабораторної роботи

Задача 5.1

1. Задану систему лінійних диференціальних рівнянь (ЛДР) першого порядку і початкові умови перетворити до стандартної форми Mathcad у матричному вигляді

$$y_0'(t) = f_0(t, y_0(t), y_1(t), ..., y_{N-1}(t))$$

$$y_1'(t) = f_0(t, y_0(t), y_1(t), ..., y_{N-1}(t))$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_{N-1}'(t) = f_0(t, y_0(t), y_1(t), ..., y_{N-1}(t))$$

і матрицю початкових умов $Y(t_0) = B$, розміром $N \times 1$.

2. Знайти за допомогою вбудованої функції **rkfixed** пакета Mathcad наближений розв'язок задачі Коші з фіксованим кроком за методом Рунге-Кутта.

3. Знайти за допомогою вбудованої функції **Rkadapt** пакета Mathcad наближений розв'язок задачі Коші зі змінним кроком за методом Рунге-Кутта.

4. Знайти за допомогою вбудованої функції **Bulstoer** пакета Mathcad наближений розв'язок задачі Коші за методом Булірша-Штера.

5. Побудувати графічні результати розв'язання системи чисельними методами, зробити порівняння.

Контрольні запитання

1. Що таке задача Коші для системи диференціальних рівнянь першого порядку?

2. Чому виникає необхідність застосовувати наближені методи розв'язання системи диференціальних рівнянь?

3. У чому різниця чисельних методів розв'язання системи диференціальних рівнянь?

4. Які чисельні методи розв'язання системи диференціальних рівнянь ви знаєте?

Нижче наведений приклад розв’язання задачі засобами пакета Mathcad.

Варіанти завдань до лабораторної роботи див. у дод. 5.

Приклад розв’язання задач

Задача 5.1

Вказівка. Для початкової системи у дод. 5 потрібно виконати заміну змінних: відповідно x на y_0, y на y_1.

Початкова система лінійних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\frac{d}{dt}y_0 = y_1 + y_0$$

$$\frac{d}{dt}y_1 = -y_0 - .1\cdot y_1$$

Обов’язкове представлення системи диференціальних рівнянь для **Mathcad** у матричному вигляді

$$D(t,y) := \begin{pmatrix} y_1 + y_0 \\ -y_0 - .1\, y_1 \end{pmatrix} .$$

Початкові умови у матричному вигляді $\quad y0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Кількість кроків знаходження розв’язання $\quad M := 100$.

Використання вбудованих функцій Mathcad для розв'язання

1. Метод Рунге-Кутта з фіксованим кроком: $\mathrm{rkfixed}(y0, t0, T, M, D)$

Вхідні параметри:

y0 – вектор початкових значень;
t0 – початкова точка відрізка;
T – кінцева точка відрізка;
M – кількість кроків;
D – векторна функція від вектора y та змінної t .

Розв'язання

$$u := \mathrm{rkfixed}(y0, 0, 50, M, D)$$

Матриця розв'язань

u =

	0	1	2
0	0	0	1
1	0.5	0.608	0.81
2	1	1.392	0.286
3	1.5	2.234	-0.615
4	2	2.93	-1.857
5	2.5	3.204	-3.286
6	3	2.739	-4.611
7	3.5	1.247	-5.401
8	4	-1.441	-5.134
9	4.5	-5.254	-3.282
10	5	-9.768	0.538
11	5.5	-14.121	6.377
12	6	-17.007	13.755
13	6.5	-16.789	21.488
14	7	-11.762	27.618
15	7.5	-0.598	29.526

2. Метод Рунге-Кутта зі змінним кроком : $\mathrm{Rkadapt}(y0, t0, T, M, D)$

Вхідні параметри такі, як і для функції $\mathrm{rkfixed}(y0, t0, T, M, D)$

Розв'язання

$$u1 := \mathrm{Rkadapt}(y0, 0, 50, M, D)$$

Матриця розв'язань

u1 =

	0	1	2
0	0	0	1
1	0.5	0.608	0.81
2	1	1.392	0.287
3	1.5	2.234	-0.614
4	2	2.93	-1.856
5	2.5	3.206	-3.286
6	3	2.744	-4.612
7	3.5	1.254	-5.406
8	4	-1.432	-5.142
9	4.5	-5.246	-3.295
10	5	-9.764	0.52
11	5.5	-14.126	6.359
12	6	-17.028	13.743
13	6.5	-16.83	21.49
14	7	-11.826	27.647
15	7.5	-0.681	29.593

3. Метод Булірша-Штера: $\mathrm{Bulstoer}(y0, t0, T, M, D)$

Вхідні параметри такі, як і для функції $\mathrm{rkfixed}(y0, t0, T, M, D)$

Розв'язання

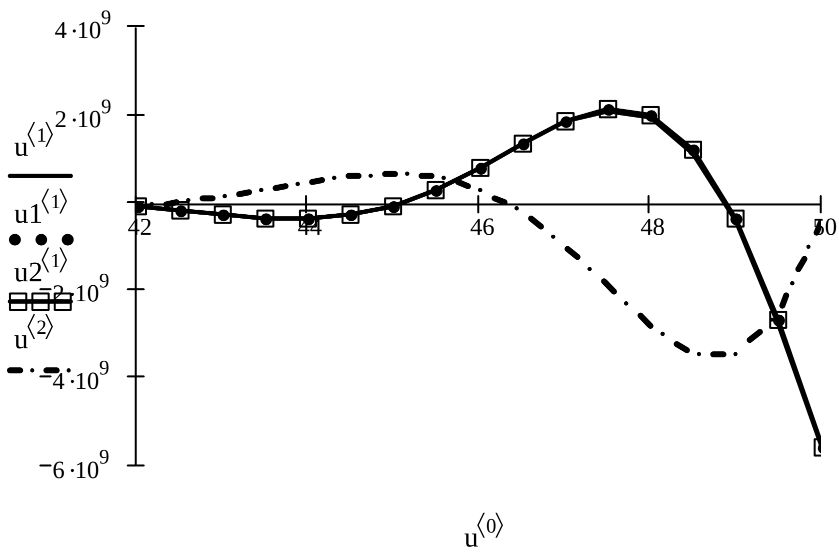
$u2 := \mathrm{Bulstoer}(y0, 0, 50, M, D)$

Матриця розв'язань

u2 =

	0	1	2
0	0	0	1
1	0.5	0.608	0.81
2	1	1.392	0.287
3	1.5	2.234	-0.614
4	2	2.93	-1.856
5	2.5	3.206	-3.286
6	3	2.744	-4.612
7	3.5	1.254	-5.405
8	4	-1.433	-5.142
9	4.5	-5.246	-3.295
10	5	-9.764	0.521
11	5.5	-14.126	6.359
12	6	-17.027	13.743
13	6.5	-16.829	21.49
14	7	-11.825	27.646
15	7.5	-0.679	29.591

Графіки розв'язків системи рівнянь



u⟨0⟩ — змінна t;
u⟨1⟩, (u1) ⟨1⟩, (u2) ⟨1⟩ — розв'язання першого рівняння відповідно за методами Рунге-Кутта з фіксованим, змінним кроком і Булірша-Штера;
u⟨2⟩ — розв'язання другого рівняння за методом Рунге-Кутта з фіксованим кроком.
Висновок: (зробити самостійно).

Лабораторна робота №6

Тема "*Чисельні методи апроксимації й інтерполяції функцій*"

Мета роботи – виконати чисельну апроксимацію й інтерполяцію функції, яка задана таблицею початкових даних на підставі відповідно до методу найменших квадратів (МНК) і методу Ньютона, порівняти результати.

Завдання до лабораторної роботи

Задача 6.1

1. Задати вектори $\boldsymbol{x}$ і $\boldsymbol{y}$ початкових даних.

2. За методом найменших квадратів (МНК) знайти поліноми $\boldsymbol{P_m}$ для $\boldsymbol{m} = 0{,}1{,}2{,}...$, за допомогою функції **mnk** і розрахувати відповідні значення $\boldsymbol{\sigma_m}$.

3. Побудувати гістограму залежності $\boldsymbol{\sigma_m}$ від $\boldsymbol{m}$, на підставі якої обрати оптимальний ступінь $\boldsymbol{m^*}$ полінома найкращого середньоквадратичного наближення.

4. На одному рисунку побудувати графіки поліномів $\boldsymbol{P_m}$, $\boldsymbol{m} = 0{,}1{,}2{,}...{,}\boldsymbol{m^*}$, і графік початкової функції.

5. Обчислити значення функції $\boldsymbol{y_i} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_i})$ у будь-яких точках $\boldsymbol{x_i}$, $\boldsymbol{i} = 0{,}1{,}...{,}\boldsymbol{k} - 1$, відрізка [$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$], за якими буде здійснюватися інтерполяція функції.

6. Скласти програму-функцію, яка обчислює значення інтерполяційного багаточлена першого ступеня по точках $(\boldsymbol{x_i}, \boldsymbol{y_i})$ і в точці відрізка $[\boldsymbol{x_i}, \boldsymbol{x_{i+1}}]$. За допомогою функції обчислити наближені значення функції $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ при кусково-лінійній інтерполяції в $3\boldsymbol{k}$ точках початкового відрізку [$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$].

7. За допомогою функції **inter** обчислити наближені значення функції $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ у $3\boldsymbol{k}$ точках відрізка при глобальній інтерполяції. На одному рисунку побудувати графіки інтерполюючих функцій, графік початкової функції $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, а також відмітити точки $(\boldsymbol{x_i}, \boldsymbol{y_i})$, $\boldsymbol{i} = 0{,}1{,}...{,}\boldsymbol{k} - 1$, по яких здійснюється інтерполяція.

Контрольні запитання

1. Яка загальна постановка задачі апроксимації?

2. Що таке емпірична формула або формула?

3. У чому відмінність задачі апроксимації від задачі інтерполяції?

4. У чому сутність методу найменших квадратів?

5. Як обчислюється відхилення апроксимуючої функції від експериментальних значень?

6. Що є умовою мінімуму критерію квадратичного відхилення?

7. Як одержати систему рівнянь для визначення коефіцієнтів при лінійному наближенні за методом найменших квадратів?

8. У чому сутність методу Ньютона?

Нижче наведений приклад розв’язання задачі засобами пакета Mathcad.

Варіанти завдань до лабораторної роботи див. у дод. 6.

Приклад розв’язання задач

Задача 6.1

Вектори початкових даних:

$$x := \begin{pmatrix} -2.75 \\ -2 \\ -1 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} -0.2 \\ -1.1 \\ -2.3 \\ 0.1 \\ 1.1 \end{pmatrix}$$

Функція mnk, яка будує поліном степені **m** за методом найменших квадратів, повертає вектор **a** коефіцієнтів полінома:

$$mnk(x,y,n,m) := \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 0..m \\ \quad \left| \begin{array}{l} b_j \leftarrow \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot (x_i)^j \\ \text{for } k \in 0..m \\ \quad \Gamma_{j,k} \leftarrow \sum_{i=0}^{n} (x_i)^{k+j} \end{array} \right. \\ a \leftarrow \text{lsolve}(\Gamma, b) \\ a \end{array} \right.$$

– формування вектора правої частини матриці нормальної системи Гa=b методу найменших квадратів (базисні функції – 1,x, x^2,…, x^m);

– вбудована функція MATHCAD, яка розв’язує систему лінійних алгебраїчних рівнянь Гa=b.

Вхідні параметри:

x, y — вектори початкових даних;

n+1 — розмірність x, y.

Обчислення коефіцієнтів поліномів степенів 0, 1, 2, 3 за методом найменших квадратів:

$$n := 4$$

$$a0 := mnk(x,y,n,0) \qquad a0 = (-0.48)$$

$$a1 := mnk(x,y,n,1) \qquad a1 = \begin{pmatrix} -0.133 \\ 0.408 \end{pmatrix}$$

$$a2 := mnk(x,y,n,2) \qquad a2 = \begin{pmatrix} -1.102 \\ 1.598 \\ 0.717 \end{pmatrix}$$

$$a3 := mnk(x,y,n,3) \qquad a3 = \begin{pmatrix} -1.164 \\ 1.591 \\ 0.792 \\ 0.026 \end{pmatrix}$$

Функція **P** повертає значення полінома степеня **m** в точці **t**; поліном задається за допомогою вектора коефіцієнтів **a**:

$$P(a,m,t) := \sum_{j=0}^{m} a_j \cdot t^j \ .$$

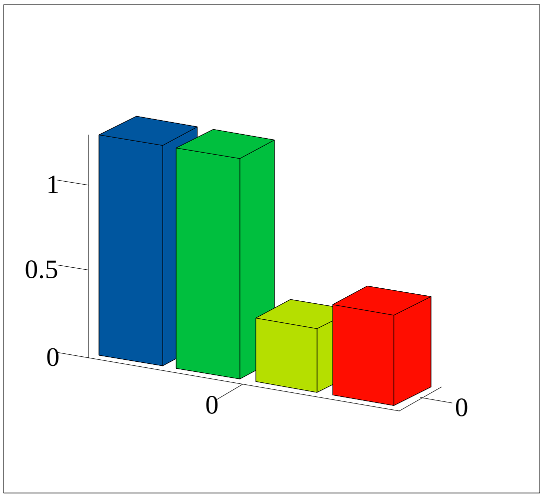
Функція $\boldsymbol{\sigma}_0$ повертає значення середньоквадратичного відхилення полінома P(a,m,t):

$$\sigma0(a,m) := \sqrt{\frac{1}{n-m}\cdot\sum_{k=0}^{n}\left(P\left(a,m,x_k\right)-y_k\right)^2} \quad .$$

Обчислення значень $\boldsymbol{\sigma_m}$, $\boldsymbol{m} = 0,1,2,3$:

$$\sigma_0 := \sigma0(a0,0) \quad \sigma_1 := \sigma0(a1,1) \quad \sigma_2 := \sigma0(a2,2) \quad \sigma_3 := \sigma0(a3,3)$$

Гістограма



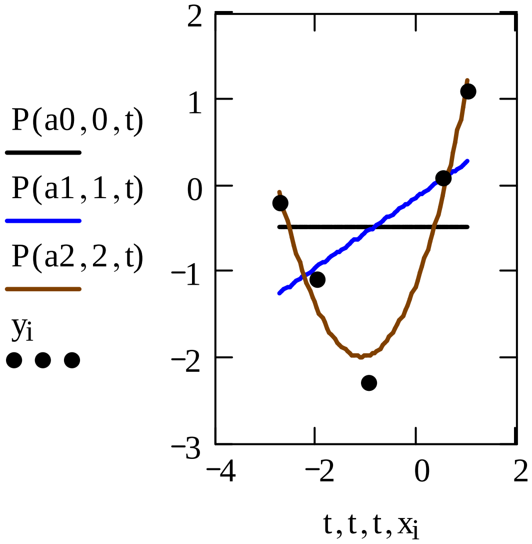
$$\sigma = \begin{bmatrix} 1.285 \\ 1.28 \\ 0.38 \\ 0.532 \end{bmatrix}$$

σ

Висновок: оптимальний степінь $\boldsymbol{m}^* = 2$; поліном найкращого середньоквадратичного наближення: P2(x)= –1.102+1.598 x+0.717x^2.

Графіки поліномів степенів 0, 1, 2 і графік початкової функції

$$t := x_0, x_0 + 0.05 .. x_n \qquad i := 0 .. n$$



Функція inter повертає значення інтерполяційного полінома у формі Ньютона (з розподіленими різницями) в точці t:

$$
\mathrm{inter}(x,y,n,t) := \left|\begin{array}{l}
\text{for } i \in 0..n \\
\quad f_{i,0} \leftarrow y_i \\
\text{for } k \in 1..n \\
\quad \text{for } i \in 0..n-k \\
\qquad f_{i,k} \leftarrow \dfrac{\left(f_{i+1,k-1} - f_{i,k-1}\right)}{x_{i+k} - x_i} \\
s \leftarrow y_0 \\
\text{for } k \in 1..n \\
\quad \left|\begin{array}{l}
r \leftarrow 1 \\
\text{for } i \in 0..k-1 \\
\quad r \leftarrow r\cdot\left(t - x_i\right) \\
s \leftarrow f_{0,k}\cdot r + s
\end{array}\right. \\
s
\end{array}\right.
$$

Вхідні параметри:

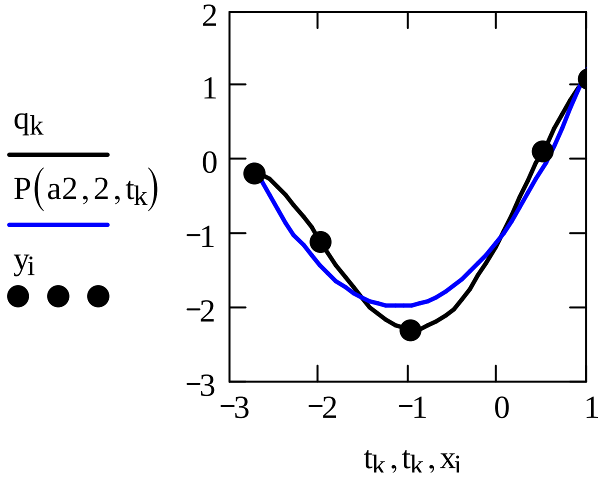
x, y — вектори початкових даних;

n+1 — розмірність x, y.

Обчислення значень інтерполяційного полінома в точках $\boldsymbol{t_k}$:

$$k := 0..40 \qquad t_k := x_0 + \frac{\left(x_n - x_0\right)\cdot k}{40} \qquad q_k := \mathrm{inter}\left(x,y,n,t_k\right)$$

Графіки інтерполяційного полінома, полінома найкращого наближення P2 і графік початкової функції



Висновок: (зробити самостійно).

Лабораторна робота №7

Тема *"Чисельні методи пошуку екстремуму функцій"*

Мета роботи – знайти найбільше та найменше значення функції на даному проміжку на підставі типових алгоритмів і внутрішніх функцій Mathcad, порівняти результати.

☑ *Завдання до лабораторної роботи*

Задача 7.1

1. З використанням пакета Mathcad локалізувати максимум функції $f(x)$ графічно.
2. Скласти програму пошуку максимуму функції за алгоритмом методу золотого перетину, задати кількість повторів пошуку, знайти максимум.
3. Для заданої функції $f(x)$ задати значення початкових наближень і за допомогою вбудованих функцій Given і Maximize пакета Mathcad знайти значення максимуму функції, порівняти результати.

Задача 7.2

1. З використанням пакета Mathcad локалізувати мінімум функції $f1(z)$ графічно.
2. Скласти програму пошуку мінімуму функції $f1(z)$ за алгоритмом методу дихотомії, задати точність розв’язання, знайти мінімум.
3. Для заданої функції $f1(z)$ задати значення початкових наближень і за допомогою вбудованих функцій Given і Minimize пакета Mathcad знайти значення мінімуму функції, порівняти результати.

Контрольні запитання

1. Які методи називаються прямими методами мінімізації?

2. Які чисельні методи розв'язання задач одновимірної оптимізації ви знаєте?

3. У чому суть методу золотого перетину?

4. У чому суть методу дихотомії?

Нижче наведений приклад розв’язання задачі засобами пакета Mathcad.

Варіанти завдань до лабораторної роботи див. у дод. 7.

Приклад розв’язання задач

Задача 7.1

Пошук максимуму функції

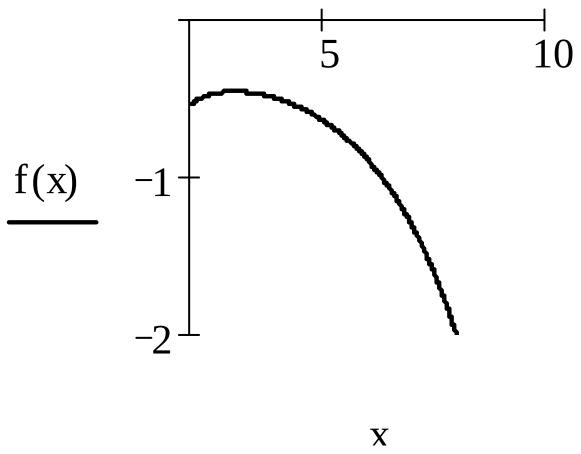
Початкова функція

$$f(x) := \frac{2^x}{\ln(2) - 2\cdot x^2}$$

Відрізки локалізації

$a := 0 \quad b := 5$

Графік функції



Програма пошуку максимуму функції за алгоритмом **методу золотого перетину**

$$
\begin{aligned}
\text{maxfunc}(f, a, b, N) := \; & kx \leftarrow (b - a)\cdot .382 \\
& x1 \leftarrow a + kx \\
& x2 \leftarrow b - kx \\
& \text{for } i \in 0..N \\
& \quad a \leftarrow x1 \;\text{ if }\; f(x1) < f(x2) \\
& \quad b \leftarrow x2 \;\text{ if }\; f(x1) > f(x2) \\
& \quad kx \leftarrow (b - a)\cdot .382 \\
& \quad x1 \leftarrow a + kx \\
& \quad x2 \leftarrow b - kx \\
& \quad res_i \leftarrow \frac{x1 + x2}{2} \\
& res
\end{aligned}
$$

Параметри:

f — початкова функція;

a — початок інтервалу;

b — кінець інтервалу;

N — кількість повторів.

Пошук розв’язку

$\text{maxfunc}(f, a, b, 10) =$

	0
0	3.455
1	2.865
2	3.23
3	3.004
4	2.865
5	2.951
6	3.004
7	2.971
8	2.992
9	3.004

← наближене значення максимуму

Значення функції в точці максимуму $f(3.004) = -0.462$.

Розв’язання за допомогою вбудованої функції **Maximize**:

початкове наближення

$$x := \frac{a+b}{2}$$

Given

$$a \le x \le b$$

$$\text{Maximize}(f, x) = 3.001$$ ← значення максимуму

Значення функції в точці максимуму: $f(x) = -0.479$.

Висновок: (зробити самостійно).

Задача 7.2

Пошук мінімуму функції

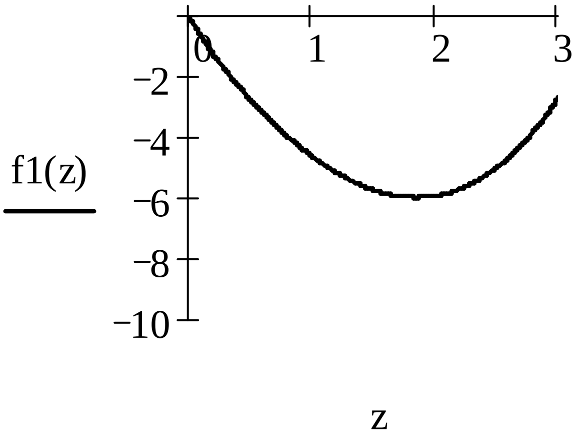
Початкова функція

$$f1(z) := \frac{1}{3}z^3 - 5z + z\cdot\ln(z)$$

Відрізки локалізації

$a := 1.5 \quad b := 2$

Графік функції



Програма пошуку мінімуму функції за алгоритмом **методу дихотомії**

$$
\mathrm{minfunc}(f, a, b, \varepsilon) :=
\left|
\begin{array}{l}
x1 \leftarrow a \\
x2 \leftarrow b \\
\text{while } |x1 - x2| > \varepsilon \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
x3 \leftarrow x1 + \dfrac{(x2 - x1)}{4} \\
x4 \leftarrow x1 + \dfrac{(x2 - x1)}{4} \cdot 2 \\
x5 \leftarrow x1 + \dfrac{(x2 - x1)}{4} \cdot 3 \\
y3 \leftarrow f(x3) \\
y4 \leftarrow f(x4) \\
y5 \leftarrow f(x5) \\
x2 \leftarrow x4 \ \text{ if } (y3 < y4) \wedge (y3 < y5) \\
\text{if } (y4 < y3) \wedge (y4 < y5) \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
x1 \leftarrow x3 \\
x2 \leftarrow x5
\end{array}
\right. \\
x1 \leftarrow x4 \ \text{ if } (y5 < y3) \wedge (y5 < y4)
\end{array}
\right. \\
res \leftarrow x1 + \dfrac{x2 - x1}{2} \\
res
\end{array}
\right.
$$

Параметри:

f — початкова функція;

a — початок інтервалу;

b — кінець інтервалу;

ε — точність розв'язку.

Пошук розв'язку: $\mathrm{minfunc}\left(f1, a, b, 10^{-4}\right) = 1.841$.

Значення функції в точці мінімуму: $f1(1.841) = -6.002$.

Розв'язання за допомогою вбудованої функції **Minimize**

початкове наближення

$$z := \frac{a + b}{2}$$

Given

$$a \le z \le b$$

$\mathrm{Minimize}(f1, z) = 1.841$ ← значення мінімуму.

Значення функції в точці мінімуму: $f1(z) = -5.984$.

Висновок: (зробити самостійно).

Лабораторна робота №8

Тема *"Чисельні методи розв'язання диференціальних рівнянь у частинних похідних"*

Мета роботи – знайти розв'язки диференціальних рівнянь у частинних похідних щодо процесів стаціонарної та нестаціонарної теплопровідності на підставі внутрішніх функцій Mathcad.

☑ *Завдання до лабораторної роботи*

Задача 8.1

1. Задане диференціальне рівняння стаціонарної теплопровідності для однорідної пластини (рівняння Лапласа) і граничні та початкові умови перетворити до стандартної форми Mathcad для використання вбудованої функції **relax**.

2. Знайти за допомогою вбудованої функції **relax** пакета Mathcad наближений розв'язок диференціального рівняння стаціонарної теплопровідності для однорідної пластини.

3. Побудувати графічні результати щодо розв'язання рівняння стаціонарної теплопровідності для однорідної пластини, проаналізувати результати.

Задача 8.2

1. Скласти програму щодо розв'язання заданого диференціального рівняння нестаціонарної теплопровідності (поширення тепла) для однорідного стержня (рівняння Фур'є) з урахуванням граничних та початкових умов за явною різницевою схемою Ейлера.

2. Знайти за допомогою програми наближений розв'язок диференціального рівняння нестаціонарної теплопровідності для однорідного стержня.

3. Побудувати графічні результати щодо розв'язання рівняння нестаціонарної теплопровідності при значеннях часу $t = 0; 10; 100$ та проаналізувати результати.

4. Створити анімаційний кліп щодо візуалізації процесу поширення тепла в стержні.

Контрольні запитання

1. Які диференціальні рівняння називають диференціальними рівняннями у частинних похідних?

2. Що описує рівняння Лапласа для функції двох змінних?

3. Чому диференціальне рівняння Фур'є $\dfrac{\partial \boldsymbol{u(x,t)}}{\partial \boldsymbol{t}} = \boldsymbol{k}\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{u(x,t)}}{\partial \boldsymbol{x}^2}$ називається рівнянням **нестаціонарної** теплопровідності для однорідного стержня?

4. Які додаткові умови слід визначити, щоб правильно поставити крайову задачу для двовимірного рівняння теплопровідності?

5. У чому полягає основна ідея чисельних методів розв'язування диференціальних рівнянь у частинних похідних?

Нижче наведений приклад розв'язання задачі засобами пакета Mathcad.

Варіанти завдань до лабораторної роботи див. у дод. 8.

Приклад розв'язання задач

Задача 8.1

Розглядається диференціальне рівняння стаціонарної теплопровідності, що описує розподіл температури в однорідній квадратній пластині (рівняння Лапласа):

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{y}^2} = 0$$

з крайовими умовами:

$\boldsymbol{u}(0,\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{y}),\quad \boldsymbol{u}(1,\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{y}),\quad (0 \le \boldsymbol{y} \le 1),$

$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0) = \boldsymbol{f}_3(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},1) = \boldsymbol{f}_4(\boldsymbol{x}),\quad (0 \le \boldsymbol{x} \le 1),$

де відповідно задано (див. дод. 8):

$\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y};$

$\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{cos}(\boldsymbol{y}) + (2 - \boldsymbol{sin}(1))\boldsymbol{y};$

$\boldsymbol{f}_3(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^2;$

$\boldsymbol{f}_4(\boldsymbol{x}) = 1 + \boldsymbol{x}.$

Використання вбудованої функції Mathcad **relax** для розв’язання крайової задачі з ненульовими умовами на границях базується на алгоритмі релаксації за методом сіток.

relax (a, b, c, d, e, F, T0, rjac) — вбудована функція, що повертає квадратну матрицю розв’язання диференціального рівняння;

a, b, c, d, e — квадратні матриці коефіцієнтів різницевої схеми, що апроксимує диференціальне рівняння;

F — квадратна матриця, що задає праву частину диференціального рівняння;

T0 — квадратна матриця граничних умов та початкового наближення до розв’язку;

rjac — спектральний радіус ітерацій Якобі (параметр численного алгоритму), менший за 1.

Усі квадратні матриці мають однаковий розмір **(M+1)×(M+1)**, де $\mathbf{M=2^n}$.

Уводимо параметри щодо квадратної матриці:

i – номер елемента матриці за координатою пластини **x**;

k – номер елемента матриці за координатою пластини **y**.

Приймаємо $M := 32$

$i := 0..M$

$k := 0..M$

$a_{i,k} := 1 \quad b := a \quad c := a \quad d := a \quad e := -4 \cdot a$

$F_{i,k} := 0$

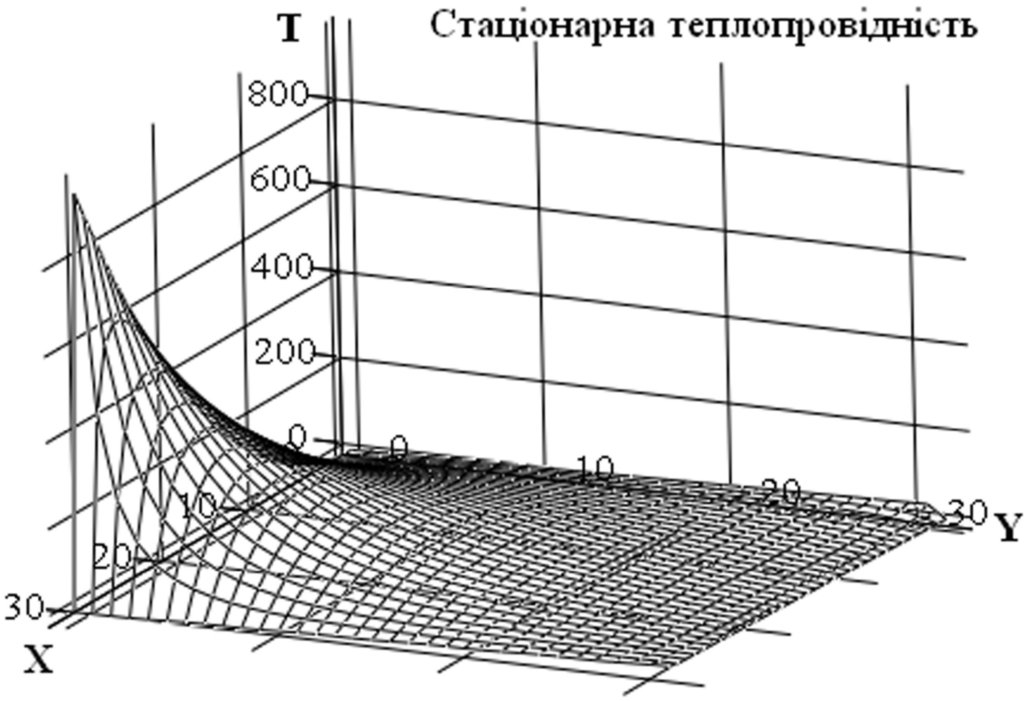
$T0_{i,0} := i^2 \qquad T0_{0,k} := k$

$T0_{i,32} := 1 + i \quad T0_{32,k} := \cos(k) + (2 - \sin(1)) \cdot k$

Розв’язання диференційного рівняння

$T := \text{relax}(a, b, c, d, e, -F, T0, .95)$

Графічні результати розв’язання задачі



Висновок: (зробити самостійно).

Задача 8.2

Розглядається диференціальне рівняння нестаціонарної теплопровідності для однорідного стержня (рівняння Фур’є):

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = k\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

з постійним коефіцієнтом теплопровідності $k = 1$,

початковими умовами $u(x,0) = f(x),\quad (0 \le x \le 1)$

та граничними умовами $u(0,t) = a,\quad u(1,t) = a,$

де a — граничне значення температури на кінцях стержня,

де відповідно задано (див. додаток 8): $f(x) = 50x(x+1);\quad a = 20.$

Складаємо програму у **Mathcad**:

$\tau := .0005$ — крок за часом

$M := 20$ — кількість кроків у просторі

$\Delta := \frac{1}{M}$ $\quad \Delta = 0.05$ — крок у просторі

$k(u) := 1$ — коефіцієнт теплопровідності стержня

$\phi(x,u) := 0$ — джерело тепла

$a := 20$ — температура на кінцях стержня

$\mathrm{Border}(\mathrm{FRAME}) := a$ — завдання граничних умов

$m := 0..M$

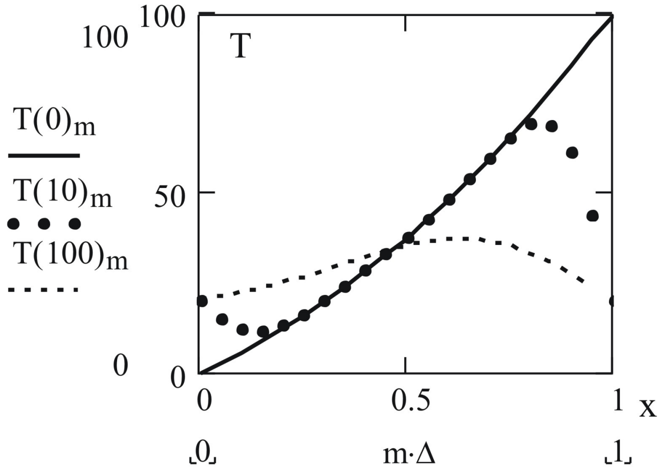
$u_m := 50m \cdot \Delta \cdot (m \cdot \Delta + 1)$ — завдання функції початкових умов

$$F(v) := \left| \begin{array}{l} v1_0 \leftarrow \mathrm{Border}(\tau \cdot T) + 0. \cdot (v_0 + v_1) \\ v1_M \leftarrow \mathrm{Border}(\tau \cdot T) + 0. \cdot (v_M + v_{M-1}) \\ \text{for } m \in 1..M-1 \\ \quad v1_m \leftarrow \phi(m \cdot \Delta, v_m) \cdot \tau + v_{m-1} \cdot \dfrac{k(v_{m-1}) \cdot \tau}{\Delta^2} + v_m \cdot \left(1 - \dfrac{2 \cdot k(v_m) \cdot \tau}{\Delta^2}\right) + v_{m+1} \cdot \dfrac{k(v_{m+1}) \cdot \tau}{\Delta^2} \\ v1 \end{array} \right.$$

$$T(\mathrm{FRAME}) := \left| \begin{array}{ll} u & \text{if } \mathrm{FRAME} = 0 \\ F(T(\mathrm{FRAME} - 1)) & \text{otherwise} \end{array} \right.$$

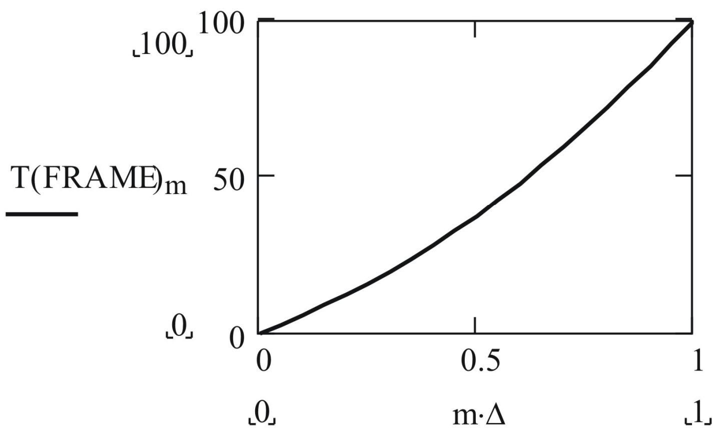
(FRAME - внутрішня змінна, що використовується як змінна часу для анімації)

Графік розподілу температури в стержні у відповідні моменти часу

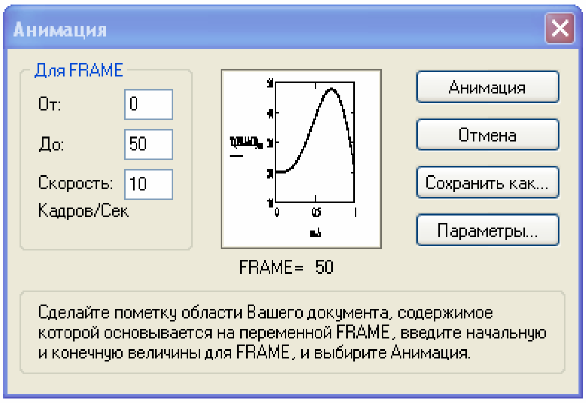


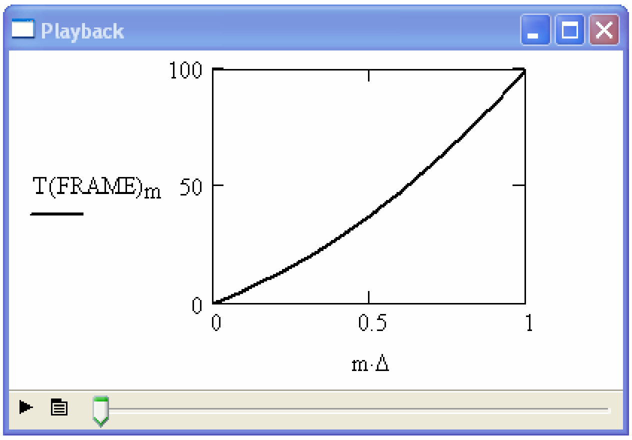
Для створення анімаційного кліпу потрібно:
— обрати пункт меню **Анімація** у меню **Перегляд**;
— за допомогою "миши" укласти в пунктирний прямокутник, що виділяється, поле графіка, який потрібно анімувати;
— у діалоговому вікні встановити значення змінної **FRAME,** наприклад, 50;
— натиснути кнопку **Анімація**;
— відтворити анімацію;
— зберегти анімаційний кліп, надавши йому відповідне ім'я.

Графік для створення анімації



Результати створення анімації





Висновок: (зробити самостійно).

Додаток 1

Варіанти завдань до лабораторної роботи №1

Таблиця Д1 до задачі 1.1

N	$g(x)$	$[a;b]$	N	$g(x)$	$[a;b]$
1.1.1	$(sinx)^2-\frac{5}{6}sinx+\frac{1}{6}$	$[0;1]$	1.1.16	$(sinx)^2+\frac{5}{6}sinx+\frac{1}{6}$	$[-1;0]$
1.1.2	$(sinx)^2+\frac{7}{12}sinx+\frac{1}{12}$	$[-1;0]$	1.1.17	$(sinx)^2-\frac{7}{12}sinx+\frac{1}{12}$	$[0;1]$
1.1.3	$(sinx)^2-\frac{1}{30}sinx-\frac{1}{30}$	$[-0.5;0.5]$	1.1.18	$(sinx)^2+\frac{1}{30}sinx-\frac{1}{30}$	$[-0.5;0.5]$
1.1.4	$(cos\,x)^2+\frac{2}{35}cos\,x-\frac{1}{35}$	$[0;2]$	1.1.19	$(cos\,x)^2-\frac{2}{35}cos\,x-\frac{1}{35}$	$[0;3]$
1.1.5	$(cos\,x)^2-\frac{2}{\sqrt{2}}cos\,x+\frac{1}{2}$	$[0;1.5]$	1.1.20	$(cos\,x)^2-\frac{1}{2}cos\,x+\frac{1}{16}$	$[0;2]$
1.1.6	$(cos\,x)^2+\frac{1}{2}cos\,x+\frac{1}{18}$	$[0;2]$	1.1.21	$(cos\,x)^2-\frac{2}{3}cos\,x+\frac{1}{9}$	$[0;2]$
1.1.7	$(lnx)^2-5\,lnx+6$	$[5;25]$	1.1.22	$(lgx)^2+\frac{5}{3}lgx-\frac{2}{3}$	$[0.001;3]$
1.1.8	$(lnx)^2-lnx-2$	$[0.1;10]$	1.1.23	$(lgx)^2-lgx-\frac{3}{4}$	$[0.1;35]$
1.1.9	$(lnx)^2-\frac{3}{4}lnx+\frac{1}{8}$	$[0.1;2]$	1.1.24	$(lgx)^2+\frac{3}{4}lgx-\frac{1}{4}$	$[0.01;3]$
1.1.10	$(tgx)^2+(\sqrt{3}-1)tgx-\sqrt{3}$	$[-1.2;1]$	1.1.25	$(tgx)^2-2tgx+1$	$[0;1]$
1.1.11	$(tgx)^2-\frac{28}{9}tgx+\frac{1}{3}$	$[0;1.5]$	1.1.26	$(tgx)^2-\frac{7}{4}tgx-\frac{1}{2}$	$[-0.5;1.5]$
1.1.12	$(tgx)^2-\frac{53}{6}tgx-\frac{3}{2}$	$[-0.5;1.5]$	1.1.27	$(tgx)^2+\frac{37}{6}tgx+1$	$[-1.5;0]$
1.1.13	$(cos\,x)^2-\frac{2}{5}cos\,x+\frac{1}{25}$	$[0;3]$	1.1.28	$(sinx)^2-\frac{1}{2}sinx+\frac{1}{16}$	$[0;1]$
1.1.14	$(sinx)^2+\frac{1}{3}sinx+\frac{1}{36}$	$[-0.5;0.5]$	1.1.29	$(lgx)^2-3\,lgx+\frac{9}{4}$	$[0.1;35]$
1.1.15	$(lgx)^2-\frac{2}{3}lgx+\frac{1}{9}$	$[0.001;3]$	1.1.30	$(sinx)^2+\frac{2}{3}sinx+\frac{1}{9}$	$[-1;0]$

Таблиця Д1 до задачі 1.2

N	$f(x)=0$	N	$f(x)=0$
1.2.1	$2x^3-3x^2-12x-5=0$	1.2.16	$x^3-3x^2-24x-3=0$
1.2.2	$x^3-3x^2+3=0$	1.2.17	$x^3-12x+6=0$
1.2.3	$x^3+3x^2-24x-10=0$	1.2.18	$2x^3-3x^2-12x+10=0$
1.2.4	$2x^3+9x^2-21=0$	1.2.19	$x^3-3x^2+2{,}5=0$
1.2.5	$x^3+3x^2-2=0$	1.2.20	$x^3+3x^2-3{,}5=0$
1.2.6	$x^3+3x^2-24x+10=0$	1.2.21	$x^3-3x^2-24x-8=0$
1.2.7	$2x^3+9x^2-10=0$	1.2.22	$x^3-12x+10=0$
1.2.8	$x^3+3x^2-3=0$	1.2.23	$2x^3-3x^2-12x+1=0$
1.2.9	$x^3-3x^2-24x-5=0$	1.2.24	$x^3-4x^2+2=0$
1.2.10	$x^3-12x-5=0$	1.2.25	$x^3+3x^2-24x+1=0$
1.2.11	$2x^3-3x^2-12x+12=0$	1.2.26	$2x^3+9x^2-6=0$
1.2.12	$x^3-3x^2+1{,}5=0$	1.2.27	$x^3-3x^2-24x+10=0$
1.2.13	$x^3+3x^2-24x-3=0$	1.2.28	$x^3-12x-10=0$
1.2.14	$2x^3+9x^2-4=0$	1.2.29	$2x^3-3x^2-12x+8=0$
1.2.15	$x^3+3x^2-1=0$	1.2.30	$x^3-3x^2+3{,}5=0$

Додаток 2

Варіанти завдань до лабораторної роботи №2

Таблиця Д2 до задачі 2.1

2.1.1 $\begin{cases} 4{,}4x_1-2{,}5x_2+19{,}2x_3-10{,}8x_4=4{,}3 \\ 5{,}5x_1-9{,}3x_2-14{,}2x_3+13{,}2x_4=6{,}8 \\ 7{,}1x_1-11{,}5x_2+5{,}3x_3-6{,}7x_4=-1{,}8 \\ 14{,}2x_1+23{,}4x_2-8{,}8x_3+5{,}3x_4=7{,}2 \end{cases}$	2.1.3 $\begin{cases} 8{,}2x_1-3{,}2x_2+14{,}2x_3+14{,}8x_4=-8{,}4 \\ 5{,}6x_1-12x_2+15x_3-6{,}4x_4=4{,}5 \\ 5{,}7x_1+3{,}6x_2-12{,}4x_3-2{,}3x_4=3{,}3 \\ 6{,}8x_1+13{,}2x_2-6{,}3x_3-8{,}7x_4=14{,}3 \end{cases}$
2.1.2 $\begin{cases} 5{,}7x_1-7{,}8x_2-5{,}6x_3-8{,}3x_4=2{,}7 \\ 6{,}6x_1+13{,}1x_2-6{,}3x_3+4{,}3x_4=-5{,}5 \\ 14{,}7x_1-2{,}8x_2+5{,}6x_3-12{,}1x_4=8{,}6 \\ 8{,}5x_1+12{,}7x_2-23{,}7x_3+5{,}7x_4=14{,}7 \end{cases}$	2.1.4 $\begin{cases} 3{,}8x_1+14{,}2x_2+6{,}3x_3-15{,}5x_4=2{,}8 \\ 8{,}3x_1-6{,}6x_2+5{,}8x_3+12{,}2x_4=-4{,}7 \\ 6{,}4x_1-8{,}5x_2-4{,}3x_3+8{,}8x_4=7{,}7 \\ 17{,}1x_1-8{,}3x_2+14{,}4x_3-7{,}2x_4=13{,}5 \end{cases}$

Продовження табл. Д2 до задачі 2.1

2.1.5 $\begin{cases}15{,}7x_1+6{,}6x_2-5{,}7x_3+11{,}5x_4=-2{,}4\\8{,}8x_1-6{,}7x_2+5{,}5x_3-4{,}5x_4=5{,}6\\6{,}3x_1-5{,}7x_2-23{,}4x_3+6{,}6x_4=7{,}7\\14{,}3x_1+8{,}7x_2-15{,}7x_3-5{,}8x_4=23{,}4\end{cases}$	2.1.12 $\begin{cases}4{,}3x_1-12{,}1x_2+23{,}2x_3-14{,}1x_4=15{,}5\\2{,}4x_1-4{,}4x_2+3{,}5x_3+5{,}5x_4=2{,}5\\5{,}4x_1+8{,}3x_2-7{,}4x_3-12{,}7x_4=8{,}6\\6{,}3x_1-7{,}6x_2+1{,}34x_3+3{,}7x_4=12{,}1\end{cases}$
2.1.6 $\begin{cases}14{,}4x_1-5{,}3x_2+14{,}3x_3-12{,}7x_4=-14{,}4\\23{,}4x_1-14{,}2x_2-5{,}4x_3+2{,}1x_4=6{,}6\\6{,}3x_1-13{,}2x_2-6{,}5x_3+14{,}3x_4=9{,}4\\5{,}6x_1+8{,}8x_2-6{,}7x_3-23{,}8x_4=7{,}3\end{cases}$	2.1.13 $\begin{cases}1{,}7x_1+10x_2-1{,}3x_3+2{,}1x_4=3{,}1\\3{,}1x_1+1{,}7x_2-2{,}1x_3+5{,}4x_4=2{,}1\\3{,}3x_1-7{,}7x_2+4{,}4x_3-5{,}1x_4=1{,}9\\10x_1-20{,}1x_2+20{,}4x_3+1{,}7x_4=1{,}8\end{cases}$
2.1.7 $\begin{cases}1{,}7x_1-1{,}8x_2+1{,}9x_3-57{,}4x_4=10\\1{,}1x_1-4{,}3x_2+1{,}5x_3-1{,}7x_4=19\\1{,}2x_1+1{,}4x_2+1{,}6x_3+1{,}8x_4=20\\7{,}1x_1-1{,}3x_2-4{,}1x_3+5{,}2x_4=10\end{cases}$	2.1.14 $\begin{cases}6{,}1x_1+6{,}2x_2-6{,}3x_3+6{,}4x_4=6{,}5\\1{,}1x_1-1{,}5x_2+2{,}2x_3-3{,}8x_4=4{,}2\\5{,}1x_1-5{,}0x_2+4{,}9x_3-4{,}8x_4=4{,}7\\1{,}8x_1+1{,}9x_2+2{,}0x_3-2{,}1x_4=2{,}2\end{cases}$
2.1.8 $\begin{cases}2{,}2x_1-3{,}1x_2+4{,}2x_3-5{,}1x_4=6{,}01\\1{,}3x_1+2{,}2x_2-1{,}4x_3+1{,}5x_4=10\\6{,}2x_1-7{,}4x_2+8{,}5x_3-9{,}6x_4=1{,}1\\1{,}2x_1+1{,}3x_2+1{,}4x_3+4{,}5x_4=1{,}6\end{cases}$	2.1.15 $\begin{cases}35{,}8x_1+2{,}1x_2-34{,}5x_3-11{,}8x_4=0{,}5\\27{,}1x_1-7{,}5x_2+11{,}7x_3-23{,}5x_4=12{,}8\\11{,}7x_1+1{,}8x_2-6{,}5x_3+7{,}1x_4=1{,}7\\6{,}3x_1+10x_2+7{,}1x_3+3{,}4x_4=20{,}8\end{cases}$
2.1.9 $\begin{cases}35{,}1x_1+1{,}7x_2+37{,}5x_3-2{,}8x_4=7{,}5\\45{,}2x_1+21{,}1x_2-1{,}1x_3-1{,}2x_4=11{,}1\\-21{,}1x_1+31{,}7x_2+1{,}2x_3-1{,}5x_4=2{,}1\\31{,}7x_1+18{,}1x_2-31{,}7x_3+2{,}2x_4=0{,}5\end{cases}$	2.1.16 $\begin{cases}1{,}1x_1+11{,}2x_2+11{,}1x_3-13{,}1x_4=1{,}3\\-3{,}3x_1+1{,}1x_2+30{,}1x_3-20{,}1x_4=1{,}1\\7{,}5x_1+1{,}3x_2+1{,}1x_3+10x_4=20\\1{,}7x_1+7{,}5x_2-1{,}8x_3+2{,}1x_4=1{,}1\end{cases}$
2.1.10 $\begin{cases}7{,}5x_1+1{,}8x_2-2{,}1x_3-7{,}7x_4=1{,}1\\-10x_1+1{,}3x_2-20x_3-1{,}4x_4=1{,}5\\2{,}8x_1-1{,}7x_2+3{,}9x_3+4{,}8x_4=1{,}2\\10x_1+31{,}4x_2-2{,}1x_3-10x_4=-1{,}1\end{cases}$	2.1.17 $\begin{cases}30{,}1x_1-1{,}4x_2+10x_3-1{,}5x_4=10\\-17{,}5x_1+11{,}1x_2+1{,}3x_3-7{,}5x_4=1{,}3\\1{,}7x_1-21{,}1x_2+7{,}1x_3-17{,}1x_4=10\\2{,}1x_1+2{,}1x_2+3{,}5x_3+3{,}3x_4=1{,}7\end{cases}$
2.1.11 $\begin{cases}7{,}3x_1-8{,}1x_2+12{,}7x_3-6{,}7x_4=8{,}8\\11{,}5x_1+6{,}2x_2-8{,}3x_3+9{,}2x_4=21{,}5\\8{,}2x_1-5{,}4x_2+4{,}3x_3-2{,}5x_4=6{,}2\\2{,}4x_1+11{,}5x_2-3{,}3x_3+14{,}2x_4=-6{,}2\end{cases}$	2.1.18 $\begin{cases}4{,}8x_1+12{,}5x_2-6{,}3x_3-9{,}7x_4=3{,}5\\22x_1-31{,}7x_2+12{,}4x_3-8{,}7x_4=4{,}6\\15x_1+21{,}1x_2-4{,}5x_3+14{,}4x_4=15\\8{,}6x_1-14{,}4x_2+6{,}2x_3+2{,}8x_4=-1{,}2\end{cases}$

Закінчення табл. Д2 до задачі 2.1

2.1.19 $\begin{cases} 6{,}4x_1+7{,}2x_2-8{,}3x_3+42x_4=2{,}23\\ 5{,}8x_1-8{,}3x_2+14{,}3x_3-6{,}2x_4=17{,}1\\ 8{,}6x_1+7{,}7x_2-18{,}3x_3+8{,}8x_4=-5{,}4\\ 13{,}2x_1-5{,}2x_2-6{,}5x_3+12{,}2x_4=6{,}5 \end{cases}$	2.1.25 $\begin{cases} 14{,}2x_1+3{,}2x_2-4{,}2x_3+8{,}5x_4=13{,}2\\ 6{,}3x_1-4{,}3x_2+12{,}7x_3-5{,}8x_4=-4{,}4\\ 8{,}4x_1-22{,}3x_2-5{,}2x_3+4{,}7x_4=6{,}4\\ 2{,}7x_1+13{,}7x_2+6{,}4x_3-12{,}7x_4=8{,}5 \end{cases}$
2.1.20 $\begin{cases} 7{,}3x_1+12{,}4x_2-3{,}8x_3-14{,}3x_4=5{,}8\\ 10{,}7x_1-7{,}7x_2+12{,}5x_3+6{,}6x_4=-6{,}6\\ 15{,}6x_1+6{,}6x_2+14{,}4x_3-8{,}7x_4=12{,}4\\ 7{,}5x_1+12{,}2x_2-8{,}3x_3+3{,}7x_4=9{,}2 \end{cases}$	2.1.26 $\begin{cases} 13{,}2x_1-8{,}3x_2-4{,}4x_3+6{,}2x_4=6{,}8\\ 8{,}3x_1+4{,}2x_2-5{,}6x_3+7{,}7x_4=12{,}4\\ 5{,}8x_1-3{,}7x_2+12{,}4x_3-6{,}2x_4=8{,}7\\ 3{,}5x_1+6{,}6x_2-13{,}8x_3-9{,}3x_4=10{,}8 \end{cases}$
2.1.21 $\begin{cases} 8{,}1x_1+1{,}2x_2-9{,}1x_3+1{,}7x_4=10\\ 1{,}1x_1-1{,}7x_2+7{,}2x_3-3{,}4x_4=1{,}7\\ 1{,}7x_1-1{,}8x_2+10x_3+2{,}3x_4=2{,}1\\ 1{,}3x_1+1{,}7x_2-9{,}9x_3+3{,}5x_4=27{,}1 \end{cases}$	2.1.27 $\begin{cases} 3{,}3x_1-2{,}2x_2-10x_3+1{,}7x_4=1{,}1\\ 1{,}8x_1+21{,}1x_2+1{,}3x_3-2{,}2x_4=2{,}2\\ -10x_1+1{,}1x_2+20x_3-4{,}5x_4=10\\ 70x_1-1{,}7x_2-2{,}2x_3+3{,}3x_4=2{,}1 \end{cases}$
2.1.22 $\begin{cases} 1{,}7x_1+9{,}9x_2-20x_3-1{,}7x_4=1{,}7\\ 20x_1+0{,}5x_2-30{,}1x_3-1{,}1x_4=2{,}1\\ 10x_1-20x_2+30{,}2x_3+0{,}5x_4=1{,}8\\ 3{,}3x_1-0{,}7x_2+3{,}3x_3+20x_4=-1{,}7 \end{cases}$	2.1.28 $\begin{cases} 1{,}7x_1-1{,}3x_2-1{,}1x_3-1{,}2x_4=2{,}2\\ 10x_1-10x_2-1{,}3x_3+1{,}3x_4=1{,}1\\ 3{,}5x_1+3{,}3x_2+1{,}2x_3+1{,}3x_4=1{,}2\\ 1{,}3x_1+1{,}1x_2-1{,}3x_3-1{,}1x_4=10 \end{cases}$
2.1.23 $\begin{cases} 1{,}1x_1+11{,}3x_2-1{,}7x_3+1{,}8x_4=10\\ 1{,}3x_1-11{,}7x_2+1{,}8x_3+1{,}4x_4=1{,}3\\ 1{,}1x_1-10{,}5x_2-1{,}7x_3-1{,}5x_4=1{,}1\\ 1{,}5x_1-0{,}5x_2+1{,}8x_3-1{,}1x_4=10 \end{cases}$	2.1.29 $\begin{cases} 1{,}4x_1+2{,}1x_2-3{,}3x_3+1{,}1x_4=10\\ 10x_1-1{,}7x_2+1{,}1x_3-1{,}5x_4=1{,}7\\ 2{,}2x_1+34{,}4x_2-1{,}1x_3-1{,}2x_4=20\\ 1{,}1x_1+1{,}3x_2+1{,}2x_3+1{,}4x_4=1{,}3 \end{cases}$
2.1.24 $\begin{cases} 1{,}3x_1-1{,}7x_2+3{,}3x_3+1{,}7x_4=1{,}1\\ 10x_1+5{,}5x_2-1{,}3x_3+3{,}4x_4=1{,}3\\ 1{,}1x_1+1{,}8x_2-2{,}2x_3-1{,}1x_4=10\\ 1{,}3x_1-1{,}2x_2+2{,}1x_3+2{,}2x_4=1{,}8 \end{cases}$	2.1.30 $\begin{cases} 1{,}2x_1+1{,}8x_2-2{,}2x_3-4{,}1x_4=1{,}3\\ 10x_1-5{,}1x_2+1{,}2x_3+5{,}5x_4=1{,}2\\ 2{,}2x_1-30{,}1x_2+3{,}1x_3+5{,}8x_4=10\\ 10x_1+2{,}4x_2-30{,}5x_3-2{,}2x_4=34{,}1 \end{cases}$

Таблиця Д2 до задачі 2.2

2.2.1	$\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1{,}2 \\ 2x + \cos y = 2 \end{cases}$	2.2.16	$\begin{cases} \sin(x+y) - 1{,}4x = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$
2.2.2	$\begin{cases} \cos(x-1) + y = 0{,}5 \\ x - \cos y = 3 \end{cases}$	2.2.17	$\begin{cases} \sin(y-1) + x = 1{,}3 \\ y - \sin(x+1) = 0{,}8 \end{cases}$
2.2.3	$\begin{cases} \sin x + 2y = 2 \\ \cos(y-1) + x = 0{,}7 \end{cases}$	2.2.18	$\begin{cases} 2x - \cos(y+1) = 0 \\ y + \sin x = -0{,}4 \end{cases}$
2.2.4	$\begin{cases} \cos x + y = 1{,}5 \\ 2x - \sin(y-0{,}5) = 1 \end{cases}$	2.2.19	$\begin{cases} \cos(y+0{,}5) - x = 2 \\ \sin x - 2y = 1 \end{cases}$
2.2.5	$\begin{cases} \sin(x+0{,}5) - y = 1 \\ \cos(y-2) + x = 0 \end{cases}$	2.2.20	$\begin{cases} \sin(x+y) - 1{,}3x = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$
2.2.6	$\begin{cases} \cos(x + 0{,}5) + y = 0{,}8 \\ \sin y - 2x = 1{,}6 \end{cases}$	2.2.21	$\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1 \\ 2x + \cos y = 2 \end{cases}$
2.2.7	$\begin{cases} \sin(x-1) = 1{,}3 - y \\ x - \sin(y+1) = 0{,}8 \end{cases}$	2.2.22	$\begin{cases} \cos(x-1) + y = 0{,}8 \\ x - \cos y = 2 \end{cases}$
2.2.8	$\begin{cases} 2y - \cos(x + 1) = 0 \\ x + \sin y = -0{,}4 \end{cases}$	2.2.23	$\begin{cases} \sin x + 2y = 1{,}6 \\ \cos(y-1) + x = 1 \end{cases}$
2.2.9	$\begin{cases} \sin(x+y) - 1{,}5x = 0{,}1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$	2.2.24	$\begin{cases} \cos x + y = 1{,}2 \\ 2x - \sin(y-0{,}5) = 2 \end{cases}$
2.2.10	$\begin{cases} \sin(x+2) - y = 1{,}5 \\ x + \cos(y-2) = 0{,}5 \end{cases}$	2.2.25	$\begin{cases} \sin(x+0{,}5) - y = 1{,}2 \\ \cos(y-2) + x = 0 \end{cases}$
2.2.11	$\begin{cases} \sin(y+1) - x = 1{,}2 \\ 2y + \cos x = 2 \end{cases}$	2.2.26	$\begin{cases} \cos(x+0{,}5) + y = 1 \\ \sin y - 2x = 2 \end{cases}$
2.2.12	$\begin{cases} \cos(y-1) + x = 0{,}5 \\ y - \cos x = 3 \end{cases}$	2.2.27	$\begin{cases} \sin(x-1) + y = 1{,}5 \\ x - \sin(y+1) = 1 \end{cases}$
2.2.13	$\begin{cases} \sin y + 2x = 2 \\ \cos(x-1) + y = 0{,}7 \end{cases}$	2.2.28	$\begin{cases} \sin(y+1) - x = 1 \\ 2y + \cos x = 2 \end{cases}$
1.2.14	$\begin{cases} \cos y + x = 1{,}5 \\ 2y - \sin(x-0{,}5) = 1 \end{cases}$	1.2.29	$\begin{cases} \cos(y-1) + x = 0{,}8 \\ y - \cos x = 2 \end{cases}$
2.2.15	$\begin{cases} \sin(y+0.5) - x = 1 \\ \cos(x-2) + y = 0 \end{cases}$	2.2.30	$\begin{cases} \cos(x-1) + y = 1 \\ \sin y + 2x = 1{,}6 \end{cases}$

Варіанти завдань до лабораторної роботи №3

Таблиця Д3 до задачі 3.1

N	$f(x)$	a	b	N	$f(x)$	a	b
3.1.1	$\sqrt{ln(x+1)}$	0	2	3.1.16	$\sqrt{1+2lnx}$	1	e
3.1.2	$\sqrt{x\cdot(1-x)}$	0	1	3.1.17	e^{sinx}	0	$\pi/2$
3.1.3	$\sqrt{x}\cdot cosx$	0	1	3.1.18	e^{cosx}	0	$\pi/2$
3.1.4	$\frac{sinx}{x}$	1	2	3.1.19	$\sqrt{lnx}$	1	2
3.1.5	$\frac{cosx}{x}$	1	2	3.1.20	e^{-x^2}	0	1
3.1.6	$\frac{1}{lnx}$	2	3	3.1.21	$\frac{x}{lnx}$	2	3
3.1.7	$\sqrt{1+x^4}$	0	1	3.1.22	$e^{1/x}$	1	2
3.1.8	$sinx^2$	0	1	3.1.23	e^{x^2}	0	1
3.1.9	$cosx^2$	0	1	3.1.24	$\frac{\sqrt{x}}{cosx}$	2	3
3.1.10	$\sqrt{1+x^3}$	0	2	3.1.25	$\sqrt{x}\cdot sinx$	0	1
3.1.11	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	1	2	3.1.26	$\sqrt{1+x^5}$	0	1
3.1.12	$\sqrt{2+sinx}$	0	$\pi/2$	3.1.27	$\sqrt{x+x^3}$	0	1
3.1.13	$cos\,e^x$	0	1	3.1.28	$\frac{sin2x}{x}$	0	0.5
3.1.14	$sin\,e^x$	0	1	3.1.29	$\frac{1}{4+x^5}$	0	2
3.1.15	$\sqrt{1+lnx}$	1	2	3.1.30	$\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$	1	2

Додаток 4

Варіанти завдань до лабораторної роботи №4

Таблиця Д4 до задачі 4.1

N	$f(t,y)$	$t0$	T	$y0$	N	$f(t,y)$	$t0$	T	$y0$
4.1.1	$y/t+t^2$	1	2	0	4.1.16	$-y/t+3t$	1	2	1
4.1.2	$y\cdot ctg\,t+2t\cdot sint$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}+1$	0	4.1.17	$\frac{2ty}{1+t^2}+1+t^2$	1	2	3
4.1.3	$-y\cdot cos\,t+\frac{sin2t}{2}$	0	1	0	4.1.18	$\frac{2t-1}{t^2}\cdot y+1$	1	2	1
4.1.4	$-y\cdot tg\,y+cos^2 t$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}+1$	$\frac{1}{2}$	4.1.19	$-\frac{3y}{t}+\frac{2}{t^3}$	1	2	1
4.1.5	$\frac{y}{t+2}+t^2+2t$	-1	0	$\frac{3}{2}$	4.1.20	$-2ty-2t^3$	1	2	e^{-1}
4.1.6	$\frac{y}{t+1}+e^t(t+1)$	0	1	1	4.1.21	$\frac{y}{t}-\frac{2}{t^2}$	1	1	1
4.1.7	$\frac{y}{t}+t\cdot sint$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}+1$	1	4.1.22	$\frac{2t-5}{t^2}y+5$	2	3	4
4.1.8	$-\frac{y}{t}+sint$	π	$\pi+1$	$\frac{1}{\pi}$	4.1.23	$\frac{2}{t+1}y+e^t(t+1)^2$	0	1	1
4.1.9	$y\cdot cos\,t+sin2t$	0	1	-1	4.1.24	$-2ty+te^{-t^2}\,sint$	0	1	1
4.1.10	$-\frac{2t}{1+t^2}y+\frac{2t^2}{1+t^2}$	0	1	$\frac{2}{3}$	4.1.25	$\frac{2y}{t+1}+(t+1)^3$	0	1	$\frac{1}{2}$
4.1.11	$-ty-t^3$	0	1	3	4.1.26	$y\cdot cos\,t-sin2t$	0	1	3
4.1.12	$-y/t+(t+1)e^t/t$	1	2	e	4.1.27	$4ty-4t^3$	0	1	$-\frac{1}{2}$
4.1.13	$y/t-2\,lnt/t$	1	2	1	4.1.28	$y/t-lnt/t$	1	2	1
4.1.14	$y/t-12/t^3$	1	2	4	4.1.29	$3t^2y+t^2(1+t^3)/3$	0	1	0
4.1.15	$-2\frac{y}{t}+t^3$	1	2	$-\frac{5}{6}$	4.1.30	$-\frac{y}{2t}+t^2$	1	2	1

Додаток 5

Варіанти завдань до лабораторної роботи №5

Таблиця Д5 до задачі 5.1

N	Задача Коші	***N***	Задача Коші
5.1.1	$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-x+y\\ \dfrac{dy}{dt}=y+x\end{cases}$ $x(0)=0,\ y(0)=1$	5.1.11	$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+6y\\ \dfrac{dy}{dt}=-2x+9y\end{cases}$ $x(0)=1,\ y(0)=-1$
5.1.2	$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+y\\ \dfrac{dy}{dt}=-2x+4y\end{cases}$ $x(0)=0,\ y(0)=-1$	5.1.12	$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x-y\\ \dfrac{dy}{dt}=3x-2y\end{cases}$ $x(0)=1,\ y(0)=1$
5.1.3	$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=3x-y\\ \dfrac{dy}{dt}=10x-4y\end{cases}$ $x(0)=1,\ y(0)=5$	5.1.13	$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=4x+2y\\ \dfrac{dy}{dt}=-x+y\end{cases}$ $x(0)=-1,\ y(0)=1$
5.1.4	$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-3x-y\\ \dfrac{dy}{dt}=x-y\end{cases}$ $x(0)=1,\ y(0)=1$	5.1.14	$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=7x+2y\\ \dfrac{dy}{dt}=3x+2y\end{cases}$ $x(0)=0,\ y(0)=1$
5.1.5	$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x-2y\\ \dfrac{dy}{dt}=x-y\end{cases}$ $x(0)=1\ ,\ y(0)=1$	5.1.15	$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+y\\ \dfrac{dy}{dt}=3x-y\end{cases}$ $x(0)=-1,\ y(0)=0$
5.1.6	$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-3x-y\\ \dfrac{dy}{dt}=x+y\end{cases}$ $x(0)=2\ ,\ y(0)=3$	5.1.16	$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-3x-y\\ \dfrac{dy}{dt}=x-y\end{cases}$ $x(0)=2,\ y(0)=2$
5.1.7	$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+4y\\ \dfrac{dy}{dt}=2x+3y\end{cases}$ $x(0)=1\ ,\ y(0)=1$	5.1.17	$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+5y\\ \dfrac{dy}{dt}=-x-3y\end{cases}$ $x(0)=1,\ y(0)=1$
5.1.8	$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-3x+2y\\ \dfrac{dy}{dt}=-2x+y\end{cases}$ $x(0)=-1,\ y(0)=1$	5.1.18	$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y-x\\ \dfrac{dy}{dt}=x+2y\end{cases}$ $x(0)=0,\ y(0)=5$
5.1.9	$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=3x+y\\ \dfrac{dy}{dt}=x+3y\end{cases}$ $x(0)=2\ ,\ y(0)=2$	5.1.19	$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+3y\\ \dfrac{dy}{dt}=-x+5y\end{cases}$ $x(0)=3,\ y(0)=1$
5.1.10	$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=5x+4y\\ \dfrac{dy}{dt}=-2x+11y\end{cases}$ $x(0)=-1,\ y(0)=-1$	5.1.20	$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=3x-2y\\ \dfrac{dy}{dt}=4x+7y\end{cases}$ $x(0)=1,\ y(0)=0$

Закінчення табл. Д5 до задачі 5.1

5.1.21	$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x+4y\\ \frac{dy}{dt}=x+y\end{cases}$ $x(0)=1,\ y(0)=0$	5.1.26	$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-x+2y\\ \frac{dy}{dt}=-2x-5y\end{cases}$ $x(0)=0,\ y(0)=1$
5.1.22	$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=3x-y\\ \frac{dy}{dt}=4x-y\end{cases}$ $x(0)=1,\ y(0)=0$	5.1.27	$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x-5y\\ \frac{dy}{dt}=2x-y\end{cases}$ $x(0)=0,\ y(0)=-3$
5.1.23	$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x-3y\\ \frac{dy}{dt}=3x+y\end{cases}$ $x(0)=0,\ y(0)=1$	5.1.28	$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=2x+y\\ \frac{dy}{dt}=4y-x\end{cases}$ $x(0)=1,\ y(0)=0$
5.1.24	$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=5x+y\\ \frac{dy}{dt}=-3x+9y\end{cases}$ $x(0)=1,\ y(0)=0$	5.1.29	$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=3x+5y\\ \frac{dy}{dt}=-2x-8y\end{cases}$ $x(0)=2,\ y(0)=5$
5.1.25	$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x-2y\\ \frac{dy}{dt}=3x+6y\end{cases}$ $x(0)=2,\ y(0)=2$	5.1.30	$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-2x-4y\\ \frac{dy}{dt}=-x+y\end{cases}$ $x(0)=5,\ y(0)=0$

Додаток 6

Варіанти завдань до лабораторної роботи №6

Таблиця Д6 до задачі 6.1

x	***y***	***x***	***y***	***x***	***y***	***x***	***y***	***x***	***y***
6.1.1		**6.1.2**		**6.1.3**		**6.1.4**		**6.1.5**	
-1	-2.25	0	4.568	-1	3.614	-0.5	0.72	-2.1	14.1982
-0.7	-0.77	0.375	3.365	-0.74	1.199	-0.25	1.271	-1.8	11.4452
-0.43	0.21	0.563	2.810	-0.48	-0.125	0	1.2	-1.5	9.1586
-0.14	0.44	0.75	2.624	-0.21	-0.5838	0.25	0.7363	-1.2	7.2426
-0.14	0.64	1.125	0.674	0.05	-0.538	0.5	0.24	-0.9	6.3640
0.43	0.03	1.313	0.557	0.31	-0.2855	0.75	-0.175	-0.6	4.8182
0.71	-0.22	1.5	0.384	0.58	0.1111	1	-0.36	-0.3	6.1088
1	-0.84	1.690	-0.566	0.84	0.4529	1.25	-0.328	0	3.9536
1.29	-1.2	1.875	-1.44	1.1	0.6711	1.5	0	0.3	4.6872
1.57	-1.03	2.063	-1.696	1.36	0.6625	1.75	0.3538	0.6	4.7601

Продовження табл. Д6 до задачі 6.1

1.86	-0.37	2.25	-1.91	1.63	0.4501	2	0.72	0.9	5.8511
2.14	0.61	2.438	-2.819	1.89	0.157	2.25	0.6969	1.2	7.1010
2.43	2.67	2.625	-3.625	2.15	-0.1876	2.5	0	1.5	9.1792
2.71	5.04	2.813	-3.941	2.41	-0.542	2.75	-1.792	1.8	11.421
3	8.90	3	-4.367	2.95	-0.1983	3	-5.16	2.1	14.097
6.1.6		**6.1.7**		**6.1.8**		**6.1.9**		**6.1.10**	
0	-0.9	-0.70	-4.152	0	1.019	2.5	6.109	-3.6	-2.397
0.2	-0.6482	-0.41	1.244	0.3	1.4889	2.75	2.615	-3.08	-0.401
0.4	-0.2436	-0.12	3.182	0.6	2.2079	3	-0.157	-2.56	-0.577
0.6	-0.1	0.17	2.689	0.9	3.0548	3.25	-2.010	-2.04	-1.268
0.8	0.0231	0.46	0.950	1.2	3.8648	3.5	-2.697	-1.52	-0.933
1	0.0260	0.75	-2.743	1.5	4.2161	3.75	-3.615	-1	-0.359
1.2	0.0967	1.04	-5.839	1.8	5.1180	4	-3.478	-0.48	1.107
1.4	-0.2203	1.33	-7.253	2.1	5.7661	4.25	-2.250	0.04	1.300
1.6	-0.3230	1.62	-6.100	2.4	6.6720	4.5	0.193	0.56	1.703
1.8	-0.6472	1.91	-2.144	2.7	7.1960	4.75	2.086	1.08	-0.299
2	-0.7630	2.20	6.103	3	7.8551	5	5.882	1.6	-1.417
6.1.11		**6.1.12**		**6.1.13**		**6.1.14**		**6.1.15**	
0	2.25	-1	0.192	-0.7	1.04	-3	0.262	-0.7	3.822
0.17	1.106	-0.75	-0.054	-0.5	1.08	-2.55	-1.032	-0.375	-1.498
0.33	0.3951	-0.5	-0.209	-0.3	0.68	-2.1	-1.747	-0.05	-2.419
0.5	-0.033	-0.25	-0.429	-0.1	0.38	-1.65	-1.981	0.275	-1.292
0.67	-0.20	0	-0.413	0.1	0.07	-1.2	-0.564	0.6	0.828
0.83	-0.113	0.25	-0.491	0.3	-0.03	-0.75	0.774	0.925	1.963
1	0.0294	0.5	-0.357	0.5	-0.38	-0.3	2.400	1.25	2.401
1.17	0.1008	0.75	-0.434	0.7	-0.22	0.15	2.131	1.575	1.877
1.33	0.3	1	-0.140	0.9	-0.36	0.6	2.2	1.9	2.200
1.5	-0.002	1.25	-0.130	1.1	-0.33	1.05	-0.393	2.25	-1.378

Продовження табл. Д6 до задачі 6.1

1.67	-0.368	1.5	0.142	1.3	-0.28	1.5	-1.815	2.55	-2.395
1.83	-1.119	1.75	0.288	1.5	-0.17	1.95	-0.788	2.875	-1.460
2	-2.226	2	0.876	1.7	0.27	2.4	8.030	3.2	3.604
6.1.16		**6.1.17**		**6.1.18**		**6.1.19**		**6.1.20**	
-3.2	-0.17	-0.7	4.166	2	1.108	6	7.079	-0.7	-12.91
-2.66	-0.57	-0.31	-2.278	2.4	1.832	6.4	-1.509	-0.41	3.619
-2.12	-1.81	0.08	-3.172	2.8	2.413	6.8	-7.654	-0.2	9.586
-1.58	-1.84	0.47	-0.506	3.2	3.656	7.2	-12.211	0.17	7.949
-1.04	0.123	0.86	2.748	3.6	5.126	7.6	-13.941	0.46	1.543
-0.5	1.462	1.25	2.665	4	5.552	8	-15.117	0.75	-8.057
0.04	2.399	1.64	1.353	4.4	6.024	8.4	-13.720	1.04	-16.15
0.58	1.300	2.03	-0.294	4.8	7.202	8.8	-10.702	1.33	-20.56
1.12	1.703	2.42	-1.613	5.2	8.590	9.2	-4.696	1.62	-17.72
1.66	-2.04	2.81	-2.223	5.6	8.953	9.6	3.501	1.91	-6.200
2.2	2.817	3.2	4.04	6	10.046	10	10.572	2.2	18.115
6.1.21		**6.1.22**		**6.1.23**		**6.1.24**		**6.1.25**	
0	-2.81	-2	-4.596	-0.5	0.061	5.5	1.542	-1	-5.265
0.25	-2.18	-1.67	-4.216	-0.42	4.185	5.75	0.652	-0.70	-1.994
0.5	-0.22	-1.33	-3.162	-0.33	7.271	6	-0.008	-0.41	0.224
0.75	1.722	-1	-2.459	-0.25	9.683	6.25	-0.620	-0.12	1.146
1	3.492	-0.67	-1.558	-0.17	11.319	6.5	-0.751	0.167	1.552
1.25	3.31	-0.33	-0.876	-0.08	11.469	6.75	-1.183	0.458	-0.148
1.5	2.945	0	-0.168	0	11.324	7	-1.229	0.75	-1.233
1.75	1.449	0.33	0.44	0.08	10.495	7.25	-1.139	1.042	-2.297
2	0.334	0.67	1.715	0.17	9.659	7.5	-0.770	1.333	-2.4
2.25	-1.90	1	2.106	0.25	7.345	7.75	-0.586	1.625	-2.317
2.5	-3.43	1.33	2.845	0.33	5.132	8	-0.066	2.917	-1.223
2.75	-2.98	1.67	3.83	0.42	2.619	8.25	0.633	2.208	2.257
3	0.087	2	4.634	0.5	0.069	8.5	1.542	2.5	7.806

Закінчення табл. Д6 до задачі 6.1

6.1.26		6.1.27		6.1.28		6.1.29		6.1.30	
-1	-5.31	-0.4	0.918	-1.3	-1.762	0	5.241	-0.8	3.503
-0.56	-0.58	-0.05	1.258	-0.85	0.955	0.288	4.892	-0.47	-0.55
-0.13	1.137	0.3	0.685	-0.4	3.614	0.575	3.521	-0.15	-1.681
0.313	0.478	0.65	-1.314	0.05	4.707	0.863	1.121	0.175	-1.263
0.75	-0.79	1	-1.709	0.5	3.721	1.15	-1.357	0.5	0.421
1.188	-2.50	1.35	-3.446	0.95	0.402	1.438	-3.5	0.825	1.301
1.625	-2.48	1.7	-2.473	1.4	-3.101	1.725	-3.528	1.15	2.551
2.063	0.554	2.05	0.084	1.85	-2.489	2.013	0.257	1.475	2.937
2.5	7.904	2.4	6.031	2.3	9.868	2.3	10.515	1.8	2.097

Додаток 7

Варіанти завдань до лабораторної роботи №7

Таблиця Д7 до задачі 7.1

N	$f(x)$	$[a;b]$	N	$f(x)$	$[a;b]$
7.1.1	$x-0.5x^3+\cos x$	$[0;1]$	7.1.9	$-0.5x^2+\sin x$	$[0.5;1]$
7.1.2	$\frac{x^3}{3}-e^x-2x$	$[-1.5;1]$	7.1.10	$-\frac{2^x}{\ln 2}+2x^2$	$[3.5;4.5]$
7.1.3	$1/3\cdot x^3-(1+x)\cdot$ $(\ln(1+x)-1)$	$[-0.5;0.5]$	7.1.11	$-\frac{x^2}{3}-x(\ln x-1)$	$[0.5;1]$
7.1.4	$2+5x-10x^2+$ $+5x^3-x^5$	$[-3;-2]$	7.1.12	$-\frac{x^2}{2}-x(\lg(x/e)-2)$	$[1.5;2]$
7.1.5	$x-\frac{x^2}{2}+x^3-\frac{x^7}{7}$	$[1;1.5]$	7.1.13	$\frac{x^2}{2}-10x\cdot\lg(x/e)$	$[1.5;2]$
7.1.6	$5x+x^2-\frac{x^4}{4}$	$[2;3]$	7.1.14	$-1+32x-4x^2-x^4$	$[1;2]$
7.1.7	$1+x-\frac{5x^2}{2}+\frac{x^4}{4}$	$[0;1]$	7.1.15	$-1-4x-2x^2-x^4$	$[-1;0]$

Закінчення табл. Д7 до задачі 7.1

7.1.8	$2x^2-(x+1)^4$	$[-3;-2]$	7.1.16	$-3-120x+4x^2+x^4$	$[2.5;3]$
7.1.17	$1-6x-3x^2-x^6$	$[-1;0]$	7.1.24	$-2x-\frac{7x^2}{2}+\frac{5x^3}{3}-\frac{x^4}{2}$	$[0;0.5]$
7.1.18	$20x-5x^2+8x^{5/4}$	$[3;3.5]$	7.1.25	$-2x-x^2+\frac{x^5}{5}$	$[-1;-0.5]$
7.1.19	$80x-30x^2-\frac{x^4}{4}$	$[1;2]$	7.1.26	$-x+2x^2-\frac{x^5}{5}$	$[1;2]$
7.1.20	$1+2x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^6}{6}$	$[1;1.5]$	7.1.27	$-2x^2-3(5-x)^{4/3}$	$[1.5;2]$
7.1.21	$-\frac{x^3}{3}+5x-x\,lnx$	$[1.5;2]$	7.1.28	$-x+4\sqrt{x+2}-8$	$[-1;7]$
7.1.22	$-x^2-\frac{16}{x}+16$	$[1;4]$	7.1.29	$-4x-8+6\cdot\sqrt[3]{(x+2)^2}$	$[-2;0]$
7.1.23	$-x^3+3sinx$	$[0.5;1]$	7.1.30	$x^5-5x^4+5x^3+1$	$[-1;2]$

Таблиця Д7 до задачі 7.2

N	$f1(z)$	$[a;b]$	N	$f1(z)$	$[a;b]$
7.2.1	$\frac{z^3}{3}-5z+z\,lnz$	$[1.5;2]$	7.2.8	$z-4\sqrt{z+2}+8$	$[-1;7]$
7.2.2	$z^2+\frac{16}{z}-16$	$[1;4]$	7.2.9	$4z+8-6\cdot\sqrt[3]{(z+2)^2}$	$[-2;0]$
7.2.3	$z^3-3sinz$	$[0.5;1]$	7.2.10	$-z+0.5z^3-cos\,z$	$[0;1]$
7.2.4	$0.5z^2-sinz$	$[0.5;1]$	7.2.11	$-\frac{z^3}{3}+e^z+2z$	$[-1.5;1]$
7.2.5	$\frac{2^z}{ln2}-2z^2$	$[3.5;4.5]$	7.2.12	$-1/3\cdot z^3+(1+z)\cdot$ $(ln(1+z)-1)$	$[-0.5;0.5]$
7.2.6	$\frac{z^2}{3}+z(lnz-1)$	$[0.5;1]$	7.2.13	$-2-5z+10z^2-$ $-5z^3+z^5$	$[-3;-2]$
7.2.7	$\frac{z^2}{2}+z(lg(z/e)-2)$	$[1.5;2]$	7.2.14	$-z+\frac{z^2}{2}-z^3+\frac{z^7}{7}$	$[1;1.5]$

Закінчення табл. Д7 до задачі 7.2

7.2.15	$-\frac{z^2}{2}+10z\cdot lg(z/e)$	$[1.5;2]$	7.2.23	$-5z-z^2+\frac{z^4}{4}$	$[2;3]$
7.2.16	$1-32z+4z^2+z^4$	$[1;2]$	7.2.24	$-1-z+\frac{5z^2}{2}-\frac{z^4}{4}$	$[0;1]$
7.2.17	$1+4z+2z^2+z^4$	$[-1;0]$	7.2.25	$-2z^2+(z+1)^4$	$[-3;-2]$
7.2.18	$3+120z-4z^2-z^4$	$[2.5;3]$	7.2.26	$-1+6z+3z^2+z^6$	$[-1;0]$
7.2.19	$2z+\frac{7z^2}{2}-\frac{5z^3}{3}+\frac{z^4}{2}$	$[0;0.5]$	7.2.27	$-20z+5z^2-8z^{5/4}$	$[3;3.5]$
7.2.20	$2z+z^2-\frac{z^5}{5}$	$[-1;-0.5]$	7.2.28	$-80z+30z^2+\frac{z^4}{4}$	$[1;2]$
7.2.21	$z-2z^2+\frac{z^5}{5}$	$[1;2]$	7.2.29	$-1-2z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^6}{6}$	$[1;1.5]$
7.2.22	$2z^2+3(5-z)^{4/3}$	$[1.5;2]$	7.2.30	$-z^3+3z^2+9z$	$[-2;0]$

Додаток 8

Варіанти завдань до лабораторної роботи №8

Таблиця Д8 до задачі 8.1

N	$f_1(y)$	$f_2(y)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
8.1.1	y^2	$\cos y + (2 - \cos 1)\, y$	x^3	$1 + x$
8.1.2	$e^y - e\, y^2$	y	$1 - x^3$	x^2
8.1.3	$1 - y^2$	y	$\sin x + 1 - x^3(1 + \sin 1)$	x
8.1.4	0	y	$\sin x - x^3 \sin 1$	x
8.1.5	$e^y + y^2(1 - e) - 1$	y	0	x
8.1.6	y^2	$\cos y + (3 - \cos 1)\, y$	x^3	$1 + 2x$

Закінчення табл. Д8 до задачі 8.1

8.1.7	0	y	$\sin x - x^3 \sin 1$	x^2
8.1.8	$2ey - (1+2e)\, y^2\, 1$	$-y$	$1 - x^3$	$x - 2$
8.1.9	$-10y^2 - 8y + 6$	$-10y^2 - 30y + 22$	$9x^2 + 7x + 6$	$9x^2 - 15x - 12$
8.1.10	$-7y^2 - 5y + 3$	$-7y^2 - 21y + 13$	$6x^2 + 4x + 3$	$6x^2 - 12x - 9$
8.1.11	1	$y + 1$	1	$1 + x$
8.1.12	1	e^y	1	e^x
8.1.13	$-y^2 - 5y$	$4 + 5y - y^2$	$x^2 + 3x$	$x^2 + 3x + 4$
8.1.14	$3 - 7y$	$7 - 6y$	$4x + 3$	$5x - 4$
8.1.15	0	$\sin y$	0	$\sin x$
8.1.16	y^3	$10y^{1/4}$	x^3	$10x^{-1/4}$
8.1.17	y	$y^{1/2}+4$	x^{-1}	$4-\sqrt{x}$
8.1.18	y^{-2}	$-2y^2-2y$	x^2	$2x^2+2x$
8.1.19	y^3	$1+y^{1/3}$	x^{-3}	$4x^3+6$
8.1.20	y	y^3+2	x^{-2}	$5x^4-5$
8.1.21	e^y	e^{2y}	e^x	$2-e^{2x}$
8.1.22	y	$3y+y^2$	x^{-1}	x
8.1.23	y	$y+y^{1/3}$	$1/\cos(x)$	$5\sin(x)$
8.1.24	cos(y)	10sin(y)	$1/\cos^2(x)$	$6\cos^3(x)$
8.1.25	y	ln(y)	$1/\sin^2(x)$	$15\sin^3(x)$
8.1.26	cos(y)	10cos(y)	x^{-1}	$3\ln(x)$
8.1.27	y	y^{-1}	x^{-1}	$2x^2-x$
8.1.28	y^{-2}	$6y^2-3y$	x^{-2}	$3x^2+4$
8.1.29	e^y	$y+e^y$	$x^{1/2}$	$15(x-\sqrt{x})$
8.1.30	$y^{-1/3}$	$y+y^{1/2}$	e^{-x}	$3+e^{3x}$

Таблиця Д8 до задачі 8.2

N	$f(x)$	a	N	$f(x)$	a
8.2.1	$50x(x+1)$	5	8.2.16	$10(1+\sin^2 x)$	15
8.2.2	$30(x^3+x^2+x)$	10	8.2.17	$10e^x(1+\sin 2x)$	20
8.2.3	$50x^2(1+x)$	15	8.2.18	$e^{2.5x}(0.5+x)$	25
8.2.4	$50(1+x^4)$	20	8.2.19	$e^{3x}(2-x^2)$	30
8.2.5	$100x\sin(2x)$	25	8.2.20	$10(x+9/(1+x))$	35
8.2.6	$50(x+1)\sin^2 x$	30	8.2.21	$e^{-0.5x}(12-x^2)$	40
8.2.7	$50x^2(x+1)$	35	8.2.22	$10(8-x^2)$	45
8.2.8	$50x^3(x+1)$	40	8.2.23	$50(x^2+1)\cos(x)$	50
8.2.9	$50(x^2+0.5)\cos(2x)$	45	8.2.24	$10^x 5x^2e^{-x}$	25
8.2.10	$100\sin(x)\cos(x)$	50	8.2.25	$10\cos x$	30
8.2.11	$100x\sin(2(x+1))$	55	8.2.26	$15\cos x$	35
8.2.12	$50\ln(0.5+x)(x+1)$	60	8.2.27	$10^x 5(1-x^2)$	40
8.2.13	$50x\sin(4(x+1))+x$	65	8.2.28	$50(x+1)$	45
8.2.14	$100x\cos(2x)$	70	8.2.29	$10e^{1.5x}(1+x^2)$	50
8.2.15	$50xe^{-x}(x^4+2)$	10	8.2.30	$10\sin x$	55

ЗМІСТ