МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра вищої математики та моделювання систем

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник
для здобувачів вищої освіти за освітнім ступенем бакалавра
за спеціальностями 051 «Економіка», 073 «Менеджмент»,
281 «Публічне управління та адміністрування»,
076 «Підприємництво, торгівля та біржова діяльність»

Одеса: ОНПУ, 2021

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра вищої математики та моделювання систем

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник
для здобувачів вищої освіти за освітнім ступенем бакалавра
за спеціальностями 051 «Економіка», 073 «Менеджмент»,
281 «Публічне управління та адміністрування»,
076 «Підприємництво, торгівля та біржова діяльність»

Затверджено на засіданні
кафедри вищої математики та моделювання систем
Протокол №5 від «10» грудня 2020 року

Схвалено та рекомендовано до друку
Вченою Радою ОНПУ
Протокол №6   від «27» січня 2021 року

Одеса: ОНПУ, 2021

УДК 512:514:517
ББК 22.11

Рецензенти:

Балан О. С. – доктор економічних наук, професор, зав. кафедри «Публічне управління та адміністрування» ОНПУ

Ковтуненко К. В. – доктор економічних наук, професор, зав. кафедри «Міжнародного менеджменту та інновації» ОНПУ

Жарова О. В., Крапива Н. В., Тостановська І. Б.
Вища математика. [Текст] : навчальний посібник для здобувачів вищої освіти за освітнім ступенем бакалавра за спеціальностями 051 «Економіка», 073 «Менеджмент», 281 «Публічне управління та адміністрування», 076 «Підприємництво, торгівля та біржова діяльність» / Жарова О. В., Крапива Н. В., Тостановська І. Б. – Одеса: ОНПУ, 2021. – 221с.

Навчальний посібник призначений для використання у навчальному процесі та для самостійної роботи студентів Інституті бізнесу, економіки та інформаційних технологій ОНПУ.

У навчальному посібнику викладено основи вищої математики, а саме розділи : лінійна алгебра, векторна алгебра та аналітична геометрія, вступ до аналізу функцій однієї змінної, похідна та диференціал функції, функція декількох змінних, інтегральне числення.

До кожного параграфу додаються завдання для самостійного розв'язування. Наприкінці кожного розділу наводиться добірка прикладних задач економічного змісту, крім того, після кожного розділу запропоновані тестові завдання, які дозволяють при самостійній роботі студентів оцінити ступень освоєння теоретичного та практичного матеріалу.

Зміст

Вступ

Посібник відповідає програмі дисципліни «Вища математика», яка викладається кафедрою Вищої математики та моделювання систем.

Основною метою вивчення дисципліни є формування у майбутніх менеджерів базових математичних знань для розв’язування задач у професійній діяльності, математичного формулювання економічних задач, тому у посібнику містяться не лише основні математичні положення, а й приклади їх застосування по розділам лінійна алгебра, векторна алгебра та аналітична геометрія, вступ до аналізу функцій однієї змінної, похідна та диференціал функції, функція декількох змінних, інтегральне числення, диференціальні рівняння, ряди. Більшість наведених застосувань не вимагають від студентів першого курсу додаткової економічної інформації.

До кожної теми додаються завдання для самостійного розв’язування, після кожного розділу запропоновані тестові завдання, які дозволяють при самостійній роботі студентів оцінити ступень освоєння теоретичного та практичного матеріалу.

Кожна тема містить:

- короткі теоретичні відомості в зручній для розуміння і запам'ятовування формі;
- зразки розв'язання задач;
- математико-економічні моделі.

Розділ 1. Елементи лінійної алгебри

1.1. Системи лінійних рівнянь. Поняття матриці

Системою m лінійних рівнянь з n невідомими називають сукупність рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1.1}$$

Сукупність чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ називають ***розв'язком*** системи (1.1), якщо при підстановці цих чисел у систему відповідно замість $x_1, x_2, \ldots, x_n$ усі рівняння перетворюються в тотожності.

Система (1.1), що має хоч один розв'язок, називається ***сумісною.*** Якщо система (1.1) не має розв'язку, то її називають ***несумісною.***

Якщо $m = n$, то ***система*** буде ***квадратна***. Очевидно, що властивості системи залежать лише від вільних членів та коефіцієнтів при невідомих. Тобто система (1.1) та її розв'язки повністю характеризуються таблицею чисел

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Така прямокутна таблиця називається ***матрицею***, а самі числа, що її заповнюють, — ***елементами*** матриці.

При цьому матрицю $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$

називають ***матрицею системи порядку*** $m\times n$ (читаємо: ем на ен), де m — кількість рядків, n — кількість стовпців матриці.

Якщо $m = n$, то матриця системи називається ***квадратною n-го порядку***.

Очевидно, що матриця квадратної системи є квадратна.

Матрицю $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ порядку $m \times n$ можна позначити коротко ***A***, A_{mn}, (a_{ij}), де $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, a_{ij} — елемент матриці ***A***, що міститься в ***i***-му рядку та ***j***-му стовпці.

Якщо матриця має тільки один стовпець, то її називають ***матриця-стовпець***.

Наприклад, $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = B_1$ — матриця-стовпець порядку $m \times 1$.

Якщо матриця має тільки один рядок, то її називають **матриця-рядок**.

Наприклад, $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix} = H_1$ — матриця-рядок порядку $1 \times n$.

Якщо матриця є квадратна ***n***-го порядку, то її елементи $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ розташовані уздовж ***головної*** діагоналі, а елементи $a_{n1}, a_{(n-1)2}, \dots, a_{1n}$ розташовані уздовж ***побічної*** діагоналі.

Квадратна матриця називається ***діагональною***, якщо усі її елементи, що не лежать на головній діагоналі, дорівнюють нулю.

Позначення: $D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$.

Діагональна матриця називається ***одиничною***, якщо усі її елементи, що лежать на головній діагоналі, дорівнюють одиниці, а решта — нулі.

Позначення: ***E, I,* [1],** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Зауважимо, що одиничну матрицю зручно подати за допомогою ***символу Кронекера*** δ_{ij}, який визначається так: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

Таким чином $E = (\delta_{ij})$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$.

Якщо усі елементи матриці є нулі, то її називають ***нульовою*** і позначають O.

Діагональна матриця називається ***скалярною***, якщо усі її елементи, що розташовані на головній діагоналі, рівні між собою, а решта — нулі.

Позначення: $C = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$.

Квадратну матрицю називають ***трикутною,*** якщо усі її елементи, що розташовані нижче або вище головної діагоналі, є нулі:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ або } \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрицю довільного порядку, яка має вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3k} & \dots & a_{3k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{kk} & \dots & a_{kn} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$, будемо називати ***трапецоїдною***.

Зауважимо, що по «головній діагоналі» трапецоїдної матриці спочатку розташовані елементи, що не дорівнюють нулю, а потім — нульові елементи, якщо вони є. Причому нульовий елемент головної діагоналі належить тільки нульовому рядку.

➢ ***Завдання для самостійного розв'язування***

1) Визначити порядок матриць. Яка з матриць є квадратною?

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 0 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 6 \\ 7 & 3 & 9 \\ 6 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

2) Визначити серед матриць трикутну, діагональну, одиничну:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

1.2. Поняття детермінанта матриці. Властивості детермінантів

Кожній квадратній матриці відповідає деяке число, що називається ***детермінантом*** (визначником) цієї матриці і позначається $\boldsymbol{\det A}$.

Означення 1. ***Детермінантом другого порядку***, що відповідає матриці $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ називають число, яке позначається символом $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ та

визначається рівністю
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \qquad (2.1)$$

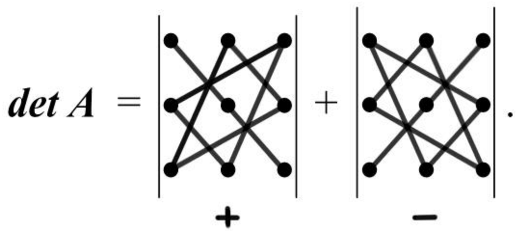
Означення 2. ***Детермінантом третього порядку***, що відповідає матриці $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ називають число, яке позначається символом $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

та визначається рівністю $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$

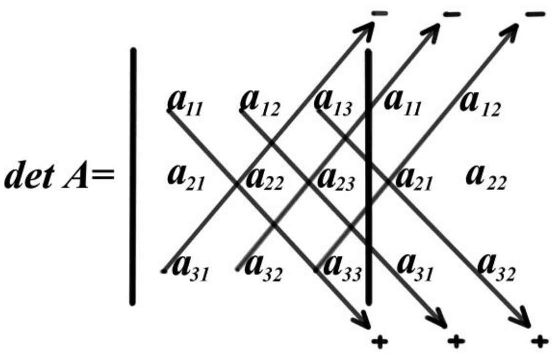
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \qquad (2.2)$$

Заміна лівої частини рівності (2.2) правою називається ***розкриванням детермінанта*** матриці ***A*.**

Праву частину рівності (2.2) легко запам'ятати, якщо використати так зване ***правило трикутника***, схема якого наведена нижче:



Розкрити детермінант третього порядку можна також за ***правилом Саррюса*** (правило «приписування» стовпців або рядків). Схему одного із варіантів цього правила зображено нижче



Засновником теорії детермінантів є ***Г. Крамер*** (1704—1752) — швейцарський математик. Він довів для детермінантів другого та третього порядку їх ***властивості***, які поширюються на детермінанти будь-якого порядку:

1. *Величина детермінанта не зміниться, якщо усі його рядки замінити стовпцями, причому кожен рядок замінити стовпцем з тим же номером.*

Зауважимо, що заміна усіх рядків детермінанта стовпцями з тими самими номерами називається *транспонуванням детермінанта.*

2. *Знак детермінанта зміниться на протилежний, якщо поміняти місцями два його рядки або стовпці.*

3. *Детермінант з двома однаковими рядками (або стовпцями) дорівнює нулю.*

4. *Спільний множник, який містять усі елементи будь-якого рядка (або стовпця) детермінанта, можна винести за знак детермінанта.*

Звідси випливає таке правило: *щоб помножити детермінант на число, досить усі елементи будь-якого його рядка (або стовпця) помножити на це число.*

5. *Якщо детермінант має рядок (або стовпець), який складається з нулів, то він дорівнює нулю.*

6. *Якщо відповідні елементи двох рядків (або стовпців) детермінанта пропорційні, то детермінант дорівнює нулю.*

7. *Якщо елементи будь-якого k-го рядка (або стовпця) детермінанта є сумами двох доданків, то цей детермінант можна подати як суму двох детермінантів, що утворені з даного заміною елементів k-го рядка (стовпця) відповідно першими або другими доданками цих елементів.*

Наприклад, $$\begin{vmatrix} a_{11}^{(1)}+a_{11}^{(2)} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}^{(1)}+a_{21}^{(2)} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}^{(1)}+a_{31}^{(2)} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}^{(2)} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}^{(2)} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8. *Якщо до елементів будь-якого рядка (або стовпця) детермінанта додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне й те саме число, то величина детермінанта не зміниться.*

Наступна властивість детермінанта пов'язана з поняттями мінора та алгебраїчного доповнення.

Мінором $\boldsymbol{M_{ij}}$ елемента $\boldsymbol{a_{ij}}$ деякого детермінанта називають детермінант на одиницу меншого порядку, що утворений з даного викреслюванням i-го рядка та j-го стовпця.

Наприклад, для детермінанта третього порядку $M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} деякого детермінанта називають його мінор, взятий зі знаком "+", коли $i + j$ є парне число або зі знаком "–", коли $i + j$ є непарне число, тобто, згідно означення $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Наприклад, для детермінанта третього порядку $A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Зауважимо, що для детермінанта другого порядку $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ мінори та алгебраїчні доповнення мають вигляд:

$$M_{11} = |a_{22}| = a_{22} \quad \Rightarrow \quad A_{11} = a_{22},$$

$$M_{12} = |a_{21}| = a_{21} \quad \Rightarrow \quad A_{12} = -a_{21},$$

$$M_{21} = |a_{12}| = a_{12} \quad \Rightarrow \quad A_{21} = -a_{12},$$

$$M_{22} = |a_{11}| = a_{11} \quad \Rightarrow \quad A_{22} = a_{11}.$$

9. *Детермінант дорівнює сумі добутків елементів будь-якого його рядка (або стовпця) на відповідні їм алгебраїчні доповнення того ж рядка (або стовпця).*

Для детермінанта третього порядку ця властивість в символічній формі записується так: $\det A = a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}A_{ij} \quad \left(i = \overline{1,3}\right)$

або $\det A = a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j} = \sum_{i=1}^{3} a_{ij}A_{ij} \quad \left(j = \overline{1,3}\right)$.

10. *Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) детермінанта на відповідні їм алгебраїчні доповнення елементів другого рядка (стовпця) дорівнює нулю.*

Означення 3. ***Детермінантом n-го порядку***, що відповідає матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

називають число, яке позначається символом $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ та

визначається однією з рівностей:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \ \ (i = \overline{1,n}) \ \text{ або } \ \det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \ \ (j = \overline{1,n}).$$

Таке означення дозволяє звести обчислення детермінанта n-го порядку до обчислення детермінантів (n-1)-го порядку і т.д., поки не одержимо детермінанти третього або другого порядку.

Якщо ж детермінант n-го порядку має ***трикутну форму***, то він дорівнює ***добутку елементів, розташованих уздовж головної діагоналі:***

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

Приклад. Обчислити детермінант $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

Використовуючи властивість 8, помножимо перший рядок на (-1) і додамо послідовно до другого, третього та четвертого рядків. Одержимо детермінант трикутного виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1(-2)(-2)(-2) = -8.$$

➤ *Завдання для самостійного розв'язування*

Обчислити детермінанти:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ *Відповідь*: 4.

2) $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ *Відповідь*: -14.

3) $\begin{vmatrix} 9 & 10 & 11 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ *Відповідь*: 0.

4) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ *Відповідь*: 28.

5) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ *Відповідь*: –8.

6) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -5 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & -3 \end{vmatrix}$ *Відповідь*: 48.

7) Розв'язати рівняння

$$\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$ *Відповідь*: $-4 \pm \sqrt{22}$.

Розв'язати нерівності:

8) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 0$ *Відповідь*: $(4;+\infty)$.

9) $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0$ *Відповідь*: $(-6;-4)$.

1.3. Розв'язування квадратних лінійних систем за формулами Крамера

Розглянемо квадратну лінійну систему $\boldsymbol{n}$-го порядку

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{3.1}$$

Матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ цієї системи відповідає детермінант $\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Його позначають через Δ і називають ***головним детермінантом системи***. А детермінанти, що одержують із головного заміною $\boldsymbol{j}$-го стовпця ($j = \overline{1, n}$) стовпцем вільних членів, називають ***допоміжними детермінантами системи*** і позначають Δ_j ($j = \overline{1, n}$).

Наприклад, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \ldots + b_nA_{nn}.$

Теорема Крамера.

Якщо головний детермінант системи не дорівнює нулю, то вона має єдиний розв’язок

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = \overline{1, n} \quad .$$

Зауваження.

Коли $\Delta = 0,$ а принаймні один із допоміжних детермінантів не дорівнює нулеві, то система несумісна.

Коли ж $\Delta = \Delta_j = 0,\ j = \overline{1, n},$ то система може мати безліч розв’язків або бути несумісною.

Наприклад, система $\begin{cases} x+y+z=1, \\ x+y+z=2, \\ -x-y-z=-1 \end{cases}$ - несумісна $(\Delta=\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=0)$,

а система $\begin{cases} x+y+z=1, \\ x+2y-z=1, \\ 2x+3y=2 \end{cases}$ має безліч розв'язків $(\Delta=\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=0)$.

Приклад. Розв'язати систему за формулами Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2+2x_3=8, \\ 2x_1-3x_2=7, \\ x_1+5x_2+x_3=0. \end{cases}$$

Знайдемо головний детермінант системи

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}=3\cdot(-3)\cdot1+4\cdot0\cdot1+2\cdot2\cdot5-2\cdot(-3)\cdot1-3\cdot0\cdot5-4\cdot2\cdot1=-9+20+6-8=9.$$

Так як $\Delta\neq0$, то дана система має єдине рішення. Знайдемо допоміжні детермінанти системи

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}=8\cdot(-3)\cdot1+4\cdot0\cdot0+2\cdot7\cdot5-2(-3)\cdot0-8\cdot0\cdot5-4\cdot7\cdot1=-24+70-28=18;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 2 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=3\cdot7\cdot1+8\cdot0\cdot1+2\cdot2\cdot0-2\cdot7\cdot1-3\cdot0\cdot0-8\cdot2\cdot1=21-14-16=-9;$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 2 & -3 & 7 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}=3(-3)\cdot0+4\cdot7\cdot1+8\cdot2\cdot5-8(-3)\cdot1-3\cdot7\cdot5-4\cdot2\cdot0=28+80+24-105=27.$$

Знайдемо розв'язок системи за формулами Крамера:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{18}{9}=2; \quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-9}{9}=-1; \quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{27}{9}=3.$$

> ***Завдання для самостійного розв'язування***

Розв'язати системи за формулами Крамера:

1) $\begin{cases} 2x + y = 5, \\ x + 3z = 16, \\ 5y - z = 10. \end{cases}$ *Відповідь:* $x = 1,\ y = 3,\ z = 5.$

2) $\begin{cases} x + y - 2z = 6, \\ 2x + 3y - 7z = 16, \\ 5x + 2y + z = 16. \end{cases}$ *Відповідь:* $x = 3,\ y = 1,\ z = -1.$

3) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4, \\ 2x + 4y + 6z = 3, \\ 3x + y - z = 1. \end{cases}$ *Відповідь:* Система несумісна.

4) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4, \\ 2x + y - z = 3, \\ 3x + 3y + 2z = 7. \end{cases}$ *Відповідь:* Система має безліч розв'язків.

5) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$ *Відповідь:* $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1,\ x_4 = -1.$

1.4. Основні операції над матрицями та їх властивості

1. Лінійні операції над матрицями

Означення. ***Сумою A+B*** двох матриць ***A*** та ***B одного порядку m×n*** називають матрицю **С *того ж порядку***, усі елементи якої знаходять за формулою

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \text{ де } i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Означення. ***Добутком*** матриці ***A*** порядку $m \times n$ на число λ називають матрицю ***C того ж порядку***, усі елементи якої знаходять за формулою

$$c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}, \quad \text{де } i = \overline{1,m},\ \ j = \overline{1,n}.$$

***Властивості*:**

1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$ — комутативність.

2) $\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}$ — асоціативність.

3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$, де $\boldsymbol{O}$ — нульова матриця.

4) $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$, де $(-\boldsymbol{A})$ — протилежна матриця до $\boldsymbol{A}$.

5) $(\lambda\mu)\boldsymbol{A}=\lambda(\mu\boldsymbol{A})$ — асоціативність відносно добутку двох чисел.

6) $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$ — дистрибутивність відносно суми матриць.

7) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$ — дистрибутивність відносно суми чисел.

2. Множення матриці на матрицю

Означення. ***Добутком*** матриці $\boldsymbol{A}$ порядку $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{s}$ на матрицю $\boldsymbol{B}$ порядку $\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{n}$ називають таку матрицю $\boldsymbol{C}$ порядку $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$, кожен елемент якої $\boldsymbol{c_{ij}}$ $(\boldsymbol{i}=\overline{1,\boldsymbol{m}},\ \boldsymbol{j}=\overline{1,\boldsymbol{n}})$ дорівнює сумі добутків елементів $\boldsymbol{i}$-го рядка матриці $\boldsymbol{A}$ на відповідні елементи $\boldsymbol{j}$-го стовпця матриці $\boldsymbol{B}$, тобто

$$\boldsymbol{c_{ij}}=\sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{s}}\boldsymbol{a_{ik}}\boldsymbol{b_{kj}}\ .$$

Як бачимо, множення матриць можливе, якщо кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої матриці.

***Властивості*:**

1) Якщо $\boldsymbol{AB}$ та $\boldsymbol{BA}$ мають сенс, то в загальному випадку $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.

Коли $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, то матриці $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ називаються ***переставними***. Зокрема, якщо $\boldsymbol{D}_1$ та $\boldsymbol{D}_2$ є діагональні матриці $\boldsymbol{n}$-го порядку, то $\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{D}_2=\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{D}_1=\boldsymbol{D}$ — діагональна матриця.

2) Якщо $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ квадратні матриці однакового порядку,

то $\boldsymbol{det(AB)=detA\ detB}$.

3) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E_n}=\boldsymbol{E_m}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$, якщо $\boldsymbol{A}$ має порядок $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$.

4) $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{O_n} = \boldsymbol{O_m} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$ — нульова матриця.

5) $\boldsymbol{ABC} = \boldsymbol{A(BC)} = \boldsymbol{(AB)C}$ — асоціативність.

6) $\lambda(\boldsymbol{AB}) = (\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$.

7) $\boldsymbol{A(B+C)} = \boldsymbol{AB+AC}$.

(якщо вказані добутки мають сенс).

3. Транспонування матриці

Означення. Матриця $\boldsymbol{A^T}$ називається ***транспонованою*** по відношенню до матриці $\boldsymbol{A}$, якщо її рядки є відповідними стовпцями матриці $\boldsymbol{A}$.

Якщо $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_{ij}}),\ \boldsymbol{i} = \overline{1,\boldsymbol{m}},\ \boldsymbol{j} = \overline{1,\boldsymbol{n}}$, то $\boldsymbol{A^T} = (\boldsymbol{a_{ij}}),\ \boldsymbol{j} = \overline{1,\boldsymbol{n}},\ \boldsymbol{i} = \overline{1,\boldsymbol{m}}$.

Наприклад, для матриці $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

транспонованою буде матриця $\mathbf{A^T} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$.

Означення. Якщо для квадратної матриці $\boldsymbol{A}$ має місце рівність $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A^T}$, тобто $\boldsymbol{a_{ij}} = \boldsymbol{a_{ji}}$, то така матриця називається ***симетричною.***

Наприклад, матриця $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ є симетрична.

Означення. Якщо для квадратної матриці $\boldsymbol{A}$ має місце рівність $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A^T}$, тобто $\boldsymbol{a_{ij}} = -\boldsymbol{a_{ji}}$, то така матриця називається ***кососиметричною.***

У кососиметричній матриці усі елементи головної діагоналі є нулі.

Наприклад, матриця $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ -3 & 0 & -4 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ є кососиметрична.

***Властивості*:**

1) $\left(A^T\right)^T = A$.

2) $\det A = \det\left(A^T\right)$.

3) $\left(A \pm B\right)^T = A^T \pm B^T$.

4) $\left(\lambda A\right)^T = \lambda A^T$.

5) $\left(AB\right)^T = B^T \cdot A^T$.

6) $A \cdot A^T = C$ — симетрична матриця.

➤ *Завдання для самостійного розв'язування*

Перемножити дані матриці:

1) $D_1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $D_2 = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$. *Відповідь:* $D_1 D_2 = D_2 D_1$.

2) $A = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$. *Відповідь:* $AB \neq BA$.

3) $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. *Відповідь:* $AB \neq BA$.

4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. *Відповідь:* AB існує, BA не має змісту.

5) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Відповідь:* $\begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 25 \\ 35 \end{pmatrix}$.

1.5. Обернена матриця

(означення, знаходження, властивості)

Розглянемо матрицю A_n (квадратну матрицю порядку n). Якщо $\det A=0$, то матриця називається ***особливою***, якщо $\det A \neq 0$, то ***неособливою***.

Означення. Матриця A^{-1} називається ***оберненою*** до квадратної матриці A, якщо $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Критерій існування оберненої матриці

Для того, щоб для квадратної матриці А існувала обернена A^{-1}, необхідно та достатньо, щоб матриця А була неособливою.

Схема доведення достатньої умови існування оберненої матриці така: для квадратної неособливої матриці $A = (a_{ij})$ складають так звану ***союзну (приєднану) матрицю*** $A^* = (A_{ij})^T$, де A_{ij} — алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} матриці A. А потім показують, що

$$A \cdot \frac{(A_{ij})^T}{\det A} = \frac{(A_{ij})^T}{\det A} \cdot A = E.$$

Звідки випливає, що існує обернена матриця

$$A^{-1} = \frac{(A_{ij})^T}{\det A}. \tag{5.1}$$

***Властивості*:**

1) $(A^{-1})^{-1} = A$.

2) $A^{-1}A = AA^{-1}$ (неособлива матриця переставна зі своєю оберненою).

3) $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.

4) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

5) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Методи знаходження оберненої матриці

I. Метод союзної матриці.

Отримана формула (5.1) — це формула для знаходження оберненої матриці даним методом.

Приклад. Знайти матрицю обернену матриці $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Так як $\boldsymbol{detA} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$, то матриця $\boldsymbol{A}$ є неособлива, а тому обернена матриця $\boldsymbol{A}^{-1}$ існує. Знайдемо її за формулою (5.1): $\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{(\boldsymbol{A_{ij}})^{\text{T}}}{\boldsymbol{det\,A}}$.

Алгебраїчні доповнення елементів матриці $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A}_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -6, \quad \boldsymbol{A}_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad \boldsymbol{A}_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\boldsymbol{A}_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad \boldsymbol{A}_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad \boldsymbol{A}_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2\,,$$

$$\boldsymbol{A}_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \boldsymbol{A}_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -3, \quad \boldsymbol{A}_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{-6} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

I I. Метод елементарних перетворень.

Елементарними перетвореннями матриці називаються слідуючи:

а) множення рядка (або стовпця) на довільне дійсне число, яке відмінне від нуля;

б) переставлення (транспозиція) двох рядків (або стовпців);

в) додавання до якогось рядка (або стовпця) іншого рядка (або стовпця), помноженого на довільне число.

Для даної квадратної матриці $\boldsymbol{A_n}$ побудуємо прямокутну матрицю $\boldsymbol{\Gamma_A} = (\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{E})$ розміром $[\boldsymbol{n} \times 2\boldsymbol{n}]$, дописав до $\boldsymbol{A}$ праворуч одиничну матрицю. Далі, використовуючи ***елементарні перетворення над рядками***, зведемо матрицю $\boldsymbol{\Gamma_A}$ до вигляду $(\boldsymbol{E} \mid \boldsymbol{B})$, що завжди можливо, якщо $\boldsymbol{det\,A} \neq 0$. Тоді $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$.

Приклад. Знайти матрицю обернену матриці $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Побудуємо матрицю $\boldsymbol{\Gamma_A} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$. Позначимо через $\boldsymbol{\gamma}_1$ та $\boldsymbol{\gamma}_2$ рядки матриці $\boldsymbol{\Gamma_A}$, проведемо над ними слідуючи перетворення:

$$\gamma_1' = \gamma_1;\ \gamma_2' = \gamma_2 - 3\gamma_1;\ \gamma_1'' = \gamma_1' + \gamma_2';\ \gamma_2'' = -\frac{1}{2}\gamma_2'.$$

Послідовно отримаємо

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Таким чином, $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Перевірка $\boldsymbol{AA}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & 1-1 \\ -6+6 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{E}$.

➤ *Завдання для самостійного розв'язування*

Знайти $\boldsymbol{A}^{-1}$ методом союзної матриці:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. *Відповідь*: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$.

2) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. *Відповідь*: $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

3) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. *Відповідь*: $\begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Знайти A^{-1} методом елементарних перетворень:

4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. *Відповідь*: $\begin{pmatrix} 1/9 & 2/9 & 2/9 \\ 2/9 & 1/9 & -2/9 \\ 2/9 & -2/9 & 1/9 \end{pmatrix}$.

1.6. Розв’язування матричних рівнянь за допомогою оберненої матриці

1. Розв’язування квадратних матричних рівнянь

Розглянемо матричні рівняння $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ або $\boldsymbol{XA} = \boldsymbol{B}$, де матриці $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ — квадратні однакового порядку $\boldsymbol{n}$, крім того матриця $\boldsymbol{A}$ має обернену матрицю. Тоді ці рівняння можна розв’язати шляхом множення ***зліва (справа)*** обох частин рівняння на матрицю $\boldsymbol{A}^{-1}$. Отримаємо

$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{XA} = \boldsymbol{B}$
$\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AX}) = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$	$(\boldsymbol{XA})\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{BA}^{-1}$
$(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{AA}^{-1}) = \boldsymbol{BA}^{-1}$
$\boldsymbol{EX} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{XE} = \boldsymbol{BA}^{-1}$
$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{BA}^{-1}$

2. Розв'язування квадратних лінійних систем

Розглянемо матричне рівняння $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$, що відповідає квадратній лінійній

системі рівнянь
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (6.1)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ — матриця системи, $\boldsymbol{detA} \neq 0$,

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$ — матриця невідомих, $$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$ — матриця вільних членів.

Для знаходження матриці $\boldsymbol{X}$ використаємо формулу $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$

Приклад. Розв'язати системy за допомогою оберненої матриці

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8, \\ 2x_1 - 3x_2 = 7, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Запишемо систему у матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix},$$ або $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$,

де $$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(у другому рівнянні системи відсутня невідома x_3, тому $a_{23} = 0$).

Розв'яжемо систему за допомогою оберненої матриці.

1. Визначник $\boldsymbol{det\, A} = \Delta = 9 \neq 0,$ тоді обернена матриця існує.

2. Щоб знайти союзну матрицю $\boldsymbol{A^*}$ до матриці $\boldsymbol{A}$, необхідно обчислити алгебраїчні доповнення всіх її елементів:

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -3 - 0 = -3; \; A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(2-0) = -2; \; A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 3 = 13;$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -(4-10) = 6; \; A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1; \quad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -(15-4) = -11;$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 6 = 6; \quad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -(0-4) = 4; \; A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 8 = -17.$$

Тоді союзна матриця: $\boldsymbol{A^*} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 6 \\ -2 & 1 & 4 \\ 13 & -11 & -17 \end{pmatrix}.$

3. Знайдемо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -3 & 6 & 6 \\ -2 & 1 & 4 \\ 13 & -11 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{13}{9} & -\frac{11}{9} & -\frac{17}{9} \end{pmatrix}.$$

4. Отримаємо рішення системи за допомогою оберненої матриці (правило «строка на стовпець»):

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -3 & 6 & 6 \\ -2 & 1 & 4 \\ 13 & -11 & -17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -24 + 42 + 0 \\ -16 + 7 + 0 \\ 104 - 77 + 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 18 \\ -9 \\ 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{x_1} = 2\boldsymbol{;} \quad \boldsymbol{x_2} = -1\boldsymbol{;} \quad \boldsymbol{x_3} = 3.$

Завдання для самостійного розв'язування

Розв'язати системи:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$. *Відповідь*: $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2) $\boldsymbol{X} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$. *Відповідь*: $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$.

3) $\boldsymbol{X} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$. *Відповідь*: $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Розв'язати системи:

4) $\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2 + 3\boldsymbol{x}_3 = 6, \\ 2\boldsymbol{x}_1 + 3\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3 = 4, \\ 3\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 - 4\boldsymbol{x}_3 = 0. \end{cases}$ *Відповідь*: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{cases} 2\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 - 2\boldsymbol{x}_3 = 5, \\ 3\boldsymbol{x}_1 - 2\boldsymbol{x}_2 + 3\boldsymbol{x}_3 = 4, \\ 2\boldsymbol{x}_1 - 3\boldsymbol{x}_2 + 5\boldsymbol{x}_3 = 1. \end{cases}$ *Відповідь*: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

6) $\begin{cases} 2\boldsymbol{x}_1 + 3\boldsymbol{x}_2 + 5\boldsymbol{x}_3 = 12, \\ \boldsymbol{x}_1 - 4\boldsymbol{x}_2 + 3\boldsymbol{x}_3 = -22, \\ 3\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 - 2\boldsymbol{x}_3 = 0. \end{cases}$ *Відповідь*: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1.7. Модель Леонтьєва багатогалузевої економіки.

До економічних задач, що зводяться до систем лінійних рівнянь, відносяться задачі балансового аналізу. Мета балансового аналізу – відповісти на питання, що пов'язане з ефективністю ведення багатогалузевого господарства: яким має бути обсяг виробництва кожної з $\boldsymbol{n}$ галузей, щоб задовольнити всі потреби у продукції цієї галузі? У 1936 р. американський економіст В. Леонтьєв запропонував математичну модель, що дозволяє аналізувати зв'язок між галузями, яку називають моделлю Леонтьєва багатогалузевої економіки.

Розголянемо її на **прикладі.**

У таблиці наведено дані про використання балансу за звітний період (ум. грош. од.)

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Галузь</td><td colspan="2">Споживання</td><td rowspan="2">Кінцевий продукт</td><td rowspan="2">Валовий продукт</td></tr>
<tr><td>Енергетика</td><td>Машинобудування</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Вироб-ництво</td><td>Енергетика</td><td>7</td><td>21</td><td>72</td><td>100</td></tr>
<tr><td>Машинобуду-вання</td><td>12</td><td>15</td><td>73</td><td>100</td></tr>
</table>

Обчислити необхідний обсяг валового продукту в кожній галузі, якщо кінцеве споживання енергетичної галузі збільшується вдвоє, а машинобудування залишається на колишньому рівні.

Розв'язок. За умовою

$$\boldsymbol{x}_1 = 100,\ \boldsymbol{x}_2 = 100,\ \boldsymbol{x}_{11} = 7,\ \boldsymbol{x}_{12} = 21,\ \boldsymbol{x}_{21} = 12,\ \boldsymbol{x}_{22} = 15,\ \boldsymbol{y}_1 = 72,\ \boldsymbol{y}_2 = 73.$$

Знаходимо коефіцієнти прямих витрат за формулою

$$\boldsymbol{a}_{ij} = \frac{\boldsymbol{x}_{ij}}{\boldsymbol{x}_i},\quad \boldsymbol{i},\boldsymbol{j} = \overline{1,2}.$$

$$\boldsymbol{a}_{11} = 0{,}07,\ \boldsymbol{a}_{12} = 0{,}21,\ \boldsymbol{a}_{21} = 0{,}12,\ \boldsymbol{a}_{22} = 0{,}15.$$

Матриця прямих витрат

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0{,}07 & 0{,}21 \\ 0{,}12 & 0{,}15 \end{pmatrix}.$$

Вона не має від'ємних елементів і задовольняє критерію продуктивності

$$\left(\boldsymbol{max}\{0{,}07 + 0{,}12;\ 0{,}21 + 0{,}15\} = \{0{,}19;\ 1{,}36\} = 0{,}36 < 1\right).$$

Тому для будь-якого вектору кінцевого продукту $\boldsymbol{Y}$ можна знайти необхідний обсяг валового випуску $\boldsymbol{Q}$ за формулою $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1} \cdot \boldsymbol{Y}$.

Знаходимо матрицю повних витрат $\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1}$.

$$\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0{,}93 & -0{,}21 \\ -0{,}12 & 0{,}85 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\boldsymbol{det}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=0{,}7653\neq 0$, то

$$\boldsymbol{S}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{0{,}7653}\begin{pmatrix}0{,}85 & 0{,}21\\ 0{,}12 & 0{,}93\end{pmatrix}.$$

За умовою вектор кінцевого продукту $\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}144\\ 73\end{pmatrix}$. Тоді вектор валового випуску $\boldsymbol{X}$ визначається так:

$$\boldsymbol{Q}=\frac{1}{0{,}7653}\begin{pmatrix}0{,}85 & 0{,}21\\ 0{,}12 & 0{,}93\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}144\\ 73\end{pmatrix}=\frac{1}{0{,}7653}\begin{pmatrix}179{,}99\\ 111{,}28\end{pmatrix}.$$

Тому валовий випуск в енергетичній галузі треба збільшити до 179,99 умов.од., а в машинобудівний – до 111,28 умов.од.

➤ *Завдання для самостійного розв'язування*

Підприємство випускає три види продукції, яка характеризується матрицею-планом $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}10 & 7 & 4\end{pmatrix}$. При випуску продукції використовується 5 видів сировини:

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a_{ij}})=\begin{pmatrix}5 & 10 & 3 & 9 & 2\\ 4 & 8 & 5 & 6 & 8\\ 6 & 12 & 4 & 3 & 10\end{pmatrix},$$

де $\boldsymbol{a_{ij}}$ – витрати $\boldsymbol{k}$-того виду сировини на одну одиницю $\boldsymbol{i}$-того виду продукції. Матриця $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}7 & 4 & 5 & 10 & 2\end{pmatrix}$ задає вартість однієї одиниці кожного виду сировини. Визначити: а) необхідну кількість одиниць сировини кожного виду для забезпечення плану; б) вартість для одиниці кожного виду продукції; в) загальну вартість сировини при виконанні плану випуску.

Відповідь: а) $\begin{pmatrix}102 & 204 & 81 & 144 & 116\end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix}184 & 161 & 160\end{pmatrix}$, в) 3607.

➤ *Тести для самоконтролю*

Тест №1

Перший рівень.

1. Розв’язати рівняння $\begin{vmatrix} 3 & \boldsymbol{x} & -\boldsymbol{x} \\ 2 & -1 & 3 \\ \boldsymbol{x}+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Відповідь: а) $4 \pm \sqrt{22}$;

б) $-6 \pm \sqrt{42}$; в) $-5 \pm \sqrt{22}$; г) $-\frac{19}{4} \pm \frac{\sqrt{385}}{4}$; д) інша відповідь.

2. Розв’язати матричне рівняння $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$.

Відповідь: а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$.

3. Знайти ранг матриці $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

Відповідь: а) $\boldsymbol{RgA} = 3$; б) $\boldsymbol{RgA} = 2$; в) $\boldsymbol{RgA} = 1$.

4. Матриці називаються переставними, якщо: а) $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$; б) $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$;

в) $\boldsymbol{AB} > \boldsymbol{BA}$.

Другий рівень.

5. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

а) методом Крамера; б) методом матричного числення

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 + 3\boldsymbol{x}_2 + 2\boldsymbol{x}_3 = 5, \\ 3\boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3 = 1, \\ \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 = 1. \end{cases}$$

Тест №2

Перший рівень.

1. Розв'язати нерівність $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & \boldsymbol{x} & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 0$. Відповідь: а) $(-\infty;-10)$; б) $(-4;+\infty)$;

в) $(4;+\infty)$; г) $(-10;+\infty)$; д) інша відповідь.

2. Розв'язати матричне рівняння $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -11 & 4 \end{pmatrix}$:

Відповідь: а) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 9 & -7 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$.

3. Знайти ранг матриці $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Відповідь: а) $\boldsymbol{RgA} = 2$; б) $\boldsymbol{RgA} = 3$; в) $\boldsymbol{RgA} = 4$.

4. Матриця називається особливою, якщо: а) $\boldsymbol{det\,A} = 0$;

б) $\boldsymbol{det\,A} \neq 0$; в) інша відповідь.

Другий рівень.

5. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

а) методом Крамера; б) методом матричного числення

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 + 3\boldsymbol{x}_2 + 2\boldsymbol{x}_3 = 6, \\ 3\boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3 = 4, \\ \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 = 2. \end{cases}$$

Розділ 2. Елементи векторної алгебри

2.1. Скалярні та векторні величини

Величини, що розглядаються в математичних, фізичних та інших дисциплінах, можна поділити на два види: скалярні й векторні. ***Скалярною величиною*** (скаляром) називається величина, яка повністю характеризується своїм числовим значенням. Приклади скалярних величин: довжина, об'єм, маса, час, температура, урожайність.

Векторною називається величина, яка характеризується своїм числовим значенням і напрямом в просторі (наприклад, переміщення точки, прискорення, сила).

Векторні величини геометрично зображаються за допомогою векторів. ***Вектором***, що зображає векторну величину $\bar{\boldsymbol{a}}$ називається:

а) у випадку $\bar{\boldsymbol{a}} \neq 0$ напрямлений відрізок, довжина якого у вибраному масштабі дорівнює числовому значенню $\bar{\boldsymbol{a}}$ і напрям якого збігається з напрямом $\bar{\boldsymbol{a}}$;

б) у випадку $\bar{\boldsymbol{a}} = 0$ — нульовий відрізок.

Вектор позначається: однією (переважно малою) буквою з рискою, або стрілкою зверху (наприклад, $\bar{\boldsymbol{a}}$ або $\vec{\boldsymbol{a}}$); однією (переважно малою) буквою жирного шрифту (наприклад, $\bar{\boldsymbol{a}}$); двома великими буквами з рискою, або стрілкою зверху. Перша буква означає початок вектора, а друга — кінець (наприклад, $\overline{\boldsymbol{AB}}$ або $\overline{\boldsymbol{A}}\vec{\boldsymbol{B}}$). Вектор, який є нульовим відрізком, називається ***нульовим*** (нуль-вектор) і позначається 0, $\bar{0}$, $\vec{0}$. ***Довжина вектора*** (або модуль вектора) позначається: $\boldsymbol{a}, |\bar{\boldsymbol{a}}|, |\vec{\boldsymbol{a}}|, \boldsymbol{AB}, |\overline{\boldsymbol{AB}}|, |\overline{\boldsymbol{A}}\vec{\boldsymbol{B}}|$.

Вектор, модуль якого дорівнює 1, називається ***одиничним*** вектором і позначається буквами $\bar{\boldsymbol{i}}, \bar{\boldsymbol{j}}, \bar{\boldsymbol{k}}, \bar{\boldsymbol{l}}$. Одиничний вектор, паралельний і однаково напрямлений з ненульовим вектором $\bar{\boldsymbol{a}}$, називається **ортом** вектора $\bar{\boldsymbol{a}}$ і позначається $\bar{\boldsymbol{a}}^0$ (рис. 1). Тоді $\bar{\boldsymbol{a}} = |\bar{\boldsymbol{a}}|\bar{\boldsymbol{a}}^0$.

Рис. 1

Вектори називаються ***колінеарними***, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих. Якщо з двох векторів хоча б один нульовий, то дані вектори колінеарні.

Вектори називаються ***компланарними***, якщо вони лежать в одній площині або на паралельних площинах. Якщо з трьох векторів принаймні один нульовий, то дані вектори компланарні.

Два вектора називаються ***рівними***, якщо вони колінеарні ($\bar{a} \parallel \bar{b}$), мають однакові модулі ($|\bar{a}| = |\bar{b}|$) і однакові напрями ($\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$) (рис. 2). Ясно, що з $|\bar{a}| = |\bar{b}|$ не випливає $\bar{a} = \bar{b}$.

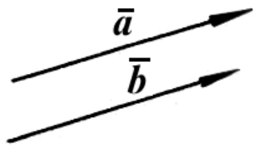


Рис. 2

ЗАУВАЖЕННЯ. Для векторів не встановлено поняття “більше” і “менше”.

Вектор, колінеарний з ненульовим вектором $\bar{a}$, модуль якого рівний модулю $\bar{a}$ і напрям якого протилежний напряму $\bar{a}$ називається ***протилежним*** до вектора $\bar{a}$ і позначається $-\bar{a}$ $(\bar{a} \uparrow\downarrow -\bar{a})$(рис. 3).

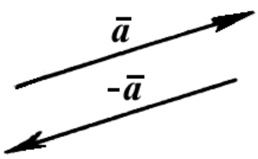


Рис. 3

Правою (лівою) трійкою векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ називається упорядкована трійка ненульових некомпланарних векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ зі спільним початком таких, що найкоротший поворот від $\bar{a}$ до $\bar{b}$, якщо спостерігати його з кінця $\bar{c}$ відбувається проти руху годинникової стрілки (за годинниковою стрілкою) (рис. 4).

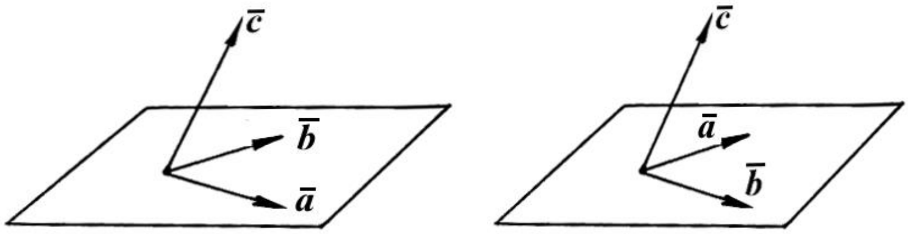


Рис. 4

Кутом між двома ненульовими векторами називається найменший кут, на який необхідно повернути один з них, щоб він виявився колінеарним і однаково напрямленим з другим, і який вважається невід’ємним (рис. 5). Ясно, що такий кут єдиний і заключений в інтервалі $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Кут між $\bar{a}$ і $\bar{b}$ позначається $\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)$.

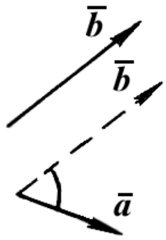


Рис. 5

Вектор, початок якого збігається з початком декартової системи координат, а кінець з точкою *м* називається ***радіус-вектором*** точки ***M*** і позначається $\bar{r}$ (рис. 6).

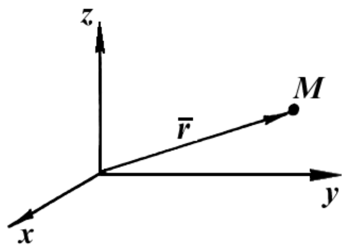


Рис. 6

➢ ***Завдання для самостійного розв’язування***

1) Довести, що якщо два вектори неколінеарні, то вони ненульові.

2) Довести, що якщо три вектори некомпланарні, то вони ненульові.

3) Чи всякі колінеарні вектори є компланарними?

4) Чи нуль-вектор можна вважати колінеарним всякому іншому вектору?

2.2. Дії над векторами

1. Додавання векторів

Розглянемо впорядковану сукупність векторів

$$\overline{\boldsymbol{a}_1}, \overline{\boldsymbol{a}_2}, \ldots, \overline{\boldsymbol{a}_n} \ .$$

Вектор, початок якого збігається з початком $\overline{\boldsymbol{a}_1}$, а кінець з кінцем $\overline{\boldsymbol{a}_n}$ при умові, що $\overline{\boldsymbol{a}_2}$ відкладемо від кінця $\overline{\boldsymbol{a}_1}$, вектор $\overline{\boldsymbol{a}_3}$ відкладемо від кінця $\overline{\boldsymbol{a}_2}$ і т. д. називається ***сумою векторів*** і позначається

$$\overline{\boldsymbol{a}_1} + \overline{\boldsymbol{a}_2} + \ldots + \overline{\boldsymbol{a}_n} = \sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}} \overline{\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}}} \ \text{(рис. 7).}$$

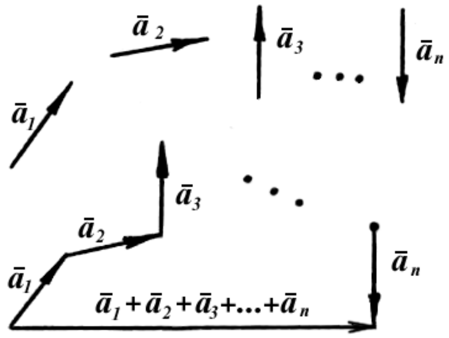


Рис. 7

Знаходження суми векторів називається їх ***додаванням***.

ЗАУВАЖЕННЯ 1. Якщо при додаванні векторів кінець останнього збігається з початком першого, то сума дорівнює $\overline{0}$.

ЗАУВАЖЕННЯ 2. Додавання двох неколінеарних векторів $\overline{\boldsymbol{a}}$ і $\overline{\boldsymbol{b}}$ можна виконувати за так званим ***правилом паралелограма*** (на відміну від цього правила звичайне додавання за ***правилом трикутника***), яке полягає у наступному:

а) вектори $\overline{\boldsymbol{a}}$ і $\overline{\boldsymbol{b}}$ зводяться до спільного початку;

б) будується паралелограм на даних векторах, як на сторонах;

в) діагональ паралелограма, що виходить із спільного початку двох даних векторів є вектором – сумою векторів $\overline{\boldsymbol{a}}$ і $\overline{\boldsymbol{b}}$ (рис. 8).

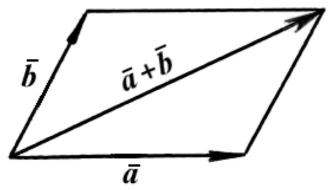


Рис. 8

ПРИКЛАД . Маємо паралелепіпед $\boldsymbol{ABCDA_1B_1C_1D_1}$ (рис. 9). Вектор $\overline{\boldsymbol{AC_1}}$ є сумою векторів $\overline{\boldsymbol{AB}}, \overline{\boldsymbol{AD}}, \overline{\boldsymbol{AA_1}}$.

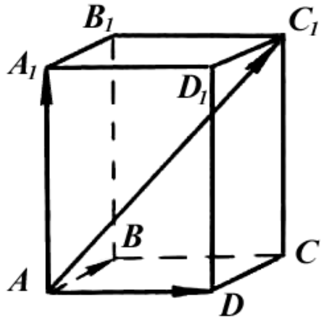


Рис. 9

Властивості додавання векторів

1. $\bar{\boldsymbol{a}}+\bar{0}=\bar{\boldsymbol{a}}$;

2. $\bar{\boldsymbol{a}}+(-1)\bar{\boldsymbol{a}}=0$;

3. $\bar{\boldsymbol{a}}+\bar{\boldsymbol{b}}=\bar{\boldsymbol{b}}+\bar{\boldsymbol{a}}$ (*комутативна* властивість, від лат. *comutatus* — зміна, перетворення);

4. $(\bar{\boldsymbol{a}}+\bar{\boldsymbol{b}})+\bar{\boldsymbol{c}}=\bar{\boldsymbol{a}}+(\bar{\boldsymbol{b}}+\bar{\boldsymbol{c}})$ (*асоціативна* властивість, від лат. *associo* — приєднувати).

5. $\left|\sum\limits_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}}\overline{\boldsymbol{a_k}}\right| \le \sum\limits_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}}\left|\overline{\boldsymbol{a_k}}\right|$, причому рівність має місце тільки тоді, коли вектори $\overline{\boldsymbol{a_1}}, \overline{\boldsymbol{a_2}}, \ldots, \overline{\boldsymbol{a_n}}$ колінеарні.

ЗАУВАЖЕННЯ. Властивість 3 узагальнюється на будь-яку скінчену кількість векторів: результат додавання будь-якої скінченої кількості векторів не залежить від порядку їх запису.

2. Віднімання векторів

Розглянемо упорядковану пару векторів $\bar{a}, \bar{b}$. Вектор, який при додаванні з $\bar{b}$ дає $\bar{a}$, тобто початок якого збігається з кінцем $\bar{b}$, а кінець — з кінцем $\bar{a}$ при умові, що вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ відкладені від однієї точки, називається ***різницею векторів*** $\bar{a}, \bar{b}$ і позначається $\bar{a} - \bar{b}$ (рис. 10).

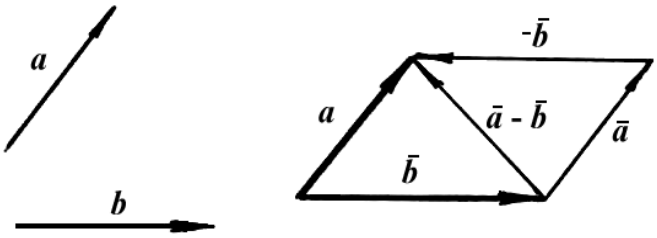


Рис. 10

Знаходження різниці векторів називається ***відніманням*** векторів. Вектор, який збігається з діагоналлю паралелограма, що з'єднує кінці векторів, називається ***вектором-різницею*** $\bar{a} - \bar{b}$ векторів $\bar{a}, \bar{b}$.

Властивості віднімання векторів

1. $\bar{a} - \bar{a} = 0$.
2. $\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + \left(-\bar{b}\right)$.

3. Множення вектора на число

Добутком вектора $\bar{a}$ на число α називається колінеарний з $\bar{a}$ вектор, модуль якого дорівнюється $|\alpha| \cdot |\bar{a}|$ і який спрямований однаково з $\bar{a}$ при $\bar{a} = \bar{0}, \alpha > 0$; протилежно $\bar{a}$ при $\bar{a} \neq \bar{0}, \alpha < 0$ і невизначено — як нуль-вектор — при виконанні принаймні однієї з рівностей $\bar{a} = \bar{0}, \alpha = 0$ і позначається $\alpha\bar{a}$ або $\bar{a}\alpha$ (рис. 11).

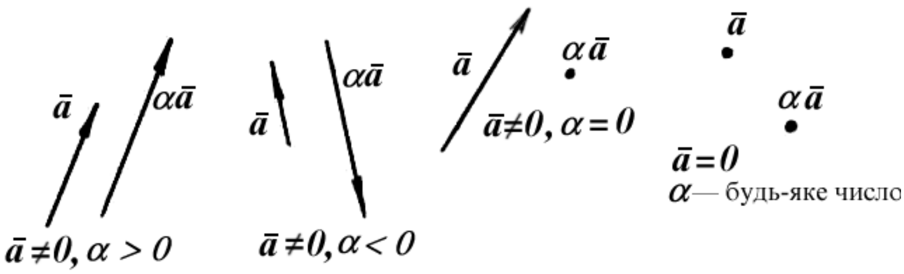


Рис. 112.2. Дії над векторами

1. Додавання векторів

Розглянемо впорядковану сукупність векторів

$$\overline{\boldsymbol{a}_1}, \overline{\boldsymbol{a}_2}, \ldots, \overline{\boldsymbol{a}_n}\ .$$

Вектор, початок якого збігається з початком $\overline{\boldsymbol{a}_1}$, а кінець з кінцем $\overline{\boldsymbol{a}_n}$ при умові, що $\overline{\boldsymbol{a}_2}$ відкладемо від кінця $\overline{\boldsymbol{a}_1}$, вектор $\overline{\boldsymbol{a}_3}$ відкладемо від кінця $\overline{\boldsymbol{a}_2}$ і т. д. називається ***сумою векторів*** і позначається

$$\overline{\boldsymbol{a}_1} + \overline{\boldsymbol{a}_2} + \ldots + \overline{\boldsymbol{a}_n} = \sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}} \overline{\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}}} \text{ (рис. 8).}$$

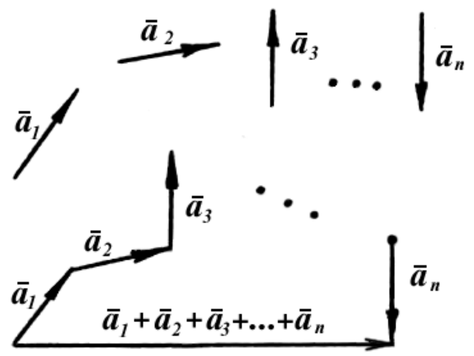


Рис. 8

Знаходження суми векторів називається їх ***додаванням***.

ЗАУВАЖЕННЯ 1. Якщо при додаванні векторів кінець останнього збігається з початком першого, то сума дорівнює $\overline{0}$.

ЗАУВАЖЕННЯ 2. Додавання двох неколінеарних векторів $\overline{\boldsymbol{a}}$ і $\overline{\boldsymbol{b}}$ можна виконувати за так званим ***правилом паралелограма*** (на відміну від цього правила звичайне додавання за ***правилом трикутника***), яке полягає у наступному:

а) вектори $\overline{\boldsymbol{a}}$ і $\overline{\boldsymbol{b}}$ зводяться до спільного початку;

б) будується паралелограм на даних векторах, як на сторонах;

в) діагональ паралелограма, що виходить із спільного початку двох даних векторів є вектором – сумою векторів $\overline{\boldsymbol{a}}$ і $\overline{\boldsymbol{b}}$ (рис. 9).

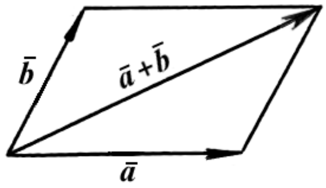


Рис. 9

ПРИКЛАД. Маємо паралелепіпед $\boldsymbol{ABCDA_1B_1C_1D_1}$ (рис. 10). Вектор $\overline{\boldsymbol{AC_1}}$ є сумою векторів $\overline{\boldsymbol{AB}}, \overline{\boldsymbol{AD}}, \overline{\boldsymbol{AA_1}}$.

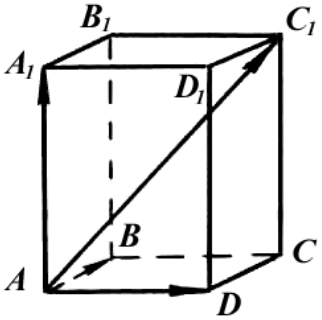


Рис. 10

Властивості додавання векторів

1. $\overline{\boldsymbol{a}} + \overline{0} = \overline{\boldsymbol{a}}$;

2. $\overline{\boldsymbol{a}} + (-1)\overline{\boldsymbol{a}} = 0$;

3. $\overline{\boldsymbol{a}} + \overline{\boldsymbol{b}} = \overline{\boldsymbol{b}} + \overline{\boldsymbol{a}}$ (*комутативна* властивість, від лат. *comutatus* — зміна, перетворення);

4. $(\overline{\boldsymbol{a}} + \overline{\boldsymbol{b}}) + \overline{\boldsymbol{c}} = \overline{\boldsymbol{a}} + (\overline{\boldsymbol{b}} + \overline{\boldsymbol{c}})$ (*асоціативна* властивість, від лат. *associo* — приєднувати).

5. $\left|\sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}} \overline{\boldsymbol{a_k}}\right| \le \sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}} \left|\overline{\boldsymbol{a_k}}\right|$, причому рівність має місце тільки тоді, коли вектори $\overline{\boldsymbol{a}_1}, \overline{\boldsymbol{a}_2}, ..., \overline{\boldsymbol{a_n}}$ колінеарні.

ЗАУВАЖЕННЯ. Властивість 3 узагальнюється на будь-яку скінчену кількість векторів: результат додавання будь-якої скінченої кількості векторів не залежить від порядку їх запису.

2. Віднімання векторів

Розглянемо упорядковану пару векторів $\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}}$. Вектор, який при додаванні з $\bar{\boldsymbol{b}}$ дає $\bar{\boldsymbol{a}}$, тобто початок якого збігається з кінцем $\bar{\boldsymbol{b}}$, а кінець — з кінцем $\bar{\boldsymbol{a}}$ при умові, що вектори $\bar{\boldsymbol{a}}$ і $\bar{\boldsymbol{b}}$ відкладені від однієї точки, називається ***різницею векторів*** $\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}}$ і позначається $\bar{\boldsymbol{a}} - \bar{\boldsymbol{b}}$ (рис. 11).

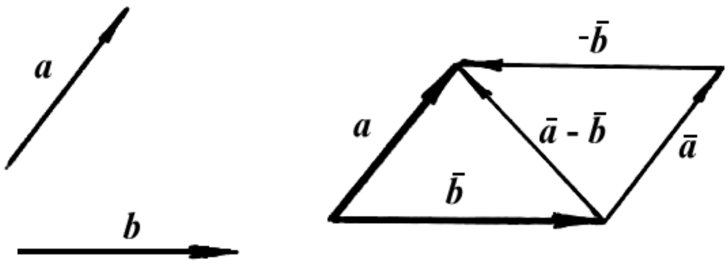


Рис. 11

Знаходження різниці векторів називається ***відніманням*** векторів. Вектор, який збігається з діагоналлю паралелограма, що з'єднує кінці векторів, називається ***вектором-різницею*** $\bar{\boldsymbol{a}} - \bar{\boldsymbol{b}}$ векторів $\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}}$.

Властивості віднімання векторів

1. $\bar{\boldsymbol{a}} - \bar{\boldsymbol{a}} = 0$.
2. $\bar{\boldsymbol{a}} - \bar{\boldsymbol{b}} = \bar{\boldsymbol{a}} + \left(-\bar{\boldsymbol{b}}\right)$.

3. Множення вектора на число

Добутком вектора $\bar{\boldsymbol{a}}$ на число α називається колінеарний з $\bar{\boldsymbol{a}}$ вектор, модуль якого дорівнюється $|\alpha| \cdot |\bar{\boldsymbol{a}}|$ і який спрямований однаково з $\bar{\boldsymbol{a}}$ при $\bar{\boldsymbol{a}} = \bar{0}, \alpha > 0$; протилежно $\bar{\boldsymbol{a}}$ при $\bar{\boldsymbol{a}} \neq \bar{0}, \alpha < 0$ і невизначено — як нуль-вектор — при виконанні принаймні однієї з рівностей $\bar{\boldsymbol{a}} = \bar{0}, \alpha = 0$ і позначається $\alpha\bar{\boldsymbol{a}}$ або $\bar{\boldsymbol{a}}\alpha$ (рис. 12).

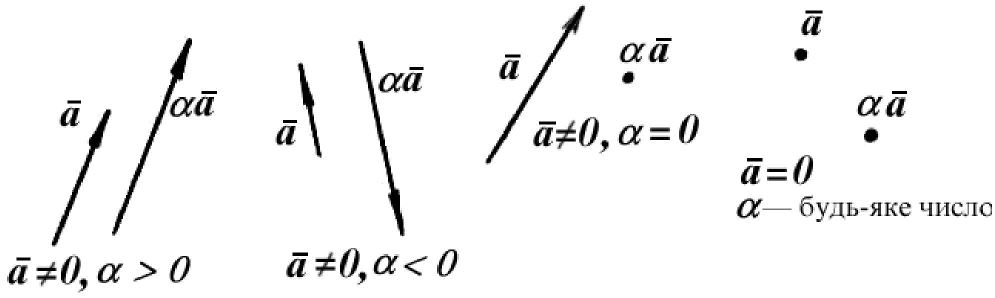


Рис. 12

Знаходження добутку вектора на число називається їх ***множенням***.

Властивості множення вектора на число

1. $1\cdot\bar{\boldsymbol{a}} = \bar{\boldsymbol{a}}$.

2. $(-1)\cdot\bar{\boldsymbol{a}} = -\bar{\boldsymbol{a}}$.

3. $(\alpha+\beta)\bar{\boldsymbol{a}} = \alpha\bar{\boldsymbol{a}} + \beta\bar{\boldsymbol{a}}$.

4. $\alpha(\beta\bar{\boldsymbol{a}}) = \beta(\alpha\bar{\boldsymbol{a}}) = (\alpha\,\beta)\bar{\boldsymbol{a}}$.

5. $\alpha(\bar{\boldsymbol{a}} \pm \bar{\boldsymbol{b}}) = \alpha\bar{\boldsymbol{a}} \pm \alpha\bar{\boldsymbol{b}}$.

6. Якщо $\bar{\boldsymbol{a}} \neq \bar{0}$, то $\dfrac{\bar{\boldsymbol{a}}}{|\bar{\boldsymbol{a}}|} = \bar{\boldsymbol{a}}^{0}$.

7. Якщо $\bar{\boldsymbol{a}} \neq \bar{0}$, то $\bar{\boldsymbol{a}} = |\bar{\boldsymbol{a}}|\cdot\bar{\boldsymbol{a}}^{0}$.

8. Якщо $\bar{\boldsymbol{a}} \neq \bar{0}$ і $\bar{\boldsymbol{b}}$ колінеарний з $\bar{\boldsymbol{a}}$ вектор, то $\bar{\boldsymbol{b}} = \alpha\bar{\boldsymbol{a}}$, причому таке представлення єдине. Якщо $\alpha > 0$, то вектори $\bar{\boldsymbol{a}}$ і $\bar{\boldsymbol{b}}$ — однаково спрямовані, якщо $\alpha < 0$, то вектори $\bar{\boldsymbol{a}}$ і $\bar{\boldsymbol{b}}$ — протилежно спрямовані.

➤ ***Завдання для самостійного розв'язування***

1) Маємо паралелепіпед $\boldsymbol{ABCDA_1B_1C_1D_1}$, в якому $\overline{\boldsymbol{AB}} = \bar{\boldsymbol{m}}$, $\overline{\boldsymbol{AD}} = \bar{\boldsymbol{n}}$, $\overline{\boldsymbol{AA_1}} = \bar{\boldsymbol{p}}$. Записати через вектори $\bar{\boldsymbol{m}}, \bar{\boldsymbol{n}}, \bar{\boldsymbol{p}}$ вектори $\overline{\boldsymbol{AB_1}}$, $\overline{\boldsymbol{D_1A}}$, $\overline{\boldsymbol{DB_1}}$, $\overline{\boldsymbol{DD_1}}$, $\overline{\boldsymbol{D_1B}}$.

Відповідь. $\overline{\boldsymbol{AB_1}} = \bar{\boldsymbol{m}} + \bar{\boldsymbol{p}}$, $\overline{\boldsymbol{D_1A}} = -\bar{\boldsymbol{n}} - \bar{\boldsymbol{p}}$, $\overline{\boldsymbol{DB_1}} = -\bar{\boldsymbol{n}} + \bar{\boldsymbol{m}} + \bar{\boldsymbol{p}}$, $\overline{\boldsymbol{D_1B}} = -\bar{\boldsymbol{n}} - \bar{\boldsymbol{p}} + \bar{\boldsymbol{m}}$, $\overline{\boldsymbol{DD_1}} = \bar{\boldsymbol{p}}$.

2) Маємо $|\bar{a}| = 5$, $|\bar{b}| = 8$, $\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right) = 60^0$. Знайти $|\bar{a}+\bar{b}|$.

Відповідь. $\sqrt{129}$.

3) Яку умову повинні задовольняти вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$, щоб:

а) $|\bar{a}-\bar{b}| = |\bar{a}+\bar{b}|$; б) $|\bar{a}-\bar{b}| = |\bar{a}|+|\bar{b}|$?

Відповідь. а) $\bar{a} \perp \bar{b}$; б) $\bar{a}$ і $\bar{b}$ колінеарні, протилежно спрямовані вектори.

4) Маємо $|\bar{a}| = 13$, $|\bar{b}| = 19$, $(\bar{a}+\bar{b}) = 24$. Знайти $|\bar{a}-\bar{b}|$.

Відповідь. 22.

5) Маємо $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 5$, $\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right) = 120^0$. Знайти $|\bar{a}-\bar{b}|$.

Відповідь. 7.

2.3. Проекція вектора на вісь і на вектор

Розглянемо вісь $\bar{\ell}$ та вектор $\overline{AB}$. ***Проекцією вектора*** $\overline{AB}$ ***на вісь*** $\bar{\ell}$ називається відстань між проекціями A' і B' відповідно точок A й B на вісь $\bar{\ell}$ що береться із знаком +, якщо A' і B' не збігаються і напрям від A' до B' однаковий з напрямом $\bar{\ell}$, і зі знаком –, якщо A' й B' не збігаються і напрям від A' до B' протилежний до напряму $\bar{\ell}$ (рис. 13). Проекція вектора $\overline{AB}$ на вісь $\bar{\ell}$ позначається $пр_{\bar{\ell}}\overline{AB}$.

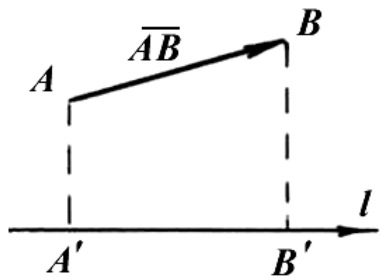


Рис. 13

Властивості проекції вектора на вісь

1. $\boldsymbol{np}_{\bar{\ell}}\bar{\boldsymbol{a}} > 0$, якщо $\bar{\boldsymbol{a}}$ — ненульовий вектор, що утворює гострий кут з віссю $\bar{\ell}$;

$\boldsymbol{np}_{\bar{\ell}}\bar{\boldsymbol{a}} < 0$, якщо $\bar{\boldsymbol{a}}$ — ненульовий вектор, що утворює тупий кут з віссю $\bar{\ell}$;

$\boldsymbol{np}_{\bar{\ell}}\bar{\boldsymbol{a}} = 0$, якщо $\bar{\boldsymbol{a}}$ — нульовий вектор, або $\bar{\boldsymbol{a}}$ — ненульовий перпендикулярний до осі $\bar{\ell}$ вектор. (Випливає з рис. 14, 15, 16).

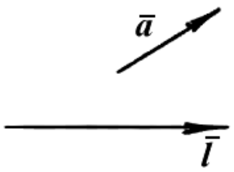


Рис. 14

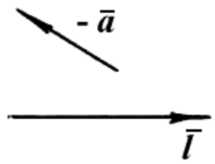


Рис. 15

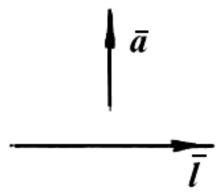


Рис. 16

2. $\boldsymbol{np}_{\bar{\ell}}\bar{\boldsymbol{a}}$ не змінюється при переносі $\bar{\boldsymbol{a}}$.

3. З $\boldsymbol{np}_{\bar{\ell}}\bar{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{np}_{\bar{\ell}}\bar{\boldsymbol{b}}$ не випливає $\bar{\boldsymbol{a}} = \bar{\boldsymbol{b}}$.

4. Якщо $\bar{\boldsymbol{a}} \neq 0$, то $\boldsymbol{np}_{\bar{\ell}}\bar{\boldsymbol{a}} = |\bar{a}|\,\boldsymbol{cos}(\bar{\boldsymbol{a}},\widehat{\ }\,\bar{\ell})$ (рис. 17).

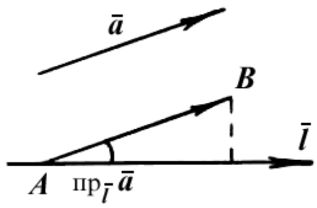
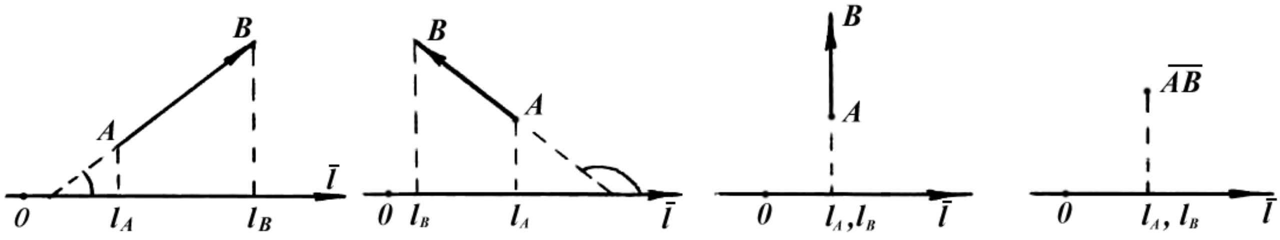


Рис. 17

5. $\boldsymbol{np}_{\bar{\ell}}\overline{\boldsymbol{AB}} = \ell_{\boldsymbol{B}} - \ell_{\boldsymbol{A}}$, де $\ell_{\boldsymbol{A}}, \ell_{\boldsymbol{B}}$ — числа, що зображені на осі проекціями точок $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{e}$ на дану вісь (рис. 18).



а) б) в) г)

Рис. 18

6. $\boldsymbol{np}_{\bar{\ell}}\left(\overline{\boldsymbol{AB}}+\overline{\boldsymbol{CD}}\right)=\boldsymbol{np}_{\bar{\ell}}\overline{\boldsymbol{AB}}+\boldsymbol{np}_{\bar{\ell}}\overline{\boldsymbol{CD}}$.

Дана властивість узагальнюється на довільну скінчену кількість векторів: проекція суми будь-якої скінченої кількості векторів на вісь дорівнює сумі проекцій цих векторів на цю ж вісь.

7. $\boldsymbol{np}_{\bar{\ell}}\alpha\bar{\boldsymbol{a}}=\alpha\cdot\boldsymbol{np}_{\bar{\ell}}\bar{\boldsymbol{a}}$.

Розглянемо тепер ненульовий вектор $\bar{\boldsymbol{b}}$ і вектор $\bar{\boldsymbol{a}}$. ***Проекцією вектора*** $\bar{\boldsymbol{a}}$ ***на вектор*** $\bar{\boldsymbol{b}}$ називається проекція вектора на вісь, що спрямована по $\bar{\boldsymbol{b}}$.

ЗАУВАЖЕННЯ. Вісь вводиться тому, що вектор $\bar{\boldsymbol{b}}$ може виявитись "недостатньо довгим", щоб на нього можна було б спроектувати початок та кінець вектора $\bar{\boldsymbol{a}}$.

Властивості проекції вектора на вектор аналогічні властивостям проекцій вектора на вісь.

2.4. Базис на площині. Розклад вектора по базису на площині

Базисом на площині називається будь-яка упорядкована пара ненульових неколінеарних векторів даної площини (рис. 19).

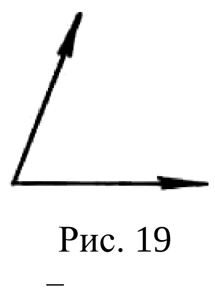


Рис. 19

Розглянемо базис $\bar{\boldsymbol{p}}_1, \bar{\boldsymbol{p}}_2$ і вектор $\bar{\boldsymbol{a}}$. ***Розкладом вектора*** $\bar{\boldsymbol{a}}$ ***по даному базису*** називається представлення його у вигляді лінійної комбінації векторів $\bar{\boldsymbol{p}}_1$ і $\bar{\boldsymbol{p}}_2$. Коефіцієнти лінійної комбінації називаються ***координатами вектора*** $\bar{\boldsymbol{a}}$ ***в базисі*** $\bar{\boldsymbol{p}}_1$ ***та*** $\bar{\boldsymbol{p}}_2$.

ТЕОРЕМА. *Вектор $\overline{\boldsymbol{a}}$ можна розкласти по базису $\overline{\boldsymbol{p}}_1, \overline{\boldsymbol{p}}_2$, причому такий розклад єдиний* (рис. 20).

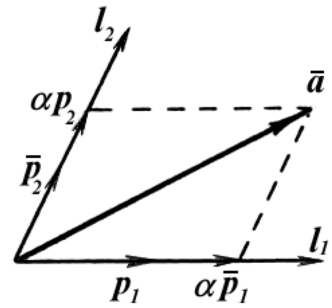


Рис. 20

Розкладемо вектор $\overline{\boldsymbol{a}}$ по ℓ_1 і ℓ_2

$$\overline{\boldsymbol{a}} = \overline{\boldsymbol{a}}_1 + \overline{\boldsymbol{a}}_2.$$

Вектори $\overline{\boldsymbol{a}}_1$ і $\overline{\boldsymbol{a}}_2$ зобразимо наступним чином

$$\overline{\boldsymbol{a}}_1 = \alpha_1 \overline{\boldsymbol{p}}_1,\ \overline{\boldsymbol{a}}_2 = \alpha_2 \overline{\boldsymbol{p}}_2.$$

Тоді $\overline{\boldsymbol{a}} = \alpha_1 \overline{\boldsymbol{p}}_1 + \alpha_2 \overline{\boldsymbol{p}}_2$ — розклад вектора по базису $\overline{\boldsymbol{p}}_1$ та $\overline{\boldsymbol{p}}_2$.

Кілька властивостей розкладу вектора по базису на площині

Нехай $\overline{\boldsymbol{a}} = \alpha_1 \overline{\boldsymbol{p}}_1 + \alpha_2 \overline{\boldsymbol{p}}_2$ і $\overline{\boldsymbol{b}} = \beta_1 \overline{\boldsymbol{p}}_1 + \beta_2 \overline{\boldsymbol{p}}_2$:

1. $\overline{\boldsymbol{a}} = \overline{0} \Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2 = 0$.

2. $\overline{\boldsymbol{a}} = \overline{\boldsymbol{b}} \Leftrightarrow \alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2$.

3. $\overline{\boldsymbol{a}} \pm \overline{\boldsymbol{b}} = (\alpha_1 \pm \beta_1)\overline{\boldsymbol{p}}_1 + (\alpha_2 \pm \beta_2)\overline{\boldsymbol{p}}_2$.

4. $\alpha\overline{\boldsymbol{a}} = \alpha\alpha_1 \overline{\boldsymbol{p}}_1 + \alpha\alpha_2 \overline{\boldsymbol{p}}_2$.

5. Якщо $\overline{\boldsymbol{a}} \neq 0$, причому $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$ і $\overline{\boldsymbol{b}}$ – колінеарний з $\overline{\boldsymbol{a}}$ вектор, то

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2}.$$

6. Якщо $\dfrac{\alpha_1}{\beta_1} = \dfrac{\alpha_2}{\beta_2}$, то $\bar{\boldsymbol{a}}$ і $\bar{\boldsymbol{b}}$ — колінеарні вектори.

Часто розклади векторів по базисах розглядають на площинах, на яких введено декартову систему координат, де в якості базисів вибираються орти координатних осей.

Кілька властивостей розкладу вектора по базису

на площині Oxy з базисом i, j

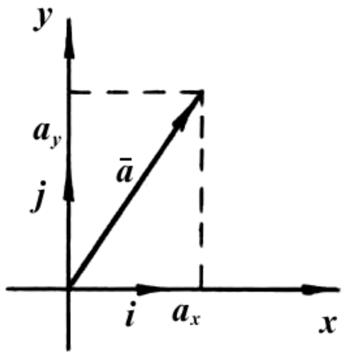


Рис. 21

Нехай на площині ***Oxy***, в якому введено базис $\bar{\boldsymbol{i}}, \bar{\boldsymbol{j}}$, маємо

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{a_x}\bar{\boldsymbol{i}} + \boldsymbol{a_y}\bar{\boldsymbol{j}}\ \boldsymbol{\mu}\ \bar{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{b_x}\bar{\boldsymbol{i}} + \boldsymbol{b_y}\bar{\boldsymbol{j}} \text{ (рис. 21).}$$

1. $\boldsymbol{a_x} = \boldsymbol{np_{Ox}}\bar{\boldsymbol{a}}, \quad \boldsymbol{a_y} = \boldsymbol{np_{Oy}}\bar{\boldsymbol{a}}$.

2. Для точки $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, $\bar{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{x}\bar{\boldsymbol{i}} + \boldsymbol{y}\bar{\boldsymbol{j}}$.

3. Для точок $\boldsymbol{M}_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1)$ та $\boldsymbol{M}_2(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2)$: $\quad \overline{\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2} = (\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1)\bar{\boldsymbol{i}} + (\boldsymbol{y}_2 - \boldsymbol{y}_1)\bar{\boldsymbol{j}}$.

4. $|\bar{\boldsymbol{a}}| = \sqrt{\boldsymbol{a}_x^2 + \boldsymbol{a}_y^2}$.

5. Якщо $\bar{\ell}$ — одиничний вектор, то $\bar{\ell} = \boldsymbol{cos}(\bar{\ell},^\wedge \boldsymbol{Ox})\bar{\boldsymbol{i}} + \boldsymbol{cos}(\bar{\ell},^\wedge \boldsymbol{Oy})\bar{\boldsymbol{j}}$.

ПРИКЛАД . На площині введено базис $\bar{\boldsymbol{p}}_1, \bar{\boldsymbol{p}}_2$. При якому значенні β вектори $\bar{\boldsymbol{a}} = 3\bar{\boldsymbol{p}}_1 - 4\bar{\boldsymbol{p}}_2$ і $\bar{\boldsymbol{b}} = -2\bar{\boldsymbol{p}}_1 + \beta\bar{\boldsymbol{p}}_2$ колінеарні?

Вектори $\bar{\boldsymbol{a}}$ та $\bar{\boldsymbol{b}}$ колінеарні, якщо $\dfrac{3}{-2} = -\dfrac{4}{\beta}$, тобто $\beta = \dfrac{8}{3}$.

➤ *Завдання для самостійного розв'язування*

1) На площині введено базис $\overline{\boldsymbol{p}}_1, \overline{\boldsymbol{p}}_2$. Нехай $\overline{\boldsymbol{AB}} = \overline{\boldsymbol{p}}_1 + 2\overline{\boldsymbol{p}}_2$, $\overline{\boldsymbol{BC}} = -\overline{\boldsymbol{p}}_1 - \overline{\boldsymbol{p}}_2$, $\overline{\boldsymbol{CD}} = -5\overline{\boldsymbol{p}}_1 - 3\overline{\boldsymbol{p}}_2$. Довести, що $\boldsymbol{ABCD}$ — трапеція.

2) Розкласти по базису $\overline{\boldsymbol{i}}, \overline{\boldsymbol{j}}$ вектор з початком $\boldsymbol{A}(8,-3)$ і кінцем $\boldsymbol{B}(4,0)$.

Відповідь. $\overline{\boldsymbol{AB}} = -4\overline{\boldsymbol{i}} + 3\overline{\boldsymbol{j}}$.

3) Знайти кінець вектора $\overline{\boldsymbol{a}} = 5\overline{\boldsymbol{i}} - 2\overline{\boldsymbol{j}}$, якщо його початок є точка $\boldsymbol{A}(-1,3)$.

Відповідь. $\boldsymbol{B}(4,1)$.

4) $\overline{\boldsymbol{a}} = -\overline{\boldsymbol{i}} + 7\overline{\boldsymbol{j}}, \overline{\boldsymbol{b}} = 2\overline{\boldsymbol{i}} + 3\overline{\boldsymbol{j}}$. Знайти проекції на координатній осі наступних векторів:

а) $\overline{\boldsymbol{a}} + \overline{\boldsymbol{b}}$; б) $\overline{\boldsymbol{a}} - \overline{\boldsymbol{b}}$; в) $3\overline{\boldsymbol{a}}$; г) $-\frac{1}{2}\overline{\boldsymbol{b}}$; д) $4\overline{\boldsymbol{a}} + 2\overline{\boldsymbol{b}}$; е) $\frac{1}{3}\overline{\boldsymbol{a}} - \overline{\boldsymbol{b}}$.

Відповідь. а) $\{1; 10\}$; б) {-3; 4}; в) {-3; 21}; г) $\left\{-1; -\frac{3}{2}\right\}$; д) $\{0; 34\}$; е) $\left\{-\frac{7}{3}; -\frac{2}{3}\right\}$.

5) Для вектора $\overline{\boldsymbol{a}}$, $|\overline{\boldsymbol{a}}| = 3$, $(\overline{\boldsymbol{a}},^\wedge \boldsymbol{Ox}) = 30^0$, $(\overline{\boldsymbol{a}},^\wedge \boldsymbol{Oy}) = 60^0$. Знайти проекції $\boldsymbol{a_x}$, $\boldsymbol{a_y}$ вектора $\overline{\boldsymbol{a}}$ відповідно на вісь $\boldsymbol{Ox}$ і $\boldsymbol{Oy}$.

Відповідь. $\boldsymbol{a_x} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $\boldsymbol{a_y} = \frac{3}{2}$.

6) Знайти орт вектора: а) $\overline{\boldsymbol{a}} = 5\overline{\boldsymbol{i}} - 2\overline{\boldsymbol{j}}$; б) $\overline{\boldsymbol{a}} = -6\overline{\boldsymbol{i}} + 2\overline{\boldsymbol{j}}$.

Відповідь. а) $\overline{\boldsymbol{a}}^0 = \frac{5}{\sqrt{29}}\overline{\boldsymbol{i}} - \frac{2}{\sqrt{29}}\overline{\boldsymbol{j}}$; б) $\overline{\boldsymbol{a}}^0 = -\frac{3}{\sqrt{10}}\overline{\boldsymbol{i}} + \frac{1}{\sqrt{10}}\overline{\boldsymbol{j}}$.

7) $\overline{\boldsymbol{p}}_1 = 2\overline{\boldsymbol{i}} - 3\overline{\boldsymbol{j}}$, $\overline{\boldsymbol{p}}_2 = \overline{\boldsymbol{i}} + 2\overline{\boldsymbol{j}}$. Розкласти вектор $\overline{\boldsymbol{a}} = 9\overline{\boldsymbol{i}} + 4\overline{\boldsymbol{j}}$ по базису $\overline{\boldsymbol{p}}_1, \overline{\boldsymbol{p}}_2$.

Відповідь. $\overline{\boldsymbol{a}} = 2\overline{\boldsymbol{p}}_1 + 5\overline{\boldsymbol{p}}_2$.

8) $\overline{\boldsymbol{a}} = 3\overline{\boldsymbol{i}} - 2\overline{\boldsymbol{j}}$, $\overline{\boldsymbol{b}} = -2\overline{\boldsymbol{i}} + \overline{\boldsymbol{j}}$, $\overline{\boldsymbol{c}} = 7\overline{\boldsymbol{i}} - 4\overline{\boldsymbol{j}}$. Розкласти: а) $\overline{\boldsymbol{a}}$ по базису $\overline{\boldsymbol{b}}, \overline{\boldsymbol{c}}$;

б) $\overline{\boldsymbol{b}}$ по базису $\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{c}}$; в) $\overline{\boldsymbol{c}}$ по базису $\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{b}}$.

Відповідь. а) $\overline{\boldsymbol{a}} = 2\overline{\boldsymbol{b}} + \overline{\boldsymbol{c}}$; б) $\overline{\boldsymbol{b}} = \frac{1}{2}\overline{\boldsymbol{b}} - \frac{1}{2}\overline{\boldsymbol{c}}$; в) $\overline{\boldsymbol{c}} = \overline{\boldsymbol{a}} - 2\overline{\boldsymbol{b}}$.

2.5. Базис у просторі. Геометричні задачі

Базисом у просторі називається впорядкована трійка ненульових некомпланарних векторів.

Розглянемо базис $\overline{p}_1, \overline{p}_2, \overline{p}_3$ і вектор $\overline{a}$. **Розкладом вектора $\overline{a}$ по даному базису** називається представлення його у вигляді лінійної комбінації векторів $\overline{p}_1, \overline{p}_2, \overline{p}_3$. Коефіцієнти лінійної комбінації називаються **координатами вектора** $\overline{a}$ в базисі $\overline{p}_1, \overline{p}_2, \overline{p}_3$:

$$\overline{a} = \alpha_1 \overline{p}_1 + \alpha_2 \overline{p}_2 + \alpha_3 \overline{p}_3.$$

ТЕОРЕМА. *Вектор $\overline{a}$ можна розкласти по базису $\overline{p}_1, \overline{p}_2, \overline{p}_3$, причому такий розклад єдиний.*

Домовимося, що простір ***Oxyz***, в якому введено базис $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, складений з ортів відповідно осей ***Ox***, ***Oy***, ***Oz*** будемо називати ***простором Oxyz з базисом*** $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ **.**

Якщо $\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$ ненульовий вектор, то величини

$cos(\bar{a},\hat{\ } Ox)$, $cos(\bar{a},\hat{\ } Oy)$, $cos(\bar{a},\hat{\ } Oz)$ (або $cos\,\alpha, cos\,\beta, cos\,\gamma$)

називаються його ***напрямними косинусами*** (рис. 22).

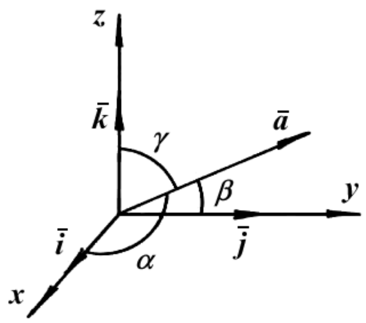


Рис. 22

Так як

$$a_x = np_{Ox}\bar{a} = |\bar{a}|\,cos(\bar{a},\hat{\ } Ox), \text{ то } cos(\bar{a},\hat{\ } Ox) = \frac{a_x}{|\bar{a}|}$$

і аналогічно

$$\cos\left(\bar{a},^\wedge Oy\right) = \frac{a_y}{|\bar{a}|}, \qquad \cos\left(\bar{a},^\wedge Oz\right) = \frac{a_z}{|\bar{a}|}.$$

Звідси, застосовуючи рівність

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

доводимо ***основну властивість напрямних косинусів***:

$$\cos^2\left(\bar{a},^\wedge Ox\right) + \cos^2\left(\bar{a},^\wedge Oy\right) + \cos^2\left(\bar{a},^\wedge Oz\right) = 1.$$

Очевидно, що напрямні косинуси вектора визначають його напрям і нічого не говорять про його модуль.

ПРИКЛАД 1. У просторі $Oxyz$ з базисом $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ маємо дві точки $A(8,-1,0)$ і $B(2,-3,3)$.

Тоді $\overline{AB} = (2-8)\bar{i} + (-3+1)\bar{j} + (3-0)\bar{k} = -6\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}$,

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2 + 3^2} = 7.$$

Отже $\cos\left(\overline{AB},^\wedge Ox\right) = -\dfrac{6}{7}$, $\cos\left(\overline{AB},^\wedge Oy\right) = -\dfrac{2}{7}$, $\cos\left(\overline{AB},^\wedge Oz\right) = \dfrac{3}{7}$.

➢ ***Завдання для самостійного розв'язування***

1) Нехай маємо трикутник ABC, для якого $\bar{r}_A = \bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}$, $\bar{r}_B = 3\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$, $\bar{r}_C = \bar{i} + 4\bar{j} + \bar{k}$. Показати, що цей трикутник рівносторонній.

Відповідь. $\left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{BC}\right| = \left|\overline{AC}\right| = 2\sqrt{2}$.

2) Чи може вектор утворювати з координатними осями кути:

а) 60^0, 45^0, 120^0; б) 45^0, 135^0, 60^0?

Відповідь. а) може; б) не може.

3) При яких значеннях α і β вектори $\bar{a} = -2\bar{i} + 3\bar{j} + \beta\bar{k}$ і $\bar{b} = \alpha\bar{i} - 6\bar{j} + 2\bar{k}$ колінеарні?

Відповідь. При $\alpha = 4$ і $\beta = -1$.

4) Знайти орт вектора: а) $\bar{a} = 6\bar{i} - 2\bar{j} - 3\bar{k}$; б) $\bar{a} = 3\bar{i} + 4\bar{j} - 12\bar{k}$.

Відповідь. а) $\bar{a}^0 = \frac{6}{7}\bar{i} - \frac{2}{7}\bar{j} - \frac{3}{7}\bar{k}$; б) $\bar{a}^0 = \frac{3}{13}\bar{i} + \frac{4}{13}\bar{j} - \frac{12}{13}\bar{k}$.

2.6. Скалярний добуток векторів

Розглянемо впорядковану пару векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$.

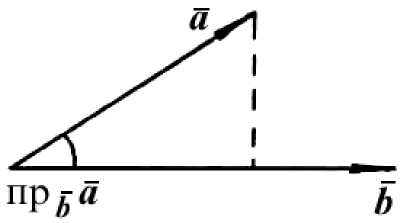


Рис. 23

Скалярним добутком векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називається скаляр, який дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними:

$$\bar{a}\bar{b} \overset{def}{=} |\bar{a}||\bar{b}|\cos\left(\bar{a},^\wedge \bar{b}\right). \qquad (*)$$

Скалярний добуток векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ позначається $\bar{a}\bar{b}$, або $\left(\bar{a},\bar{b}\right)$, $\bar{a}\cdot\bar{b}$ (рис. 23).

Скалярний добуток векторів $\bar{a}$ і $\bar{a}$ називається ***скалярним квадратом*** і позначається $\bar{a}^2$. Зауважимо, що скалярний добуток більше ніж двох векторів не визначено.

Геометричне тлумачення скалярного добутку векторів. Скалярний добуток вектора $\bar{a}$ на одиничний вектор (орт) $\bar{b}^0$ дорівнює проекції вектора $\bar{a}$ на напрям, який визначає $\bar{b}^0$, тобто

$$\bar{a}\bar{b}^0 = np_{\bar{b}^0}\bar{a}.$$

У випадку довільного вектора $\bar{b}$

$$np_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{b}|}.$$

Беручи до уваги властивість проекції вектора на вісь, маємо

$$\bar{a}\bar{b} = |\bar{b}| \cdot np_{\bar{b}}\bar{a} = |\bar{a}| \cdot np_{\bar{a}}\bar{b} \qquad \text{(рис. 23).}$$

Властивості скалярного добутку векторів

1. $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$ (*комутативна*, від лат. *comutatus* — зміна, перетворення).

■ Властивість випливає з означення (*) і того факту, що $\left(\bar{a},^\wedge \bar{b}\right) = \left(\bar{b},^\wedge \bar{a}\right)$. Дійсно, $\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\left(\bar{a},^\wedge \bar{b}\right)$; $\bar{b}\bar{a} = |\bar{b}||\bar{a}|\cos\left(\bar{b},^\wedge \bar{a}\right)$.□□□ ■

2. $(\lambda\bar{a})\bar{b} = \bar{a}(\lambda\bar{b}) = \lambda(\bar{a}\bar{b})$ (*асоціативна* стосовно скалярного множника, від лат. *associo* — приєднувати).

3. $(\bar{a} + \bar{b})\bar{c} = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c}$ (*дистрибутивна*, від лат. *distributivus* — розподільний).

4. Якщо $\bar{a}$ і $\bar{b}$ — ненульові вектори, тоді

$$\left(\bar{a}\bar{b} > 0\right) \Leftrightarrow \left(\left(\bar{a},^\wedge \bar{b}\right) < \frac{\pi}{2}\right), \qquad \left(\bar{a}\bar{b} < 0\right) \Leftrightarrow \left(\left(\bar{a},^\wedge \bar{b}\right) > \frac{\pi}{2}\right).$$

5. Якщо $\bar{a}$ і $\bar{b}$ — ненульові вектори, тоді $\left(\bar{a}\bar{b} = 0\right) \Leftrightarrow \left(\bar{a} \perp \bar{b}\right)$.

Властивість 5 виражає ***ознаку перпендикулярності векторів***.

■ □ Властивості 4–5 випливають з означення (тут треба врахувати знаки косинуса гострого і тупого кутів, а також те, що $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\cos 0 = 1$). ■

6. $\bar{a} \cdot \bar{a} = \bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$.

■ □ $\bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}| \cdot |\bar{a}| \cos\left(\bar{a},^\wedge \bar{a}\right) = |\bar{a}|^2$. ■

Розглянемо **властивості скалярного добутку для векторів в просторі *Oxyz*** з базисом $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$.

1. Із означення скалярного добутку (*) та властивості 5 отримаємо таблицю добутків ортів $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$:

$$\bar{i}\bar{j}=\bar{j}\bar{i}=0,\ \bar{i}\bar{k}=\bar{k}\bar{i}=0,\ \bar{j}\bar{k}=\bar{k}\bar{j}=0,\ \bar{i}\bar{i}=\bar{j}\bar{j}=\bar{k}\bar{k}=1. \qquad (**)$$

2. Якщо $\bar{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right)$ і $\bar{b}=\left(b_x,b_y,b_z\right)$, тобто

$$\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k} \text{ і } \bar{b}=b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k},$$

тоді отримаємо вираз скалярного добутку $\bar{a}\bar{b}$ через координати векторів, використовуючи властивості добутку та формули (**),

$$\bar{a}\bar{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z .$$

3. Якщо $\bar{a}\neq 0$, $\bar{b}\neq 0$, то

$$cos\left(\bar{a},^\wedge\bar{b}\right)=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

ПРИКЛАД 1. Знайти модуль вектора $\bar{c}=2\bar{a}+3\bar{b}$, де $\left|\bar{a}\right|=4$, $\left|\bar{b}\right|=5$, $\left(\bar{a},^\wedge\bar{b}\right)=60^0$.

$$\left|\bar{c}\right|=\sqrt{\left(2\bar{a}+3\bar{b}\right)^2}=\sqrt{4\left|\bar{a}\right|^2+12\left|\bar{a}\right|\left|\bar{b}\right|cos\left(\bar{a},^\wedge\bar{b}\right)+9\left|\bar{b}\right|^2}=$$

$$=\sqrt{4\cdot 4^2+12\cdot 4\cdot 5\cdot\frac{1}{2}+9\cdot 5^2}=\sqrt{409}.$$

ПРИКЛАД 2. При якому значенні β вектори $\bar{a}=2\bar{i}-3\bar{j}$, $\bar{b}=-5\bar{i}+\beta\bar{j}$ взаємно перпендикулярні?

Величину β знаходимо з умови $\bar{a}\bar{b}=0$, тобто $2\cdot\left(-5\right)-3\beta=0$, $\beta=-\frac{10}{3}$.

➤ *Завдання для самостійного розв'язування*

1) Обчислити $\left(4\bar{a}+2\bar{b}\right)\cdot\left(3\bar{a}-\bar{b}\right)$, де $\bar{a}$ і $\bar{b}$ —одиничні вектори, для яких $\left(\bar{a},^\wedge\bar{b}\right)=60^0$.

Відповідь. 11.

2) Нехай маємо вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$, для яких $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=4$, $\left(\bar{a},^\wedge\bar{b}\right)=120^0$.

Обчислити: а) $\bar{a}\bar{b}$; б) $\bar{a}^2$; в) $\left(\bar{a}-\bar{b}\right)^2$; г) $\left(\bar{a}+2\bar{b}\right)\cdot\left(3\bar{a}-2\bar{b}\right)$.

Відповідь. а) –6; б) 9; в) 37; г) –61.

4) Знайти кут між векторами $\bar{a}=2\bar{p}+\bar{q}$ і $\bar{b}=-3\bar{p}+2\bar{q}$, де $\bar{p}$ та $\bar{q}$ — одиничні вектори, для яких $\left(\bar{p},^\wedge\bar{q}\right)=60^0$.

Відповідь. 120.

7) Маємо точки $A(-3,0,2)$, $B(5,-2,1)$, $C(2,6,-1)$, $D(1,3,-3)$. Довести, що $\overline{AB}\perp\overline{CD}$.

8) Маємо точки $A(3,1,0)$, $B(0,-2,6)$, $C(3,-2,0)$, $D(1,-2,4)$. Знайти проекцію вектора $\overline{AB}$ на $\overline{CD}$.

Відповідь. $3\sqrt{5}$.

2.7. Векторний добуток векторів

Розглянемо впорядковану пару векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$.

Векторним добутком векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називається вектор $\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}$, який задовольняє умови:

1) $\bar{c}\perp\bar{a},\bar{c}\perp\bar{b}$;

2) $|\bar{c}|=|\bar{a}||\bar{b}|\sin\left(\bar{a},^\wedge\bar{b}\right)$;

3) вектор $\bar{c}$ напрямлений у той бік, з якого поворот від $\bar{a}$ до $\bar{b}$ на найменший кут здійснюється проти руху стрілки годинника (рис. 24).

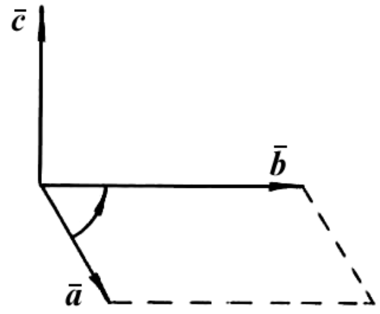


Рис. 24

Векторний добуток векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ позначається $\bar{a}\times\bar{b}$, або $\left[\bar{a},\bar{b}\right]$.

З умови 2) випливає ***геометричне тлумачення векторного добутку***. Модуль векторного добутку векторів дорівнює площі паралелограма, сторонами якого є дані вектори, тобто $S=\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|$.

Властивості векторного добутку векторів

1. $\bar{a}\times\bar{b}=-\bar{b}\times\bar{a}$ (*антикомутативна*).

2. $(\lambda\bar{a})\times\bar{b}=\bar{a}\times(\lambda\bar{b})=\lambda(\bar{a}\times\bar{b})$ (*асоціативна*).

3. $(\bar{a}+\bar{b})\times\bar{c}=\bar{a}\times\bar{c}+\bar{b}\times\bar{c}$ (*дистрибутивна*).

4. Якщо $\bar{a}$ і $\bar{b}$ — ненульові вектори, тоді

$$\left(\bar{a}\|\bar{b}\right)\Leftrightarrow\left(\bar{a}\times\bar{b}=0\right).$$

Властивість 4 виражає ***ознаку колінеарності векторів***. Зокрема, для будь-якого ненульового вектора $\bar{a}$: $\bar{a}\times\bar{a}=0$.

Відмітимо дві ***властивості векторного добутку для векторів в просторі Oxyz*** з базисом $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$.

1. Із означення векторного добутку отримаємо таблицю добутків ортів $\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k}$:

I / II	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	0	$\bar{k}$	$-\bar{j}$
$\bar{j}$	$-\bar{k}$	0	$\bar{i}$
$\bar{k}$	$\bar{j}$	$-\bar{i}$	0

2. Якщо $\bar{a}=(a_x, a_y, a_z)$ і $\bar{b}=(b_x, b_y, b_z)$, тобто

$$\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k} \quad \text{і} \quad \bar{b}=b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k},$$

тоді отримаємо вираз векторного добутку $\bar{a}\times\bar{b}$ через координати векторів, використовуючи властивості добутку та значення таблиці:

$$\begin{aligned}\bar{a}\times\bar{b}&=(a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k})\times(b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k})=\\ &=(a_yb_z-a_zb_y)\bar{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\bar{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\bar{k}=\\ &=\bar{i}\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}=\\ &=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}. \qquad (*)\end{aligned}$$

За допомогою здобутого результату можна впевнитися в справедливості властивостей векторного добутку, треба тільки врахувати відповідні властивості визначників.

ПРИКЛАД 1. Знайти довжину орт вектора перпендикулярного до векторів $\bar{a}=2\bar{m}-3\bar{n}$ та $\bar{b}=\bar{m}+4\bar{n}$, якщо $|\bar{m}|=2, |\bar{n}|=1, (\bar{m},\hat{\ }\bar{n})=30^o$.

$$\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}, \ \bar{c}^0=\pm\frac{\bar{a}\times\bar{b}}{|\bar{a}\times\bar{b}|};$$

$$\bar{a}\times\bar{b}=(2\bar{m}-3\bar{n})\times(\bar{m}+4\bar{n})=2\bar{m}\times\bar{n}-3\bar{n}\times\bar{m}+8\bar{m}\times\bar{n}-12\bar{n}\times\bar{n}=11\bar{m}\times\bar{n}.$$

$$|\bar{c}|=|\bar{a}\times\bar{b}|=|11\bar{m}\times\bar{n}|=11|\bar{m}\times\bar{n}|=11|\bar{m}||\bar{n}|\sin(\bar{m},\hat{\ }\bar{n})=11;$$

$$\bar{c} = \pm\frac{11\bar{m}\times\bar{n}}{11} = \pm(\bar{m}\times\bar{n}).$$

ПРИКЛАД 2. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a} = -\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}$, $\bar{b} = 2\bar{i} + 4\bar{k}$.

$$S = |\bar{a}\times\bar{b}| = \left\|\begin{matrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -1 & 2 & -3\\ 2 & 0 & 4\end{matrix}\right\| = \left|\bar{i}\begin{vmatrix}2 & -3\\ 0 & 4\end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix}-1 & -3\\ 2 & 4\end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix}\right| = |8\bar{i} - 2\bar{j} - 4\bar{k}| =$$

$$= \sqrt{8^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}.$$

➤ *Завдання для самостійного розв'язування*

1) Нехай маємо вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$, для яких $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 26$, $|\bar{a}\times\bar{b}| = 72$.

Обчислити $\bar{a}\bar{b}$.

Відповідь. ± 30.

2)Маємо взаємно перпендикулярні вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$, для яких $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 4$.

Обчислити: а) $|(\bar{a}+\bar{b})\times(\bar{a}-\bar{b})|$; б) $|(3\bar{a}-\bar{b})\times(\bar{a}-2\bar{b})|$.

Відповідь. а) 24; б) 60.

3) Маємо $\bar{a} = 3\bar{i} - \bar{j} - 2\bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$.

Знайти: а) $\bar{a}\times\bar{b}$; б) $(2\bar{a}+\bar{b})\times\bar{b}$; в) $(2\bar{a}-\bar{b})\times(2\bar{a}+\bar{b})$.

Відповідь. а) $5\bar{i} + \bar{j} + 7\bar{k}$; б) $10\bar{i} + 2\bar{j} + 14\bar{k}$; в) $20\bar{i} + 4\bar{j} + 28\bar{k}$.

4) Обчислити площу трикутника з вершинами $A(1,2,0)$, $B(3,0,-3)$, $C(5,2,6)$.

Відповідь. 14.

5) Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах

$\bar{a} + 3\bar{b}$ і $3\bar{a} + \bar{b}$, де $|\bar{a}| = 1$, $|\bar{b}| = 1$, $(\bar{a}, \wedge\, \bar{b}) = 30^0$.

Відповідь. 4.

6) Довести, що якщо $\bar{a}\times\bar{b} = 0$, то $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2}$.

2.8. Мішаний добуток векторів

Розглянемо впорядковану трійку векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$.

Мішаним добутком векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ називається скаляр, який дорівнює векторно–скалярному добутку векторів:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} \overset{def}{=} \left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\bar{c}. \qquad (*)$$

Мішаний добуток векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ позначається $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$, або $\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\bar{c}$, $\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)$.

Знайдемо об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ (рис. 25)

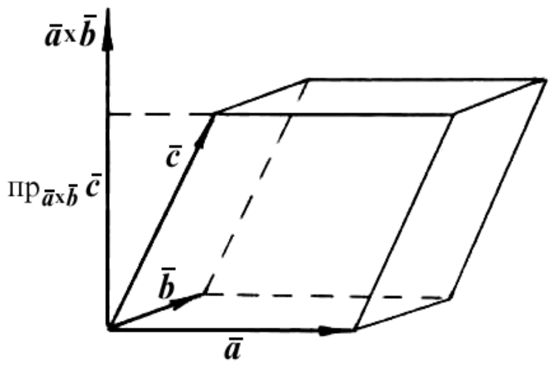


Рис. 25

Маємо (оскільки $H = \left|np_{\bar{a}\times\bar{b}}\bar{c}\right|$, $\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\perp\bar{a}$, $\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\perp\bar{b}$),

$$V = \left|\bar{a}\times\bar{b}\right|\left|np_{\bar{a}\times\bar{b}}\bar{c}\right| = \left|\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\bar{c}\right| = \left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right|,$$

тобто ***геометричний зміст мішаного добутку*** полягає в тому, що мішаний добуток векторів з точністю до знака дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах.

Об'єм піраміди, побудованої на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ можна записати у вигляді

$$V_{nip} = \frac{1}{6}\left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right| = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{matrix}\right\|,$$

оскільки він становить $\frac{1}{6}$ об'єму відповідного паралелепіпеда.

Нехай $\bar{\boldsymbol{a}} = (\boldsymbol{a_x}, \boldsymbol{a_y}, \boldsymbol{a_z}), \bar{\boldsymbol{b}} = (\boldsymbol{b_x}, \boldsymbol{b_y}, \boldsymbol{b_z}),\ \bar{\boldsymbol{c}} = (\boldsymbol{c_x}, \boldsymbol{c_y}, \boldsymbol{c_z})$. Беручи до уваги розклад визначника в (*) за елементами першого рядка, дістаємо

$$\bar{\boldsymbol{a}}\bar{\boldsymbol{b}}\bar{\boldsymbol{c}} = (\bar{\boldsymbol{a}} \times \bar{\boldsymbol{b}})\bar{\boldsymbol{c}} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_y} & \boldsymbol{a_z} \\ \boldsymbol{b_y} & \boldsymbol{b_z} \end{vmatrix} \boldsymbol{c_x} - \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_x} & \boldsymbol{a_z} \\ \boldsymbol{b_x} & \boldsymbol{b_z} \end{vmatrix} \boldsymbol{c_y} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_x} & \boldsymbol{a_y} \\ \boldsymbol{b_x} & \boldsymbol{b_y} \end{vmatrix} \boldsymbol{c_z} =$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_x} & \boldsymbol{a_y} & \boldsymbol{a_z} \\ \boldsymbol{b_x} & \boldsymbol{b_y} & \boldsymbol{b_z} \\ \boldsymbol{c_x} & \boldsymbol{c_y} & \boldsymbol{c_z} \end{vmatrix}. \qquad (**)$$

Властивості мішаного добутку векторів

1. Вектори $\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}}, \bar{\boldsymbol{c}}$ компланарні тоді і тільки тоді, коли $\bar{\boldsymbol{a}}\bar{\boldsymbol{b}}\bar{\boldsymbol{c}} = 0$ (умова компланарності ненульових векторів). Зауважимо, що $\bar{\boldsymbol{a}}\bar{\boldsymbol{b}}\bar{\boldsymbol{c}} = 0$ коли один з векторів нульовий.

2. Якщо $\bar{\boldsymbol{a}}\bar{\boldsymbol{b}}\bar{\boldsymbol{c}} > 0$, то трійка векторів $\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}}, \bar{\boldsymbol{c}}$ права;

якщо $\bar{\boldsymbol{a}}\bar{\boldsymbol{b}}\bar{\boldsymbol{c}} < 0$, то трійка векторів $\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}}, \bar{\boldsymbol{c}}$ ліва.

3. Для мішаного добутку виконується циклічна перестановка

$$\bar{\boldsymbol{a}}\bar{\boldsymbol{b}}\bar{\boldsymbol{c}} = \bar{\boldsymbol{b}}\bar{\boldsymbol{c}}\bar{\boldsymbol{a}} = \bar{\boldsymbol{c}}\bar{\boldsymbol{a}}\bar{\boldsymbol{b}}.$$

4. Якщо у відмінному від нуля мішаному добутку $\bar{\boldsymbol{a}}\bar{\boldsymbol{b}}\bar{\boldsymbol{c}}$ поміняти місцями два будь-яких вектори, то зміниться тільки знак добутку

$$\bar{\boldsymbol{a}}\bar{\boldsymbol{b}}\bar{\boldsymbol{c}} = -\bar{\boldsymbol{b}}\bar{\boldsymbol{a}}\bar{\boldsymbol{c}}.$$

Властивості 3 і 4 випливають з того, що парна перестановка рядків визначника не змінює його знак, а непарна змінює на протилежний.

ПРИКЛАД 1. Нехай маємо взаємно перпендикулярні вектори $\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}}, \bar{\boldsymbol{c}}$, що утворюють праву трійку, для яких $|\bar{\boldsymbol{a}}| = 4$, $|\bar{\boldsymbol{b}}| = 2$, $|\bar{\boldsymbol{c}}| = 3$. Знайти $\bar{\boldsymbol{a}}\bar{\boldsymbol{b}}\bar{\boldsymbol{c}}$.

Використовуючи властивість 2, маємо $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right| = 24$.

ПРИКЛАД 2. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j} - \bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}$, $\bar{c} = \bar{i} + \bar{j} + 4\bar{k}$.

Маємо $\quad V = \left\| \begin{matrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{matrix} \right\| = |33| = 33$ (куб. ед.).

➤ ***Завдання для самостійного розв'язування***

1) Маємо вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, для яких $|\bar{a}| = 6$, $|\bar{b}| = 3$, $|\bar{c}| = 3$, $\bar{c} \perp \bar{a}$, $\bar{c} \perp \bar{b}$, $\left(\bar{a}, \hat{\ } \bar{b}\right) = 30^0$. Обчислити $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$.

Відповідь. ± 27.

2) Обчислити об'єм піраміди з вершинами $A(2,3,4)$, $B(4,1,-2)$, $C(6,3,7)$, $D(4,1,3)$.

Відповідь. $6\frac{2}{3}$ куб.ед.

3) Обчислити висоту піраміди з вершинами $A(2,3,1)$, $B(4,1,-2)$, $C(6,3,7)$, $D(-5,-4,8)$, опущену з вершини D.

Відповідь. 11.

4) Довести, що точки $A(1,2,-1)$, $B(0,1,5)$, $C(-1,2,1)$, $D(2,1,3)$ лежать в одній площині.

5) Довести, що при будь-яких λ та μ має місце тотожність

$$\left(\bar{a} \times \bar{b}\right)\left(\bar{c} + \lambda\bar{a} + \mu\bar{b}\right) = \bar{a}\bar{b}\bar{c}.$$

6) Довести, що вектори $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}$, $\bar{c} = 3\bar{i} - 4\bar{j} + 7\bar{k}$ компланарні.

➤ *Тести для самоконтролю*

Тест №1

Перший рівень.

1. Знайти значення $\boldsymbol{m}$ та $\boldsymbol{n}$, при яких вектори колінеарні:

$$\vec{a}=(15;\boldsymbol{m};1),\ \vec{b}=(18;12;\boldsymbol{n}).$$

Відповідь: а) $\boldsymbol{m}=10,\ \boldsymbol{n}=\frac{5}{6}$, б) $\boldsymbol{m}=10,\ \boldsymbol{n}=1{,}2$, в) $\boldsymbol{m}=14{,}5;\ \boldsymbol{n}=1{,}2$.

2. На осі $\boldsymbol{OX}$ знайти точку, рівновіддалену від точок $\boldsymbol{A}(1;2;2)$ та $\boldsymbol{B}(-2;1;4)$.

Відповідь: а) $(-1;0;0)$; б) $(-2;0;0)$; в) $(2;0;0)$ г) інша відповідь.

3. Який з векторів перпендикулярний даному: $\vec{a}=(3;2;0)$.

Відповідь: а) $(-1;1;0)$; б) $(0;0;5)$; в) $(3;2;1)$; г) $(1;1;1)$.

4. Який кут утворює $\vec{a}=(1;1;0)$ з віссю $\boldsymbol{Ox}$.

Відповідь: а) неможливо знайти; б) 90°; в) 45°; г) 30°; д) інша відповідь.

Другий рівень.

Дано: вектори $\vec{a}=(9,-3,0);\ \vec{b}=(4,-6,1);\ \vec{c}=(-5,2,-8);\ \vec{d}=(2,-5,-1)$. Знайти:

1) $(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(\vec{d}-2\vec{c})$; 2) $(\vec{a}-2\vec{c})\times(\vec{b}+3\vec{d})$; 3) орт вектора $\vec{e}=\vec{a}+\vec{c}-\vec{d}$;

4) $\boldsymbol{cos}\left(\widehat{\vec{a}+\vec{b},\vec{c}-\vec{d}}\right)$; 5) площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{c}$ і $\vec{d}$;

6) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$, чи будуть вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарними? Яку трійку вони утворюють - праву або ліву?

7) чому дорівнює об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$?

Тест №2

Перший рівень.

1. Чи належать точки $\boldsymbol{A, B, C}$ одній прямій: $\boldsymbol{A}(3;-7;8)$, $\boldsymbol{B}(-5;4;1)$, $\boldsymbol{C}(27;-40;29)$.

Відповідь: а) так, б) ні, в) визначити неможна.

2. На осі ординат знайти точку $\boldsymbol{M}$, відстань від якої до точки $\boldsymbol{A}(4;3;0)$ дорівнює 5.

Відповідь: а) $(0;0;0)$; б) $(0;-6;0)$; в) $(0;6;0)$ і $(0;0;0)$;
г) $(6;0;0)$; д) інша відповідь.

3. Який з векторів перпендикулярний даному: $\vec{a}=(-1;0;3)$.

Відповідь: а) $(0;3;0)$; б) $(-1;1;5)$; в) $(1;2;0)$; г) $(0;2;3)$.

4.Обчислити $\vec{j}\cdot\vec{i}$.

Відповідь: а) 0; б) $\bar{k}$; в) $-\bar{k}$; г) інша відповідь.

Другий рівень.

Дано: вектори $\vec{a}=(5,-3,0)$; $\vec{b}=(-5,-7,3)$; $\vec{c}=(4,1,-7)$; $\vec{d}=(3,-4,2)$. Знайти:

1) $(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(\vec{d}-2\vec{c})$; 2) $(\vec{a}-2\vec{c})\times(\vec{b}+3\vec{d})$; 3) орт вектора $\vec{e}=\vec{a}+\vec{c}-\vec{d}$;

4) $\cos\left(\vec{a}+\vec{b}\,\hat{,}\,\vec{c}-\vec{d}\right)$; 5) площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{c}$ та $\vec{d}$;

6) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$, чи будуть вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарними? Яку трійку вони утворюють - праву або ліву?

7) чому дорівнює об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$?

Розділ 3. Елементи аналітичної геометрії

3.1. Пряма лінія на площині.

Означення. Рівняння $F(x, y) = 0$ називається ***рівнянням деякої лінії в заданій системі координат,*** якщо це рівняння задовольняють координати (x, y) будь-якої точки, що лежить на цій лінії, і не задовольняють координати жодної точки, що не лежить на цій лінії.

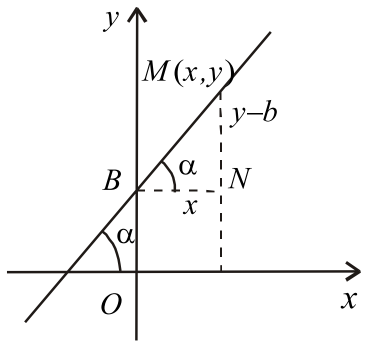


Рис. 1

Нехай задано деяку пряму (рис.1), знайдемо її рівняння.

Точка $\boldsymbol{M(x, y)}$ лежить на прямій тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$\frac{NM}{BN} = tg\alpha .$$

Позначимо $\boldsymbol{tg\,\alpha = k}$ і назвемо цю величину ***кутовим коефіцієнтом*** прямої лінії. Тоді, враховуючи, що $\boldsymbol{NM = y - b}$, $\boldsymbol{BN = x}$, маємо ***рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом*** $\boldsymbol{y = kx + b.}$ (1.1)

Нехай деяка точка $\boldsymbol{M_1(x_1, y_1)}$ належить заданій прямій, тоді $\boldsymbol{y_1 = kx_1 + b.}$ Знайдемо з цього рівняння значення $\boldsymbol{b}$ і, підставивши його в рівняння прямої (1.1), дістанемо:

$$\boldsymbol{y - y_1 = k(x - x_1)} \qquad (1.2)$$

— ***рівняння прямої, що проходить через задану точку*** $\boldsymbol{M_1(x_1, y_1)}$.

Нехай ще одна точка $\boldsymbol{M_2(x_2, y_2)}$ також належить заданій прямій, тоді з означення лінії маємо:

$$\boldsymbol{y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1).}$$

Знайдемо значення k з останнього співвідношення і, підставивши його в рівняння прямої (1.2), дістанемо:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}. \qquad (1.3)$$

Останнє рівняння (1.3) називається ***рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки.***

У прямокутній системі координат пряма лінія задається рівнянням першого степеня відносно x і y.

$$Ax + By + C = 0, \qquad (1.4)$$

і навпаки, рівняння (1.4) при довільних A, B, C (A і B одночасно не дорівнюють нулю) визначає деяку пряму в прямокутній системі координат Oxy.

Рівняння (1.4) називається ***загальним рівнянням прямої лінії***. Дослідимо це рівняння.

1. $C = 0, A \neq 0, B \neq 0,$ тоді $Ax + By = 0$ і останнє визначає пряму, що проходить через початок системи координат, бо точка O (0, 0) лежить на цій прямій.

2. $B = 0, A \neq 0, C \neq 0$, тоді $Ax + C = 0$, або $x=-\frac{C}{A}=a$, де a — довжина відрізка, що його пряма відтинає на осі Ox, а сама вона розміщена паралельно осі Oy, якщо $C = 0$, то $x = 0$ маємо рівняння самої осі Oy.

3. $A = 0, B \neq 0, C \neq 0,$ тоді $By + C = 0$, або $y=-\frac{C}{B}=b$, де b — довжина відрізка, що відтинає пряма на осі Ox, при $C = 0$ маємо $y = 0$ — рівняння осі Ox.

Кут між двома прямими, відстань від точки до прямої.

Розглянемо дві прямі l_1: $y = k_1x + b_1$ і l_2: $y = k_2 x + b_2$.

Означення. ***Кутом між прямим*** l_1 і l_2 називається такий кут φ, поворот на який від першої прямої до другої відносно точки їх перетину до суміщення цих прямих відбувається на найменший кут проти годинникової стрілки.

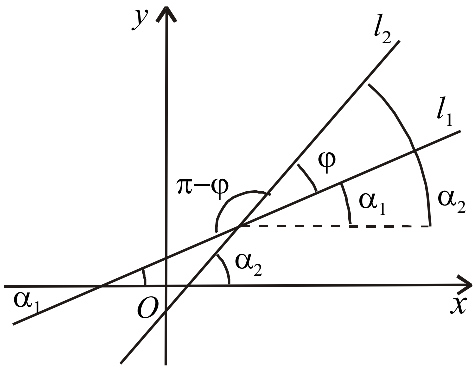


Рис. 2

Зауважимо, що кут між l_1 і l_2 не дорівнює куту між l_2 і l_1. Пригадуючи, що $tg\,\alpha_1 = k_1$; $tg\,\alpha_2 = k_2$, а також, що виконується очевидне співвідношення між кутами $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$ (рис.2), маємо: $tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \dfrac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_2 \cdot tg\alpha_1}$.

Остаточно

$$\mathrm{tg} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}. \qquad (1.5)$$

Якщо кут φ — це кут між l_1 і l_2, то кут між l_2 і l_1 дорівнюватиме $\pi - \varphi$.

З формули (1.5) легко дістати умови ***паралельності*** і ***перпендикулярності*** двох прямих.

Так, коли $l_1 \,//\, l_2$, кут φ між ними дорівнює нулю — маємо:

$$tg\,\varphi = 0 \Rightarrow k_1 = k_2.$$

Якщо $l_1 \perp l_2$, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$; $\alpha_2 = \dfrac{\pi}{2} + \alpha_1$; $\mathrm{tg}\alpha_2 = \mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha_1\right) = -\mathrm{ctg}\alpha_1 = -\dfrac{1}{\mathrm{tg}\alpha_1}$.

Підставляючи значення кутових коефіцієнтів, маємо: $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$.

Нехай задано деяку точку $M_0\,(x_0, y_0)$ і пряму l: $Ax + By + C = 0$. Пересвідчимось, що M_0 не лежить на прямій, $Ax_0 + By_0 + C \neq 0$, тоді ***відстань від точки*** $M_0\,(x_0, y_0)$ ***до прямої*** $Ax + By + C = 0$ можна знайти за формулою:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Приклад 1. Пряму задано рівнянням $3x - 5y + 15 = 0$. Перевірити, які з точок $A(-2, 3)$, $B(0, 3)$, $C(5, 6)$, належать заданій прямій, знайти її рівняння з кутовим коефіцієнтом і у відрізках на осях.

Для перевірки того, чи лежать точки A, B, C на прямій, підставимо їхні координати в рівняння прямої:

$$A:\ 3(-2) - 5\cdot 3 + 15 \neq 0,\quad B:\ 3\cdot 0 - 3\cdot 5 + 15 = 0,\quad C:\ 3\cdot 5 - 5\cdot 6 + 15 = 0.$$

Таким чином, точка A не лежить на прямій, а точки B і C лежать на прямій.

Поділимо рівняння прямої почленно на коефіцієнт при y: $\frac{3}{5}x - y + 3 = 0$,

а далі запишемо його у вигляді $y = \frac{3}{5}x + 3$ — рівняння з кутовим коефіцієнтом.

Поділивши рівняння почленно на вільний член:

$$\frac{3x}{15} - \frac{5y}{15} + 1 = 0, \text{ або } \frac{x}{-5} + \frac{y}{3} = 1,$$

дістанемо шукане рівняння у відрізках на осях.

Приклад 2. Паралельні прямі проходять відповідно через точки $O(0, 0)$ і $M(1, 3)$. Знайти їх рівняння, коли відомо, що відстань між ними дорівнює $\sqrt{5}$.

Якщо прямі паралельні, то їх кутові коефіцієнти рівні між собою, тому згідно з (1.2) рівняння шуканих прямих можна записати у вигляді

$$y = kx,\ y - 3 = k(x - 1).$$

Візьмемо довільну точку, що лежить на першій прямій, наприклад $(1, k)$. Тоді згідно з формулою для відстані точки до прямої запишемо:

$$\sqrt{5} = \frac{|k - k - k + 3|}{\sqrt{1 + k^2}}, \text{ звідки знайдемо } k_1 = -2,\ k_2 = \frac{1}{2}.$$

Рівняння прямих: $y = -2x;\ 2x + y - 5 = 0$ або $y = \frac{1}{2}x;\ x - 2y + 5 = 0.$

Приклад 3. Записати рівняння бісектрис кутів, утворених прямими $x+7y-6=0$ і $5x-5y+1=0.$

Використаємо відому властивість бісектриси кута про те, що на ній лежить множина точок, рівновіддалених від сторін кута. Нехай $M(x, y)$ — точка, яка належить цій множині. Тоді за формулою відстані від точки до прямої записуємо:

$$\frac{|x+7y-6|}{\sqrt{1+49}}=\frac{|5x-5y+1|}{\sqrt{25+25}}.$$

Звідси маємо два рівняння бісектрис: $x+7y-6=5x-5y+1$ і $x+7y-6=-5x+5y+1,$ або, після перетворень: $4x-12y+7=0,$ $6x+2y-5=0.$

➢ *Завдання для самостійного розв'язування*

1) Скласти рівняння катетів прямокутного рівнобедреного трикутника, якщо $y = 3x + 5$ — рівняння гіпотенузи, A (4, – 1) — вершина прямого кута.

Відповідь. $y=-2x+7;$ $y=\frac{1}{2}x-3$.

2) Дано вершини трикутника A (4; 6), B (– 4; 0), C (– 1; – 4). Скласти рівняння:

а) трьох його сторін; б) медіани, проведеної з вершини C; в) бісектриси кута B;

г) висоти, опущеної з вершини A.

3) Дано трикутник з вершинами в точках $A\left(-\frac{1}{7}; -\frac{3}{28}\right),$ $B(4,\ 3),$ $C(2,\ -1)$.

Обчислити довжини його висот.

Відповідь. $h_A=\frac{27\sqrt{5}}{28}$.

5) З точок перетину прямої $3x+5y-15=0$ з осями координат встановлено перпендикуляри до цієї прямої. Знайти їх рівняння.

Відповідь. $5x-3y+9=0;$ $5x-3y-25=0.$

6) Дано дві вершини трикутника A (– 6; 2), B (2; – 2) і H (1; 2) — точку перетину його висот. Обчислити координати третьої вершини.

Відповідь. C (2; 4).

9) Скласти рівняння сторін квадрата, якщо A(2; – 4) — його вершина, M(5; 2) — точка перетину діагоналей.

Відповідь. $3x + y = 2;\ x - 3y = 14;\ x - 3y = -16;\ 3x + y = 32.$

10) Скласти рівняння сторін трикутника, якщо A(3; 5), B(6; 1) — його вершини, M(4; 0) — точка перетину медіан.

Відповідь. $4x + 3y = 27,\ x = 3,\ 7x - 3y = 39.$

3.2. Криві другого порядку

Розглянемо тепер лінії другого порядку, які на площині в загальному випадку можна записати так:

$$\boldsymbol{a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.} \qquad (2.1)$$

Рівняння (2.1) описує всі криві другого порядку в загальному випадку. Спинимось спочатку на простіших, так званих канонічних рівняннях ліній другого порядку.

Еліпс.

Означення. Множина точок площини, для яких сума відстаней від двох заданих точок, що називаються *фокусами*, є величина стала й така, що дорівнює **2*a*** і більша, ніж відстань між фокусами, називається ***еліпсом***.

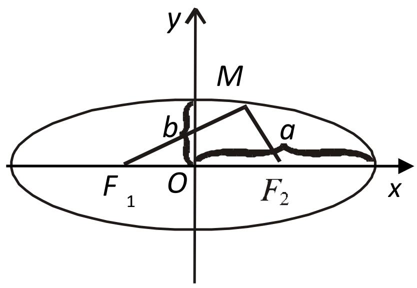


Рис. 3

На рис. 3 зображено F_1 $(-c, 0)$, F_2 $(c, 0)$ — фокуси еліпса, M (x, y) — точка множини, яка задовольняє означення, тобто $|MF_1| + |MF_2| = 2a,$

причому $2c < 2a \Rightarrow a > c$. Тоді

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{2.2}$$

канонічне рівняння еліпса, де $b^2 = a^2 - c^2$.

Розглянемо геометричний зміст параметрів, що входять в рівняння (2.2). Якщо $\boldsymbol{x = 0, y = \pm b}$, тобто точки $(\boldsymbol{0, b})$ і $(\boldsymbol{0, -b})$ є точками перетину еліпса з віссю $\boldsymbol{Oy}$. Відрізок завдовжки b називають малою піввіссю еліпса. При $\boldsymbol{y = 0, x = \pm a}$ і відповідно $(\boldsymbol{a, 0})$; $(\boldsymbol{-a; 0})$ є точками перетину еліпса з віссю $\boldsymbol{Ox}$. Відрізок завдовжки $\boldsymbol{a}$ — велика піввісь еліпса. З парності виразу (2.2) за $\boldsymbol{x}$ і за $\boldsymbol{y}$ випливає симетрія еліпса відносно осей $\boldsymbol{Ox}$ і $\boldsymbol{Oy}$. На рис.3 зображено еліпс.

Ексцентриситет еліпса — це відношення $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$; за означенням $\boldsymbol{c < a}$ і $\boldsymbol{\varepsilon \in [0,1)}$. Оскільки $\varepsilon^2 = \dfrac{c^2}{a^2} = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \left(\dfrac{b}{a}\right)^2$, то $\dfrac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$. З останньої рівності випливає геометричний зміст ексцентриситету, який полягає в тому, що він характеризує ***ступінь витягнутості*** еліпса. Так, при $\varepsilon = 0 \Rightarrow a = b$ маємо коло, якщо $\boldsymbol{\varepsilon}$ наближається до одиниці, то відношення довжини півосей еліпса стає малим, тобто еліпс витягується вздовж осі $\boldsymbol{Ox}$**.**

Гіпербола.

Означення. Множина точок площини, для яких модуль різниці відстаней від двох заданих точок, що називаються фокусами, є величиною сталою, яка дорівнює $\boldsymbol{2a}$ і менша за відстань між фокусами, називається ***гіперболою.***

Скористаємось рис.4, з якого бачимо, що точки $\boldsymbol{F_1\ (-c, 0)}$ і $\boldsymbol{F_2\ (c, 0)}$ — фокуси гіперболи, точка $\boldsymbol{M\ (x, y)}$ — точка визначеної множини. Тоді

$$\big||MF_1| - |MF_2|\big| = 2a, a < c\,.$$

Канонічне рівняння гіперболи має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{де} \quad b^2 = c^2 - a^2.$$

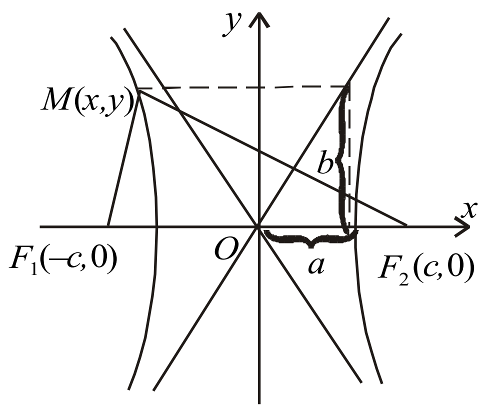


Рис. 4

Дослідимо здобуте рівняння. Гіпербола не перетинає вісь ***Oy.*** При $y = 0$; $x = \pm a$ і точки $(-a, 0)$; $(a, 0)$ — точки перетину з віссю ***Ox***. Розглянемо ще рівняння прямих , які далі називатимемо *асимптотами гіперболи*. Враховуючи симетрію відносно осей ***Ox*** і ***Oy,*** будуємо графік гіперболи, який зображено на рис.4.

Відрізки завдовжки ***b*** і ***a*** називають відповідно ***уявною*** і ***дійсною осями гіперболи.***

Ексцентриситет гіперболи $\varepsilon = \frac{c}{a}$, але $c > a$ і $\varepsilon > 1$. Беручи до уваги, що $c^2 = a^2 + b^2$, дістаємо: $\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2$, або $\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$.

З останньої рівності випливає, що для гіперболи ексцентриситет характеризує ступінь нахилу віток гіперболи до осі ***Ox.***

Дві прямі, рівняння яких $x = -\frac{a}{\varepsilon}$; $x = \frac{a}{\varepsilon}$, називаються ***директрисами*** еліпса і гіперболи. Для еліпса $0 \le \varepsilon < 1$ і відношення $\frac{a}{\varepsilon} > a$, директриси еліпса — це дві прямі, що розміщені симетрично відносно осі ***Oy*** і проходять зовні еліпса. Для гіперболи $\varepsilon > 1$ і відношення $\frac{a}{\varepsilon} < a$. Тобто директриси гіперболи розміщені симетрично відносно осі ***Oy*** і лежать між вітками гіперболи.

Для еліпса і гіперболи можна сформулювати важливе **твердження**: *якщо* $\boldsymbol{r}$ *— відстань від деякої точки еліпса або гіперболи до будь-якого фокуса, а* $\mathbf{d}$ *— відстань від цієї самої точки до директриси, яка відповідає цьому фокусу, то відношення* $\frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{d}}$ *стале й дорівнює ексцентриситету, тобто* $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{d}}$.

Розглянуте твердження можна покласти в основу означення цих ліній.

Означення. Множина точок, для яких відношення відстаней від фокуса і до відповідної директриси — величина стала, що дорівнює ексцентриситету $\boldsymbol{\varepsilon}$, є ***еліпс,*** *якщо* $\boldsymbol{\varepsilon} < 1$, *і* ***гіпербола****, якщо* $\boldsymbol{\varepsilon} > 1$.

Парабола.

Означення. Множина точок площини, що містяться на однаковій відстані від даної точки фокуса і даної прямої, яка не проходить через фокус і називається *директрисою*, є ***парабола.***

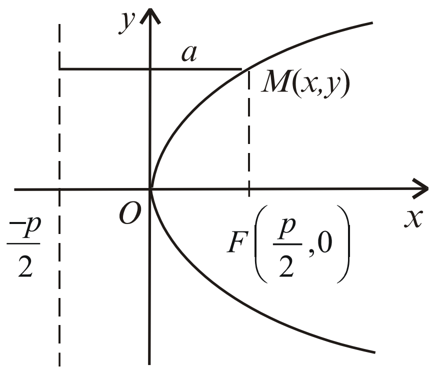


Рис. 5

За означенням $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{d}$**,** отже (див. рис.5):

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2},$$

або $\boldsymbol{y^2 = 2px}$ — ***канонічне рівняння параболи***, коли $\varepsilon = 1$. Парабола симетрична осі $\boldsymbol{Ox}$, проходить через початок системи координат. Її графік подано на рис. 5.

Коло.

До кривих другого порядку належить і добре відома лінія, яка називається ***колом*** (рис.19).

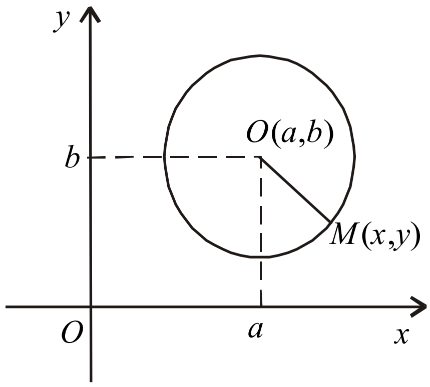


Рис. 6

Означення. Множина точок, що містяться на однаковій відстані від заданої точки — центра, називається ***колом***.

За означенням ***OM = R*** або $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R$.

Піднісши обидві частини рівняння до квадрата, дістанемо:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \tag{2.3}$$

— ***канонічне рівняння кола***. Тут (***a, b***) — координати центра кола, ***R*** — його радіус. Розкривши дужки в лівій частині (2.3), дістанемо, очевидно, рівняння другого степеня, тобто коло — також крива другого порядку.

Приклад 1. Дано еліпс $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, через точку A (1; 1) провести хорду еліпса, яка поділяється в цій точці навпіл.

Запишемо рівняння хорди, використовуючи рівняння (1.2) $(y-1)=k(x-1)$. Це буде рівняння всіх хорд еліпса, що проходять через точку A. Знайдемо точки перетину цієї прямої з еліпсом, розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \\ y-1=k(x-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (4+9k^2)x^2+18k(1-k)x+9(1-k)^2-36=0 \\ y=kx+1-k. \end{cases}$$

За умовою задачі координати точок перетину хорди з еліпсом (x_1, y_1), (x_2, y_2) мають задовольняти рівності: $\frac{x_1+x_2}{2}=1$ і $\frac{y_1+y_2}{2}=1$.

З теореми Вієта і останньої умови маємо: $\frac{18(k-1)k}{4+9k^2}=2$, звідки $k=-\frac{4}{9}$. Шукане рівняння хорди набирає вигляду $y-1=-\frac{4}{9}(x-1)$, або $4x + 9y - 13 = 0$.

Приклад 2. Записати рівняння гіперболи, яка проходить через точку A (6; 9), якщо відстань між фокусами дорівнює 8, а відстань між директрисами — 6.

Координати фокусів F_1 ($-c$; 0); F_2 (c; 0), тому з умови $2c = 8$; $c = 4$, відстань між директрисами $6=\frac{2a}{\varepsilon}$. Звідки, враховуючи, що $\varepsilon=\frac{c}{a}$ маємо: $a = 12$, $b = c - a = 4$. Остаточно $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$.

➤ *Завдання для самостійного розв'язування*

1) Знайти центр і радіус кола $x^2+y^2-8x+6y+21=0$.

Відповідь. $a = 4$; $b = -3$; $R = 2$.

2) На еліпсі $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ знайти точку, відстань якої від правого фокуса в чотири рази більша за відстань від лівого фокуса.

Відповідь. $M_1\left(-\frac{15}{2},\frac{3\sqrt{7}}{2}\right), M_2\left(-\frac{15}{2},-\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)$.

3) Еліпс проходить через точку $P\left(3,\frac{12}{5}\right)$ і дотикається до прямої $4x + 5y - 25 = 0$. Записати рівняння цього еліпса і знайти координати точки дотику.

Відповідь. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1,\ \left(4;\ \frac{9}{5}\right);\ \ \frac{16x^2}{225}+\frac{y^2}{16}=1,\ \left(\frac{9}{4},\ \frac{16}{5}\right).$

4) Записати рівняння прямої, що дотикається до еліпса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ у точці (2; – 3).

Відповідь. $x-2y=8.$

5) Гіпербола дотикається до прямої $x-y=2$ у точці (4; 2). Скласти рівняння гіперболи.

Відповідь. $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1.$

6) До параболи $y^2=12x$ провести дотичну паралельно прямій $2x+y-7=0.$

Відповідь. $4x+2y+3=0.$

➤ *Тести для самоконтролю*

Тест №1

Перший рівень.

1. Яке з рівнянь описує рівняння прямої у відрізках на площині

Відповідь: а) $\frac{\boldsymbol{x}}{2}+\frac{\boldsymbol{z}}{-3}=1$; б) $\frac{\boldsymbol{x}-2}{3}=\frac{\boldsymbol{y}+1}{2}$; в) $2\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{y}=-5$; г) інша відповідь.

2. Напрямним вектором прямої називається вектор, який ...

Відповідь: а) перпендикулярний до прямій; б) паралельний до прямій; в) інша відповідь.

3. Задано рівняння кривої другого порядку $25\boldsymbol{x}^2+16\boldsymbol{y}^2=144$. Необхідно визначити назву кривої, яке визначає це рівняння, і знайти ексцентриситет.

Відповідь: а) гіпербола, $\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{5}{4}$; б) парабола, $\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{3}{5}$; в) еліпс, $\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{3}{5}$; г) гіпербола, $\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{5}{3}$.

Другий рівень.

Дано точки $\boldsymbol{M}_1(4,2)$, $\boldsymbol{M}_2(3,-1)$, $\boldsymbol{M}_3(-2,-6)$. Необхідно знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $\boldsymbol{M}_3$ та перпендикулярна вектору $\overrightarrow{\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2}$.

Тест №2

Перший рівень.

1. Яке з рівнянь описує загальне рівняння прямої на площині.

Відповідь: а) $\dfrac{\boldsymbol{x}}{2}+\dfrac{\boldsymbol{z}}{-3}=1$; б) $\dfrac{\boldsymbol{x}-2}{3}=\dfrac{\boldsymbol{y}+1}{2}$; в) $2\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{z}-5=0$; г) інша відповідь.

2. Дві прямі паралельні, якщо їх нормальні вектори паралельні.

Відповідь: а) так; б) ні.

3. Задано рівняння кривої другого порядку $9\boldsymbol{x}^2-16\boldsymbol{y}^2=-169$. Необхідно визначити назву кривої, яке визначає це рівняння, і знайти ексцентриситет.

Відповідь: а) гіпербола, $\boldsymbol{\varepsilon}=\dfrac{5}{4}$; б) парабола, $\boldsymbol{\varepsilon}=\dfrac{3}{5}$; в) еліпс, $\boldsymbol{\varepsilon}=\dfrac{3}{5}$;

г) гіпербола, $\boldsymbol{\varepsilon}=\dfrac{5}{3}$.

Другий рівень.

Дано точки $\boldsymbol{M}_1(5,8)$, $\boldsymbol{M}_2(2,-4)$, $\boldsymbol{M}_3(1,-3)$. Необхідно знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $\boldsymbol{M}_3$ паралельно прямій $(\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2)$.

Розділ 4. Вступ до аналізу функцій однієї змінної

4.1. Поняття множини, функції. Загальні властивості функцій

Множина – це одне з основних понять в математиці. Синонімами слова *множина* можна вважати такі терміни як *сукупність, система, сімейство*.

Множину визначають, як сукупність об'єктів, об'єднаних за певною ознакою.

Множина може містити нескінчене або скінчене число об'єктів. Об'єкти, що складають множину, називаються її *елементами*.

<table>
<tr><th>Позначення</th><th colspan="2">Основні операції</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Довільна множина
$A, B, C, \ldots$
Елементи (об'єкти) множини
$a, b, c, \ldots$
Порожня множина
$\varnothing$</td><td>Перетин
$A \cap B$
Включення
$A \subset B$</td><td>Об'єднання
$A \cup B$
Різниця
$A \setminus B$</td></tr>
<tr></tr>
<tr><th colspan="3">Числові множини</th></tr>
<tr><td colspan="3">$N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ – множина натуральних чисел</td></tr>
<tr><td colspan="3">$Z_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ – множина цілих невід'ємних чисел</td></tr>
<tr><td colspan="3">$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$ – множина цілих чисел</td></tr>
<tr><td colspan="3">$Q = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in Z, q \in N \right\}$ – множина раціональних чисел</td></tr>
<tr><td>**Раціональне** число – це таке число, яке можна представити у вигляді звичайного нескоротного дробу</td><td colspan="2">**Раціональне** число – це таке число, яке можна представити у вигляді нескінченного десяткового періодичного дробу</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\overline{Q}$ (або I) – множина ірраціональних чисел</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Ірраціональне число не можна представити у вигляді звичайного нескоротного дробу або у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу</td><td>Ірраціональне число – це таке число, яке можна уявити тільки у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\pi = 3{,}141592\ldots$ $e = 2{,}718281\ldots$ $\sqrt{2} = 1{,}414213\ldots$ $\sqrt{3} = 1{,}732050\ldots$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Q} \cup \overline{\boldsymbol{Q}}$ – множина дійсних чисел</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}_0 \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{x}\}$ – довільна множина дійсних чисел
$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ – число $\boldsymbol{x}$ належить множині $\boldsymbol{X}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Обмежені множини дійсних чисел</td></tr>
<tr><td>Відрізок $[\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}] = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{a} \le \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}\}$
Проміжок $(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}) = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{a} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{b}\}$</td><td>Напіввідкритий проміжок
$[\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}) = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{a} \le \boldsymbol{x} < \boldsymbol{b}\}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Модуль дійсного числа</td></tr>
<tr><td>Означення
$|\boldsymbol{x}| = \begin{cases} \boldsymbol{x}, & \boldsymbol{x} > 0 \\ -\boldsymbol{x}, & \boldsymbol{x} < 0 \\ 0, & \boldsymbol{x} = 0 \end{cases}$</td><td rowspan="2">Властивості:
1. $|\boldsymbol{x}| \ge 0$ 2. $|-\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{x}|$
3. $|\boldsymbol{x}|^2 = \boldsymbol{x}^2$ 4. $|\boldsymbol{xy}| = |\boldsymbol{x}| \cdot |\boldsymbol{y}|$
5. $|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \le |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|$ 6. $\left|\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}\right| = \frac{|\boldsymbol{x}|}{|\boldsymbol{y}|}$
7. $|\boldsymbol{x}| < \boldsymbol{a},\quad \boldsymbol{a} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\boldsymbol{a} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{a}$
8. $|\boldsymbol{x}| > \boldsymbol{a},\quad \boldsymbol{a} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \boldsymbol{x} > \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{x} < -\boldsymbol{a} \end{array}\right.$</td></tr>
<tr><td>Геометричне тлумачення
$|\boldsymbol{x}|$ – це відстань від точки $\boldsymbol{x}$ до точки 0 на числовій прямій</td></tr>
<tr><td>Парні числа</td><td>Непарні числа</td></tr>
<tr><td>Якщо натуральне число ділиться на 2 без остачі, то його називають парним
2, 4, 6, 8,10,12,… або
$2\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}$ – парні числа</td><td>Якщо натуральне число не ділиться на 2 без остачі, то його називають непарним
3, 5,7, 9,11,13… або
$2\boldsymbol{n} - 1,\ \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}$ – непарні числа</td></tr>
</table>

Величина називається ***змінною*** (*сталою*), якщо в умовах даної задачі вона набуває різних (тільки одного) значень.

Розглянемо дві змінні величини $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D} \subseteq \boldsymbol{R}$ і $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{E} \subseteq \boldsymbol{R}$.

Означення. ***Функцією*** $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ називається така відповідність між множинами $\boldsymbol{D}$ і $\boldsymbol{E}$, за якої кожному значенню змінної $\boldsymbol{x}$ відповідає одне й тільки одне значення змінної $\boldsymbol{y}$.

При цьому вважають, що:
$\boldsymbol{x}$ — незалежна змінна, або аргумент;
$\boldsymbol{y}$ — залежна змінна, або функція;
$\boldsymbol{f}$ — символ закону відповідності;
$\boldsymbol{D}$ — область визначення функції;
$\boldsymbol{E}$ — множина значень функції.

Розрізняють три способи завдання функції: *аналітичний, графічний* і *табличний.*

Означення. Функція $\boldsymbol{y = F(u)}$, де $\boldsymbol{u = \varphi(x)}$, називається ***складною*** (*складеною*) функцією, або *суперпозицією* функцій $\boldsymbol{F(u)}$ та $\boldsymbol{\varphi(x)}$,

і позначається $\boldsymbol{y = F(\varphi(x))}$.

Приклад. $\boldsymbol{y} = 2^{\boldsymbol{\sin}^2 \boldsymbol{x}}$ — складна функція, вона буде суперпозицією трьох функцій: $\boldsymbol{y = 2u}$, $\boldsymbol{u = v^2}$, $\boldsymbol{v = \sin x}$.

Означення. Нехай функція $\boldsymbol{y = f(x)}$ встановлює відповідність між множинами $\boldsymbol{D}$ та $\boldsymbol{E}$. Якщо обернена відповідність між множинами $\boldsymbol{E}$ та $\boldsymbol{D}$ буде функцією, то вона називається оберненою до даної $\boldsymbol{y = f(x)}$; її позначають $\boldsymbol{y = f^{-1}(x)}$.

За означенням, для взаємно обернених функцій маємо:

1) $\boldsymbol{f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x}$;

2) $\boldsymbol{D(f)=E(f^{-1})}$, $\boldsymbol{E(f)=D(f^{-1})}$.

Властивість. Графіки взаємно обернених функцій *симетричні* відносно прямої $\boldsymbol{y = x}$.

Приклад. $f(x) = x^2, f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ $(x \ge 0)$ – взаємно обернені функції:

$$\sqrt{x^2} = (\sqrt{x})^2 = x.$$

Для функції $y = x^2$, $x \ge 0$ побудуємо обернену функцію.

1) Розв'яжемо рівність $y = x^2$, $x \ge 0$ відносно x. Отримаємо $x = \sqrt{y}$.
2) Замінимо x на y та y на x. Отримаємо $y = \sqrt{x}$ (рис. 1).

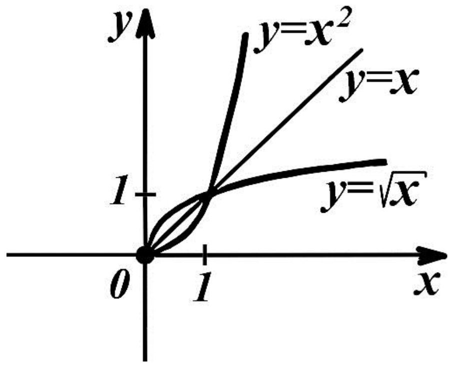


Рис. 1

Означення. Функція (функціональна залежність змінної $\boldsymbol{y}$ від змінної $\boldsymbol{x}$) називається ***неявною***, якщо її задано рівнянням $\boldsymbol{F(x, y) = 0}$, яке не розв'язане відносно змінної $\boldsymbol{y}$.

Приклад. Рівняння $y + x + 2^y = 0$ визначає неявну функцію $\boldsymbol{y}$ від $\boldsymbol{x}$.

Означення. Система рівнянь $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$

визначає параметричну залежність функції $\boldsymbol{y}$ від змінної $\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{t}$ – параметр). Вираз $y = f(x)$ самої залежності у від $\boldsymbol{x}$ можна дістати виключенням параметра $\boldsymbol{t}$ з останньої системи рівнянь.

Приклад. Параметрична залежність $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$

визначає коло радіуса $\boldsymbol{r}$ з центром у початку прямокутної декартової системи координат. Справді, зводячи до квадрата параметричні рівняння і підсумовуючи результат, дістаємо:

$$x^2 + y^2 = r^2\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right), \text{ або } \quad x^2 + y^2 = r^2 .$$

Означення. Множина всіх значень аргументу, для яких можна обчислити значення функції, називається природною ***областю визначення функції***. Область визначення може бути заданою; у цьому випадку вона залежить також від умови задачі.

Приклад. Знайти область визначення функції

$$y = \frac{\arcsin\frac{x}{2} + \sqrt{1 - x^2}}{\lg(1 + x)} .$$

$$D(y) = \begin{cases} \left|\frac{x}{2}\right| \le 1 \\ 1 - x^2 \ge 0 \\ x + 1 > 0 \\ \lg(x+1) \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \le 2 \\ |x| \le 1 \\ x > -1 \\ x + 1 \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x \le 1 \\ x \ne 0. \end{cases}$$

$D(y) = (-1; 0) \cup (0; 1]$ – природна область визначення. Якщо за умовою задачі x – відстань, а це означає, що $x \ge 0$, тоді $D(y) = (0; 1]$ – задана область визначення.

Означення. Функція вважається ***елементарною***, якщо вона може бути побудована з основних елементарних функцій за допомогою скінченної кількості алгебраїчних дій та суперпозицій.

Приклад.

$$y = 2^{x\,\mathrm{tg}^3\left(x^2 + \arcsin\sqrt{x}\right)} + \cos^2\left(\log_2\left(\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{x}\right)\right)$$ – елементарна функція.

Основні елементарні функції	
лінійна функція:	$y = kx + b,\quad k,\ b \in R$
степенева функція:	$y = x^{a},\quad a \in R$
показникова функція:	$y = a^{x},\ a > 0, a \neq 1$
логарифмічна функція:	$y = log_a\, x,\ a > 0, a \neq 1$
тригонометрична функція:	$y = sin\, x,\ y = cos\, x,\ y = tgx,\ y = ctgx$
зворотні тригонометричні функції:	$y = arcsin\, x,\ y = arccos\, x$, $y = arctgx,\ y = arcctgx$

Означення. Функція $y = y(x)$ називається ***алгебраїчною***, якщо $y(x)$ — розв'язок рівняння $P_0(x)y^{n} + P_1(x)y^{n-1} + ... + P_{n-1}(x)y + P_n(x) = 0,$

де $P_i(x),\ i = (\overline{0,n})$ – многочлени (поліноми).

Приклад. Функція $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^2+1}{x-1}}$ буде алгебраїчною, бо вона є розв'язком рівняння $y^3(x-1) - (x^2+1) = 0$.

Означення. Усі неалгебраїчні функції називаються ***трансцендентними.***

Алгебраїчні функції поділяються на *раціональні* (цілі й дробові) та *ірраціональні*.

Приклади елементарних функцій
1. ціла раціональна функція: $y = P_n(x)$, де $P_n(x) = a_0x^{n} + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n,\ a_0 \neq 0, a_i \in R, i = \overline{0,n}$
2. дробово-раціональна функція: $y = R(x)$, де $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, $Q_m(x) \neq 0$
3. гіперболічні функції:
синус гіперболічний $y = sh\, x$, де $sh\, x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$

косинус синус гіперболічний $y = chx$, де $chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

тангенс та гіперболічний $y = th\,x$, де $thx = \dfrac{sh\,x}{ch\,x}$

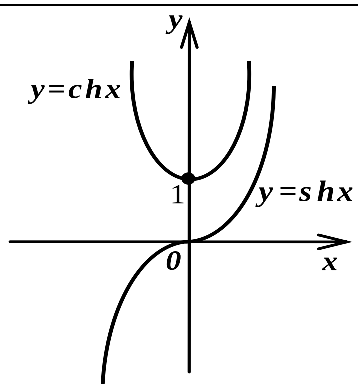
котангенс гіперболічний $y = cth\,x$, де $cthx = \dfrac{ch\,x}{sh\,x}$

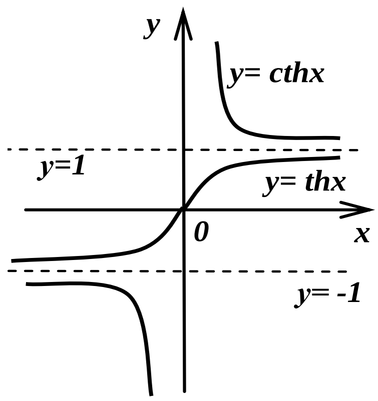
$$ch^2 x - sh^2 x = 1$$

$$sh2x = 2shx \cdot chx \qquad sh(x \pm y) = shx \cdot chy \pm chx \cdot shy$$

$$ch2x = ch^2 x + sh^2 x \qquad ch(x \pm y) = chx \cdot chy \pm shx \cdot shy$$

Графіки гіперболічних функцій

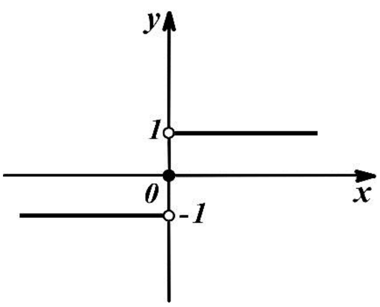




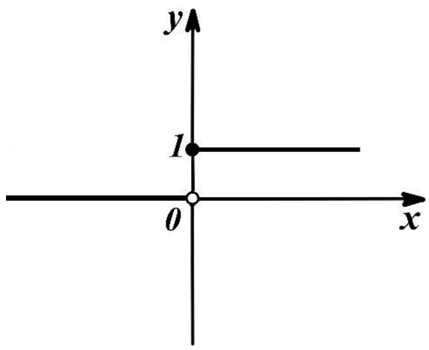
Неелементарні функції

$y = sign\ x$	Одинична функція Хевісайда
Символ ***sign x*** читаємо: сигнум ***x***, тобто знак ***x***	

$$y = sign\ x \equiv \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$



$$y = \eta(x) \equiv \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



Означення. Функція ***y = f(x)*** називається ***парною*** (***непарною***), якщо:

1) $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{f})$ симетрична відносно точки 0;

2) для будь-якого $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D}$ виконується умова $\boldsymbol{f(-x) = f(x)}$ $\left(\boldsymbol{f(-x) = -f(x)}\right)$.

Функція буде ***ні парною, ні непарною***, якщо для $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D}$ не виконується хоча б одна з умов.

Властивість. *Графік парної* функції симетричний відносно осі ординат. *Графік непарної* функції симетричний відносно початку координат.

Приклад. ***y = cos x*** – парна функція (графік функції симетричний відносно осі ординат (рис. 2)), ***y = arctg x*** – непарна функція (графік функції симетричний відносно початку координат (рис. 3)); ***y = arccos x*** – ні парна, ні непарна (рис. 4), бо $\boldsymbol{y(-x) = \arccos(-x) = \pi - \arccos x \neq \pm y(x)}$.

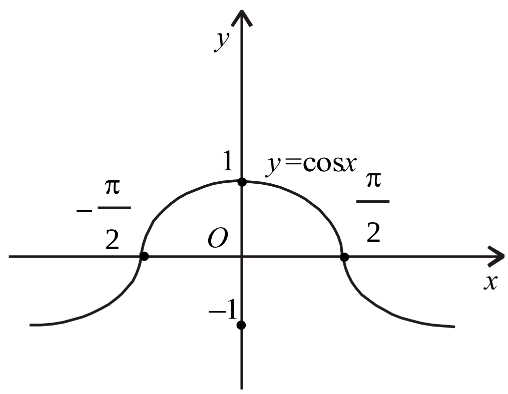


Рис. 2

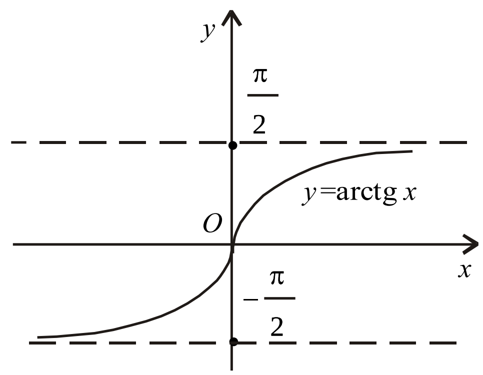


Рис. 3

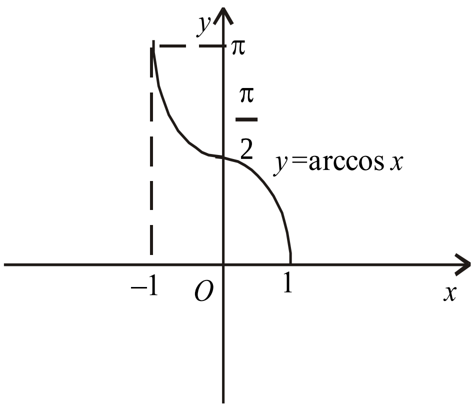


Рис. 4

Означення. Функція $\boldsymbol{y = f(x)}$ називається ***періодичною*** з періодом $\boldsymbol{T} > 0$, якщо для будь якого $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D}$ значення $(\boldsymbol{x} \pm \boldsymbol{T}) \in \boldsymbol{D}$ та, крім того, виконується умова

$$\boldsymbol{f(x+T) = f(x-T) = f(x)}.$$

Найменший додатній період функції $\boldsymbol{y = f(x)}$ називають її основним періодом і позначають $\boldsymbol{T_0}$.

Властивість. Якщо функція $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ періодична з основним періодом $\boldsymbol{T}_0$, тоді функція $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\omega x}),\ \boldsymbol{\omega}\in\boldsymbol{R}$ також є періодичною з періодом $\boldsymbol{T}=\dfrac{\boldsymbol{T}_0}{\boldsymbol{\omega}}$.

Приклад. $\boldsymbol{y}=\mathrm{tg}\boldsymbol{x}$ – періодична функція з основним періодом $\boldsymbol{T_0}=\boldsymbol{\pi}$ (див. рис. 5), бо $\mathrm{tg}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\pi})=\mathrm{tg}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\pi})=\mathrm{tg}\boldsymbol{x}$.

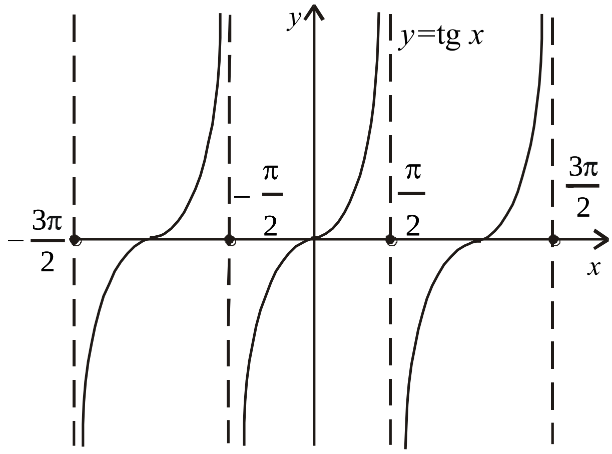


Рис. 5

Приклад. Знайти період $\boldsymbol{T}$ функцій: а) $\boldsymbol{y}=\mathrm{tg}2\boldsymbol{\pi x}$, б) $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{sin}5\boldsymbol{x}$.

а) Використовуючи властивість, так як $\boldsymbol{y}=\mathrm{tg}\boldsymbol{x}$ має $\boldsymbol{T}_0=\boldsymbol{\pi}\quad\Rightarrow\quad\boldsymbol{T}=\dfrac{\boldsymbol{\pi}}{2\boldsymbol{\pi}}=\dfrac{1}{2}$;

б) так як $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{sin}5\boldsymbol{x}$ має $\boldsymbol{T}_0=2\boldsymbol{\pi}\quad\Rightarrow\quad\boldsymbol{T}=\dfrac{2\boldsymbol{\pi}}{5}=\dfrac{2}{5}\boldsymbol{\pi}$.

Означення. Функція $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ називається ***обмеженою*** на множині ***D,*** якщо для всіх $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{D}$ виконується умова $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})|\le\boldsymbol{M}$, де $\boldsymbol{M}>0$ — деяке скінченне число.

Приклад. $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{arcsin\ x}$ – обмежена функція для всіх $\boldsymbol{x}\in[-1;1]$ (рис. 6), бо $|\boldsymbol{arcsin\ x}|\le\dfrac{\boldsymbol{\pi}}{2}$.

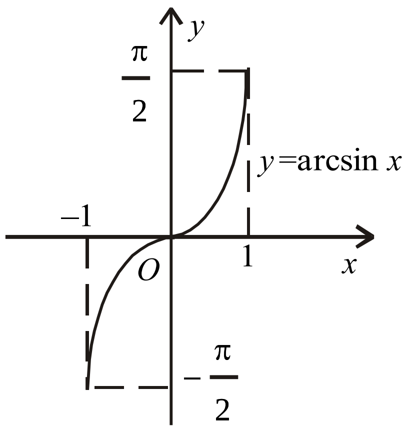


Рис. 6

Означення. Функція $y = f(x)$ називається монотонно зростаючою (спадною) на множині D, якщо для всіх $x \in D$ більшому значенню аргументу відповідає більше (менше) значення функції, тобто

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1) \quad (f(x_2) < f(x_1)).$$

Приклад. $y = \log_a x$ – монотонно спадна функція при $0 < a < 1$ та при $a > 1$ – монотонно зростаюча (рис. 7).

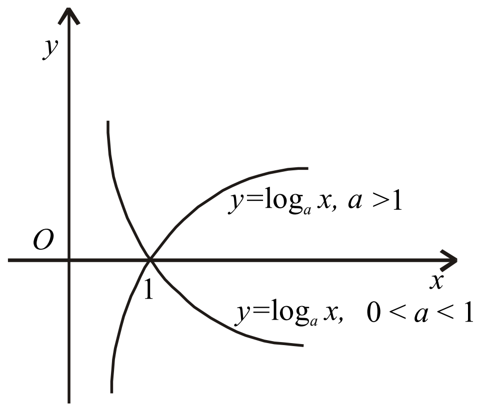


Рис. 7

Завдання для самостійного розв'язування

1. Знайти області визначення функцій:

а) $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{3-x}$. *Відповідь*: $-1 \le x \le 3$.

б) $y = 4 \big/ \left(1 + \sqrt{x^2 - 4}\right)$. *Відповідь*: $|x| \ge 2$.

в) $y = lg(3x-1) + 2\,lg(x+1)$. *Відповідь*: $\left(\dfrac{1}{3}, +\infty\right)$.

г) $y = 2^{-x^2}$. *Відповідь*: $(-\infty,\ \infty)$.

д) $y = 1 - \sqrt{2\cos 2x}$. *Відповідь:* $-\dfrac{\pi}{4} + k\pi \le x \le \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

2. Побудувати графіки функції:

а) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, б) $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$,

в) $y = \mathrm{tg}\frac{1}{2}x$, г) $y = ctg\left(\frac{x}{4}\right)$,

д) $y = x^3 + 1$, е) $y = 4 - x^3$,

є) $y = \log_2|x|$, ж) $y = x^5$,

з) $y = \begin{cases} 1 + x \text{ при } -1 \le x \le 0, \\ 1 - 2x \text{ при } 0 \le x \le 1. \end{cases}$ и) $y = \begin{cases} x^3 \text{ при } x \le 1, \\ x \text{ при } x > 1. \end{cases}$

3. Побудувати графік функції, яка задана таблицею

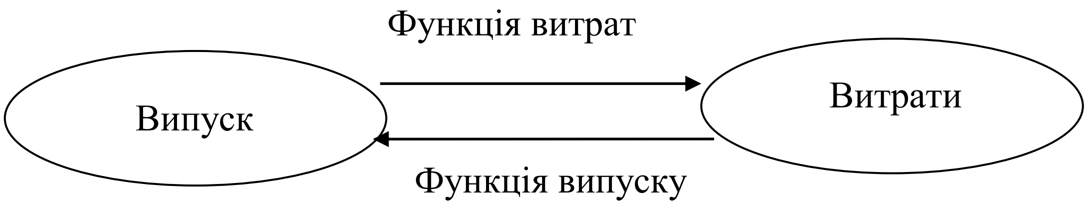
Ціна пачки сигарет, грн.	2	3	3,5	4	5	6	7
Кількість проданих за день пачок сигарет, шт.	70	65	63	60	60	50	25

4.2. Основні елементарні функції, що використовуються в економічних дослідженнях

Функцію, що виражає залежність між сумарними витратами на виробництво певного товару та його вартістю, називається ***однофакторною виробничою функцією.***

Функція, в якій роль незалежної змінної виконують витрати, а залежна змінна визначає обсяг випуску, називається ***функцією випуску***.

В функції витрат, навпаки, незалежна змінна – випуск, а залежна змінна – витрати.



Приклад 1. Нехай витрати y на виробництво продукції складаються із умовно-сталих і умовно-змінних витрат. Якщо умовно-змінні витрати прямо пропорційні обсягу випуску x і складають kx одиниць, а умовно-сталі витрати рівні b одиниць, то функція витрат має вигляд:

$$y = kx + b \qquad (k > 0,\ b > 0,\ x \ge 0)$$ – це лінійна функція.

З такими функціями зустрічаються, коли будують балансову модель.

Приклад 2. За допомогою однофакторної виробничої функції можна описати залежність обсягу виробництва від витрат деякого специфічного виду ресурсу. В ролі такого ресурсу часто виступають трудові ресурси, основні виробничі фонди, об'єм капіталовкладень, різні види сировини. При цьому витрати всіх інших ресурсів, що приймають участь в виробництві, вважають сталими.

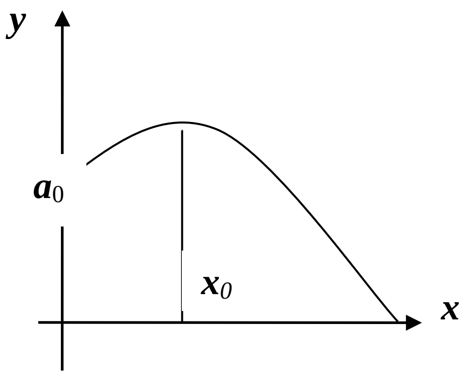


Рис. 8

Так, за допомогою функції виду:

$$y = a_0 + a_1 x - a_2 x^2 \quad (a_0 > 0,\ a_1 > 0,\ x \ge 0\ )$$

можна охарактеризувати залежність врожайності у деякої сільськогосподарської культури від кількості x внесених добрив (рис. 8).

При відсутності добрив врожайність становить a_0 одиниць. Із збільшенням об'єму використаних добрив урожай спочатку зростає і при $x = x_0$ досягає найбільшого значення. Подальше збільшення витрат добрива стає нерозумним. Воно приводить до зниження врожаю і навіть до повної втрати.

Функція виду $y = a_0 + a_1 x - a_2 x^2$ – квадратична виробнича функція.

Приклад 3. Попит і ціна –взаємозалежні величини. За певних умов попит на деякий товар є функцією ціни. Нехай q – попит на товар, p– ціна товару.

Залежність між попитом і ціною називають функцією попиту $q = f(p)$.

Залежність між ціною і попитом можна розглянути як функцію ціни від попиту $p = \varphi(q)$. Прикладом функції можуть бути $q = a \cdot e^{-2p}$; $p = ln\sqrt{\frac{5}{q}}$.

4.3. *Поняття числової послідовності та її границя*

Означення. Числова функція $y = f(n)$, область визначення якої є множина натурального ряду чисел, називається ***числовою послідовністю***, або просто послідовністю, і позначається $y = x_n$, надалі писатимемо $x_n = f(n),\ n \in N$.

Значення $x_1 = f(1),\ x_2 = f(2),\ \ldots,\ x_n = f(n),\ \ldots$ називаються *членами послідовності*. Послідовність вважається заданою, якщо задано n-й член послідовності.

Приклад. Записати три перші члени послідовності $x_n = \frac{2n-1}{2^n}$. Маємо

$$x_1 = \frac{1}{2},\quad x_2 = \frac{3}{2^2},\quad x_3 = \frac{5}{2^3}.$$

Приклад. За заданими трьома першими членами послідовності $x_1 = 1,\quad x_2 = -\frac{3}{5\sqrt{2}},\quad x_3 = \frac{5}{5^2\sqrt{3}}$ знайти формулу n-го члена.

Задача розв'язується методом добору з наступною перевіркою

$$x_n = \frac{(-1)^{n-1}(2n-1)}{5^{n-1}\sqrt{n}}.$$

Означення. Число a називається ***границею послідовності*** x_n, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$, яке б мале воно не було, існує номер N такий, що для всіх номерів $n > N$ виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$.

Позначення $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ або $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$.

Для стислого запису означення границі використаємо квантори: ∀ – для будь-якого, будь-який; ∃ – існує, знайдеться;

: = дорівнює за означенням, означає. Тоді означення границі послідовності за допомогою цих символів запишеться так:

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n = a\right) := \left(\left(\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists N,\ \ n > N\right) \Rightarrow \left(|x_n - a| < \varepsilon\right)\right).$$

Розглянемо геометричну інтерпретацію границі послідовності. На числовій осі побудуємо ε-окіл числа a, тобто інтервал (a **– ε;** a **+ ε**), і покажемо, як розміщуватимуться точки, які відповідають членам послідовності $x_n \to a$, при $n \to \infty$ (рис. 9).

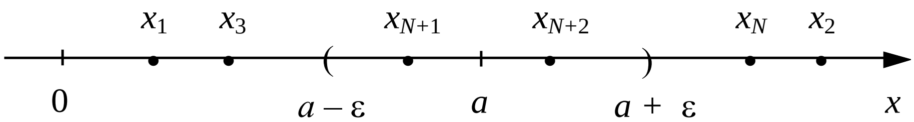


Рис. 9

Означення. Число a називається ***границею послідовності*** x_n, якщо для будь-якого ε-околу точки a існує номер N такий, що, починаючи з номерів $n > N$, усі члени послідовності перебувають в ε-околі точки a (див. рис.9).

Означення. Послідовність називається ***збіжною***, якщо вона має границю (скінченну). Послідовність, яка не має границі, називається ***розбіжною.***

Загальні властивості збіжних послідовностей

Теорема 1. (Єдиність границі послідовності).

Якщо послідовність має границю, то вона єдина.

Теорема 2. (Необхідна умова збіжності послідовності).

Якщо послідовність збіжна, то вона обмежена.

Теорема 3. Якщо $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ і $a < l\,(a > m)$, то існує такий номер N, що при всіх $n > N$ виконується нерівність $x_n < l\,(x_n > m)$.

Теорема 4. Границя сталої величини дорівнює сталій, тобто $\lim_{n\to\infty} c = c,$ $c = \text{const}.$

4.4. Нескінченно мала та нескінченно велика величини.

Означення. Послідовність α_n називається ***нескінченно малою величиною*** (***н. м. в.***), якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$.

Приклад. $\alpha_n = \frac{1}{n}$ – н.м.в., бо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

Теорема 1. Сума двох н.м.в. є н. м. в.

Наслідок. Алгебраїчна сума скінченної кількості н.м.в. є н.м.в.

Теорема 2. Добуток обмеженої величини на н.м.в. є н.м.в.

Приклад. Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}$. Послідовність $\frac{\sin n}{n}$ – н.м.в., бо є добутком обмеженої величини $\sin n\left(|\sin n| \le 1\right)$ і н.м.в. $\frac{1}{n}$.

Таким чином, за теоремою 2 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n} = 0$.

Теорема 3. Добуток двох н.м.в. є н.м.в.

Наслідок. Добуток скінченної кількості н.м.в. є н.м.в.

Теорема 4. Для існування границі a послідовності x_n необхідно і достатньо, щоб послідовність $\alpha_n = x_n - a$ була н.м.в.

Наслідок. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $x_n = a + a_n$, де α_n – н.м.в.

Означення. Послідовність x_n називається ***нескінченно великою величиною*** (**н.в.в**.), якщо для будь-якого числа $0 < M < +\infty$, яке б велике воно не було, існує номер N**,** такий, що при всіх $n > N$ виконується нерівність $|x_n| > M$.

Якщо члени н.в.в., починаючи з деякого номера, всі додатні, то позначають $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$***;*** якщо від'ємні, то – $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$**,** а якщо різних знаків,

то – $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$**.**

Наприклад:

1) $x_n = \sqrt{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n} = +\infty$;

2) $x_n = -n^2$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-n^2\right) = -\infty$;

3) $x_n = (-1)^n n$, $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n n = \infty$.

Аналітичною мовою означення н.в.в. виглядає так:

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n = \infty\right) := \left(\left(\forall M > O,\ \exists N,\ n > N\right) \Rightarrow \left(|x_n| > M\right)\right).$$

За своїм означенням, н.в.в. – необмежена, але не кожна необмежена величина є н.в.в., наприклад послідовність 1, 0, 3, 0, 5, 0, ... з членом $x_n = \frac{1}{2}\left(n + (-1)^{n+1} n\right)$ – величина необмежена, але н.в.в. не буде. Справді, не *всі* члени цієї послідовності, починаючи з деякого номера, будуть як завгодно великими.

Теорема. ***Зв'язок між н.в.в. і н.м.в.***

1. Якщо α_n – н.м.в. і $\alpha_n \neq 0$, то обернена до неї послідовність $y_n = \frac{1}{\alpha_n}$ буде н.в.в., і навпаки.

2. Якщо y_n – н.в.в., то обернена до неї $\alpha_n = \frac{1}{y_n}$ – н.м.в.

4.5. Граничний перехід при арифметичних операціях. Число е

Теорема. Якщо існують границі $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} c y_n = c \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$ при $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$.

За допомогою теореми можна виконувати граничний перехід при арифметичних операціях з послідовностями, але тільки в тих випадках, коли послідовності збіжні.

Приклад. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n^2}}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=\dfrac{1-0}{2+0}=\dfrac{1}{2}.$

На практиці такі докладні записи граничного переходу виконують рідко; як правило, граничний перехід при арифметичних операціях виконується усно.

Якщо умови теореми порушуються, то вираз під знаком границі спочатку перетворюють таким чином, щоб арифметичні дії виконувалися зі збіжними послідовностями, а потім виконують граничний перехід.

Приклад. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\ldots+a_{k-1}n+a_k}{b_0n^m+b_1n^{m-1}+\ldots+b_{m-1}n+b_m}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k\left(a_0+\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n^2}+\ldots+\frac{a_k}{n^k}\right)}{n^m\left(b_0+\frac{b_1}{n}+\frac{b_2}{n^2}+\ldots+\frac{b_m}{n^m}\right)}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & \text{якщо } k=m;\\ \infty, & \text{якщо } k>m;\\ 0, & \text{якщо } k<m.\end{cases}$$

Теорема 1. (Граничний перехід у нерівності).

Якщо для будь-якого n виконується нерівність $x_n \le y_n$ і x_n, y_n – збіжні, то $\lim\limits_{n\to\infty}x_n \le \lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

Теорема 2. (Про границю затисненої послідовності).

Якщо для будь-якого n $x_n \le y_n \le z_n$ і $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$, то $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$.

Приклад. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=1,$ бо $1<\sqrt{1+\frac{1}{n}}<1+\frac{1}{n},$ а $\lim\limits_{n\to\infty}1=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$

Теорема 3. (Вейєрштрасса). Про границю монотонної й обмеженої послідовності:

1) якщо монотонно зростаюча послідовність обмежена зверху, то вона збіжна;

2) якщо монотонно спадна послідовність обмежена знизу, то вона збіжна.

Приклад.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2^n+3^n}{3^n}}{\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+1}{2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+3}=\left|\begin{array}{l}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\underset{n\to\infty}{\to}0\\ 0<\dfrac{2}{3}<1\end{array}\right|=\frac{1}{3}.$$

Число e.

Розглянемо послідовність $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Можна довести, що ця послідовність монотонно зростає і обмежена $2<\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<3$. За теоремою Вейєрштрасса існує границя цієї послідовності, яку позначають так:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

Зазначимо, що число e = **2,7183...** є основою натуральних логарифмів $\ln a=\log_e a$. Взагалі, число e, як і число π = 3,14 ..., широко застосовується в різних задачах, у тому числі й у задачах з економічним змістом.

Задача. Суму a грн покладено в банк при p % річних. Як збільшиться ця сума за один рік, якщо вклад безперервно забирати і знову класти в банк?

Нехай вклад буде недоторканним цілий рік, тоді його приріст $x=\dfrac{ap}{100}$, а вся сума $S_1=a+\dfrac{ap}{100}=a\left(1+\dfrac{p}{100}\right)$.

Якщо вклад зняли через півроку і відразу поклали на півроку, то приріст за перше півріччя буде $x_1 = \frac{ap}{2\cdot 100}$, а за друге – $x_2 = \left(a + \frac{ap}{2\cdot 100}\right)\cdot\frac{p}{2\cdot 100}$. Отже, вся сума за $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)$року буде

$$S_2 = a + \frac{ap}{2\cdot 100} + \frac{a\left(1+\frac{p}{200}\right)p}{200} =$$

$$= a\left(1+\frac{p}{2\cdot 100}\right)\left(1+\frac{p}{2\cdot 100}\right) = a\left(1+\frac{p}{2\cdot 100}\right)^2.$$

Аналогічно можна вважати, що коли брати з банку і знову класти 3 рази на рік, то за рік $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)$ сума буде така:

$$S_3 = a\left(1+\frac{p}{3\cdot 100}\right)^3,$$

а за рік $\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=1 \Rightarrow S_n = a\left(1+\frac{p}{n\cdot 100}\right)^n.$

Розв’язком задачі буде границя $S = a\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{n\cdot 100}\right)^n.$

При $p = 100\%$ сума $S = a\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = ae;$ для довільного p маємо $S = ae^{\frac{p}{100}}$.

Розглянемо деякі цифрові дані: при початковому вкладі $a = 100$ грн, в умовах даної задачі, при $p = 100\ \%$ річних сума за рік буде $S = 271$ грн 83 коп. (а не 200 грн, якщо вклад не знімали цілий рік); при $p = 2\ \%$ річних S = 102 грн 2 коп. (а не 102 грн, якщо вклад не знімати цілий рік).

Приклад. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+3n^2-5n+6}{6-2n+7n^2}.$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3n^2-5n+6}{6-2n+7n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(1+\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}+\frac{6}{n^3}\right)}{n^2\left(\frac{6}{n^2}-\frac{2}{n}+7\right)}=\infty .$$

Приклад. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1-0=1.$$

➤ *Завдання для самостійного розв'язування*

Знайти границі послідовностей:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin(5n+1)}{n^2+2}$. *Відповідь*. 0.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+6n+7}{2-n^2-3n^3}$. *Відповідь*. $-\frac{1}{3}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}$. *Відповідь*. 1.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-100n^2+1}{100n^2+15n}$. *Відповідь*. ∞.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$. *Відповідь*. 1.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!-n!}$. *Відповідь*. 0.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n+1}$. *Відповідь*. 1.

4.6. Поняття границі функції

Нехай функція $y = f(x)$ визначена у деякому околі точки $x = a$, за винятком, хіба що, самої точки $x = a$.

Означення. Число b називається ***границею функції*** $f(x)$ при $x \to a$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$, таке що при $|x - a| < \delta$ і $x \neq a$ виконується нерівність $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Коротко це означення можна записати так:

$$\left(\lim_{x\to a} f(x) = b\right) := \left(\left(\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ |x - a| < \delta,\ x \neq a\right) \Rightarrow \left(|f(x) - b| < \varepsilon\right)\right).$$

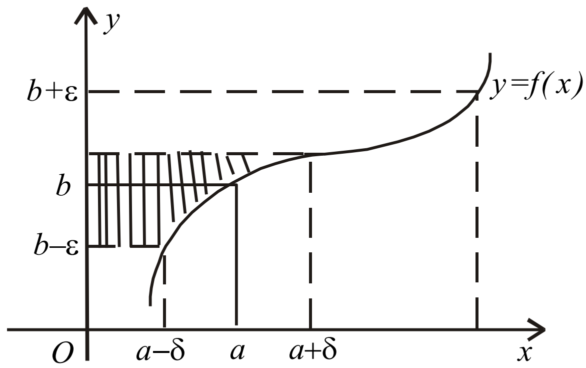


Рис. 10

На рис. 10 показано геометричну інтерпретацію $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, де за заданим ε-околом числа b знайдено δ-окіл числа a такий, що для всіх $x \in (a - \delta;\ a + \delta),\ \ x \neq a$ відповідні значення функції $f(x) \in (b - \varepsilon,\ b + \varepsilon)$, тобто графік функції $f(x)$ лежить у смузі шириною 2 ε.

Означення. Число b називається ***границею функції*** $f(x)$, коли $x \to \infty$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $M > 0$, таке що з нерівності $|x| > M$ випливає нерівність $|f(x) - b| < \varepsilon$. Коротко це можна записати так:

$$\left(\lim_{x\to\infty} f(x) = b\right) := \left(\left(\forall\varepsilon > 0,\ \exists M > 0,\ |x| > M\right) \Rightarrow \left(|f(x) - b| < \varepsilon\right)\right).$$

При $x \to a$ або $x \to \infty$ функція може набувати нескінченно великих значень чи прямувати до нуля. Ці випадки можна проілюструвати такими означеннями.

Означення. Функція $f(x)$ називається ***нескінченно великою величиною*** (***н.в.в.***) при $x \to a$, якщо для будь-якого $M > 0$, яке б велике воно не було, існує число $\delta > 0$, таке що з нерівності $0 < |x - a| < \delta$ випливає $|f(x)| > M$, тобто:

$$\left(\lim_{x \to a} f(x) = \infty\right) := \left(\left(\forall M > 0,\ \exists \delta > 0,\ 0 < |x - a| < \delta\right) \Rightarrow \left(|f(x)| > M\right)\right).$$

Означення. Функція $f(x)$ називається ***нескінченно малою величиною*** (***н.м.в.***) при $x \to a$, якщо $\lim_{x \to a} f(x) = 0$.

Розглянемо односторонні границі для функції $y = f(x)$.

Означення. Правостороння границя функції:

$$\left(\lim_{x \to a+0} f(x) = b\right) := \left(\left(\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ a < x < a + \delta\right) \Rightarrow \left(|f(x) - b| < \varepsilon\right)\right).$$

Означення. Лівостороння границя функції:

$$\left(\lim_{x \to a-0} f(x) = b\right) := \left(\left(\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ a - \delta < x < a\right) \Rightarrow \left(|f(x) - b| < \varepsilon\right)\right).$$

Теорема. Для існування $\lim_{x \to a} f(x) = b$ необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова $\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{a+0} f(x) = b$.

Приклад. Довести, що $\lim_{x \to 0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ не існує.

Розглянемо односторонні границі:

а) ліворуч $\lim_{x \to -0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \begin{vmatrix} x \to -0 \\ \frac{1}{x} \to -\infty \end{vmatrix} = -\frac{\pi}{2}$;

б) праворуч $\lim_{x \to +0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \begin{vmatrix} x \to +0 \\ \frac{1}{x} \to +\infty \end{vmatrix} = +\frac{\pi}{2}$.

Отже, $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ не існує, бо односторонні границі хоча й існують, але не рівні між собою (рис. 11).

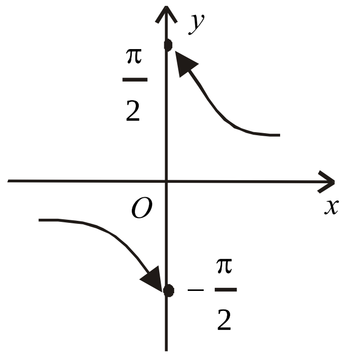


Рис. 11

4.7. Розкриття невизначених виразів типу $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, $[\infty-\infty]$

При виконанні граничного переходу у виразах типу $f(x)\pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, коли порушуються умови теореми про граничний перехід при арифметичних операціях, розв'язання задачі у ряді випадків зводиться до аналізу невизначених виразів виду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, $[\infty-\infty]$.

Розглянемо деякі загальні рекомендації щодо дослідження таких невизначених виразів, обмежуючись тільки алгебраїчними функціями.

1. Невизначеність $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ **для раціональних функцій**

Спочатку нагадаємо деякі положення алгебри многочленів. Многочлен $P_n(x)$ називається *упорядкованим*, якщо $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$.

Теорема (Безу). Остача від ділення многочлена $P_n(x)$ на двочлен типу $x-a$ дорівнює значенню многочлена при $x=a$, тобто $P_n(a)$.

Наслідок. Якщо число a – корінь многочлена $P_n(x)$, тобто $P_n(a)=0$, то многочлен $P_n(x)$ ділиться без остачі на двочлен $x-a$.

Розглянемо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$, де $P_n(x)$, $Q_m(x)$ — такі многочлени, що $P_n(a)=0$, $Q_m(a)=0$.

За наслідком з теореми Безу чисельник і знаменник діляться без остачі на $\boldsymbol{x-a}$, тобто чисельник і знаменник мають спільний множник $\boldsymbol{x-a}$. Отже, дістаємо:

$$\lim_{x\to a}\frac{P_n(a)}{Q_m(a)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)P_{n-1}(x)}{(x-a)Q_{m-1}(x)}=\lim_{x\to a}\frac{P_{n-1}(x)}{Q_{m-1}(x)}.$$

Степінь многочленів як у чисельнику, так і в знаменнику зменшився на одиницю. Якщо після виконання нового граничного переходу знову буде невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$, то наведений алгоритм повторюють.

Зауважимо, що скорочення дробу на множник $\boldsymbol{x-a}$ під знаком границі можливе, бо за означенням границі функції змінна $\boldsymbol{x}$ як завгодно близька до числа $\boldsymbol{a}$, але $\boldsymbol{x\neq a}$.

Приклад. Розкласти на множники $P_3(x)=x^3-2x^2+6x-5$. Оскільки $P_3(1)=0\Rightarrow x=1$ – корінь $P_3(x)\Rightarrow P_3(x)$ ділиться без остачі на $\boldsymbol{x}-1$. Виконуючи ділення многочленів, дістаємо:

$$\begin{array}{l|l}
-\,x^3-2x^2+6x-5 & x-1 \\ \cline{2-2}
\;\;x^3-x^2 & x^2-x-5 \\ \cline{1-1}
\;\;-\,-x^2+6x & \\
\;\;\;\;-x^2+x & \\ \cline{1-1}
\;\;\;\;\;\;-\,5x-5 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;5x-5 & \\ \cline{1-1}
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;0 &
\end{array}$$

Отже, $P_3(x)=x^3-2x^2+6x-5=(x-1)(x^2-x+5)$.

Приклад.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2+6x-5}{x^2-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2-x+5)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x+5}{x+1}=\frac{1-1+5}{1+1}=\frac{5}{2}.$$

Отже, невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$ при $\boldsymbol{x\to a}$ для раціональних функцій розкривається діленням многочленів у чисельнику і знаменнику на двочлен $\boldsymbol{x-a}$.

2. Невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$ для ірраціональних функцій

Для розв’язування задач у цьому випадку рекомендується звільнитись від тих ірраціональних множників у чисельнику і знаменнику дробового виразу, які перетворюються на нуль при виконанні граничного переходу. Для звільнення від радикалів використовують формули скороченого множення, заміну змінної та інші штучні прийоми.

Приклад.

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 5}\frac{\left(\sqrt{x-1}-2\right)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{x-1-4}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}=\frac{1}{4}.$$

3. Невизначеність $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

У цьому випадку і чисельник, і знаменник рекомендується поділити на найбільший степінь змінної, що входить як до знаменника, так і до чисельника.

Приклад.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{x}+x+1}{2\sqrt{x^3+x}-10x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x\sqrt{x}+x+1}{x\sqrt{x}}}{\dfrac{2\sqrt{x^3+x}-10x}{x\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}}{2\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{10}{\sqrt{x}}}=\frac{1}{2}.$$

4. Невизначеність $[\infty-\infty]$

Цей тип невизначеності зводиться до невизначеностей $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ або $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$; наприклад, зведенням виразу до спільного знаменника, множенням на спряжений вираз.

Приклад.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right)=[\infty-\infty]=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1+x-2}{1-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{1-x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}-\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{x+1}=-\frac{1}{2}.$$

Приклад.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=[\infty-\infty]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}=\frac{2}{1+1}=1.$$

Розглянемо приклади на різні випадки невизначеностей

Приклад 1. Знайти $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$.

Тут чисельник та знаменник дробу прямують до нуля при $x\to3$ (невизначеність вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$). Оскільки $\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}=\dfrac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)}=\dfrac{x+3}{x}$ при $x\neq3$, то $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x+3}{x}=2$. Звідси $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}=2$.

Приклад 2. Знайти $\lim\limits_{x\to10}\dfrac{x^3-100}{x^3-20x^2+100x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Маємо:

$$\lim_{x\to10}\frac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}=\lim_{x\to10}\frac{(x-10)\left(x^2+10x+100\right)}{x(x-10)^2}=$$

$$=\lim_{x\to10}\frac{x^2+10x+100}{x(x-10)}.$$

Чисельник дробу прямує до 300, а знаменник – до нуля, тобто є н.м.в. Таким чином, заданий дріб – н.в.в. (нескінченно велика величина):

$$\lim_{x\to10}\frac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}=\infty.$$

Приклад 3. Знайти $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Домножимо чисельник та знаменник дробу на суму $\sqrt{x+4}+2$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+4-4}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\frac{1}{4}.$$

Приклад 4. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Поділимо чисельник та знаменник на старший степінь x**,** тобто на x^3**:**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{4}.$$

➢ *Завдання для самостійного розв'язування*

1. Знайти $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+5}{x^2-3}$. *Відповідь.* 9.

2. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{1-x}$. *Відповідь.* ∞.

3. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$. *Відповідь.* 0.

4. Знайти $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}$. *Відповідь.* $\frac{1}{6}$.

5. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^2}\right)$. *Відповідь.* –1.

6. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2+1}$. *Відповідь.* $\frac{1}{2}$.

7. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)$. *Відповідь.* 0.

8. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$. *Відповідь.* 0.

9. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$. *Відповідь.* 0.

4.8. Особливі границі

1. Перша особлива границя $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=1$

Границі – наслідки першої особливості границі:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1.$ 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}=1.$ 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} x}=1.$ 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}=\dfrac{a}{b}.$

Зауваження. За допомогою першої особливої границі можна досліджувати невизначеності $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ для виразів з тригонометричними функціями.

Приклад.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

Приклад.

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{array}{l}1-x=y\\ x=1-y\\ x\to 1\\ y\to 0\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi y}{2}\right)}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{tg}\frac{\pi y}{2}}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi y}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\pi y}{2}}=\frac{2}{\pi}.$$

2. Друга особлива границя $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\left[1^\infty\right]=e$

Границі – наслідки другої особливої границі:

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx}=e^{ab}.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1.$ 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1.$

Зауваження. За допомогою другої особливої границі та її наслідків можна досліджувати невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[1^{\infty}\right]$, $\left[\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}\right]$.

Приклад.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\ln(2x+1)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x\cdot 2x\cdot 5x}{5x\cdot\ln(2x+1)\cdot 2x}=\left|\begin{array}{l}\frac{\sin 5x}{5x}\xrightarrow[x\to 0]{}1\\ \frac{2x}{\ln(2x+1)}\xrightarrow[x\to 0]{}1\end{array}\right|=\frac{5}{2}.$$

4.9. Еквівалентні нескінченно малі величини

Означення. Нескінченно малі величини (н.м.в.) $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються н.м.в. одного порядку мализни при $x\to a$, якщо $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=const\neq 0$.

Приклад. Н.м.в. $\alpha(x)=x$ та $\beta(x)=\sin 2x$ є н.м.в. одного порядку мализни при $x\to 0$, бо $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin 2x}=\frac{1}{2}\neq 0$.

Означення. Н.м.в. $\alpha(x)$ називається н.м.в. вищого порядку мализни порівняно з н.м.в. $\beta(x)$ при $x\to a$, якщо $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$.

Приклад. Н.м.в. $\alpha(x)=x^n\ (n>1)$ є вищого порядку мализни порівняно з н.м.в. $\beta(x)=x$ при $x\to 0$: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^n}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^{n-1}=0$.

Означення. Дві н.м.в. $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються еквівалентними при $x\to a$, якщо $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$.

Зауваження. При дослідженні границь відношення н.м.в. їх можна замінювати еквівалентними, тобто якщо $\beta(x)$ еквівалентна $\gamma(x)$ при $x \to a$**,** то $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\gamma(x)}$.

Виходячи з наслідків першої та другої особливих границь, можна записати таку ***низку еквівалентних н.м.в. при*** $x \to 0$***:***

$$x \sim \sin x \sim \mathrm{tg}\, x \sim \arcsin x \sim \mathrm{arctg}\, x \sim e^x - 1 \sim \ln(x+1).$$

Як наслідок звідси випливає, наприклад, що при $x \to 0$ буде: $e^{3x} - 1 \sim 3x$; $\sin 5x \sim 5x$ і т.п.

Використовується шкала н.м.в. при дослідженні невизначеностей типу $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Приклад. $$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin 5x} - e^{\sin x}}{\ln(1+3x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin x}\left(e^{\sin 5x - \sin x} - 1\right)}{\ln(1+3x)} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x \to 0 \\ \ln(1+3x) \sim 3x; \\ e^{\sin 5x - \sin 5x} - 1 \sim \sin 5x - \sin x; \\ e^{\sin x} \to 1 \end{array} \right| = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x - \sin x}{3x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin 2x \cdot \cos 3x}{3x} = \left| \begin{array}{c} x \to 0 \\ \sin 2x \sim 2x \\ \cos 3x \to 1 \end{array} \right| = \lim_{x \to 0} \frac{2 \cdot 2x}{3x} = \frac{4}{3}.$$

➢ *Завдання для самостійного розв'язування*

1. Знайти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos 5x}{1 - \cos 3x}$. *Відповідь.* $\frac{25}{9}$.

2. Знайти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\mathrm{tg} x - \sin x}{x^3}$. *Відповідь.* $\frac{1}{2}$.

3. Знайти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x - x}{\ln(x+1)}$. *Відповідь.* 2.

4. Знайти $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x$. *Відповідь.* 1.

4.10. Поняття неперервності функції. Класифікація точок розриву функцій

Означення. Функція $y = f(x)$ називається ***неперервною в точці*** $x = x_0$, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Виходячи з означення границь функції, поняття неперервності функції в точці можна зобразити так:

$$\left(\begin{array}{c} f(x) \text{ — неперервна} \\ \text{при } x = x_0 \end{array} \right) :=$$

$$:= \left(\left(\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists \delta > 0,\ \ 0 < |x - x_0| < \delta \right) \Rightarrow \left(|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \right) \right).$$

Звідси випливає, що для неперервності функції в точці мають виконуватися такі умови:

а) точка $x = x_0$ належить області визначення функції $D(f)$, тобто $f(x_0)$ існує;

б) деякий окіл точки $x = x_0$ входить до області визначення функції, наприклад $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset D(f)$;

в) границя $f(x)$ при $x \to x_0$ дорівнює значенню функції в точці $x = x_0$, тобто дорівнює $f(x_0)$.

Позначимо через $\Delta x = x - x_0$ приріст аргументу, а через $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ – приріст функції (рис. 12).

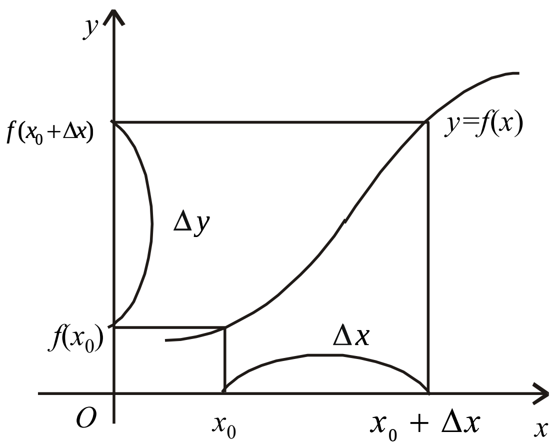


Рис. 12

Означення. Функція $y = f(x)$ називається ***неперервною в точці*** $x = x_0$, якщо в цій точці нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції, тобто

$$\begin{pmatrix} f(x) \text{ — неперервна} \\ \text{при } x = x_0 \end{pmatrix} := \\ = \left((\Delta x = x - x_0 \to 0) \Rightarrow (\Delta y = f(x) - f(x_0) \to 0) \right).$$

Означення. Функція $y = f(x)$ називається ***неперервною в точці*** $x = x_0$, якщо односторонні границі функції зліва й справа в цій точці існують, рівні між собою і дорівнюють значенню функції у цій точці, тобто:

$$\begin{pmatrix} f(x) \text{— неперервна} \\ \text{при } x = x_0 \end{pmatrix} := \left(\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0) \right).$$

Означення. Функція називається ***неперервною на проміжку***, якщо вона неперервна у кожній точці цього проміжку.

Таким чином, поняття неперервності функції у точці задається трьома, хоч і рівноправними, але різними за формулюванням означеннями. Використання конкретного означення неперервності функції в точці визначається специфікою задачі.

Теорема 1. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні у точці $x = x_0$, то у цій точці будуть неперервними функції $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$; в останньому випадку за умови, що $g(x_0) \neq 0$.

Теорема 2. Якщо функція $y = F(u)$ – неперервна для $u \in U$, а функція $u = \varphi(x)$ – неперервна для $x \in X$ і значення функції $\varphi(x) \in U$, то складна функція $y = F(\varphi(x))$ – неперервна для $x \in X$.

Зауваження. Можна довести, що всі основні елементарні функції будуть неперервними в кожному з відкритих проміжків своєї області визначення.

Теорема 3 (Коші). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на закритому проміжку $[a;\ b]$ і на кінцях проміжку набуває значення різних знаків (наприклад $f(a) > 0,\ \ f(b) < 0$), тоді на відкритому проміжку $(a;\ b)$ існує така точка $x = c$, що $f(c) = 0$ (рис. 13).

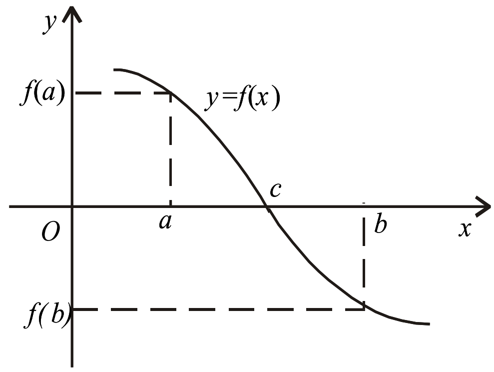


Рис. 13

Теорема 4 (Вейєрштрасса). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на закритому проміжку $[a;\ b]$, то вона набуває на цьому проміжку своїх найбільших й найменших значень (рис. 14).

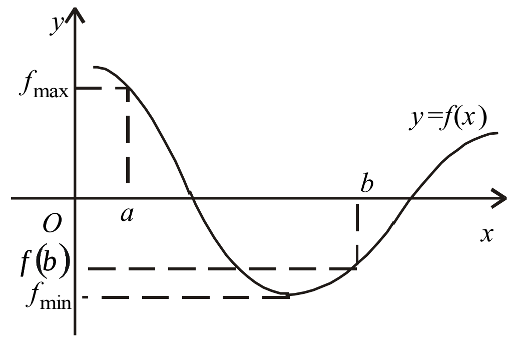


Рис. 14

Означення. Функція $y = f(x)$ називається ***розривною в точці*** $x = x_0$, якщо порушується хоча б одна з умов рівності $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$.

Розрізняють точки ***розриву 1-го* і *2-го роду* та *усувні***.

Означення. Точка $x = x_0$ називається ***точкою усувного розриву*** для функції $y = f(x)$, якщо односторонні границі функції в цій точці існують, рівні між собою, але не дорівнюють значенню функції в цій точці або функція у цій точці не існує, тобто $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq f(x_0)$.

Зауваження. Точка $x = x_0$ усувного розриву відзначається тим, що існує $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A,$ але $f(x_0) \neq A.$ Тому на основі функції $f(x)$ можна побудувати функцію $F(x) = \left[\begin{array}{l} f(x) \text{ при } x \neq x_0 \\ A \text{ при } x = x_0, \end{array}\right.$ яка буде неперервною в точці $x = x_0$,

Означення. Точка $x = x_0$ називається ***точкою розриву 1-го роду*** для функції $y = f(x)$, якщо односторонні границі (зліва і справа) функції у цій точці існують, але не рівні між собою, тобто $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$.

Означення. Точка $x = x_0$ називається ***точкою розриву 2-го роду*** для функції $y = f(x)$, якщо в цій точці не існує хоча б одна з односторонніх границь (зліва чи справа).

Методика дослідження функцій на неперервність.

1. Знайти область визначення функції $D(y)$.

2. Дослідити функцію на неперервність у відкритих проміжках $D(y)$.

3. Визначити скінченні граничні точки (с.г.т.) $D(y)$ і обчислити односторонні границі функції у цих точках.

4. Зробити висновок про характер точок розриву (якщо вони є) і побудувати графік функції поблизу цих точок.

Приклад. Дослідити на неперервність функцію $y = 2^{\frac{1}{x-1}}$.

Область визначення цієї функції $D = (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$. На кожному з інтервалів області визначення функція буде неперервна, як суперпозиція неперервних елементарних функцій. Скінченною граничною точкою D функції буде $x = 1$. Обчислимо такі границі:

$$\lim_{x \to 1-0} y = \lim_{x \to 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}} = \left| \begin{array}{l} x \to 1-0 (x < 1) \\ x - 1 \to -0 \\ \dfrac{1}{x-1} \to -\infty \\ 2^{-\infty} \to \dfrac{1}{2^{+\infty}} \to +0 \end{array} \right| = +0;$$

Отже, $x = 1$ – точка розриву 2-го роду, бо одна з односторонніх границь не існує. Граничні точки графіка функції:

$P_1\,(1 - 0; + 0)$, $P_2(1 + 0; + \infty)$.

$$\lim_{x\to 1+0} y = \lim_{x\to 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}} = \left| \begin{array}{l} x \to 1+0 (x>1) \\ x-1 \to +0 \\ \frac{1}{x-1} \to +\infty \\ 2^{\frac{1}{x-1}} \to +\infty \end{array} \right| = +\infty.$$

Графік функції $y = 2^{\frac{1}{x-1}}$ поблизу точки розриву показано на рис.1.15. Зауважимо, що гранична точка P_2 (1 + 0; + ∞) лежить на нескінченності.

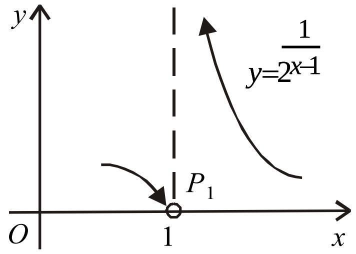


Рис. 1.15

Приклад. Дослідити на неперервність функцію $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}$.

Скорочений запис розв'язування задачі: $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

$$\left.\begin{array}{l} x \in (-\infty;\ 0) \\ x \in (0;\ +\infty) \end{array}\right\rangle y$$ – неперервна, як суперпозиція елементарних функцій.

$x = 0$ — с.г.т. $D(y)$.

$$\lim_{x\to -0} y = \lim_{x\to -0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x^2} = \left| \begin{array}{c} x \to -0 \\ x^2 \to +0 \\ \frac{1}{x^2} \to +\infty \end{array} \right| = \frac{\pi}{2} - 0;$$

$$\lim_{x\to +0} y = \lim_{x\to +0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x^2} = \left| \begin{array}{c} x \to +0 \\ x^2 \to +0 \\ \frac{1}{x^2} \to +\infty \end{array} \right| = \frac{\pi}{2} - 0.$$

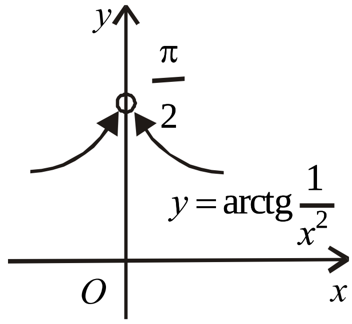


Рис. 1.16

Таким чином, точка $x = 0$ є точкою усувного розриву функції, бо односторонні границі існують і рівні між собою (сама функція при $x = 0$ не існує).

Граничні точки графіка функції $P_1\left(-0; \frac{\pi}{2} - 0\right)$ і $P_2\left(+0; \frac{\pi}{2} - 0\right)$ зливаються в одну точку (рис.1.16).

Приклад. Показати, що при $x = 4$ функція $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x-4}$ має розрив.

Якщо $x \to 4-0$, то $\frac{1}{x-4} \to -\infty$, $\lim\limits_{x\to 4-0} y = -\frac{\pi}{2}$. Якщо $x \to 4+0$, то $\frac{1}{x-4} \to +\infty$, $\lim\limits_{x\to 4+0} y = \frac{\pi}{2}$.

Таким чином, при $x \to 4$ функція має ліву та праву скінченні границі, причому ці границі різні. Звідси, $x = 4$ є точкою розриву 1-го роду.

➤ *Завдання для самостійного розв'язування*

1. Знайти точки розриву функції $y = 1/((x-1)(x-5))$.

   Відповідь. $x=1$, $x=5$ – точки розриву 2-го роду.

2. Дослідити на неперервність та побудувати графік функції $y = \dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$.

   Відповідь. $x = 0$ – точка розриву 1-го роду.

3. Знайти точки розриву функції $y = 1/(x^2+x+1)$.

   Відповідь. Функція неперервна на всій числовій прямій $(-\infty, +\infty)$.

4. Дослідити на неперервність та побудувати графік функції

$$y = \begin{cases} x^2+1, \text{ якщо } x>1, \\ x+1, \text{ якщо } x<1, \\ 3, \text{ якщо } x=1. \end{cases}$$

   Відповідь. $x = 1$ – точка усувного розриву.

5. Дослідити на неперервність функцію $y = \dfrac{1}{(x-1)(x-6)}$ на сегменті:

а) [2, 5]; б) [4, 10]; в) [0, 7].

Відповідь. а) функція неперервна; б) має одну точку розриву 2-го роду; в) має дві точки розриву 2-го роду.

➤ *Тести для самоконтролю*

Тест №1

Перший рівень

1. Яка функція зростає на $(1;2)$.

Відповідь: а) $y = x^3$; б) $y = e^{-x}$; в) $y = \frac{1}{x}$; г) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

2. Яка з функцій має асимптоту.

Відповідь: а) $y = \cos x$; б) $y = e^{-x}$; в) $y = x^2$; г) $y = x^3$.

3. Яка з функцій є парною.

Відповідь: а) $y = \sin x$; б) $y = \ln x$; в) $y = 2 + 3\cos x$; г) $y = e^x$.

4. Знайти $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{(x+1)^2 + (x-3)^2}{5x^2 + 3x - 1}$. Відповідь: а) $\frac{1}{5}$; б) 0; в) ∞; г) $\frac{2}{5}$.

5. Знайти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin \frac{3x}{4}}{x^2}$. Відповідь: а) $\frac{3}{4}$; б) 1; в) 0; г) ∞.

6. Знайти $\lim\limits_{x \to 1} (3 - 2x)^{\frac{x}{1-x}}$. Відповідь: а) 2; б) e^2; в) e^{-2}; г) e.

7. Знайти $\lim\limits_{x \to \infty} (2x - 7)(\ln(3x + 4) - \ln 3x)$. Відповідь: а) $\frac{7}{3}$; б) $-\frac{2}{7}$; в) $\frac{8}{3}$; г) $\frac{3}{4}$.

8. Знайти $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{1 - x}$. Відповідь: а) 0; б) $\frac{\pi}{2}$; в) $\frac{1}{2}$; г) π.

Другий рівень

9. Обчислити границю функції, використовуючи чудові границі, таблицю порівняння нескінченно малих $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^x + x\right)^{\frac{1}{x}}$.

10. Дослідити функцію на неперервність $y = \frac{1}{2 + 5^{\frac{1}{3-x}}}$.

Тест №2

Перший рівень

1. Яка функція зростає на $(1;2)$.

Відповідь: а) $y=2^x$; б) $y=\frac{1}{x}$; в) $y=-x^2$; г) $y=e^{-x}$.

2. Яка з функцій має асимптоту.

Відповідь: а) $y=2\cos 3x$; б) $y=(x-1)^2$; в) $y=e^{2x}$; г) $y=x^3$.

3. Яка з функцій є парною.

Відповідь: а) $y=\frac{1}{x+1}$; б) $y=2-\cos x$; в) $y=\ln x$; г) $y=\frac{1}{x}$.

4. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+5x^2-1}{8x^3+4x+3}$. Відповідь: а) $\frac{1}{4}$; б) 0; в) ∞; г) $\frac{7}{12}$.

5. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{5x^2}$. Відповідь: а) $\frac{3}{5}$; б) 0; в) $\frac{9}{5}$; г) 3.

6. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5^x-1}{3^x-1}$. Відповідь: а) $\ln\frac{5}{3}$; б) 1; в) $\frac{5}{3}$; г) $\frac{\ln 5}{\ln 3}$.

7. Знайти $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x-3}$. Відповідь: а) 2; б) 0; в) 5; г) -2.

8. Знайти $\lim\limits_{x\to -2}\frac{tg\pi x}{x+2}$. Відповідь: а) $+\infty$; б) $\frac{\pi}{2}$; в) $\frac{1}{2}$; г) π.

Другий рівень

9. Обчислити границю функції, використовуючи чудові границі, таблицю порівняння нескінченно малих $\lim\limits_{x\to +0}(arctgx)^{x^2}$.

10. Дослідити на неперервність $y=\frac{1}{5+2^{\frac{1}{x}}}$.

Розділ 5. Похідна та диференціал функції

5.1. Означення похідної. Геометричний зміст похідної

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на деякому проміжку (***a; b***). Візьмемо значення $x \in (a;b)$ і надамо аргументу приросту Δx. Тоді функція набуде приросту $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$. Розглянемо відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx і перейдемо до границі при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Якщо ця границя існує та скінченна, вона називається *похідною функції* $y = f(x)$ за змінною ***x*** і позначається $\quad y', \ y'_x, \ \dfrac{dy}{dx}, \ f'(x), \ \dfrac{df(x)}{dx}$.

Означення. ***Похідною функції*** $y = f(x)$ за аргументом ***x*** називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.

Операція знаходження похідної називається ***диференціюванням*** цієї функції.

Користуючись означенням похідної, знайти похідні функцій.

Приклад. Функція $y = x^2$. Знайти похідну в точці ***x*** = 3.

Надамо аргументу ***x*** приросту Δx, тоді функція набуде приросту

$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2 + x^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$ **.**

Складемо відношення приросту функції до приросту аргументу

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$, відшукаємо границю $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$.

Таким чином, $f'(x) = 2x$. Похідна в точці ***x*** = 3 дорівнює $f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$.

Приклад. $y = C$, де $c = \mathrm{const}$.

Надавши аргументу $\boldsymbol{x}$ приросту $\Delta\boldsymbol{x}$, дістанемо приріст функції $\Delta y = f\left(x+\Delta x\right) - f\left(x\right) = C - C = 0$. Тепер знайдемо границю відношення $\Delta y\,/\,\Delta x$ при $\Delta x \to 0$: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} 0 = 0$, тобто $C' = 0$.

Означення. Дотичною до кривої ***L*** у точці ***M*** називається граничне положення ***MN*** січної $\boldsymbol{MM_1}$ при прямуванні точки $\boldsymbol{M_1}$ по кривій ***L*** до точки ***M*** (рис. 1).

Нехай крива, задана рівнянням $y = f\left(x\right)$, має дотичну в точці ***M***(***x, y***). Позначимо (рис. 2) кутовий коефіцієнт дотичної ***MN***: $k = \text{tg}\varphi$. Надамо в точці x приросту Δx, тоді ордината у набуде приросту Δy.

З ΔMAM_1 випливає, що $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \text{tg}\alpha$. Коли $\Delta x \to 0$, то $M_1 \to M,\ \alpha \to \varphi$ і січна прямує до положення дотичної ***MN***.

Таким чином, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\text{tg}\alpha = \text{tg}\varphi = k$.

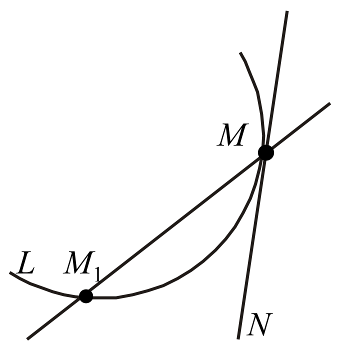


Рис. 1

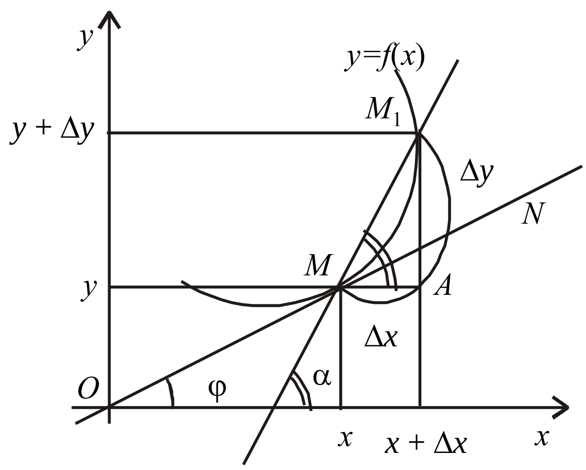


Рис. 2

Оскільки $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'\left(x\right)$, то $f'\left(x\right) = k,$ тобто похідна $f'\left(x\right)$ чисельно дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної до графіка функції ***y*** точці з абсцисою ***x***. У цьому полягає геометричний зміст похідної.

5.2. Рівняння дотичної та нормалі до плоскої кривої

Нехай функція $y = f(x)$ визначена та неперервна на деякому проміжку [$a; b$]. Визначимо рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою $x_0 \in [a;b]$.

Оскільки дотична та нормаль проходять через точку з абсцисою x_0, то рівняння кожної з них будемо шукати у вигляді рівняння прямої, що проходить через задану точку M_0 $(x_0; y_0)$ у даному напрямі (рис. 3): $y - y_0 = k(x - x_0)$, (*)

де k кутовий коефіцієнт дотичної.

Використовуючи геометричний зміст похідної, маємо $k = f'(x_0)$. Оскільки $y_0 = f(x_0)$, то з виразу (*) дістанемо рівняння дотичної у вигляді

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \quad (**)$$

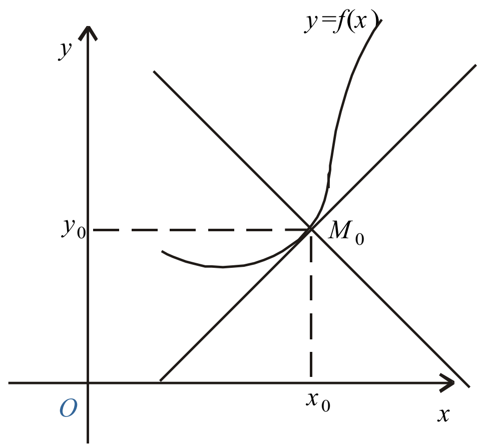


Рис. 3

Означення. ***Нормаллю*** до графіка функції в точці M_0 називається перпендикуляр, проведений до дотичної в цій точці (рис. 2.3).

Використовуючи умову перпендикулярності дотичної та нормалі, знаходимо кутовий коефіцієнт нормалі $k = -\dfrac{1}{f'(x_0)}$ і записуємо її рівняння у вигляді:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \ (***)$$

Приклад. Знайти рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y = x^2$ у точці з абсцисою $x_0 = -3$.

Знайдемо похідну від заданої функції $f'(x)=2x$, звідси $f'(-3)=-6$; $f(-3)=(-3)^2=9$. Рівняння дотичної (**) та нормалі (***) запишуться так: $y-9=-6(x+3)$, $y-9=\frac{1}{6}(x+3)$,

або у загальному вигляді: $6x+y+9=0$, $x-6y+57=0$.

5.3. Залежність між неперервністю та диференційованістю функції

Функція $y=f(x)$ є неперервною в точці x, якщо у цій точці $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$.

Означення. Функція $y=f(x)$ називається ***диференційованою в точці***, якщо у цій точці вона має похідну, тобто якщо існує кінцева границя: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$.

Означення. Функція $y=f(x)$ називається ***диференційованою на інтервалі*** (***a; b***), якщо вона диференційована в кожній точці даного інтервалу.

Зв'язок між неперервністю і диференційованістю функції встановлює теорема.

Теорема. Якщо функція диференційована в деякій точці, то у цій точці функція неперервна.

Обернене твердження невірне: для неперервної функції може не існувати похідної.

Справді, нехай функція $y=f(x)$ диференційована в точці x. Запишемо тотожність $\Delta y=\frac{\Delta y\cdot\Delta x}{\Delta x}\ (\Delta x\neq 0)$, звідси $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y\cdot\Delta x}{\Delta x}=f'(x)\cdot 0=0$.

Таким чином, функція $y=f(x)$ неперервна в точці x.

Наслідок. Якщо функція розривна в деякій точці, то вона не має похідної в цій точці.

Прикладом неперервної функції, що не має похідної в одній точці, є функція $y = |x|$ (рис. 4). Ця функція неперервна при $x = 0$, але не диференційована для цього значення, оскільки в точці з абсцисою $x = 0$ не існує дотичної до графіка функції.

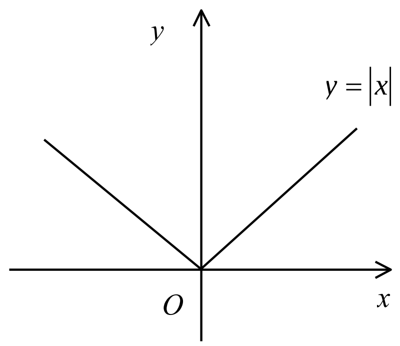


Рис. 4

Таким чином, *необхідною умовою диференційованості* функції $y = f(x)$ у точці x є її неперервність у цій точці.

5.4. Основні правила та формули диференціювання

Практично ж похідні функцій знаходять за доведеними основними правилами та основними формулами диференціювання.

Якщо $u = u(x)$ та $v = v(x)$ диференційовані в деякій точці x, тоді в цій точці:

$$(u \pm v)' = u' \pm v'; \quad (u \cdot v)' = u'v + uv'; \quad (cu)' = cu';$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2},\ v \neq 0; \qquad \left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{c \cdot v'}{v^2}; \left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{1}{c} \cdot u',\ \forall c = const.$$

Похідна складної функції.

Нехай $y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$, тобто $y = f(\varphi(x))$. Функція $f(u)$ називається зовнішньою, а функція $\varphi(x)$ – внутрішньою, або проміжним аргументом.

Теорема. Якщо $y = f(u)$ та $u = \varphi(x)$ – диференційовані функції від своїх аргументів, то похідна складної функції існує і дорівнює $y'_x = f'_u \cdot u'_x$.

Таким чином, похідна складної функції дорівнює добутку похідної зовнішньої функції за проміжним аргументом на похідну проміжного аргументу за незалежною змінною.

Похідна неявної функції.

Нехай рівняння **$F(x; y) = 0$** визначає y як неявну функцію від x. Надалі будемо вважати, що ця функція – диференційована.

Якщо продиференціювати по x обидві частини рівняння **$F(x; y) = 0$**, то дістанемо рівняння першого степеня відносно y'. З цього рівняння легко знайти y', тобто похідну неявної функції.

Приклад. Знайти y'_x з рівняння $x^2 + y^2 = 4$.

Оскільки y є функцією від x, то y^2 розглядатимемо як складну функцію від x, тобто $\left(y^2\right)' = 2y \cdot y'$. Диференціюємо по x обидві частини заданого рівняння, дістанемо $2x + 2yy' = 0$. Звідси $y' = -\dfrac{x}{y}$.

Похідна оберненої функції.

Нехай задані дві взаємно обернені диференційовані функції

$y = f(x)$ та $x = \varphi(y)$ $\left(f(\varphi(y)) = y\right)$.

Теорема. Похідна x'_y оберненої функції $x = \varphi(y)$ по змінній y дорівнює оберненій величині похідної y'_x від прямої функції $y = f(x)$: $\quad x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$.

Приклад. Обчислити похідну для функції $x = \arcsin y$.

Задана функція обернена до функції $y = \sin x$. Згідно за теоремою можна записати

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Звідси $(\arcsin y)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$. Якщо в останньому виразі замість y записати x, то дістанемо

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Похідна параметрично заданої функції.

Нехай функцію y від x задано параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad (t_1 \le t \le t_2).$$

Доведено, що $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Знайдена формула дає можливість знаходити похідну y'_x від параметрично заданої функції, не знаходячи явної залежності $y = f(x)$.

Приклад. Функцію y від x задано параметричними рівняннями:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= a\sin t \end{aligned}\right\} (0 \le t \le \pi).$$

Знайти похідну $\dfrac{dy}{dx}$: а) при будь-якому t; б) при $t = \dfrac{\pi}{4}$.

$$y'_x = \frac{(a\sin t)'}{(a\cos t)'} = \frac{a\cos t}{-a\sin t} = -\mathrm{ctg}\,t; \qquad (y'_x)\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1.$$

Похідні від основних елементарних функцій

За аналогією з попередніми прикладами можна дістати похідні від основних елементарних функцій.

Назва функцій	Складна функція
CONST	$C' = 0$
Степеневі функції	$(u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$ $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2} \cdot u'$ $(\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$

Показникові функції	$\left(a^{u}\right)' = a^{u} \cdot \ln a \cdot u'$ $\left(e^{u}\right)' = e^{u} \cdot u'$
Тригонометричні функції	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$ $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$ $(tgu)' = \dfrac{u'}{\cos^{2} u}$ $(ctgu)' = -\dfrac{u'}{\sin^{2} u}$
Логарифмічні функції	$(\log_{a} u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a}$ $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$
Зворотні тригонометричні функції	$(arctg\, u)' = \dfrac{u'}{1+u^{2}}$ $(arcctg\, u)' = -\dfrac{u'}{1+u^{2}}$ $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^{2}}}$ $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^{2}}}$
Гіперболічні функції	$(sh\, u)' = ch\, u \cdot u'$ $(ch\, u)' = sh\, u \cdot u'$ $(th\, u)' = \dfrac{1}{ch^{2} u} \cdot u'$ $(cth\, u)' = -\dfrac{1}{sh^{2} u} \cdot u'$

Приклад. Знайти похідну функції $y = 3x^2 - \sqrt[3]{x} + \ln x$.

Дана функція є алгебраїчною сумою функцій, тому використовуємо

$$(u \pm v)' = u' \pm v' \qquad \Rightarrow \qquad y' = \left(3x^2\right)' - \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' + (\ln x)'.$$

Приклад. Знайти похідну функції $y = x\sqrt{x}(3\ln x - 2)$.

Використовуємо $(u \cdot v)' = u'v + uv' \qquad \Rightarrow$

$$y' = \left(x^{\frac{3}{2}}(3\ln x - 2)\right)' = x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{3}{x} + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(3\ln x - 2) =$$

$$= 3x^{\frac{1}{2}} + \frac{9}{2}x^{\frac{1}{2}} \cdot \ln x - 3x^{\frac{1}{2}} = \frac{9}{2}\sqrt{x}\,\ln x.$$

Приклад. Знайти похідну функції $y = \sin(2x + 3)$.

$$y' = \cos(2x+3) \cdot (2x+3)' = 2\cos(2x+3).$$

Приклад. Знайти похідну y'_x з рівняння $x^3 + \ln y - x^2 e^y = 0$.

Якщо продиференціювати по x обидві частини рівняння, дістанемо

$$3x^2 + \frac{y'}{y} - x^2 e^y \cdot y' - 2xe^y = 0. \quad \text{Звідки } y' = \frac{\left(2xye^y - 3x^2\right)y}{1 - x^2 ye^y}.$$

Приклад. Знайти y'_x, якщо $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1, \\ y = 3t^5 + 5t^3 + 1. \end{cases}$

Знайдемо $x'_t = 3t^2 + 3 = 3\left(t^2 + 1\right)$, $y'_t = 15t^2\left(t^2+1\right) \Rightarrow y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} =$

$$= \frac{15t^2\left(t^2+1\right)}{3\left(t^2+1\right)} = 5t^2.$$

Похідні вищих порядків

Похідна $y' = f'(x)$ від функції $y = f(x)$ називається *похідною першого порядку* і являє собою деяку нову функцію. Можливі випадки, коли ця функція сама має похідну. Тоді похідна від похідної першого порядку $(y')'$ називається *похідною другого порядку* від функції $y = f(x)$ і позначається y'', $f''(x)$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

Похідна від похідної другого порядку $(y'')'$ називається похідною *третього порядку* та позначається y''', $f'''(x)$, $\frac{d^3 x}{dx^3}$.

Похідна від похідної (n – 1)-го порядку $\left(y^{(n-1)}\right)'$ називається *похідною* ***n****-го* порядку та позначається $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^n y}{dx^n}$.

Таким чином, $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$, $n = 1, 2, \ldots$

Приклад. Задано функцію $y = x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x + 7$.

Знайти $y', y'', y''', \ldots$.

Маємо: $y' = 5x^4 + 8x^3 - 9x^2 - 2x - \frac{1}{2}$,

$y'' = 20x^3 + 24x^2 - 18x - 2$, $y''' = 60x^2 + 48x - 18$,

$y^{(4)} = 120x + 48$, $y^{(5)} = 120$, $y^{(6)} = y^{(7)} = \ldots = 0$.

➢ *Завдання для самостійного розв'язування*

1. Скласти рівняння дотичної до гіперболи $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{8} = 1$, проведеної в точці гіперболи M (– 9, –8). *Відповідь.* $x - y + 1 = 0$.

2. Застосовуючи формули та правила диференціювання, знайти похідні таких функцій:

а) $y = \frac{2}{7}x^3\sqrt{x} - \frac{4}{11}x^5\sqrt{x} + \frac{2}{15}x^7\sqrt{x}$. *Відповідь.* $y' = x^2\sqrt{x}\left(1 - x^2\right)^2$.

б) $y = 3x^3 \cdot \ln x - x^3$. *Відповідь.* $y' = 9x^2 \cdot \ln x$.

в) $y = 2^{3x} / 3^{2x}$. *Відповідь.* $y' = \left(\frac{8}{9}\right)^x \cdot ln\frac{8}{9}$.

г) $y = x\,arccos\,\frac{x}{2} - \sqrt{4 - x^2}$. *Відповідь.* $y' = arccos\,\frac{x}{2}$.

д) $x\,sin\,y + y\,sin\,x = 0$. *Відповідь.* $y' = -\frac{y\,cos\,x + sin\,y}{x\,cos\,y + sin\,x}$.

е) $x = ln\left(1 + t^2\right),\ y = t - \mathrm{arctg}\,t$. *Відповідь.* $\frac{t}{2}$.

3. Знайти похідні другого порядку від функцій:

$y = \frac{1}{4}x^2\left(2\,ln\,x - 3\right)$. *Відповідь.* $y'' = ln\,x$.

4. Знайти похідну третього порядку від функції:

$y = \frac{x}{6\left(x + 1\right)}$. *Відповідь.* $y''' = \frac{1}{\left(x + 1\right)^4}$.

5.5. Диференціал функції. Правила знаходження диференціала

Нехай функція $y = f\left(x\right)$ диференційована на деякому проміжку, тобто для будь-якої точки x з цього проміжку границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'\left(x\right)$ існує та дорівнює скінченному числу.

Враховуючи взаємозв’язок змінної величини, що має скінченну границю, і нескінченної малої величини, можемо записати $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'\left(x\right) + \alpha$, де α – нескінченно мала величина ($\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$).

Помноживши всі члени останньої рівності на Δx, дістанемо

$$\Delta y = f'\left(x\right)\Delta x + \alpha\Delta x.$$

З цього виразу випливає, що приріст функції Δy складається із суми двох доданків, з яких перший доданок — так звана *головна частина приросту*, лінійна відносно Δx (при $\Delta x \to 0$ добуток $f'(x)\Delta x$ є нескінченно мала величина першого порядку відносно Δx). Другий доданок – добуток $\alpha\Delta x$ завжди нескінченно мала величина вищого порядку ніж Δx.

Означення. Добуток $f'(x)\Delta x$ називається ***диференціалом функції*** $y = f(x)$; його позначають символом dy, тобто $dy = f'(x)\Delta x$.

Знайдемо диференціал функції $y = x$; для цього випадку $y' = (x)' = 1$, отже, $dy = dx = \Delta x$. Таким чином, диференціал незалежної змінної збігається з її приростом Δx. З огляду на це формулу для диференціала можна записати так:

$$dy = f'(x)dx.$$

Приклад. Знайти диференціал dy функції $y = x^2$:

1) при довільних значеннях x та Δx; 2) при $x = 20$, $\Delta x = 0{,}1$.

1) $dy = \left(x^2\right)'\Delta x = 2x\Delta x$;

2) якщо $x = 20$, $\Delta x = 0{,}1$, тоді $dy = 2 \cdot 20 \cdot 0{,}1 = 4$.

Застосовуючи формулу з означення диференціала та властивості похідних, дістаємо правила знаходження диференціала:

1. $y = c$, $dy = 0$;

2. $y = uv$, $dy = udv + vdu$;

3. $y = u + v$, $dy = du + dv$;

4. $y = \dfrac{u}{v}$, $dy = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$.

Приклад. Знайти диференціал dy функції $y = x^2 \operatorname{tg}(3x+1)$.

Оскільки $y' = 2x\operatorname{tg}(3x+1) + \dfrac{3x^2}{\cos^2(3x+1)}$, тоді дістанемо

$$dy = \left(2x\operatorname{tg}(3x+1) + \frac{3x^2}{\cos^2(3x+1)}\right)dx.$$

➤ *Завдання для самостійного розв'язування*

Знайти диференціали функцій:

1. $y = \frac{x}{2}\sqrt{49 - x^2} + \frac{49}{2}\arcsin\frac{x}{7}$.   *Відповідь.* $dy = \sqrt{49 - x^2}\,dx$.

2. $y = \frac{1}{12}\ln\frac{x-6}{x+6}$.   *Відповідь.* $dy = \frac{dx}{x^2 - 36}$.

3. $y = \operatorname{arctg} e^{2x}$.   *Відповідь.* $dy = \frac{2e^{2x}dx}{1 + e^{4x}}$.

4. $y = e^{\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x} \cdot \cos x$.   *Відповідь.* $dy = e^{\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x} \cdot \sin x \operatorname{tg}^2 x dx$.

5.6. Застосування похідної.
Правило Лопіталя

Розглянемо відношення $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, де функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ визначені й диференційовані в деякому околі точки a, виключаючи, можливо, саму точку a. Може бути, що при $x \to a$ обидві функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ прямують до 0 або до ∞, тобто ці функції одночасно є нескінченно малими або нескінченно великими величинами при $x \to a$. Тоді говорять, що в точці a функція $f(x)$ має невизначеність виду $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

У цьому випадку, використовуючи похідні $\varphi'(x)$ і $\psi'(x)$, можна сформулювати правило для знаходження границі функції $f(x)$ при $x \to a$, тобто визначити спосіб для розкриття цих невизначеностей.

Теорема (правило Лопіталя). Границя відношення двох нескінченно малих або нескінченно великих функцій дорівнює границі відношення їхніх похідних (скінченній або нескінченній), якщо остання існує.

Зауваження. Якщо $\varphi'(x)$ і $\psi'(x)$ при $x \to a$ прямують одночасно до 0 або до ∞ і задовольняють ті умови, які були накладені теоремою на функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$, то до відношення $\varphi'(x)/\psi'(x)$ знову застосовуємо правило Лопіталя та виводимо формулу $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi''(x)}{\psi''(x)}$ і т. п.

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{2x}$.

Виконавши граничний перехід, дістанемо невизначеність вигляду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Застосовуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 7x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{7\cos x}{2}=\frac{7}{2}.$$

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x+1}{2x^3+7x+5}$.

Виконання граничного переходу приводить до невизначеності виду $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Застосовуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+1}{2x^2+7x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2+3x+1\right)'}{\left(2x^3+7x+5\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{6x^2+7}=$$

(виконання граничного переходу знову приводить до невизначеності виду $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, а тому застосовуємо правило Лопіталя повторно):

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+3)'}{\left(6x^2+7\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{12x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{6}\cdot 0=0.$$

Правило Лопіталя можна застосувати тільки для розкриття невизначеностей вигляду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ або $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. При розкритті інших типів невизначеностей їх перетворюють до одного з цих видів.

Невизначеність виду $[0\cdot\infty]$. Нехай $\lim\limits_{x\to a}u(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}v(x)=\infty$.

Потрібно знайти $\lim\limits_{x\to a}(u(x)\cdot v\cdot(x))$. Це невизначеність типу $[0\cdot\infty]$.

Якщо вираз записати у вигляді $\lim\limits_{x\to a} u\cdot v=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{u}{\frac{1}{v}}$ або $\lim\limits_{x\to a} u\cdot v=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{v}{\frac{1}{u}}$,

то при $x\to a$ дістанемо невизначеність відповідно вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^3\ ln\,x\right)$.

Тут маємо невизначеність вигляду $[0\cdot\infty]$. Зобразимо добуток функції у вигляді частки, а потім, отримавши невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\left(x^3\ ln\,x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{ln\,x}{\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to 0}\frac{(ln\,x)'}{\left(x^{-3}\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{3}{x^4}}=-\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}x^3=0.$$

Невизначеність вигляду $\left[0^0\right]$, $\left[\infty^0\right]$, $\left[1^\infty\right]$. Нехай маємо функцію $u(x)^{v(x)}$.

При $x\to a$ (a – скінченне або нескінченне) можливі три випадки:

а) $u\to 0,\ v\to 0$ маємо невизначеність виду $\left[0^0\right]$;

б) $u\to\infty,\ v\to 0$ дістанемо невизначеність $\left[\infty^0\right]$;

в) $u\to 1,\ v\to\infty$ маємо невизначеність виду $\left[1^\infty\right]$.

Ці невизначеності за допомогою логарифмування зводяться до невизначеності вигляду $[0\cdot\infty]$. Справді, позначимо дану функцію через y, тобто візьмемо $y=u^v$. Прологарифмувавши цю рівність, дістанемо $ln\,y=v\,ln\,u\,(u>0)$.

Легко перевірити, що при $x\to a$ добуток $v\,ln\,u$ буде невизначеністю $[0\cdot\infty]$ для всіх трьох випадків.

Відповідно до підпункту 1 розкриємо невизначеність $[0\cdot\infty]$, тобто знайдемо границю $\lim\limits_{x\to a} ln\,y=k$ (k — скінченне або ∞). Звідси $\lim\limits_{x\to a} y=\lim\limits_{x\to a} u^v=e^k$.

Приклад. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x$.

Це невизначеність виду $\left[0^0\right]$. Позначимо функцію, що стоїть під знаком границі, через y, тобто $y=(\sin x)^x$, і прологарифмуємо її

$$\ln y = x\ln\sin x = \frac{\ln\sin x}{x^{-1}}.$$

Обчислимо границю логарифма даної функції. Тут маємо невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\sin x\left(-x^{-2}\right)} = -\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x}{\sin x} = 0.$$

Звідси $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x = e^0 = 1$.

Невизначеність $[\infty-\infty]$. Якщо функції $u(x)\to\infty$, $v(x)\to\infty$ при $x\to a$ (a – скінченне або нескінченне), то різниця $u-v$ при $x\to a$ дає невизначеність $[\infty-\infty]$. Остання з допомогою алгебраїчних перетворень зводиться до невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Приклад. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$.

Маємо невизначеність виду $[\infty-\infty]$. Алгебраїчним перетворенням приведемо цю невизначеність до невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$, а потім двічі застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x + x\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+\cos x - x\sin x} = \frac{0}{2} = 0.$$

5.7. Зростання та спадання функцій

Означення. функція ***f (x)*** називається зростаючою на проміжку, якщо більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції (якщо $x_2 > x_1$ то $f(x_2) > f(x_1)$); функція спадна на проміжку, якщо більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції (якщо $x_2 > x_1$, то $f(x_2) < f(x_1)$).

Теорема. (*достатня умова зростання (спадання) функції*)

1. Якщо похідна диференційованої функції додатна всередині деякого проміжку, то функція зростає на цьому проміжку.

2. Якщо похідна диференційованої функції від’ємна всередині проміжку, то функція спадає на цьому проміжку.

Приклад. Знайти проміжки зростання та спадання функції $y = 8x - x^2$.

Область визначення функції – уся числова вісь $-\infty < x < +\infty$. Знайдемо похідну $y' = 8 - 2x$. Функція диференційована на проміжку $-\infty < x < +\infty$.

Для визначення проміжку зростання функції розв’яжемо нерівність $8 - 2x > 0$, $x < 4$, тобто функція зростає на проміжку $-\infty < x < 4$.

При визначенні проміжку спадання функції (рис. 5) маємо 8 – 2x < 0, тобто $4 < x < +\infty$.

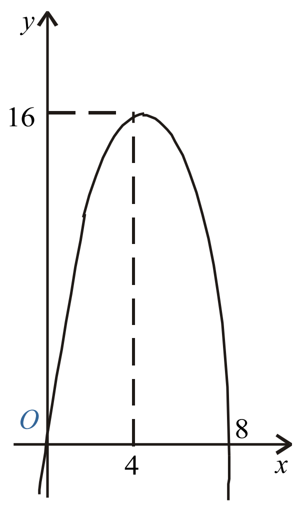


Рис. 5

5.8. Екстремуми функцій

Означення. При значенні x_1 аргументу x функція $f(x)$ має максимум $f(x_1)$, якщо в деякому околі точки x_1 виконується нерівність $f(x_1) > f(x)(x \neq x_1)$. Аналогічно: при значенні x_2 аргументу x функція $f(x)$ має мінімум $f(x_2)$, якщо в деякому околі точки x_2 має місце нерівність $f(x_2) < f(x)(x \neq x_2)$ (див. рис. 6).

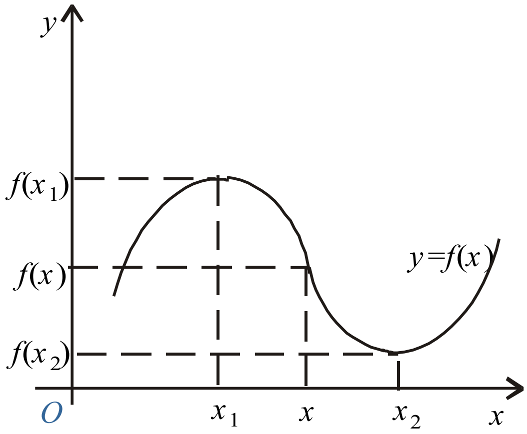


Рис. 6

Максимум або мінімум функції називається ***екстремумом функції***, а ті значення аргументу, при яких досягаються екстремуми функції, називаються ***точками екстремуму функції*** (точками максимуму або мінімуму функції).

Екстремум функції, у загальному випадку, має *локальний характер* – це найбільше або найменше значення функції порівняно з ближніми її значеннями.

Теорема. ***Необхідна умова екстремуму функції.***

У точці екстремуму диференційованої функції похідна її дорівнює нулю.

Геометрична ця умова означає, що в точці екстремуму диференційованої функції $y = f(x)$ дотична до її графіка паралельна осі Ox (рис. 7).

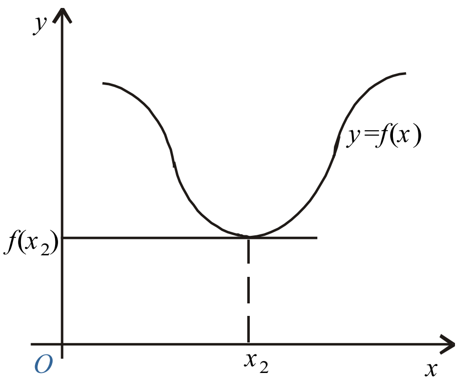


Рис. 7

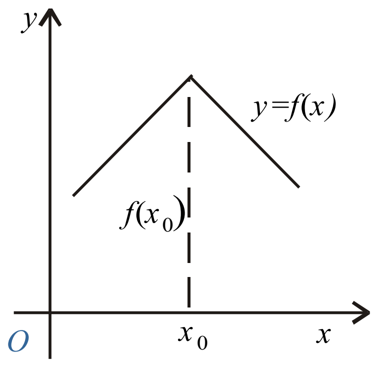


Рис. 8

Наслідок. Неперервна функція може мати екстремум тільки в тих точках, де похідна функції дорівнює нулю або не існує.

Те, що в точці екстремуму неперервної функції похідна може не існувати, показує приклад функції, графік якої має форму «ламаної» (рис. 8).

Означення. Ті значення аргументу x, які для заданої функції перетворюють на нуль її похідну $f'(x)$ або для якої похідна $f'(x)$ не існує (наприклад, перетворюється на нескінченність), називаються критичними точками першого роду.

Із того, що $f'(x_0)=0$, не випливає, що функція $f(x)$ має екстремум при $x=x_0$.

Наприклад, нехай $f(x)=x^3$. Тоді $f'(x)=3x^2$ і $f'(0)=0$, однак значення $f(0)=0$ не є екстремумом даної функції, оскільки різниця $f(x)-f(0)$ змінює знак при зміні знаку аргументу x (рис. 9).

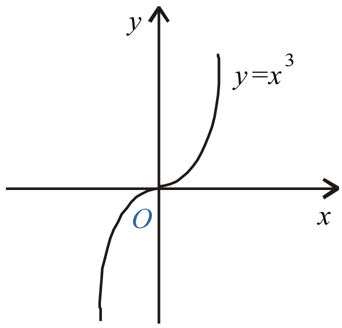


Рис. 9

Теорема 1 (*перша достатня умова*).

Нехай функція $f(x)$ неперервна на деякому інтервалі, в якому міститься критична точка x_0, і диференційована в усіх точках цього інтервалу (крім, можливо, самої точки x_0). Якщо при переході зліва направо через цю точку похідна:

1) змінює знак з «+» на «–», то при $x=x_0$ функція має максимум;

2) змінює знак «–» на «+», то функція має у цій точці мінімум;

3) не змінює свого знака, то функція в точці $x=x_0$ екстремуму не має.

Геометрична ілюстрація теореми 1 (рис.10).

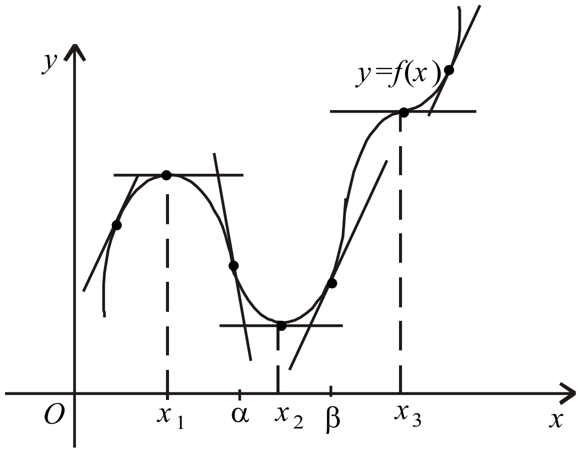


Рис. 10

При $x = x_1$ функція переходить від зростання до спадання, тобто має максимум.

При $x = x_2$ функція переходить від спадання до зростання, тобто має мінімум.

При $x = x_3$ функція не має ні максимуму, ні мінімуму.

Правило для дослідження неперервної функції $y = f(x)$

на максимум і мінімум.

1. Знаходимо першу похідну функції, тобто $f'(x)$.

2. Обчислюємо критичні значення аргументу x (критичні точки), для цього:

а) прирівнюємо першу похідну до нуля і знаходимо дійсні корені здобутого рівняння $f'(x) = 0$;

б) знаходимо значення х, для яких похідна $f'(x)$ має розрив.

3. Досліджуємо знак похідної ліворуч і праворуч від критичної точки. Оскільки знак похідної залишається сталим в інтервалі між двома критичними точками, для дослідження знака похідної ліворуч і праворуч, наприклад від критичної
точки x_2 (див. рис.2.10), досить визначити знак похідної в точках α і β $(x_1 < \alpha < x_2 < \beta < x_3)$, де x_1 і x_3 – найближчі критичні точки.

4. Обчислюємо значення функції $f(x)$ у кожній критичній точці.

Приклад. Дослідити на максимум і мінімум функцію $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$.

1. Знаходимо першу похідну $y' = x^2 - 4x + 3$.

2. Знаходимо дійсні корені рівняння $x^2-4x+3=0\ (f'(x)=0)$. Звідки $x_1=1,\ x_2=3$.

3. Досліджуємо критичні значення. Для цього область визначення функції $(-\infty,\ +\infty)$ здобутими критичними точками розбиваємо на три інтервали. Виберемо в кожному інтервалі по одній точці і обчислимо значення похідної в цих точках:

$$x=0\in(-\infty,1),\ \ y'(0)=3>0;$$

$$x=2\in(1,3),\ \ y'(2)=2^2-4\cdot 2+3=-1<0;$$

$$x=4\in(3,+\infty),\ \ y'(4)=4^2-4\cdot 4+3=11>0.$$

Знак похідної на кожному з трьох інтервалів збігається зі знаком похідної в обраній точці відповідного інтервалу (табл. 4.1).

З таблиці видно: при переході (зліва направо) через значення $x_1=1$ похідна змінює знак з «+» на «–». Звідси, при x = 1 функція має максимум:

$$y_{max}(1)=\frac{1^3}{3}-2\cdot 1^2+3\cdot 1+1=\frac{7}{3}.$$

При переході через значення $x_2=3$ похідна змінює знак з «–» на «+». Звідси, при $x_2=3$функція має мінімум: $y_{min}(3)=\frac{3^3}{3}-2\cdot 3^2+3\cdot 3+1=1.$

На інтервалі: 1) $(-\infty,\ 1)$ — функція зростає; 2) (1, 3) — спадає;

3) $(3,\ +\infty)$ — зростає.

Крім того, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1\right)=\pm\infty.$

Теорема 2 (*друга достатня умова*).

Якщо для диференційованої функції $f(x)$ у деякій точці x0 її перша похідна $f'(x)$ дорівнює нулю, а друга похідна $f''(x)$ існує й відмінна від нуля, тобто $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$, то:

1) якщо друга похідна $f''(x_0)>0$, то в точці x0 функція $f(x)$ має мінімум;

2) якщо $f''(x_0)<0$ – максимум;

3) якщо $f''(x_0)=0$ – питання залишається відкритим, і для його розв'язання треба застосувати перше правило.

Зауваження. Для критичних точок, в яких похідна функції не існує або дорівнює нескінченності, друге правило не застосовується.

Приклад. За допомогою другої похідної дослідити на екстремум функцію $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1.$

Перша похідна цієї функції $y'=x^2-4x+3$ перетворюється в нуль у точках $x_1=1,$ $x_2=3$ (див. попередній приклад).

Друга похідна $y''=2x-4$:

а) при х = 1 $y''(1)=2\cdot1-4=-2<0$, звідси в точці $x_1=1$ функція має максимум $y_{max}(1)=\frac{7}{3}$;

б) при х = 3 $y''(3)=2\cdot3-4=2>0$, тобто в точці $x_2=3$ функція має мінімум $y_{min}(3)=1$.

5.9. Найбільше і найменше значення функції на відрізку

Якщо функція $f(x)$ неперервна на проміжку [***a; b***], то вона набуває на цьому проміжку свого найбільшого й найменшого значення.

Найбільше значення функції на проміжку [***a; b***] називається абсолютним максимумом, а найменше — абсолютним мінімумом.

Припустимо, що на даному проміжку функція $f(x)$ має скінченне число критичних точок. Якщо найбільше значення досягається в середині проміжку [***a; b***], то очевидно, що це значення буде одним із максимумів функції (якщо існує кілька максимумів), точніше – найбільшим максимумом. Однак можливо, що найбільше значення досягатиметься на одному з кінців проміжку. Таким чином, функція на відрізку [***a, b***] досягає свого найбільшого значення на одному з кінців цього проміжку або в такій точці його, яка є точкою максимуму.

Аналогічне твердження можна сформулювати й про найменше значення функції: воно досягається на одному з кінців даного проміжку або в такій внутрішній точці, яка є точкою мінімуму.

Правило. Якщо треба *знайти найбільше значення неперервної функції на проміжку* [a, b], то необхідно:

1) знайти критичні точки першого роду на проміжку $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ та значення функції в них;

2) визначити значення функції на кінцях проміжку, тобто обчислити $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ і $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})$);

3) з усіх отриманих значень функції вибрати найбільше (найменше): воно й буде найбільшим (найменшим) значенням функції на проміжку.

Приклад. Визначити на проміжку $\left[-3,\ \frac{3}{2}\right]$ найбільше й найменше значення функції $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^3 - 3\boldsymbol{x} + 3$.

1) Знаходимо критичні точки першого роду на проміжку $\left[-3,\ \frac{3}{2}\right]$:

$$\boldsymbol{y}' = 3\boldsymbol{x}^2 - 3, \quad 3\boldsymbol{x}^2 - 3 = 0, \quad \boldsymbol{x}_1 = 1, \ \boldsymbol{x}_2 = -1;$$

$$\boldsymbol{x}_1 = 1 \in \left(-3,\ \frac{3}{2}\right) \Rightarrow \ \boldsymbol{y}\ (1) = 1; \quad \boldsymbol{x}_2 = -1 \in \left(-3,\ \frac{3}{2}\right) \Rightarrow \ \boldsymbol{y}\ (-1) = 5.$$

2) Визначаємо значення функції на кінцях проміжку:

$$\boldsymbol{y}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{15}{8}, \quad \boldsymbol{y}(-3) = -15.$$

3) Таким чином, найбільше значення заданої функції на проміжку $\left[-3,\ \frac{3}{2}\right]$ є:

$\max\limits_{\left[-3,\ \frac{3}{2}\right]} \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(-1) = 5$, а найменше – $\min\limits_{\left[-3,\ \frac{3}{2}\right]} \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(-3) = -15$.

5.10. Опуклість і вгнутість кривої. Точка перегину

Означення. Крива на проміжку називається ***опуклою*** (***угнутою***), якщо всі точки кривої лежать нижче (вище) будь-якої її дотичної на цьому проміжку.

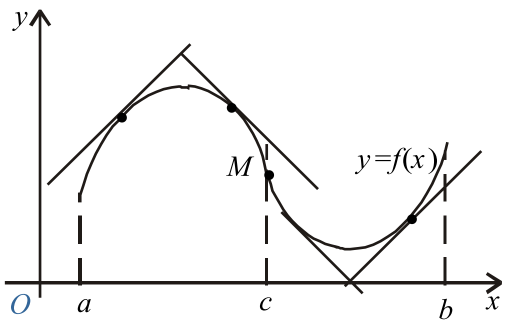


Рис. 11

З графіка функції $y = f(x)$ (рис. 11) бачимо: крива $y = f(x)$ є опуклою на проміжку (***a, c***) і вгнутою на проміжку (***c, b***).

Означення. Точка, яка відокремлює опуклу частину кривої від вгнутої, називається точкою ***перегину***. На рис. 11 точка ***M*** – точка перегину.

Теорема 1. 1) Якщо в усіх точках проміжку (***c, b***) для функції $y = f(x)$ друга її похідна додатна $\left(f''(x) > 0\right)$, то графік функції угнутий.

2) Якщо в усіх точках проміжку (a, c) друга похідна від’ємна $\left(f''(x) < 0\right)$, то графік функції випуклий.

Теорема 2. Якщо для функції $y = f(x)$ друга похідна її $f''(x)$ у деякій точці x_0 перетворюється на нуль або не існує й при переході через цю точку змінює свій знак на обернений, то точка $M(x_0, f(x_0))$ є точкою перегину графіка функції.

Зауваження. Якщо у точці x_0 друга похідна $f''(x)$ дорівнює нулю або не існує, але при переході через цю точку $f''(x)$ не змінює свого знака, то точка $M(x_0, f(x_0))$ не є точкою перегину.

Приклад. Знайти інтервали опуклості та вгнутості графіка функції $y = e^{-x^2}$.

Маємо $y' = -2xe^{-x^2}$, $y'' = 4\left(x^2 - \dfrac{1}{2}\right)e^{-x^2}$.

Друга похідна y'' перетворюється в нуль, коли $x^2 - \frac{1}{2} = 0$, звідки

$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

При переході через точки x_1 і x_2 друга похідна змінює знак. Таким чином, точки $M_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ і $M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ є точками перегину графіка функції (рис.2.12).

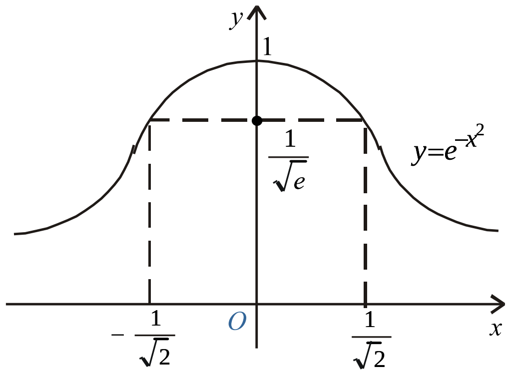


Рис. 12

Результати дослідження заносимо в таблицю

x	$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$
y''	+	0	–	0	+
y	$\cup$	Перегин	$\cap$	Перегин	$\cup$

Із цієї таблиці бачимо, що графік функції на інтервалах $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ і $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$ вгнутий, а на інтервалі $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ — опуклий.

5.11. *Асимптоти*

Означення. Пряма називається асимптотою кривої, якщо відстань від змінної точки M кривої до цієї прямої при віддаленні точки M у нескінченність прямує до нуля.

Асимптоти бувають вертикальні й похилі.

Вертикальні асимптоти.

Якщо $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$, або $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$, або $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$,

то пряма $x=a$ є вертикальною асимптотою для графіка функції $y=f(x)$.

Приклад. Крива $y=\dfrac{2}{x-5}$ має вертикальну асимптоту $x=5$, оскільки $\lim\limits_{x\to 5\pm 0} y=\pm\infty$ (рис. 13).

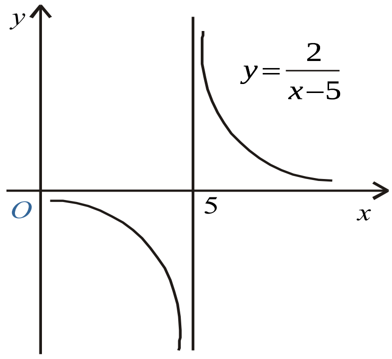


Рис. 13

Похилі асимптоти. Нехай крива $y=f(x)$ має похилу асимптоту $y=kx+b$, тоді

$$\left.\begin{aligned} k&=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}\\ b&=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)\end{aligned}\right\}.$$

Якщо хоча б одна з границь не існує, то крива похилих асимптот у відповідній напівплощині не має.

Приклад. Визначити асимптоти кривої

$$y=\frac{x^2+2x-1}{x}.$$

1.Оскільки

$$\lim_{x\to\pm 0} y=\lim_{x\to\pm 0}\frac{x^2+2x-1}{x}=\lim_{x\to\pm 0}\left(x+2-\frac{1}{x}\right)=\mp\infty,$$

то пряма $x=0$ (вісь Ox) є вертикальною асимптотою.

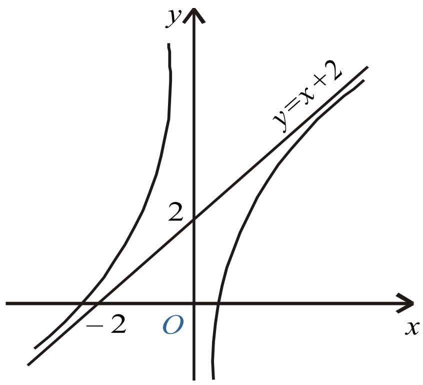


Рис. 14

2. Нехай похила асимптота має рівняння

$y=kx+b$, тоді

Отже, пряма $y=x+2$ – похила асимптота для графіка функції

(рис. 14).

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=1;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}(y-x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)=2.$$

5.12. План дослідження функцій і побудови їхніх графіків

При дослідженні функцій треба:

1. Знайти область визначення функції.

2. Встановити парність (непарність) і періодичність функції.

3. Знайти точки розриву функції та їх характер.

4. Визначити точки перетину графіка функції з осями координат.

5. Знайти точки екстремуму та обчислити значення функції у цих точках.

6. Визначити інтервали зростання й спадання функції.

7. Знайти точки перегину, інтервали випуклості й вгнутості.

8. Знайти асимптоти.

9. Знайти граничні значення функції, коли x прямує до граничних точок області визначення.

Графік функції будують за характерними точками й лініями, отриманими у результаті дослідження. Якщо їх недостатньо, знаходять допоміжні точки для деяких конкретних значень аргументу.

Приклад. Дослідити функцію $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$ і побудувати її графік.

1. Знаходимо область визначення функції. Функція існує при всіх значеннях х за винятком значення $x=1$. Звідси її область визначення $\{-\infty<x<1;\ 1<x<+\infty\}$.

2. Точка $x=1$ є точкою розриву функції. Дослідимо її характер:

$$\lim_{x\to 1\pm 0} y = \lim_{x\to 1\pm 0} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 1\pm 0}(x-1)^2} = +\infty \ .$$

Як ліворуч, так і праворуч точки $x=1$ маємо нескінченний розрив.

Точка $x=1$– точка розриву другого роду.

3. Вертикальні асимптоти. Пряма $x=1$ є вертикальною асимптотою.

4. Знаходимо точки перетину графіка функції з осями координат:

з віссю Ox: $y=0$, $\frac{2x-1}{(x-1)^2}=0$, $2x-1=0$, $x=\frac{1}{2}$, $\left(\frac{1}{2};\ 0\right)$;

з віссю Oy: $x=0$, $y=\frac{-1}{1}=-1$, $(0;\ -1)$.

5. Знаходимо точки екстремуму та інтервали зростання і спадання функції, результати заносимо у табл. 2.2:

$$y' = \frac{2(x-1)^2-2(x-1)(2x-1)}{(x-1)^4} = -\frac{2x}{(x-1)^3}\ ; \quad y'=0 \Rightarrow -2x=0 \Rightarrow x=0$$ – критична

точка. При $x=1$ y' не існує, але у цій точці сама функція теж не існує. Дослідимо критичну точку

$x=0$ на екстремум: при $x=-1$ $y'=\frac{2}{-8}=-\frac{1}{4}<0(-)$;

при $x=\frac{1}{2}$ $y'=\frac{-1}{-1/8}=8>0(+)$.

Таблиця 2.2

x	$(-\infty, 0)$	0	(0, 1)	1	$(1, +\infty)$
y'	–	0	+	Не існує	–
y	↘	ymin (–1)	↗	Не існує	↘

Проходячи через критичну точку зліва направо, похідна змінює знак з «–» на «+», через це в точці $x=0$ функція має мінімум: $y_{min}=\frac{-1}{1}=-1.$

У точці $x=1$ функція не визначена. При $1<x<+\infty$ $y'(x)<0$, отже, функція на цьому інтервалі спадає.

6. Точки перегину та інтервали опуклості й вгнутості графіка функції знаходимо за допомогою другої похідної: $y'' = \dfrac{-2(x-1)^3 + 6x(x-1)^2}{(x-1)^6} = \dfrac{2(2x+1)}{(x-1)^4}$; $y'' = 0 \Rightarrow$

$2(2x+1) = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{2}$; при $x = 1$ y'' не існує, але в цій точці не існує і сама функція.

Дослідимо точку $x = -\dfrac{1}{2}$: при $x = -1$ $y'' = \dfrac{2(-2+1)}{(-2)^4} = -\dfrac{1}{8} < 0\ (-)$;

при $x = 0$ $y'' = \dfrac{2}{1} = 2 > 0\ (+)$.

Друга похідна, проходячи через $x = -\dfrac{1}{2}$, змінює знак, отже, точка перетину кривої з цією абсцисою є точкою перегину.

Знайдемо її ординату: $y = \dfrac{2\left(-\dfrac{1}{2}\right) - 1}{\left(-\dfrac{1}{2} - 1\right)^2} = -\dfrac{8}{9} \approx -0{,}9$.

Таким чином, точка $\left(-\dfrac{1}{2};\ -\dfrac{8}{9}\right)$ – точка перегину.

У точці $x = 1$ функція не визначена. При $1 < x < +\infty$ $y'' > 0$, значить, графік функції угнутий.

Результати дослідження заносимо у табл. 2.3.

Таблиця 2.3

x	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2},\ 1\right)$		$(1,\ +\infty)$
y''	+	0	+	Не існує	+
y	$\cap$	Перегин (– 8/9)	$\cup$	Не існує	$\cup$

7. Рівняння похилої асимптоти знаходимо у вигляді $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-1}{x(x-1)^2} = 0; \quad b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 0.$$

Таким чином, похилою асимптотою є $\boldsymbol{y} = 0$ (вісь $\boldsymbol{Ox}$).

На підставі результатів дослідження будуємо графік функції. Для точнішої побудови візьмемо додатково точки на рис.2.15:
(–5; – 0,3), $\left(\frac{2}{3}, 3\right)$, (2; 3), (3; 1,3).

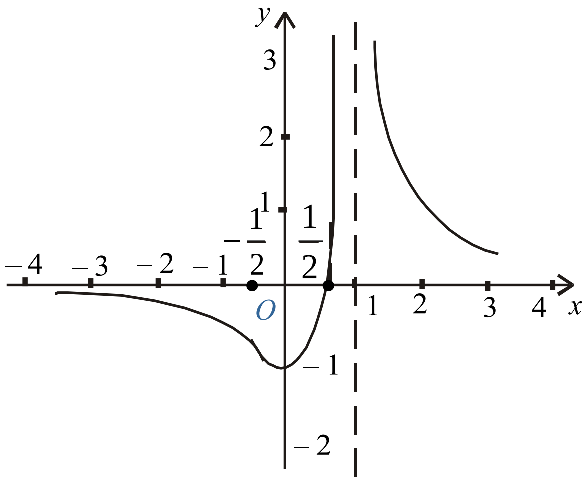


Рис. 15

➤ *Завдання для самостійного розв'язування*

1. Показати, що функція $\boldsymbol{y} = 2\boldsymbol{x}^3 + 3\boldsymbol{x}^2 - 12\boldsymbol{x} + 1$ спадає на інтервалі (–2, 1).

2. Знайти інтервали монотонності функції $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^4 - 2\boldsymbol{x}^2 - 5$.

Відповідь. $(-\infty, -1)$ – спадає; $(-1, 0)$ – зростає; $(0, 1)$ – спадає; $(1, +\infty)$ –зростає.

3. Знайти екстремуми функцій:

а) $\boldsymbol{y} = 2\boldsymbol{x}^3 - 3\boldsymbol{x}^2$. *Відповідь.* $\boldsymbol{y}_{max}(0) = 0$, $\boldsymbol{y}_{min}(1) = -1$.

б) $\boldsymbol{y} = 2\boldsymbol{x}^3 - 6\boldsymbol{x}^2 - 18\boldsymbol{x} + 7$. *Відповідь.* $\boldsymbol{y}_{max}(-1) = 17$, $\boldsymbol{y}_{min}(3) = -47$.

4. Знайти найменше та найбільше значення функції на зазначеному інтервалі:

а) $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^4 - 2\boldsymbol{x}^3 + 3$; $[-3, 2]$. *Відповідь.* $\boldsymbol{y}_{\text{найм}} = 2$, $\boldsymbol{y}_{\text{найб}} = 66$.

б) $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^4 - 2\boldsymbol{x}^2 + 5$; $[-2, 2]$. *Відповідь.* $\boldsymbol{y}_{\text{найм}} = 4$, $\boldsymbol{y}_{\text{найб}} = 13$.

5. Дослідити функцію та побудувати її графік $\boldsymbol{y} = \dfrac{\boldsymbol{x}}{1 + \boldsymbol{x}^2}$.

Відповідь. Область визначення $(-\infty < \boldsymbol{x} < +\infty)$.

Графік симетричний відносно початку координат. $y_{max}(1)=\frac{1}{2}$, $y_{min}(-1)=-\frac{1}{2}$.

Точки перегину $\left(-\sqrt{3},\ -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $(0,\ 0)$, $\left(\sqrt{3},\ \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. Асимптота $y = 0$.

5.9. Економічний зміст похідної. Використання поняття похідної в економіці

Розглянемо **задачу про продуктивність праці**. Нехай функція $u=u(t)$ відображає кількість виробленої продукції u за час t і необхідно знайти продуктивність праці в момент t_0.

За період часу від t_0 до $t_0+\Delta t$ кількість виробленої продукції зміниться від значення $u_0=u(t_0)$ до значення $u_0+\Delta u=u(t_0+\Delta t)$; тоді середня продуктивність праці за цей період часу $z_{\text{сер}}=\frac{\Delta u}{\Delta t}$. Очевидно, що продуктивність праці в момент t_0 можна визначити як граничне значення середньої продуктивності за період часу від t_0 до $t_0+\Delta t$ при $\Delta t\to 0$, тобто $z=\lim\limits_{\Delta t\to 0} z_{\text{сер}}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta t}=u'(t_0)$.

Таким чином, ***продуктивність праці є похідна від обсягу виробленої продукції по часу.***

Розглянемо ще одне поняття, яке ілюструє економічний зміст похідної.

Витрати виробництва y будемо розглядати як функцію кількості продукції x, що виробляється. Нехай Δx – приріст продукції, тоді Δy – приріст витрат виробництва і $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ – середній приріст витрат виробництва продукції на одиницю продукції. Похідна $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ виражає граничні витрати виробництва і характеризує наближено додаткові затрати на виробництво одиниці додаткової продукції.

Граничні витрати залежать від рівня виробництва (кількість продукції, що випускається) $\boldsymbol{x}$ і визначаються не постійними виробничими затратами, а лише змінними (на сировину, паливо та ін.). Аналогічним чином можуть бути визначені ***гранична виручка, граничний дохід, граничний продукт, гранична корисність, гранична продуктивність та інші граничні величини.***

Застосування диференціального числення для дослідження економічних об'єктів та процесів на основі аналізу цих граничних величин дістало назву ***граничного аналізу***. Граничні величини характеризують не стан (як сумарна чи середня величини), а процес зміни економічного об'єкта. Таким чином, похідна виступає як швидкість зміни деякого економічного об'єкта (процесу) за часом або відносно іншого об'єкта дослідження. Але необхідно врахувати, що економіка не завжди має змогу використовувати граничні величини у зв'язку з неподільністю багатьох об'єктів економічних розрахунків та перервністю (дискретністю) економічних показників у часі (наприклад, річних, квартальних, місячних та ін.). Водночас у деяких випадках можна знехтувати дискретністю показників і ефективно використовувати граничні величини.

Розглянемо, наприклад, ***співвідношення між середнім та граничним доходом*** в умовах монопольного та конкурентного ринків.

Сумарний дохід (виручка) **від реалізації продукції** $\boldsymbol{r}$ можна визначити як добуток ціни одиниці продукції $\boldsymbol{p}$ на кількість продукції $\boldsymbol{q}$, тобто $\boldsymbol{r = pq}$.

В умовах монополії одна або кілька фірм повністю контролюють пропозицію певної продукції, а отже, і її ціну. При цьому, як правило, зі збільшенням ціни попит на продукцію падає. Вважаємо, що цей процес проходить по прямій, тобто крива попиту $\boldsymbol{p\ (q)}$ є лінійна спадна функція $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{aq} + \boldsymbol{b}$, де $\boldsymbol{a} < 0,\ \boldsymbol{b} > 0$. Звідси сумарний дохід від реалізованої продукції складає $\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{aq} + \boldsymbol{b})\boldsymbol{q} = \boldsymbol{aq}^2 + \boldsymbol{bq}$. У цьому разі середній дохід на одиницю продукції $\boldsymbol{r}_{\text{сер}} = \dfrac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{aq} + \boldsymbol{b}$, а граничний прибуток, тобто додатковий дохід від реалізації одиниці додаткової продукції, складатиме $r'_q = 2aq + b$ (див. рис. 16). Звідси, в умовах монопольного ринку зі зростанням кількості реалізованої продукції граничний прибуток зменшується, внаслідок чого відбувається зменшення (з меншою швидкістю) середнього прибутку.

В умовах досконалої конкуренції, коли на ринку функціонує велика кількість учасників і кожна фірма не здатна контролювати рівень цін, стабільна реалізація продукції можлива при домінуючій ринковій ціні, наприклад***, p = b***. При цьому сумарний прибуток становитиме ***r = bq*** і відповідно середній прибуток $r_{\text{сер}} = \frac{r}{q} = b$; граничний прибуток $r'_q = b$ (див. рис.7). Таким чином, в умовах ринку вільної конкуренції, на відміну від монопольного ринку, середній та граничний прибутки збігаються.

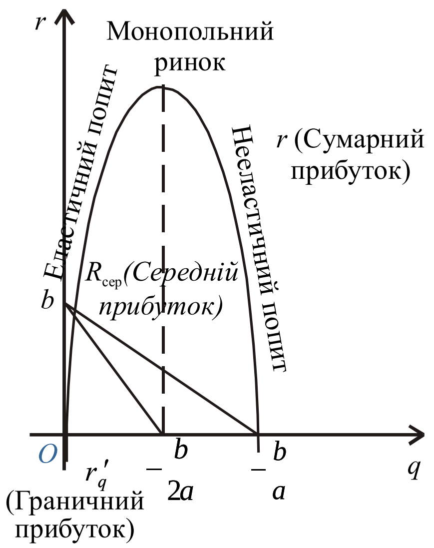


Рис. 16

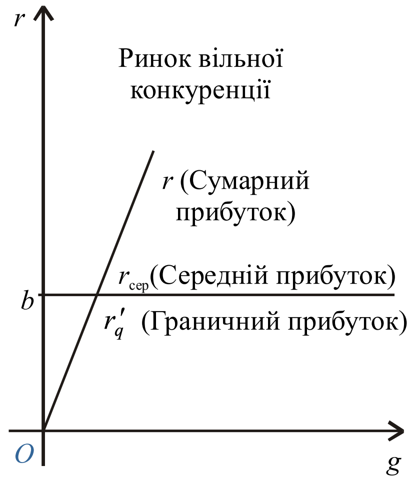


Рис. 17

Для дослідження економічних процесів та розв’язування інших прикладних задач використовується поняття еластичності функції.

Означення. ***Еластичністю функції*** $E_x(y)$ називається границя відношення відносного приросту функції y до відносного приросту змінної x при $\Delta x \to 0$:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{x}{y}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y}\cdot y'.$$

Еластичність функції наближено показує, на скільки відсотків зміниться функція $y = f(x)$ при зміні незалежної змінної *x* на 1%.

Визначимо геометричний зміст еластичності функції. За означенням $E_x(y) = \frac{x}{y} y' = \frac{x}{y} \operatorname{tg}\alpha$, де $tg\,\alpha$ – тангенс кута нахилу дотичної в точці ***M* (*x*, *y*)** (див. рис. 2.18). Враховуючи, що з трикутника ***MBN***: $MN = x\operatorname{tg}\alpha$, ***MC = y***, а з подібності трикутників ***MBN*** та ***AMC***: $\frac{MN}{MC} = \frac{MB}{MA}$ дістанемо $E_x(y) = \frac{MB}{MA}$, тобто еластичність функції (за абсолютною величиною) дорівнює відношенню відстаней по дотичній від даної точки графіка функції до точок її перетину з осями ***Ox*** та ***Oy*.** Якщо точки перетину дотичної до графіка функції ***A*** і ***B*** містяться по один бік від точки ***M***, то еластичність $E_x(y)$ додатна (див. рис. 18), якщо по різні боки, то $E_x(y)$ від'ємна (див. рис. 19).

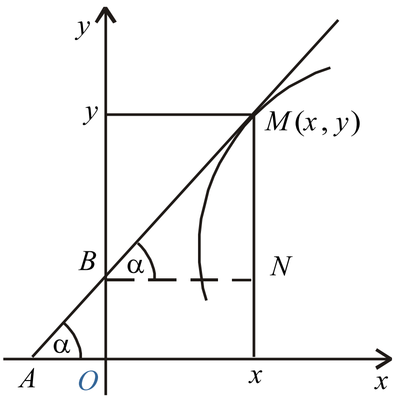


Рис. 18

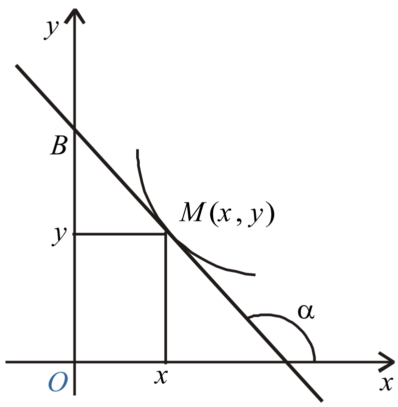


Рис. 19

Властивості еластичності функції.

1. Еластичність функції дорівнює добутку незалежної змінної на темп зміни функції $T_y = (\ln y)' = \frac{y'}{y}$, тобто $E_x(y) = x \cdot T_y$.

2. Еластичність добутку (частки) двох функцій дорівнює сумі (різниці) еластичностей цих функцій: $E_x(uv) = E_x(u) + E_x(v)$, $E_x\left(\frac{u}{v}\right) = E_x(u) - E_x(v)$.

3. Еластичності взаємно обернених функцій – взаємно обернені величини:

$$E_x(y) = \frac{1}{E_y(x)}. \qquad (*)$$

Еластичність функції *застосовується при аналізі попиту та пропозиції*. ***Наприклад***, еластичність попиту *y* відносно ціни $\boldsymbol{x}$ (або доходу $\boldsymbol{x}$) – коефіцієнт, що визначається за формулою і наближено показує, на скільки відсотків зміниться попит (обсяг пропозиції) при зміні ціни (або доходу) на 1%.

Якщо еластичність попиту (за абсолютною величиною) $|\boldsymbol{E_x(y)}| > 1$, то попит вважають еластичним, якщо $|\boldsymbol{E_x(y)}| < 1$ – нееластичним відносно ціни (або доходу). Якщо $|\boldsymbol{E_x(y)}| = 1$, то йдеться про попит з одиничною еластичністю.

Визначимо, наприклад, *як впливає еластичність попиту відносно ціни на сумарний прибуток* $\boldsymbol{z = pq}$ при реалізації продукції. Вище ми вважали криву попиту $\boldsymbol{p = p(q)}$ – лінійною функцією; тепер припустимо, що $\boldsymbol{p = p(q)}$ – довільна функція. Знайдемо граничний прибуток:

$$\boldsymbol{z'_q = (pq)'_q = p'_q \cdot q + p \cdot 1 = p\left(1 + \frac{q}{p} p'_q\right) = p(1 + E_q(p))}.$$

Згідно з формулою (*) для еластичності взаємно обернених функцій еластичність попиту відносно ціни обернена еластичності ціни відносно попиту, тобто $\boldsymbol{E_q(p)} = \frac{1}{\boldsymbol{E_p(q)}}$, а також те, що $\boldsymbol{E_p(q)} < 0$, отримаємо при довільній кривій попиту: $\boldsymbol{r'_q = p}\left(1 - \frac{1}{|\boldsymbol{E_p(q)}|}\right)$. (**)

Якщо попит не є еластичним, тобто $|\boldsymbol{E_p(q)}| < 1$, то відповідно до (*) граничний дохід r'_q буде від'ємний при будь-якій ціні; якщо попит еластичний, тобто $|\boldsymbol{E_p(q)}| > 1$, то граничний прибуток r'_q додатний. Таким чином, для нееластичного попиту зміна ціни та граничного прибутку відбувається в одному напрямку, а для еластичного попиту – в різних. Це означає, що зі зростанням ціни для продукції еластичного попиту сумарний прибуток від реалізації продукції збільшується, а для товарів нееластичного попиту — зменшується. На рис. 2.16 на кривих прибутків виділені області еластичного та нееластичного попиту.

Приклад. Залежність між витратами виробництва $\boldsymbol{y}$ і обсягом продукції $\boldsymbol{x}$**,** що випускається, визначається функцією $\boldsymbol{y} = 50\boldsymbol{x} - 0{,}05\boldsymbol{x}^3$ (грош. од.). Визначити середні та граничні витрати за умови, що обсяг продукції 10 одиниць.

Функція середніх витрат (на одиницю продукції) виражається відношенням $\boldsymbol{y}_{\text{сер}} = \dfrac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}} = 50 - 0{,}05\boldsymbol{x}^2$***;*** при $\boldsymbol{x} = 10$ середні витрати (на одиницю продукції) дорівнюють $\boldsymbol{y}_{\text{сер}} = (10) = 50 - 0{,}05 \cdot 10^2 = 45$ (грош. од.). Функція граничних витрат виражається похідною $\boldsymbol{y}'(\boldsymbol{x}) = 50 - 0{,}15\boldsymbol{x}^2$; при $\boldsymbol{x} = 10$ граничні витрати складають $\boldsymbol{y}'(10) = 50 - 0{,}15 \cdot 10^2 = 35$ (грош. од.). Отже, якщо середні витрати на виробництво одиниці продукції складають 45 грош. од., то граничні витрати, тобто додаткові затрати на виробництво додаткової одиниці продукції за умови даного рівня виробництва (обсягу продукції, що випускається 10 од.), складають 35 грош. од.

Приклад. Залежність між собівартістю одиниці продукції $\boldsymbol{y}$ (тис. грош. од.) та випуском продукції $\boldsymbol{x}$ (млрд грош. од.) виражається функцією $\boldsymbol{y} = -0{,}5\boldsymbol{x} + 80$. Знайти еластичність собівартості за умови випуску продукції в розмірі 60 млрд грош. од.

За формулою означення еластичності собівартості

$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}) = \frac{-0{,}5\boldsymbol{x}}{-0{,}5\boldsymbol{x} + 80} = \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x} - 160}.$$

При $\boldsymbol{x} = 60$ $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{x}=60}(\boldsymbol{y}) = -0{,}6$, тобто при виробництві продукції в розмірі 60 млн грош. од., збільшення її на 1% викличе зменшення собівартості на 0,6%.

Приклад. За допомогою досліду були встановлені функції попиту $\boldsymbol{q} = \dfrac{\boldsymbol{p}+8}{\boldsymbol{p}+2}$ та пропозиції $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{p} + 0{,}5$, де $\boldsymbol{q}$ та $\boldsymbol{s}$ – кількість товарів, відповідно що купується і пропонується для продажу за одиницю часу, $\boldsymbol{p}$ – ціна товару.

Знайти: а) рівноважну ціну, тобто ціну, за якої попит та пропозиція врівноважуються; б) еластичність попиту та пропозиції для цієї ціни; в) зміну доходу при збільшенні ціни на 5% від рівноважної.

а) Рівноважна ціна визначається з умови $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{s}$, $\dfrac{\boldsymbol{p}+8}{\boldsymbol{p}+2} = \boldsymbol{p} + 0{,}5$, звідки $\boldsymbol{p}$ = 2, тобто рівноважна ціна дорівнює 2 грош. од.

б) Знайдемо еластичності попиту та пропозиції :

$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{q}) = -\frac{6\boldsymbol{p}}{(\boldsymbol{p}+2)(\boldsymbol{p}+8)}; \quad \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{s}) = \frac{2\boldsymbol{p}}{2\boldsymbol{p}+1}.$$

Для рівноважної ціни $\boldsymbol{p}$ = 2 маємо $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{p}=2}(\boldsymbol{q}) = -0{,}3; \quad \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{p}=2}(\boldsymbol{s}) = 0{,}8$.

Оскільки отримані значення еластичності за абсолютною величиною менші 1, то попит і пропозиція даного товару за рівноважної (ринкової) ціни нееластичні відносно ціни. Це означає, що зміна ціни не приведе до різкої зміни попиту та пропозиції. Так, при збільшенні ціни *р* на 1% попит зменшиться на 0,3%, а пропозиція збільшиться на 0,8%.

в) При збільшенні ціни $\boldsymbol{p}$ на 5% від рівноважної попит зменшиться на 5 · 0,3 = 1,5%, тобто прибуток зросте на 3,5%.

➤ *Завдання для самостійного розв'язування*

1. Залежність між витратами виробництва у (грош. од.) та обсягом продукції, що виробляється **х** (од.), виражається функцією $\boldsymbol{y} = 10\boldsymbol{x} - 0{,}04\boldsymbol{x}^3$. Визначити середні та граничні витрати, якщо обсяг продукції становить 5 од.

Відповідь. 9 грош. од.; 7 грош. од.

2. Функції попиту $\boldsymbol{q}$ та пропозиції $\boldsymbol{s}$ від ціни р виражаються відповідно рівняннями $\boldsymbol{q}=7-\boldsymbol{p}$ та $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{p}+1$.

Знайти: а) ціну рівноваги; б) еластичність попиту та пропозиції для цієї ціни; в) зміну прибутку (у відсотках) при збільшенні ціни на 5% від рівноважної.

Відповідь. а) 3 грош. од.; б) $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{q})=-0{,}75;$ $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{s})=1;$ в) + 1,25%.

➢ *Тести для самоконтролю*

Тест №1

Перший рівень

1. Обчислити $\dfrac{dy}{dx}$ функції $y=3^{2x}$.

Відповідь: а) $3^{2x}\cdot \ln 2x$; **б**) $2x\cdot 3^{2x-1}$; **в**) $2\cdot 9^{x}\cdot \ln 3$; **г**) $6^{2x}\cdot \ln 3$.

2. Знайти $\dfrac{dy}{dx}$ функції $y=\ln \sin^{2}(3x-1)$.

Відповідь: а) $6\,ctg(3x-1)$; б) $\dfrac{6}{\sin^{2}(3x-1)}$; в) $2\ln\cos(3x-1)$; г) $2tg(3x-1)$.

3. Знайти $\dfrac{d^{2}y}{dx^{2}}$ функції $\begin{cases} x=\ln t \\ y=t-\sin t \end{cases}$.

Відповідь: а) 6; б) $\dfrac{\sin t}{t^{2}}$; в) $-t^{2}\sin t-t\cos t+t$; г) $t^{2}(\sin t-\cos t)$.

Другий рівень

4. Обчислити границю функції, використовуючи правило Лопіталя :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^{x}-1}\right).$$

5. Дослідити методами диференціального обчислення функцію $y = x^2 - 2\ln x$ та, використовуючи результати дослідження, побудувати її графік.

Тест №2

Перший рівень

1. Обчислити $\dfrac{dy}{dx}$ функції $y = \sqrt[3]{x}$.

Відповідь: **а)** $\dfrac{1}{2\sqrt[3]{x}}$; ***б)*** $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; **в)** $\dfrac{1}{3}x$; **г)** $-\dfrac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}$

2. Знайти $\dfrac{dy}{dx}$ функції $y = \ln ctg x^2$.

Відповідь: а) $2xtgx^2$; б) $-\dfrac{4x}{\sin 2x^2}$; в) $2\ln ctg 2x$; г) $-\dfrac{2x}{ctgx^2}$.

3. Знайти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ функції $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \ln \cos t \end{cases}$.

Відповідь: а) $-\dfrac{1}{\cos^2 t}$; б) $\dfrac{1}{\cos t}$; в) tgt; г) $\dfrac{1}{\sin 2t}$.

Другий рівень

4. Обчислити границю функції, використовуючи правило Лопіталя :

$$\lim_{x \to 1}(x - 1) \cdot ctg(\pi x - \pi).$$

5. Дослідити методами диференціального обчислення функцію $y = \ln\left(x^2 - 4\right)$ та, використовуючи результати дослідження, побудувати її графік.

Розділ 6. Функція декількох змінних

6.1. Означення функції декількох змінних та основні ключові поняття

Упорядкованій парі чисел $(x_0; y_0)$ на координатній площині відповідає одна точка $P_0(x_0; y_0)$. Аналогічно, в n-вимірному просторі n упорядкованим дійсним числам відповідає одна точка $P_0\left(x_1^0;\ x_2^0;\ \ldots;\ x_n^0\right)$, де числа $x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0$ будуть координатами цієї точки.

Означення. Якщо кожній точці $P(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ множини D n-вимірного простору поставлено у відповідність за деяким законом одне і тільки одне дійсне число $z \in E \subset R$, то кажуть, що в області $D \subset R^n$ ***задано функцію n незалежних змінних*** $z = f(x_1;\ x_2;\ \ldots; x_n)$. При цьому D називають областю визначення функції, E – областю значень функції.

Згідно з означенням функцію $z = f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ можна розглядати як функцію точки і записувати $z = f(P)$.

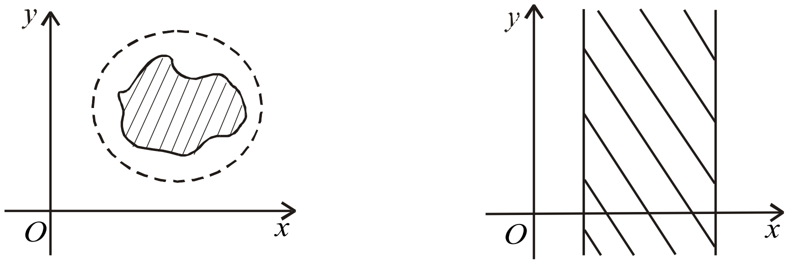
Для прикладних питань економіки має значення розгляд функції двох або трьох незалежних змінних. Тому в подальшому більше уваги звертатимемо на ці функції.

Основні ключові поняття

Множина точок називається ***обмеженою***, якщо всі її точки належать множині точок круга скінченного радіуса.

Приклад. На рис. 1 у випадку а) маємо обмежену множину,

а у випадку б) — необмежену.



а) б)

Рис. 1

Зв'язна множина – це множина точок, будь-які дві з котрих можна сполучити ламаною так, щоб усі точки ламаної належали цій множині.

δ-*окіл точки* $P_0(x_0;y_0)$ – це множина точок, координати яких задовольняють нерівність $(x-x_0)^2+(y_0-y)^2<\delta^2$.

Внутрішня точка множини – це така точка, для якої існує δ-окіл, усі точки якого належать множині.

Зовнішня точка – це така точка, для якої існує такий δ-окіл, усі точки якого не належать множині.

Область – це множина, для якої виконуються умови:

1) кожна точка множини – внутрішня точка;

2) будь-які дві точки множини можна сполучити ламаною, усі точки якої належать множині.

Межова точка області – це точка, будь-який окіл якої містить точки, які належать і не належать області.

Межа – це сукупність усіх межових точок.

Замкнена область – це множина, до якої приєднані всі її межові точки.

Функція двох змінних $z=f(x;y)$ вважається заданою, якщо кожній точці множини D, що належить площині, поставлено у відповідність за деяким законом одне і тільки одне дійсне число $z\in R$.

Границя B функції двох змінних $z = f(x;y)$ при $(x;y) \to (x_0;y_0)$ – це число, що задовольняє нерівність $|f(x;y) - B| < \varepsilon$ при будь-якому $\varepsilon > 0$, якщо для нього існує таке δ, що $0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$.

Неперервна функція двох змінних $f(x;y)$ ***у точці*** $(x_0;y_0)$ – це функція, яка визначена на множині $D \in R^2$, і для якої

$$\lim_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x;y) = f(x_0;y_0).$$

Наведемо приклади функції двох змінних.

Приклад. Витратами на виробництво даного виробу при даній техніці виробництва є функція матеріальних витрат x і витрат на оплату робочої сили y: $z = f(x; \ y)$. Це є *функція витрат виробництва*.

Приклад. Розглянемо функцію двох незалежних змінних K, L, яка називається *функцією виробництва*, або *функцією Кобба–Дугласа*, де K – кількість капіталу, L – кількість праці, яку вкладено у виробництво

$$P = \mathrm{const} K^{\alpha} L^{\beta}, \ \alpha + \beta = 1.$$

Приклад. Припустимо, що предметами споживання будуть два товари A та B, ціни яких відповідно становлять p_1 та p_2. Якщо ціни інших товарів сталі, а прибуток споживачів та структура споживань не змінюються, то попит та пропозиція кожного з товарів залежить від їх цін.

Маємо *функцію попиту на товар* A: $g_1 = f_1(p_1;p_2)$; функцію попиту на товар B: $g_2 = f_2(p_1;p_2)$; *функцію пропозиції товару* A: $s_1 = f_3(p_1;p_2)$; функцію пропозиції товару B: $s_2 = f_4(p_1;p_2)$.

Способи завдання функції

Як і функцію однієї змінної, функції двох змінних можна зобразити:

— аналітично (у вигляді формули), наприклад: $z = x(y^2 + 2x)$,

— таблично (у вигляді таблиці), наприклад таблицею задана функція $z = xy$;

y \ x	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	6	8
3	3	6	9	12
4	4	8	12	16

— графічно:

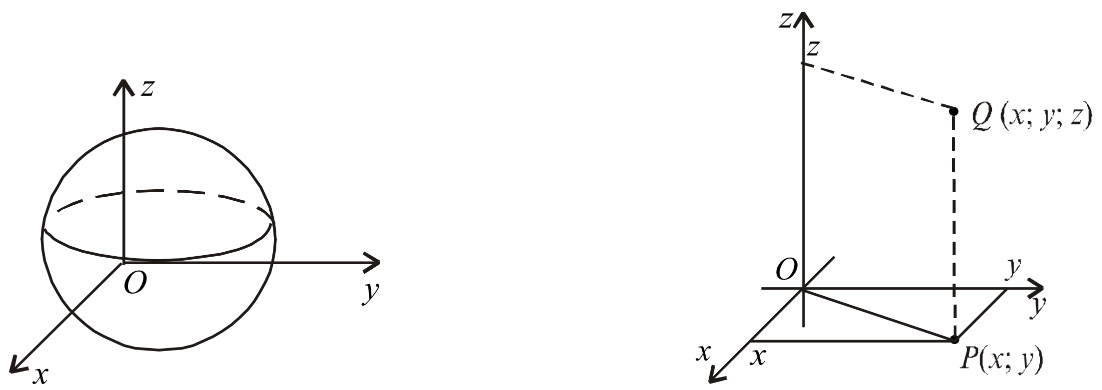


Рис. 2

Для графічного зображення функції двох змінних використовуємо систему координат **$Oxyz$** у тривимірному просторі (рис. 2).

Знаходження області визначення функції двох змінних

Покажемо алгоритм знаходження області визначення функції двох змінних на прикладі.

Приклад. Знайти область визначення функції двох змінних та надати їй геометричну інтерпретацію: $z = \dfrac{2x + y}{x - y}$; б) $z = \sqrt[4]{1 - x^2 - y^2}$.

а) Функція невизначена, якщо $x = y$. Геометрично це означає, що область визначення складається із двох напівплощин, одна з яких лежить вище, а друга – нижче від прямої $x = y$. (рис. 3).

б) Функція визначена, якщо $1-\left(x^2+y^2\right)\geq 0$, тобто $x^2+y^2\leq 1$. Це є коло з центром (0; 0) та радіусом 1 (рис. 4).

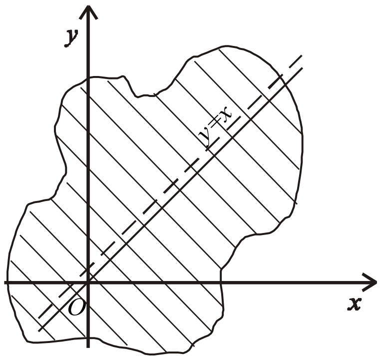


Рис. 3

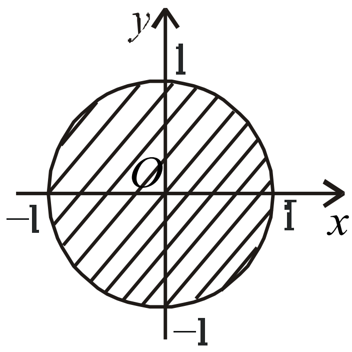


Рис. 4

➢ ***Завдання для самостійного розв'язування***

Знайти та зобразити область визначення функції двох змінних:

1) $u=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}$; 2) $u=\sqrt{4x^2-y^2-4y}$; 3) $u=ln\left(x/\sqrt{1-x-y}\right)$;

4) $u=\sqrt{1-2|x|-|y|}$; 5) $u=ln\left(y^2-4x+8\right)$; 6) $u=arcsin\,\dfrac{y-1}{x}$;

6.2. Диференційованість функції двох змінних

Нехай функція $z=f(x;y)$ визначена в деякому околі точки $P_0(x_0;y_0)$. Надамо незалежним змінним x та y приросту відповідно Δx та Δy так, щоб точка $P(x_0+\Delta x;\ y_0+\Delta y)$ не виходила за межі вказаного околу. Тоді й точки $K(x_0+\Delta x;y_0)$, $M(x_0;y_0+\Delta y)$ також належатимуть розглядуваному околу (рис. 6).

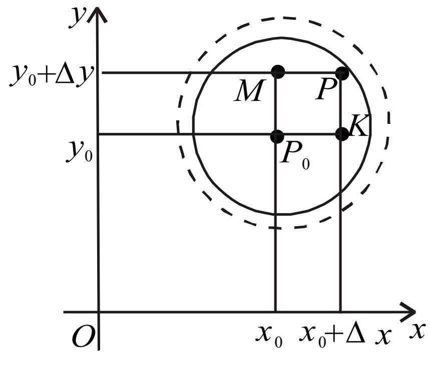


Рис. 6

Означення. Різницю $f(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y)-f(x_0; y_0)$ називають ***повним приростом функції*** $z=f(x;y)$ при переході від точки $(x_0; y_0)$ до точки $(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y)$ і позначають Δz. Різницю $f(x_0+\Delta x; y_0)-f(x_0; y_0)$ називають ***частинним приростом за x***, а різницю $f(x_0; y_0+\Delta y)-f(x_0; y_0)$ – ***частинним приростом за y*** функції $z=f(x;y)$; їх позначають відповідно $\Delta_x z$ і $\Delta_y z$. Таким чином,

$$\boxed{\begin{gathered}\Delta z=f(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y)-f(x_0; y_0),\\ \Delta_x z=f(x_0+\Delta x; y_0)-f(x_0; y_0),\ \Delta_y z=f(x_0; y_0+\Delta y)-f(x_0; y_0).\end{gathered}}$$

Зауваження. Аналогічно визначаються прирости функції більш ніж двох змінних.

Означення. Нехай функція $z=f(x; y)$ визначена в точці $(x_0; y_0)$ і в її деякому околі. Якщо існує границя $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}\left(\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta x}\right)$, то вона називається ***частинною похідною за x*** (***за*** *y*) функції $z=f(x;y)$ у точці $(x_0;y_0)$ і позначається $\frac{\partial z}{\partial x}$, або z'_x, або $f_x(x_0;y_0)$. Таким чином, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=Z'_x$, $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=Z'_y$. Із означення частинних похідних матимемо, що вони шукаються за тими правилами, що й похідні функції однієї змінної. Треба лише пам'ятати, що при знаходженні z'_x y вважається **сталою**, а при знаходженні z'_y змінна x вважається **сталою**.

Теорема. (***необхідна умова диференційовності функції у точці***). Якщо функція $z=f(x; y)$ диференційована в точці $(x_0; y_0)$, то в цій точці існують частинні похідні z'_x і z'_y.

Приклад. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ для функції $z=x^3y+\sin\left(x^2+\sqrt{y}\right)+\ \mathrm{tg}\,x+\ln y$.

Знайдемо $\frac{\partial z}{\partial x}$. Вважаючи, що $y=const,$ дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y+\cos\left(x^2+\sqrt{y}\right)\cdot 2x+\frac{1}{\cos^2 x}.$$

При знаходженні $\frac{\partial z}{\partial y}$ вважаємо, що $x = const$. Дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 + cos\left(x^2 + \sqrt{y}\right)\frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{y}.$$

Диференціали незалежних змінних збігаються з їхніми приростами: $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$. Тоді, як випливає із означення повного диференціала і теореми 13, повний диференціал функції $z = f(x; y)$ можна обчислити за формулою

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Достатня умова диференційованості функції двох змінних у точці

Для функції однієї змінної твердження щодо її диференційованості та існування похідної є рівносильними. У випадку функції двох змінних ми маємо інше: існування частинних похідних – необхідна умова диференційованості функції в точці, але не є достатньою умовою диференційованості: наприклад, для функції

$$z = f(x; y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x; y) \neq (0;\ 0) \\ 0, & (x; y) = (0;\ 0) \end{cases}$$ у точці (0; 0): $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

Але ця функція розривна в точці (0; 0), а тому функція не може бути диференційованою в цій точці. Таким чином, для диференційованості функції $z = f(x; y)$ у точці $(x_0; y_0)$ недостатньо тільки існування частинних похідних: потрібно додатково вимагати неперервності частинних похідних, що випливає з поданої далі теореми.

Теорема. Якщо функція $z = f(x; y)$ у деякому околі точки $(x_0;\ y_0)$ має неперервні частинні похідні, тоді вона диференційована в точці $(x_0;\ y_0)$.

Зауваження. Можна навести твердження про зв'язок між поняттями неперервності і диференційованості функції двох змінних у точці, аналогічні до тих, що виконуються для функції однієї змінної.

Теорема . Якщо функція $z = f(x; y)$ диференційована в точці $(x_0; y_0)$, то вона неперервна в цій точці. Обернене твердження неправильне.

Частинні похідні і повні диференціали вищих порядків

Нехай функція $z = f(x; y)$ має частинні похідні в усіх точках множини D. Візьмемо будь-яку точку $(x; y) \in D$; у цій точці існують частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, які залежать від x і y, тобто вони є функції двох змінних. Отже, можна ставити питання про знаходження їхніх частинних похідних. Якщо вони існують, то називаються *похідними другого порядку* і позначаються так:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \text{ або } z''_{xx},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \equiv \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \text{ або } z''_{yy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \text{ або } z''_{xy},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y \partial x} \equiv \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \text{ або } z''_{yx}.$$

Аналогічно визначаються і позначаються частинні похідні третього і вищих порядків, наприклад:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) \equiv \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) \equiv \frac{\partial^3 z}{\partial y \, \partial x^2}.$$

Означення. ***Диференціалом другого порядку*** від функції $z = f(x; y)$ називається диференціал від її повного диференціала першого порядку, тобто $d^2 z = d(dz)$.

Аналогічно визначаються диференціали третього і вищих порядків

$$d^3 z = d\left(d^2 z\right)$$

. . . .

$$d^n z = d\left(d^{n-1} z\right).$$

Приклад. Знайти $d^2 z$, якщо $z = \sin x \cdot \sin y$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x \sin y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \sin x \cos y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin x \sin y, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos x \cos y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\sin x \sin y,$$

$$d^2 z = -\sin x \sin y dx^2 + 2\cos x \cos y\, dx\, dy - \sin x \sin y dy^2.$$

Теорема. Якщо функція $z = f(x;\ y)$ визначена в області D і в цій області існують перші похідні f'_x та f'_y, а також другі мішані похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, які до того ж як функції від x і y неперервні в точці $\left(x_0; y_0\right) \in D$, то в цій точці

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

➢ ***Завдання для самостійного розв'язування***

1. Знайти частинні похідні першого порядку.

1) $u = xy + yz + zx$; 2) $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$; 3) $u = \left(x/y\right)^z$;

2. Знайти повний диференціал функції $f(x;\ y)$ у заданій точці, якщо:

$f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, а задана точка (1; 1); (0; 1).

3. Знайти частинні похідні другого порядку функції $f(x; y)$, якщо:

1) $f(x; y) = e^{xy}$; 2) $f(x; y) = \dfrac{x}{x+y}$; 3) $f(x; y) = (xy)^{x+y}$.

4. Знайти диференціал другого порядку функції $z = f(x; y)$, якщо:

1) $f(x; y) = x(1+y)$; 2) $f(x; y) = \dfrac{1}{y} e^{xy}$; 3) $f(x; y) = y \ln x$.

6.3. Економічні задачі

Задача 1. А. Виробнича функція Кобба–Дугласа має вигляд $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{K}^{\alpha}\text{const}\ \boldsymbol{L}^{1-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Перевірте, чи відповідає виробнича функція припущенням: 1) перші похідні додатні; 2) похідні другого порядку від'ємні; 3) мішані похідні зникають.

В. Перевірити умови 1) — 3) для функції $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{K}^{\alpha} + \boldsymbol{L}^{1-\alpha}$.

Розв'язання. **А.** 1) $\dfrac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial \boldsymbol{K}} = \alpha \boldsymbol{K}^{\alpha-1}\text{const}\ \boldsymbol{L}^{1-\alpha}$, $\quad \dfrac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial \boldsymbol{L}} = (1-\alpha)\boldsymbol{K}^{\alpha}\boldsymbol{L}^{-\alpha}$.

При $\alpha \in (0; 1)$ $\dfrac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial \boldsymbol{K}} > 0$, $\dfrac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial \boldsymbol{L}} > 0$.

2) $\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{Y}}{\partial \boldsymbol{K}^2} = \left(\alpha^2 - \alpha\right)\boldsymbol{K}^{\alpha-2}\boldsymbol{L}^{1-\alpha}\text{const}$, $\quad \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{Y}}{\partial \boldsymbol{L}^2} = \left(\alpha^2 - \alpha\right)\boldsymbol{K}^{\alpha}\boldsymbol{L}^{-\alpha-1}\text{const}$.

При $\alpha \in (0; 1)$ $\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{Y}}{\partial \boldsymbol{K}^2} < 0$, $\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{Y}}{\partial \boldsymbol{L}^2} < 0$.

3) $\dfrac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial \boldsymbol{K}\partial \boldsymbol{L}} = \dfrac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial \boldsymbol{L}\partial \boldsymbol{K}} = \left(\alpha - \alpha^2\right)\boldsymbol{K}^{\alpha-1}\boldsymbol{L}^{-\alpha} \neq 0$.

Мішані похідні не зникають.

В. При $\alpha \in (0; 1)$ маємо: 1) $\dfrac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial \boldsymbol{K}} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{K}^{\alpha-1} > 0$; $\qquad$ 2) $\dfrac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial \boldsymbol{L}} = (1-\alpha)\boldsymbol{L}^{-\alpha} < 0$,

$\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{Y}}{\partial \boldsymbol{L}^2} = -\alpha(1-\alpha)\boldsymbol{L}^{-\alpha-1} < 0$; $\quad$ 3) $\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{Y}}{\partial \boldsymbol{K}\partial \boldsymbol{L}} = \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{Y}}{\partial \boldsymbol{L}\partial \boldsymbol{K}} = 0$.

Припущення 1) — 3) функція задовольняє.

Задача 2. Задано функцію прибутку $\boldsymbol{P} = 6\left(\boldsymbol{K}^{0,75} + \boldsymbol{L}^{0,25}\right) - 1{,}5\boldsymbol{K} - 0{,}6\boldsymbol{L}$.

Обчислити попит на робочу силу, інвестиційний попит і товарну пропозицію за умови, що початковий капітал $\boldsymbol{K}_0$ дорівнює 16.

Розв'язання. Продиференціюємо функцію за N і K. Прирівнювання похідних до нуля дасть змогу визначити значення використаної робочої сили і капіталу:

$$\frac{\partial P}{\partial L} = 4{,}5L^{-0{,}25} - 1{,}5 = 0 \Rightarrow L = 81; \qquad \frac{\partial P}{\partial K} = 3K^{-0{,}5} - 0{,}6 = 0 \Rightarrow K = 25.$$

Товарну пропозицію дістанемо підставлянням знайдених значень L і K на початок періоду у виробничу функцію.

Інвестиційний попит — це різниця між значеннями кінцевого і початкового капіталу:

$$Y = 81^{0{,}75} + 16^{0{,}5} \Rightarrow Y = 31; \qquad I = K - K_0 = 25 - 16 = 9.$$

Задача 3. Нехай реальний грошовий попит народного господарства описується рівнянням $\frac{M}{P} = exp\left(-\alpha\pi^e\right)$, де $\alpha > 0$, $\alpha = \text{const}$, π^e — очікуваний індекс інфляції. При цьому реальний грошовий обіг при зростаючій інфляції знижується, оскільки з інфляцією зростають можливі витрати грошей. Обчислити фактичний індекс інфляції $\pi = \left(\frac{dp}{dt}\right) : P$ (при цьому реальні прибутки передбачаються незмінними). Чи збігається він з темпом зростання грошової маси?

Вказівка. Логарифмічним диференціюванням за часом дістаємо: $d\left(ln\,P\right)/\,dt = \pi$.

Розв'язання. Прологарифмуємо рівняння грошового попиту:

$$ln\,M - ln\,P = -\alpha\pi^e.$$

Згідно з правилом логарифмічного диференціювання похідна за часом має вигляд

$$\frac{d\left(ln\,M\right)}{dt} - \frac{d\left(ln\,P\right)}{dt} = -\alpha\frac{d\pi^e}{dt}.$$

Підставивши $\frac{d\left(ln\,P\right)}{dt} = \frac{d\left(ln\,M\right)}{dt} + \alpha\frac{d\pi^e}{dt}$ в рівняння $\pi = \frac{d\,ln\,P}{dt}$, дістанемо: $$\pi = \frac{d(\ln M)}{dt} + \alpha\frac{d\pi^e}{dt}.$$

Індекс підвищення цін лежить вище від індексу зростання грошової маси, якщо очікуваний індекс інфляції протягом часу зростає $\left(\frac{d\pi^e}{dt} > 0\right)$. У цьому випадку падає коефіцієнт утримання грошей і відповідно зростає швидкість обігу грошей, що має додатковий інфляційний вплив.

➢ *Тести для самоконтролю*

Тест №1

1. Визначити область існування функції $z = \arcsin\frac{x}{y^2}$.

Відповідь: А) $x \ge 1;\ y > 1$ Б) $x \le y^2;\ x \ge -y^2,\ y \ne 0$ В) $x \le 1;\ y > 0$

Г) $x > y;\ x \ge -y$ Д) $y^2 < x;\ y^2 > -x$

2. Обчислити суму частинних похідних першого порядку функції $u = \ln(x + \ln y)$ в точці $M(5;\ 1)$

Відповідь: А) $\frac{2}{5}$ Б) 15 В) $\frac{7}{3}$ Г) -3 Д) $\frac{5}{2}$

3. Обчислити диференціал функції $z = arctg(xy)$ в точці $M(-2;\ 3)$.

Відповідь: А) $\frac{1}{2}dx - \frac{1}{3}dy$ Б) $2dx + 3dy$ В) $\frac{3}{37}dx - \frac{2}{37}dy$

Г) $-5dx + \frac{1}{2}dy$ Д) $0{,}7dx - 0{,}5dy$

4. Обчислити похідну першого порядку складної функції

$z = e^{x-2y}$; $x = \sin t;$ $y = t^3$, якщо $t = 0$.

Відповідь: А) 1 Б) 16 В) $\frac{2}{e}$ Г) $2e^2$ Д) -7

5. Обчислити $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ в точці $M(-2;\ 3)$ функції $z = x^2 \ln(x + y)$

Відповідь: А) -8 Б) 15 В) $-\frac{1}{3}$ Г) -3 Д) $\frac{5}{2}$

Тест №2

1. Визначити область існування функції $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$.

Відповідь: А) $x \geq 0;\ y \geq 0$ Б) $x > y;\ y \geq 0$ В) $x \geq 0;\ y \geq 0;\ y \leq x^2$

Г) $x \leq 0;\ y < 1$ Д) $x^2 > y;\ y > 0;\ x > 0$

2. Обчислити суму частинних похідних першого порядку

функції $z = xy^3 + 3x + \dfrac{x^2}{y}$ в точці $M(-2;\ 1)$.

Відповідь: А) -15 Б) $3\sqrt{2}$ В) $\dfrac{13}{2}$ Г) $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$ Д) -10

3. Обчислити диференціал функції $z = \dfrac{1}{2} ln\left(x^2 + y^2\right)$ в точці $M(-3;\ 1)$.

Відповідь: А) $-0{,}3dx + 0{,}1dy$ Б) $2dx + 3dy$ В) $\dfrac{1}{2}dx - \dfrac{1}{5}dy$

Г) $-5dx + \dfrac{1}{2}dy$ Д) $\sqrt{3}dx + \sqrt{3}dy$

4. Обчислити похідну першого порядку складної функції

$z = arcsin(x - y);\quad x = 3t;\quad y = 4t^3$, якщо $t = 0$.

Відповідь: А) $\dfrac{4}{5}$ Б) 16 В) 11 Г) 3 Д) $\dfrac{7}{3}$

5. Обчислити $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ в точці $M(2;\ -1)$ функції $z = \dfrac{x - y}{x + y}$.

Відповідь: А) -8 Б) 6 В) $-\dfrac{1}{3}$ Г) $2\sqrt{3}$ Д) $\dfrac{5}{2}$

Розділ 7. Інтегральне числення

7.1. Невизначений інтеграл та його властивості

Означення. Функція $F(x)$ називається ***первісною*** для функції $f(x)$ на проміжку I, якщо на цьому проміжку $F'(x) = f(x)$ або $dF(x) = f(x)dx$.

Із означення виходить, що первісна $F(x)$ – диференційована, а значить неперервна функція на проміжку I, і її вигляд суттєво залежить від проміжку, на якому вона розглядається.

Теорема. ***(про множину первісних).***

Якщо $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$ на проміжку I, то

1) $F(x)+C$ – також первісна для $f(x)$ на проміжку I;

2) будь-яка первісна $\Phi(x)$ для $f(x)$ може бути подана у вигляді $\Phi(x) = F(x) + C$ на проміжку I. (Тут C = const називається *довільною сталою.*)

Наслідок. Дві будь-які первісні для однієї й тієї самої функції на проміжку I відрізняються між собою на сталу величину.

Означення. Операція знаходження первісних для функції $f(x)$ називається ***інтегруванням*** $f(x)$.

Задача інтегрування функції на проміжку полягає у тому, щоб знайти всі первісні функції на цьому проміжку, або довести, що функція не має первісних на цьому проміжку.

Для розв'язування задачі інтегрування функції достатньо знайти одну будь-яку первісну на розглядуваному проміжку, наприклад $F(x)$, тоді (за теоремою про множину первісних) $F(x)+C$ – загальний вигляд всієї множини первісних на цьому проміжку.

Означення. Функція $F(x)+C$, що являє собою загальний вигляд всієї множини первісних для функції $f(x)$ на проміжку I, називається ***невизначеним інтегралом*** від функції $f(x)$ на проміжку I і позначається

$$\int f(x)dx = F(x)+C\,,\ \left(F'(x)= f(x)\right),$$

де $\int$ – знак невизначеного інтеграла;

$f(x)$ – підінтегральна функція;

$f(x)dx$ – підінтегральний вираз;

dx – диференціал змінної інтегрування.

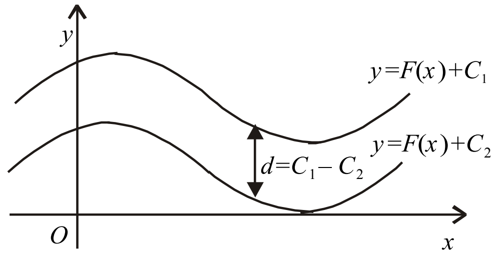


Рис. 1

Геометричний зміст невизначеного інтеграла полягає в тому, що функція $y = F(x)+C$ є рівняння однопараметричної сім'ї кривих, які утворюються одна з одної паралельним перенесенням уздовж осі ординат (рис.4.1).

Теорема (Коші). Для існування невизначеного інтеграла для функції $f(x)$ на певному проміжку достатньо, щоб $f(x)$ була неперервною на цьому проміжку.

Властивості невизначеного інтеграла, що випливають із означення.

I. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = F'(x)= f(x).$$

II. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу.

III. $\int dF(x)= F(x)+C$.

Властивості, що відображають основні правила інтегрування.

IV. Сталий множник, що не дорівнює нулю, можна виносити з-під знака інтеграла, тобто $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx,\quad k \neq 0$.

V. Невизначений інтеграл від суми функцій дорівнює сумі невизначених інтегралів від цих функцій, якщо вони існують, тобто

$$\int (f_1(x)+ f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx\,.$$

Таблиця основних інтегралів

1. $\int 0\cdot dx = C$; 2. $\int dx = x + C$; 3. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$;

4. $\int \dfrac{dx}{x} = ln|x| + C$; 5. $\int e^{x}dx = e^{x} + C$; 6. $\int a^{x}dx = \dfrac{a^{x}}{ln\,a} + C, a \neq 1$;

7. $\int sin\,xdx = -cos\,x + C$; 8. $\int cos\,xdx = sin\,x + C$;

9. $\int \dfrac{dx}{sin^{2}\,x} = -ctg\,x + C$; 10. $\int \dfrac{dx}{cos^{2}\,x} = tg\,x + C$;

11. $\int ctg\,xdx = ln|sin\,x| + C$; 12. $\int tg\,xdx = -ln|cos\,x| + C$;

13. $\int \dfrac{dx}{sin\,x} = ln\left|tg\,\dfrac{x}{2}\right| + C$; 14. $\int \dfrac{dx}{cos\,x} = ln\left|tg\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C$;

15. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}} = arcsin\,x + C = -arccos\,x + C$;

16. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}} = arcsin\,\dfrac{x}{a} + C = -arccos\,\dfrac{x}{a} + C$;

17. $\int \dfrac{dx}{1+x^{2}} = \mathrm{arctg}\,x + C = -\mathrm{arcctg}\,x + C$;

18. $\int \dfrac{dx}{a^{2}+x^{2}} = \dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\dfrac{x}{a} + C = -\dfrac{1}{a}\mathrm{arcctg}\dfrac{x}{a} + C$;

19. $\int \dfrac{xdx}{x^{2}+a} = \dfrac{1}{2}ln\left|x^{2}+a\right| + C$;

20. $\int \dfrac{dx}{x^{2}-a^{2}} = \dfrac{1}{2a}ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C, a \neq 0$;

21. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^{2}+a}} = ln\left|x + \sqrt{x^{2}+a}\right| + C$.

7.2. Основні методи інтегрування

Інтегрування розкладанням

Цей метод базується на властивості невизначеного інтеграла. Мета методу – розкласти підінтегральну функцію на такі доданки, інтеграли від яких відомі або їх простіше інтегрувати, ніж початкову підінтегральну функцію.

Приклад. $\int \frac{1\cdot dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx=$

$=\int\frac{dx}{\sin^2 x}+\int\frac{dx}{\cos^2 x}=-ctg\,x+tg\,x+C.$

Метод інтегрування частинами

Теорема. Якщо функції ***u(x)*** та ***v(x)*** мають неперервні похідні, то:

$$\int u\cdot dv=u\cdot v-\int vdu.$$

На практиці функції ***u(x)*** та ***v(x)*** рекомендується вибирати за таким правилом:

– при інтегруванні частинами підінтегральний вираз $f(x)dx$ розбивають на два множники типу $u\cdot dv$, тобто $f(x)dx=u\cdot dv$; при цьому функція ***u(x)*** вибирається такою, щоб при диференціюванні вона спрощувалась, а за ***dv*** беруть залишок підінтегрального виразу, який містить ***dx***, інтеграл від якого відомий, або може бути просто знайдений.

Приклад.

$$\int x\sin xdx=\left|\begin{array}{l}u=x,du=dx\\ dv=\sin xdx\Rightarrow\\ \Rightarrow\int dv=\int\sin xdx\Rightarrow\\ \Rightarrow v=-\cos x\end{array}\right|=-x\cos x-\int-\cos xdx=-x\cos x+\sin x+C.$$

Інколи доводиться інтегрування частинами застосовувати кілька разів, що ілюструє такий приклад.

$$\int x^2e^{3x}dx=\left|\begin{array}{l}u=x^2,du=2xdx;\\ dv=e^{3x}dx\Rightarrow v=\frac{1}{3}e^{3x}\end{array}\right|=\frac{x^2}{3}e^{3x}-\frac{2}{3}\int xe^{3x}dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l}u=x,du=dx;\\ dv=e^{3x}dx\Rightarrow v=\frac{1}{3}e^{3x}\end{array}\right|=\frac{x^2}{3}e^{3x}-\frac{2}{3}\left(\frac{x}{3}e^{3x}-\frac{1}{3}\int e^{3x}dx\right)=$$

$$=e^{3x}\left(\frac{x^2}{3}-\frac{2}{9}x+\frac{2}{27}\right)+C.$$

Метод підстановки (заміна змінної інтегрування)

Мета методу підстановки – перетворити даний інтеграл до такого вигляду, який простіше інтегрувати.

Теорема. Якщо $f(x)$ – неперервна, а $x = \varphi(t)$ має неперервну похідну, то:

$$\int f(x)dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt; \\ t = \varphi^{-1}(x) \end{array} \right| = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Наслідок. $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = |\varphi(x) = t| = \int f(t)dt.$

Зауваження. Специфіка інтегрування невизначеного інтеграла не залежить від того, є змінна інтегрування незалежною змінною чи сама є функцією (на підставі інваріантності форми запису першого диференціалу), тому, наприклад:

$$\left(\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\right) \Rightarrow \left(\int (u(x))^{\alpha} du(x) = \frac{(u(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\int (tg\, x)^{\alpha} d(tg\, x) = \frac{(tg\, x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C.\right.$$

Варіант заміни змінної інтегрування $\varphi(x) = t$ зручний тоді, коли підінтегральний вираз можна розкласти на два множники: $f(\varphi(x))$ та $\varphi'(x)dx$.

Приклад.

$$\int \sin^5 x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{1}{6}\sin^6 x + C.$$

Метод безпосереднього інтегрування

При безпосередньому інтегруванні використовується формула варіанта заміни змінної, але саму заміну не записують (її роблять усно) при цьому використовують операцію внесення функції під знак диференціала. Отже, якщо $\int f(u)du = F(u) + C,$ то $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x)) \cdot d(\varphi(x)) = F(\varphi(x)) + C.$

Зокрема, коли $\varphi(x)$ є лінійною функцією, тобто $\varphi(x) = ax + b$, дістаємо:

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{2}\int f(ax+b)\cdot d(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Зауваження. Під знак диференціала можна вносити будь-який сталий доданок (значення диференціала при цьому не зміниться): $d\varphi(x) = d(\varphi(x) + C)$.

Приклад. $\int \frac{\sin x dx}{1+3\cos x} = \int \frac{d(-\cos x)}{1+3\cos x} = -\frac{1}{3}\int \frac{d(3\cos x)}{1+3\cos x} =$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{d(1+3\cos x)}{1+3\cos x} = -\frac{1}{3}\ln\left|1+3\cos x\right| + C.$$

➤ ***Завдання для самостійного розв'язування***

1. $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx.$ *Відповідь.* $\ln|x| + 2\operatorname{arctg} x + C.$
2. $\int \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}dx.$ *Відповідь.* $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} - \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C.$
3. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}dx.$ *Відповідь.* $-\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + C.$
4. $\int \frac{dx}{x\ln^4 x}.$ *Відповідь.* $-\frac{1}{3\ln^3 x} + C.$
5. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx.$ *Відповідь.* $2\sin\sqrt{x} + C.$
6. $\int \arcsin x dx.$ *Відповідь.* $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.

7.3. Визначений інтеграл

Розіб'ємо проміжок [*a*; *b*] на n частин точками x_i, $i = (\overline{0, n})$ так що $a = x_0$, $b = x_n$. Виберемо точки ξ_i так: $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$. Побудуємо прямокутники з основою $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ і висотою $f(\xi_i)$ (рис.1).

Площа елементарного прямокутника $\Delta S_i = f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$. Площа ступінчастої фігури $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i = S_n$ буде тим менше відрізнятись від площі криволінійної трапеції S_{aABb}, чим менша довжина $max\Delta x_i$, а в граничному випадку ці площі будуть збігатися, тобто $S_{aBAb} = \lim\limits_{max\,\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\xi_i\cdot\Delta x_i$.

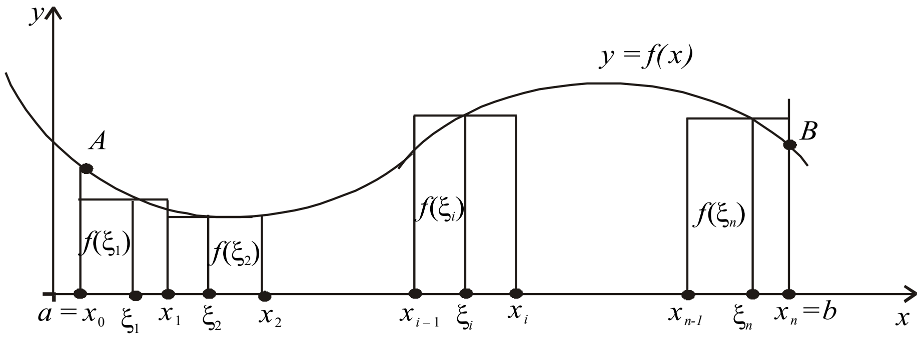


Рис. 1

Нехай $y = f(x)$ – деяка функція, що задана на проміжку [*a*; *b*]. Розіб'ємо [*a*; *b*] на *n* частин точками x_i, так що

$$a = x_0 < x_1 < x_2 <\ldots< x_{i-1} < x_i <\ldots< x_{n-1} < x_n = b.$$

Обчислимо $f(\xi_i)$, де $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$, $i = (\overline{1,n})$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Складемо інтегральну суму $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$. Позначимо $\lambda = max\,\Delta x_i$.

Означення. *Якщо існує скінченна границя інтегральних сум* S_n при $\lambda\to 0$ і не залежить ні від способу розбиття [*a*; *b*] на частини Δx_i, ні від вибору точок ξ_i, то ця границя називається **визначеним інтегралом** *від функції* $f(x)$ *на проміжку* [*a*; *b*] і позначається:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx.$$

За означенням, визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ – число, яке залежить від типу функції $f(x)$ та проміжку [*a*; *b*]; він не залежить від того, якою буквою позначена змінна інтегрування: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$.

Означення. Функція, для якої на [a; b] існує визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ називається ***інтегрованою на цьому проміжку***.

Далі буде показано, що неперервні функції – інтегровані.

Геометричний зміст визначеного інтеграла

Якщо $f(x)\geq 0,\quad x\in[a;\ b]$, то $\int_a^b f(x)dx$ дорівнює площі відповідної криволінійної трапеції (рис. 1).

Властивості визначеного інтеграла

I. Якщо $f(x)=c=\mathrm{const}$, то $\int_a^b cdx=c\cdot(b-a).$

II. Сталий множник можна виносити з-під знака визначеного інтеграла, тобто

$$\int_a^b c\cdot f(x)dx=c\cdot\int_a^b f(x)dx.$$

III. Якщо $f_1(x)$ та $f_2(x)$ інтегровані на [a; b], то

$$\int_a^b\left(f_1(x)\pm f_2(x)\right)dx=\int_a^b f_1(x)dx\pm\int_a^b f_2(x)\,dx.$$

IV. Якщо у визначеному інтегралі поміняти місцями межі інтегрування, то інтеграл змінить лише свій знак на протилежний, тобто $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx.$

V. Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю

$$\int_a^a f(x)dx=0.$$

VI. Якщо $f(x)$ – інтегрована в будь-якому із проміжків: [a; b], [a; c], [c; b], то

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

Теорема Ньютона—Лейбніца.

Якщо функція $f(x)$ – неперервна для $x \in [a;\ b],$ то визначений інтеграл від функції $f(x)$ на проміжку $[a;\ b]$ дорівнює приросту первісної функції $f(x)$ на цьому проміжку, тобто $\int\limits_a^b f(t)dt = F(b) - F(a),$ де $F'(x) = f(x).$

Позначимо дію подвійної підстановки так: $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b,$ тоді

зв’язок між визначеним та невизначеним інтегралами можна подати такою рівністю:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b = (F(x) + C)\Big|_a^b = \left(\int f(x)dx\right)\Big|_a^b$$

Наслідок. Для обчислення визначеного інтеграла достатньо знайти одну із первісних підінтегральних функцій і виконати над нею подвійну підстановку.

Приклад. $\int\limits_0^{\ln 2} \left(e^x - 1\right)^4 e^x dx = \int\limits_0^{\ln 2} \left(e^x - 1\right)^4 d\left(e^x - 1\right) = \frac{1}{5}\left(e^x - 1\right)^5\Big|_0^{\ln 2} =$

$$= \frac{1}{5}\left(\left(e^{\ln 2} - 1\right)^5 - \left(e^0 - 1\right)^5\right) = \frac{1}{5}\left((2-1)^5 - (1-1)^5\right) = \frac{1}{5}.$$

Метод підстановки у визначеному інтегралі

Теорема. Якщо: 1) $f(x)$ – неперервна для $x \in [a;\ b]$;

2) $\varphi(\alpha) = a,\ \ \varphi(\beta) = b;$ 3) $x = \varphi(t)$ та $\varphi'(t)$ – неперервні для $t \in [\alpha;\ \beta];$

4) при $t \in [\alpha;\ \beta] \Rightarrow x \in [a;\ b],$ то $\int\limits_a^b f(x)dx = \left| \begin{array}{c} x = \varphi(t), \\ dx = \varphi'(t)dt; \\ \begin{array}{c|c|c} x & a & b \\ \hline t & \alpha & \beta \end{array} \end{array} \right| = \int\limits_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right) \cdot \varphi'(t)dt.$

Зауваження. При заміні змінної інтегрування у визначеному інтегралі змінюються межі інтегрування, і тому нема потреби повертатись до початкової змінної.

Приклад. $\int\limits_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = \left| \begin{array}{c} x=t^2, \quad dx=2tdt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 4 & 9 \\ \hline t & 2 & 3 \end{array} \end{array} \right| = \int\limits_2^3 \frac{2tdt}{t+1} = 2\int\limits_2^3 \frac{t+1-1}{t+1}dt =$

$$=2\int\limits_2^3 \left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt = 2\left(t-\ln|t+1|\right)\Big|_2^3 = 2\left(3-\ln 4-\left(2-\ln 3\right)\right) = 2\left(1+\ln\frac{3}{4}\right).$$

Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Теорема. Якщо функції $u(x)$ та $v(x)$ мають неперервні похідні для $x\in[a;\ b]$, то $\int\limits_a^b u(x)dv(x) = u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)du(x)$

Приклад. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2xdx = \left| \begin{array}{l} u=x, \quad du=dx; \\ \cos 2xdx = dv, \\ v=\frac{1}{2}\sin 2x \end{array} \right| = \left(\frac{x}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2xdx =$

$$=\frac{1}{2}\left(x\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}\sin\pi+\frac{1}{2}\cos\pi\right)-\left(0\cdot\sin 0+\frac{1}{2}\cos 0\right)\right) = -\frac{1}{2}.$$

➢ ***Завдання для самостійного розв'язування***

1. $\int\limits_0^1 \left(1+e^{3x}\right)^2 e^{3x}dx.$ *Відповідь.* $\frac{1}{9}\left(\left(1+e^3\right)^3-8\right).$

2. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}.$ *Відповідь.* $\mathrm{arctg}\, e-\frac{\pi}{4}.$

3. $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}.$ *Відповідь.* $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}.$

4. $\int\limits_0^{\pi} e^x\sin xdx.$ *Відповідь.* $\frac{1}{2}\left(e^{\pi}+1\right).$

7.5. Невласні інтеграли із нескінченним проміжком інтегрування

Нехай $f(x)$ інтегрована для будь-якого скінченного $b \in [a;+\infty)$, так що $\int\limits_a^b f(x)dx$ існує.

Означення. Границя $\int\limits_a^b f(x)dx$ при $b \to +\infty$ називається ***невласним інтегралом від функції f(x) на нескінченному проміжку*** $[a;+\infty)$ і позначається так: $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Якщо ця границя існує та скінченна, то невласний інтеграл називається ***збіжним***, а якщо не існує (зокрема нескінченна), то – ***розбіжним***.

Якщо $f(x)$ – інтегрована для скінченних a та b, тобто $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, формули для обчислення невласних інтегралів на нескінченному проміжку мають вигляд:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}(F(b) - F(a)),$$

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}(F(b) - F(a)),$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx, \quad \text{де } c = const.$$

Приклад. Дослідити на збіжність інтеграл Діріхле $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$.

Для розв'язування задачі розглянемо такі три випадки:

$p = 1$. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^b\frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty}(ln|x|)\Big|_1^b = \lim\limits_{b\to+\infty}(ln\,b - ln1) = +\infty$, інтеграл розбіжний.

$p<1$. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\frac{x^{1-p}}{1-p}\right)\Bigg|_1^b=\frac{1}{1-p}\lim\limits_{b\to+\infty}\left(b^{1-p}-1\right)=+\infty$, інтеграл розбіжний.

$p>1$. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^{b}\frac{dx}{x^p}=\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\frac{x^{1-p}}{1-p}\right)\Bigg|_1^b=\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{b^{p-1}}-1\right)=$

$=\frac{1}{1-p}(0-1)=\frac{1}{p-1}$, інтеграл збіжний.

Отже, інтеграл Діріхле збіжний при $p>1$ та розбіжний при $p\le 1$.

Крім безпосереднього обчислення невласних інтегралів при дослідженні їх на збіжність існують і інші методи.

7.6. Обчислення невласних інтегралів від розривних (необмежених) функцій

Нехай $f(x)$ неперервна на проміжку $(a;\ b]$ та при $x=a$ має розрив 2-го роду.

Означення. $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b}f(x)dx=\int\limits_a^b f(x)dx$ називається ***невласним інтегралом від розривної (необмеженої) функції*** $f(x)$.

Якщо ця границя існує, то інтеграл називається ***збіжним***, а якщо не існує, то – ***розбіжним.***

Для обчислення таких невласних інтегралів використовують такі формули:

$x=a$ – точка розриву $f(x)$,

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b}f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(F(b)-F(a+\varepsilon)\right).$$

$x=b$ – точка розриву $f(x)$,

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a}^{b-\varepsilon}f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(F(b-\varepsilon)-F(a)\right).$$

III. $x=c\in(a;\ b)$ — точка розриву $f(x)$,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \to +0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to +0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx .$$

Зауваження. До невласних інтегралів, які мають точку розриву, що є внутрішньою для $[a;\ b]$, не можна застосувати формулу Ньютона–Лейбніца.

Приклад. Обчислити $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$.

Неправильне розв’язання: $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{-1}^{1} = -1 - \left(-\frac{1}{-1}\right) = -2$.

Правильне розв’язання: $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty) \Rightarrow$

$x = 0 \in [-1;\ 1]$ –точка розриву 2-го роду функції $f(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$ – невласний.

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon_1 \to +0} \int_{-1}^{0-\varepsilon_1} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\varepsilon_2 \to +0} \int_{0+\varepsilon_2}^{1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon_1 \to +0} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{-1}^{-\varepsilon_1} +$$

$$+ \lim_{\varepsilon_2 \to +0} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{\varepsilon_2}^{1} = \lim_{\varepsilon_1 \to +0} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - 1\right) + \lim_{\varepsilon_2 \to +0} \left(-1 + \frac{1}{\varepsilon_2}\right) = +\infty + \infty = +\infty \Rightarrow$$

інтеграл розбіжний.

➤ *Завдання для самостійного розв’язування*

У задачах обчислити невласні інтеграли (або встановити їх розбіжність).

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x dx}{x^2 + 1}$. *Відповідь.* Розбіжний.

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$. *Відповідь.* π.

3. $\int_{0}^{+\infty} x \sin x dx$. *Відповідь.* Розбіжний.

4. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$. *Відповідь.* Розбіжний.

5. $\int\limits_0^1 x\ln x dx$. *Відповідь.* $-\frac{1}{4}$.

6. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$. *Відповідь.* 2.

➤ *Тести для самоконтролю*

Тест №1

Перший рівень

1. Визначити тип наступних інтегралів $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^3-3}$

Відповідь: а) невизначений інтеграл; б) визначений інтеграл; в) невласний інтеграл 1 роду; г) невласний інтеграл 2 роду.

2. Визначити тип наступних інтегралів $\int \frac{dx}{x^3-3}$

Відповідь: а) невизначений інтеграл; б) визначений інтеграл; в) невласний інтеграл 1 роду; г) невласний інтеграл 2 роду.

3. Визначити тип наступних інтегралів $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^3-3}$

Відповідь: а) невизначений інтеграл; б) визначений інтеграл; в) невласний інтеграл 1 роду; г) невласний інтеграл 2 роду.

4. Визначити тип наступних інтегралів $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^3-3}$

Відповідь: а) невизначений інтеграл; б) визначений інтеграл; в) невласний інтеграл 1 роду; г) невласний інтеграл 2 роду.

Другий рівень

5. Обчислити: а) $\int (4-3x)e^{-3x}dx$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$; в) $\int \frac{3+x}{3-x}dx$.

6. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$; б) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}} dx$.

Тест №2

Перший рівень

1. Визначити тип наступних інтегралів $\int\limits_{-\infty}^{3} \frac{dx}{(x-4)^2}$

Відповідь: а) невизначений інтеграл; б) визначений інтеграл; в) невласний інтеграл 1 роду; г) невласний інтеграл 2 роду.

2. Визначити тип наступних інтегралів $\int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{(x-4)^2}$

Відповідь: а) невизначений інтеграл; б) визначений інтеграл; в) невласний інтеграл 1 роду; г) невласний інтеграл 2 роду.

3. Визначити тип наступних інтегралів $\int\limits_{4}^{8} \frac{dx}{(x-4)^2}$

Відповідь: а) невизначений інтеграл; б) визначений інтеграл; в) невласний інтеграл 1 роду; г) невласний інтеграл 2 роду.

4. Визначити тип наступних інтегралів $\int \frac{dx}{(x-4)^2}$

Відповідь: а) невизначений інтеграл; б) визначений інтеграл; в) невласний інтеграл 1 роду; г) невласний інтеграл 2 роду.

Другий рівень

5. Обчислити: а) $\int arctg\sqrt{4x-1}dx$; б) $\int \frac{1+\ln x}{x} dx$; в) $\int \frac{x}{x+10} dx$.

6. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x \cdot dx}{1+x^4}$; б) $\int\limits_{0}^{1} x \cdot \ln x \, dx$.

Розділ 8. Диференціальні рівняння

У задачах економіки часто доводиться відшукувати функцію $y = f(x)$ на підставі співвідношення між цією функцією та її похідними $f'(x),\ f''(x),\ \ldots$.

Це співвідношення називається *звичайним диференціальним рівнянням*.

У цьому розділі викладені загальні методи розв'язування звичайних диференціальних рівнянь.

8.1. Диференціальні рівняння першого порядку. Основні поняття

Означення. *Диференціальним рівнянням* називається рівняння, яке містить похідну шуканої функції. Найбільший порядок похідних називається порядком диференціального рівняння.

У загальному випадку диференціальне рівняння ***n***-го порядку має вигляд

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0\,.$$

Далі замість слів «диференціальні рівняння» використовуватимемо позначення ДР.

Приклад. $y' = xy$ — ДР першого порядку; $y'''y' - y''y' = 0$ — ДР третього порядку.

Диференціальне рівняння може визначити функцію багатьох змінних.

Приклад. Рівняння з частинними похідними

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{x_1}{\alpha} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{x_2}{1-\alpha} = 0$$

має має розв'язок $f(x_1, x_2) = K_{x_1}^{\alpha}\ \ x_2^{1-\alpha}$, який називається функцією Кобба—Дугласа, яка відома з економіки.

У запропонованому розділі розглянути лише диференціальні рівняння, в яких шукана функція залежить лише від одного аргументу. Такі рівняння називаються звичайними.

У даній темі вивчаємо ДР першого порядку, які в загальному вигляді можна записати рівнянням

$$F(x,\ y,\ y')=0. \tag{1.1}$$

Це — ДР рівняння, що не розв'язане відносно похідної. Якщо рівняння (1) можна розв'язати відносно похідної, то рівняння (1) подаємо у вигляді

$$y'=f(x,\ y). \tag{1.2}$$

Це ДР рівняння, що розв'язане відносно похідної, і його можна записати у вигляді $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ або $dy=f(x,y)dx$.

Якщо $f(x;y)$ є дробом, $f(x;y)=-\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$, тоді ДР першого порядку можна записати в симетричній формі

$$M(x,\ y)dx+N(x,\ y)dy=0. \tag{1.3}$$

Означення. Розв'язком ДР $y'=f(x,y)$ називається функція $y=\varphi(x)$, яка при підстановці у ДР перетворює його на тотожність. Графік функції $y=\varphi(x)$ називається інтегральною кривою.

Приклад. Задача інтегрування функцій може бути розглянута як задача інтегрування ДР $y'=f(x)$ і має розв'язок $y=\int f(x)dx+c,$ який знаходиться інтегруванням, тобто квадратурою.

Інтегральні криві утворюються зсувом однієї з них вздовж осі у.

Приклад. ДР $y'=3y$ має розв'язок $y=e^{3x}$. Справді, $y'=3e^{3x}$. Підставивши y' в рівняння, дістанемо тотожність $3e^{3x}\equiv 3e^{3x}$.

Звичайно, ДР має нескінченну множину розв'язків. Так, попереднє рівняння $y' = 3y$ має розв'язок $y = Ce^{3x}$, де C — довільна константа.

Задача Коші

Розглянемо ДР (1.2) $\quad y' = f(x, y)$.

Означення. Задача пошуку розв'язку $y = \varphi(x)$, що задовольняє умови

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0 \tag{2.1}$$

називається *задачею Коші*. Умови (2.1) називаються початковими умовами, числа $y_0,\ x_0$ називаються початковими значеннями.

Теорема існування та єдиності розв'язків.

Нехай функція $f(x, y)$ неперервна в області D і задовольняє в області D умову Ліпшиця: $\quad |\, f(x_1 y_1) - f(x,\ y_2)| \le L|\, y_1 - y_2|,\ \ L = const\,,$ (2.2)

тоді при $(x_0, y_0) \in D$ існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ ДР, який задовольняє початкові умови (4) $y_0 = \varphi(x_0)$.

Якщо в області D виконуються умови теореми існування та єдності, то через кожну точку області D проходить єдина інтегральна крива. Задача Коші полягає у знаходженні інтегральної кривої, що проходить через задану точку (x_0, y_0).
Умову (2.2) можна замінити іншою умовою:

$$\left| \frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y} \right| \le L\,. \tag{2.3}$$

Означення. Точки, в яких порушується єдиність розв'язків ДР, називаються *особливими*. Розв'язок ДР називається *особливим*, коли всі точки на розв'язку особливі.

Означення. Функція $y = \varphi(x, C)$, що містить довільну сталу C, називається загальним розв'язком ДР (1.2), якщо функція $y = \varphi(x, C)$ є розв'язком ДР при довільному значенні сталої C, тобто $\dfrac{\partial \varphi(x, c)}{\partial x} \equiv f(x, \varphi(x, c))$ і за рахунок вибору довільної сталої C можна розв'язати задачу Коші з довільними початковими умовами, тобто рівняння $y_0 = \varphi(x_0, c)$ розв'язується відносно C. Розв'язок $y = \varphi(x, C_0)$ при фіксованому значенні сталої C називається частинним розв'язком.

Приклад. ДР $y' = 2xy^2$ має загальний розв'язок $y = -\dfrac{1}{x^2 + C}$.

Справді, маємо тотожність: $\left(-\dfrac{1}{x^2 + C}\right)' = 2x\left(\dfrac{1}{x^2 + C}\right)^2$.

При довільних початкових значеннях (x_0, y_0), $y_0 \neq 0$ знаходимо значення довільної сталої C

$$y_0 = -\frac{1}{x_0^2 + C} \Rightarrow C = -x_0^2 - \frac{1}{y_0}.$$

Якщо довільна стала виражена через початкові дані, то загальний розв'язок називається *розв'язком у формі Коші*.

Означення. Задача знаходження розв'язків ДР називається інтегруванням ДР. Самий розв'язок називається також *інтегралом* ДР. Назва пояснюється розв'язуванням найпростішого ДР $y' = f(x) \Rightarrow y = \int f(x)dx$.

Загальний розв'язок може бути знайдений у неявній формі: $\varphi(x, y) = C$. Тоді ця рівність називається інтегралом ДР. Функція $\varphi(x, y)$ також називається інтегралом ДР. Якщо *загальний розв'язок* ДР подається неявним рівнянням $\psi(x, y, C) = 0$, то рівняння називається *загальним інтегралом* ДР.

Приклад. Розв'яжемо ДР $y' = \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{y}$.

Його можна записати у вигляді $\dfrac{dy}{\sqrt[3]{y}} = \dfrac{3}{2}dx$, $\int \dfrac{dy}{\sqrt[3]{y}} = \dfrac{3}{2}\int dx$, $\dfrac{3}{2}y^{\frac{2}{3}} = \dfrac{3}{2}(x + c)$.

ДР має загальний інтеграл $y^2 - (x + c)^3 = 0$ і загальний розв'язок $y = (x + c)^{\frac{3}{2}}$.

8.2. Диференціальне рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними.

Означення. ДР виду

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \tag{3.1}$$

називається ДР з *відокремленими змінними*. Загальний розв'язок ДР подається так:

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C\,, \tag{3.2}$$

а розв'язок задачі Коші з початковими умовами $x = x_0$, $y = y_0$ має вигляд

$$\int_{x_0}^{x} M(x)dx + \int_{y_0}^{y} N(y)dy = 0\,. \tag{3.3}$$

ДР з відокремленими змінними зводиться до квадратури, тобто до знаходження інтегралів.

Приклад. Знайдемо загальний розв'язок ДР $2xdx + 2ydy = 0$.

Інтегруючи, дістаємо інтеграл ДР $x^2 + y^2 = C$.

Інтегральними кривими є концентричні кола з центром у початку координат.

Означення. Диференціальне рівняння виду

$$N_1(y)M_1(x)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 \tag{3.4}$$

називається ДР з *відокремлюваними змінними*, тобто рівнянням, що зводяться до ДР з відокремленими змінними.

Поділивши рівняння (3.4) на $N_1(y)\,M_2(x)$, дістанемо ДР з відокремленими змінними:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0\,. \tag{3.5}$$

Рівняння (3.4) має розв'язок $y = y_k$, $x = x_j$, де $y = y_k$, $x = x_j$ є розв'язками рівнянь $N_1(y) = 0$, $M_2(x) = 0$.

Аналогічно ДР виду

$$y' = f_1(x)f_2(y) \tag{3.6}$$

є ДР з відокремлюваними змінними. Рівняння (3.6) можна записати у вигляді(3.1):

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y), \quad \frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx. \tag{3.7}$$

Рівняння (3.1) має розв’язок виду $y = y_k$, де $f_2(y_k) = 0$.

Приклад. Знайдемо загальний розв’язок ДР $y' = 2xy^2$.

Запишемо рівняння у вигляді $\frac{dy}{dx} = 2xy^2, \quad \frac{dy}{y^2} = 2xdx, \quad \int \frac{dy}{y^2} = \int 2xdx$,

або
$$-\frac{1}{y} = x^2 + C, \quad y = -\frac{1}{x^2 + C}.$$

8.3. Однорідне диференціальне рівняння

Означення. Диференціальне рівняння називається *однорідним*, якщо його можна подати у вигляді
$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{4.1}$$

Воно за допомогою заміни змінної $\frac{y}{x} = u, \ y = ux$ зводиться до ДР з відокремлюваними змінними $u'x + u = f(u), \ x\frac{du}{dx} = f(u) - u$, а знаходження розв’язку зводиться до квадратур $\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x}$.

Приклад. Знайдемо загальний розв’язок ДР $y' = \frac{y^2}{x^2}$.

Візьмемо $y = ux$ і одержимо ДР для змінної

$$u'x + u = u^2, \ x\frac{du}{dx} = u^2 - u, \ \frac{du}{u^2 - u} = \frac{dx}{x}.$$

Інтегруючи ДР з відокремленими змінними, знаходимо загальний розв’язок:

$$\int \frac{du}{u^2 - u} = \int \frac{dx}{x}, \quad ln\left|\frac{u-1}{u}\right| = ln\, x + ln C, \quad \frac{u-1}{u} = Cx,$$

$$u = \frac{1}{1 - Cx}, \ \frac{y}{x} = \frac{1}{1 - Cx}, \ y = \frac{x}{1 - Cx}.$$

Однорідне ДР $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ не змінюється при перетворенні подібності:

$$y = ky_1, \quad x = kx_1, \quad k = \text{const}. \tag{4.2}$$

ДР $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ перетворюється на ДР $\frac{dky_1}{dkx_1} = f\left(\frac{ky_1}{kx_1}\right)$, $\frac{dy_1}{dx_1} = f\left(\frac{y_1}{x_1}\right)$.

При перетворенні подібності (4.2) інтегральні криві рівняння (4.1) знову переходять в інтегральні криві рівняння (4.1). Усі інтегральні криві однорідного ДР подібні з центром подібності в початку координат.

Приклад. Побудуємо інтегральні криві однорідного ДР

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y' = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{2\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

Скориставшись заміною $y = ux, \ \ y' = u'x + u$, дістанемо ДР:

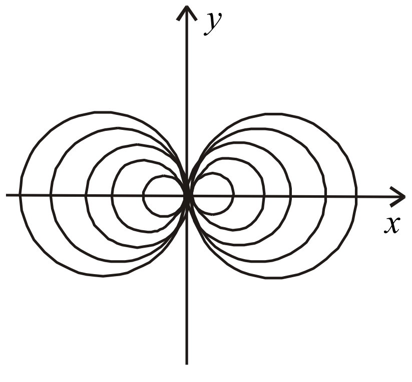
$$u'x = \frac{u^2 - 1}{2u} - u, \ u'x = -\frac{1 + u^2}{2u}, \ \frac{2udu}{u^2 + 1} = -\frac{dx}{x}, \ \int \frac{2udu}{u^2 + 1} = -\int \frac{dx}{x},$$

$$ln\left(1 + u^2\right) = -ln|x| + ln\,2C.$$

Остаточно знаходимо інтеграл ДР:

$$1 + u^2 = \frac{2C}{x}, \ 1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{2C}{x},$$

$$x^2 + y^2 = 2Cx, \ \ (x - C)^2 + y^2 = C^2.$$



Інтегральні криві є колами, що проходять через початок координат. Усі інтегральні криві замкнені і входять у початок координат.

8.4. Лінійні диференціальні рівняння

Означення. Диференціальні рівняння виду

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{5.1}$$

називається *лінійним ДР*. Якщо $Q(x) \equiv 0$, то ДР є однорідним. Якщо $Q(x) \neq 0$, то ДР називається *неоднорідним*.

Однорідні рівняння інтегруються у квадратурах, як ДР із відокремленими змінними:

$$y' + P(x)y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = -P(x)y, \quad \frac{dy}{y} = -P(x)dx, \ \int \frac{dy}{y} = -P(x)dx,$$

$$ln|y| = -\int P(x)dx, \ y = e^{-\int P(x)dx}.$$

Нехай відомий частинний розв'язок неоднорідного ДР.

Шукаємо загальний розв'язок неоднорідного ДР у вигляді $y = y_0(x) + z$.

Оскільки виконується тотожність $y_0'(x) + P(x)\ y_0(x) = Q(x)$, то для відшукання z маємо однорідне ДР $z' + P(x)z = 0.$

Отже, справджується така теорема:

Теорема 1. Загальний розв'язок неоднорідного лінійного ДР дорівнює сумі частинного розв'язку неоднорідного ДР і загального розв'язку однорідного ДР.

Приклад. Лінійне ДР $y' + y = x + 1$ має частинний розв'язок $y_0(x) = x.$ Однорідне ДР $z' + z = 0$ має загальний розв'язок $z = Ce^{-x}$. Загальний розв'язок неоднорідного ДР дорівнює сумі $y = x + Ce^{-x}$.

Звичайно використовують три методи розв'язування лінійного неоднорідного ДР. Ми розглянемо тільки один з них.

Метод Бернуллі.

Розв'язок ДР (5.1) шукаємо у вигляді добутку двох функцій $y(x) = u(x) \cdot v(x).$ Підставляючи, дістаємо рівняння $u'v + uv' + P(x)uv = Q(x).$

Зведемо це рівняння до системи ДР:

$$\begin{cases} uv' + P(x)uv = 0, \\ u'v = Q(x). \end{cases}$$

Із першого рівняння знаходимо змінну v:

$$v' = -P(x)v, \quad \frac{dv}{dx} = -P(x)v, \quad \frac{dv}{v} = -P(x)dx,$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int P(x)dx, \quad ln|v| = -\int P(x)dx, \quad v = e^{-\int P(x)dx}.$$

Із другого рівняння знаходимо змінну u:

$$u' = Q(x)v^{-1}, \quad u' = Q(x)e^{\int P(x)dx}, \quad u = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C.$$

Остаточно маємо розв’язок у вигляді

$$y = \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C \right) e^{-\int P(x)dx}. \qquad (5.2)$$

Приклад. Знайдемо загальний розв’язок ДР $xy' + y = x^2$.

Розв’язок шукаємо у вигляді добутку функцій $y = u \cdot v$. Підставляючи, дістаємо рівняння

$$x(u'v + uv') + uv = x^2.$$

Зведемо це рівняння до системи ДР:

$$\begin{cases} xuv' + uv = 0, \\ xu'v = x^2. \end{cases}$$

Із першого рівняння $xv' + v = 0$ знаходимо:

$$v' = -\frac{v}{x}, \qquad \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}, \qquad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}, \quad ln|v| = -ln|x|, \quad v = x^{-1}.$$

Із другого рівняння маємо: $xu'x^{-1} = x^2$, $u' = x^2$, $u = \int x^2 dx$, $u = \frac{x^3}{3} + c$.

Знаходимо розв’язок: $y = uv$, $y = \left(\frac{x^3}{3} + c \right) x^{-1}$.

До лінійного ДР зводиться **ДР Бернуллі**

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0,\ \ n \neq 1). \tag{5.3}$$

Вводиться нова змінна $z = \dfrac{1}{y^{n-1}}$, і ДР для z набирає вигляду ДР (5.1):

$$\frac{z'}{1-n} + P(x)z = Q(x).$$

8.5. Диференціальне рівняння n-го порядку. Рівняння, які допускають зниження порядку.

У загальному випадку ДР n-го порядку має вигляд

$$F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0.$$

Загальний розв'язок ДР залежить від n довільних сталих і має вигляд

$$y = \varphi(x, C_1, ..., C_n).$$

Задача Коші полягає у знаходженні частинного розв'язку $y(x)$, що задовольняє початкові умови: $y(x_0) = y_0^{(0)},\ \ y'(x_0) = y_0^{(1)}, ..., y^{(n-1)}_{(x_0)} = y_0^{(n-1)},$

де $y_0^{(k)}{}_{(k=0,1,...,n-1)}$ — наперед задані значення.

Деякі ДР можуть бути зінтегровані в квадратурах, тобто знаходження загального розв'язку зводиться до інтегрування відомих функцій.

Є випадки, коли порядок рівняння може бути знижений, наприклад, з другого до першого, а останнє рівняння може бути розв'язане. Прийоми такого пониження різноманітні. Вкажемо деякі з них на прикладах диференціальних рівнянь другого порядку.

I. ДР вигляду $y'' = f(x) \qquad \left(y^{(n)} = f(x)\right).$

Загальний розв'язок тут можна дістати після 2-кратного (n-кратного) інтегрування.

Приклад. Знайдемо загальний розв'язок ДР $y'' = x.$

Так як $\dfrac{dy'}{dx}=x\,\Big|\cdot dx,\int$, тоді $\int dy'=\int xdx+C_1$, звідки $y'=\dfrac{x^2}{2}+C_1$,

розв'язуючи це ДР маємо:

$$y=\int\frac{x^2}{2}dx+\int C_1dx+C_2,\qquad y=\frac{x^3}{6}+C_1x+C_2.$$

Для знаходження частинного розв'язку задаємо початкові умови:

$$y(0)=0,\quad y'(0)=1.$$

З попередніх рівнянь знаходимо $C_1=1,\ C_2=0$ і отримуємо частинний розв'язок ДР третього порядку:

$$y(x)=\frac{x^3}{6}+x.$$

I I. У ДР відсутня шукана функція. ДР виду

$$F(x,y',y'')=0$$

зводяться до ДР першого порядку, якщо візьмемо $y'=z(x),\ y''=z'.$ Дістанемо ДР першого порядку

$$F(x,\ z,\ z')=0.$$

Якщо буде знайдено загальний розв'язок цього рівняння $z=z(x,\ C_1),$ то дістанемо $y=\int z(x,\ C_1)dx+C_2.$

Якщо ДР другого порядку має вигляд $y''=p(x)q(y'),$ то беремо $y'=z,\ y''=z'$ і дістаємо ДР першого порядку $z'=p(x)q(z)$ з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dz}{dx}=p(x)q(z),\ \ \frac{dz}{q(z)}=p(x)dx,\ \ \int\frac{dz}{q(z)}=\int p(x)dx.$$

Приклад. Розв'яжемо ДР другого порядку $y''=\dfrac{y'}{1+x}.$

При $z(x)=y',\ z'=y''$ дістанемо ДР першого порядку:

$$z'=\frac{z}{1+x},\quad \frac{dz}{z}=\frac{dx}{1+x}\qquad ln|z|=ln|1+x|+lnC_1,$$

$$z = C_1(1+x), \quad y' = C_1(1+x), \quad y = \int C_1(1+x)dx.$$

Знайдемо загальний розв'язок ДР другого порядку:

$$y = C_1\left(x + \frac{x^2}{2}\right) + C_2.$$

I I I. ДР не містить явно аргументу. Порядок ДР

$$F(y, y', y'') = 0$$

можна знизити, якщо за нову незалежну змінну візьмемо y, а за нову залежну змінну — $z(y) = y'$.

Дістаємо рівність: $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy}$.

Остаточно приходимо до ДР першого порядку $F\left(y, z, \frac{dz}{dy}\right) = 0$.

Якщо знайдемо загальний розв'язок цього рівняння, то для пошуку загального розв'язку початкового ДР дістанемо рівняння:

$$y' = z(y, C_1), \quad \frac{dy}{dx} = z(y, C_1), \quad \int \frac{dy}{z(y, C_1)} = x + C_2.$$

Якщо ДР другого порядку має вигляд $y'' = p(y)q(y')$, то приходимо до ДР першого порядку $z\frac{dz}{dy} = p(y)\,q(z)$ з відокремлюваними змінними:

$$\frac{zdz}{q(z)} = p(y)dy, \quad \int \frac{zdz}{q(z)} = \int p(y)dy.$$

Визначивши $z = z(y, C_1)$, знаходимо y з ДР першого порядку $\frac{dy}{dx} = z(y, C_1)$:

$$\int \frac{dy}{z(y, C_1)} = x + C_2.$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок ДР другого порядку $y'' + y = 0$.

Узявши $y' = z(y)$, дістанемо $y'' = z\dfrac{dz}{dy}$ і прийдемо до ДР першого порядку

$$z\frac{dz}{dy} + y = 0, \quad zdz + ydy = 0, \quad z^2 + y^2 = C_1^2.$$

Знаходимо змінну $z = \pm\sqrt{C_1^2 - y^2}$ і приходимо до ДР першого порядку $y' = \pm\sqrt{C_1^2 - y^2}$, розв'язуючи яке, дістаємо:

$$\frac{dy}{\sqrt{C_1^2 - y^2}} = \pm dx, \quad \arcsin\frac{y}{C_1} = \pm x + C_2, \quad y = C_1 \sin(\pm x + C_2).$$

➢ ***Завдання для самостійного розв'язування***

Розв'язати диференціальні рівняння:

1. $y' = \dfrac{2y}{x^3}$. *Відповідь:* $y = Ce^{\frac{-1}{x^2}}$.

2. $(1 + x^2)y' + 1 + y^2 = 0$. *Відповідь:* $y = \dfrac{C - x}{1 + Cx}$.

3. $y' - \dfrac{3y}{x} = x$. *Відповідь:* $y = Cx^3 - x^2$.

4. $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x$. *Відповідь:* $y = \dfrac{C - \cos 2x}{2\cos x}$.

5. $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}$. *Відповідь:* $y^2 = e^{x^2}(2x + C)^{-1}$.

6. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - \dfrac{y}{x}; \quad y(-1) = 1$. *Відповідь:* $y = 2x(1 - 3x^2)^{-1}$.

7. $y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. *Відповідь:* $y = C_1 x + C_2 - \ln\cos x$.

8. $y'' + 2y(y')^3 = 0$. *Відповідь:* $y^3 + C_1 y + C_2 = 3x$.

9. $y'' x \ln x = y'$. *Відповідь:* $y = C_1 x(\ln x - 1) + C_2$.

8.6. Економічні задачи, які зводяться до диференціальних рівнянь

Приклад 1. Нехай попит і пропозиція на товар визначаються відповідно співвідношеннями $q = 4p' - 2p + 39$, $s = 44p' + 2p - 1$,

де p – ціна товару; p' – тенденція формування ціни (похідна ціни за часом). Нехай також в початковий момент часу ціна p за одиницю товару складає 1 грош.од. Виходячи з вимоги відповідності попиту пропозиції, знайти закон зміни ціни в заложності від часу.

Для того щоб попит відповідав пропозиції, необхідно виконання рівності

$$4p' - 2p + 39 = 44p' + 2p - 1.$$

Звідки $$10p' + p - 10 = 0.$$

Маємо ДР з відокремленими змінними:

$$-10\frac{dp}{dt} = p - 10,\quad \frac{dp}{p-10} = -\frac{dt}{10},\quad ln|p-10| = -\frac{t}{10} + ln|C|,$$

$$ln\left|\frac{p-10}{C}\right| = -\frac{t}{10},\quad \frac{p-10}{C} = e^{-0,1t},\quad p = Ce^{-0,1t} + 10.$$

Враховуючи, що $p(0) = 1$, тоді $1 = C + 10$, $C = -9$, $p = -9e^{-0,1t} + 10$.

Отже, щоб між попитом і пропозицією збереглася рівновага, необхідно, щоб ціна змінювалася відповідно до отриманої формули.

Приклад 2. Динаміка зростання обсягу виробництва в моделі природнього росту, тобто в умовах відсутності конкуренції, описується диференціальним рівнянням,

$$y' = ky,$$

де $y(t)$ — обсяг продукції, яка випущена до моменту часу t; y' — швидкість росту випуску продукції (акселерації) в момент часу t; $k = mp$; m — норма інвестицій; p — ціна одиниці продукції.

Приклад 3. Динаміка зростання обсягу виробництва в логістичній моделі, тобто в умовах конкурентного ринку, описується диференціальним рівнянням,

$y' = ky - \delta y^2$, де δ — коефіцієнт внутрішньогалузевої конкуренції.

➢ *Тести для самоконтролю*

Тест №1

Перший рівень

1. Диференціальне рівняння $s' + s\cos t = \frac{1}{2}\sin 2t$:

Відповідь: A) рівняння Бернуллі; B) однорідне;

C) лінійне ДР; D) ДР з відокремлюваними змінними

2. Диференціальне рівняння $8xy' - 12y = -(5x^2 + 3)y^3$**:**

Відповідь: A) рівняння Бернуллі; B) однорідне;

C) лінійне ДР; D) ДР з відокремлюваними змінними

3. Диференціальне рівняння $2(3xy^2 + 2x^3)dx + 3(2x^2y + y^3)dy = 0$:

Відповідь: A) рівняння Бернуллі; B) однорідне;

C) лінійне ДР; D) ДР з відокремлюваними змінними

Другий рівень

4. Розв'язком ЗДР $(x - y)dx + (x + y)dy = 0$ буде:

Відповідь: A) $\ln(x^2 + y^2) = C - 2\operatorname{arctg}(y/x)$; B) $x(y - x) = Cy$; $y = 0$;

C) $y = Ce^{y/x}$; D) $x = \pm y\sqrt{\ln Cx}$; $y = 0$.

5. Розв'язком ЗДР $y''(e^x + 1) + y' = 0$ буде:

Відповідь: A) $12(C_1y - x) = C_1^2(x + C_2)^3 + C_3$; B) $y = C_1(x + 2)e^{-x} + C_2x + C_3$;

C) $y + C_1\ln|y| = x + C_2$; $y = C$; D) $y = C_1(x - e^{-x}) + C_2$.

Тест №2

Перший рівень

1. Диференціальне рівняння $s' + \frac{2s}{t} + t^4 s^3 e^t = 0$:

Відповідь: A) рівняння Бернуллі; B) однорідне;

C) лінійне ДР; D) ДР з відокремлюваними змінними

2. Диференціальне рівняння $5e^x tgy + \left(1 - e^x\right) sec^2 y \cdot y' = 0$**:**

Відповідь: A) рівняння Бернуллі; B) однорідне;

C) лінійне ДР; D) ДР з відокремлюваними змінними

3. Диференціальне рівняння $y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 12$:

Відповідь: A) рівняння Бернуллі; B) однорідне;

C) лінійне ДР; D) ДР з відокремлюваними змінними

Другий рівень

4. Розв’язком ЗДР $(xy' - 1) ln\, x = 2y$ буде:

Відповідь: A) $y = C\, ln^2 x - ln\, x$; B) $x(y - x) = Cy$; $y = 0$;

C) $y = Ce^{y/x}$; D) $y(x+1)(ln|x+1| + C) = 1$; $y = 0$.

5. Розв’язком ЗДР $yy'' = y'^2 - y'^3$ буде:

Відповідь: A) $12(C_1 y - x) = C_1^2 (x + C_2)^3 + C_3$; B) $y = C_1(x+2)e^{-x} + C_2 x + C_3$;

C) $y + C_1 ln|y| = x + C_2$; $y = C$; D) $y = C_1\left(x - e^{-x}\right) + C_2$.

Розділ 9. Ряди

9.1. Числові ряди. Поняття збіжності ряду. Необхідна умова збіжності

Означення. Нехай $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \ldots, \boldsymbol{u}_n, \ldots$ — деяка нескінченна послідовність чисел. Побудований із цих чисел за допомогою знака «+» символ

$$\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 + \ldots + \boldsymbol{u}_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{u}_n \qquad (1.1)$$

називається *нескінченним рядом* (чи просто *рядом*), а самі числа $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \ldots$ — членами ряду; $\boldsymbol{n}$-ий член $\boldsymbol{u}_n$ — називається *загальним членом ряду*.

Побудуємо частинні суми ряду:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{S}_1 = \boldsymbol{u}_1; \\ &\boldsymbol{S}_2 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2; \\ &\boldsymbol{S}_3 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3; \\ &\ldots \\ &\boldsymbol{S}_n = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 + \ldots + \boldsymbol{u}_n; \\ &\ldots \end{aligned} \qquad (1.2)$$

Частинні суми ряду (1.2) утворюють числову послідовність: $\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2, \boldsymbol{S}_3, \ldots, \boldsymbol{S}_n, \ldots$ Надалі основним буде питання про збіжність послідовності частинних сум ряду. Таким чином, поняття ряду вводиться для побудови числових послідовностей спеціального виду — частинних сум ряду. Такі послідовності широко використовуються в математичному аналізі, наприклад, відоме число $\boldsymbol{e}$ можна подати таким рядом

$$\boldsymbol{e} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Означення. Числовий ряд називається *збіжним*, якщо існує границя послідовності частинних сум ряду

$$\lim_{n \to \infty} \boldsymbol{S}_n = \boldsymbol{S} \qquad (1.3)$$

При цьому величина $\boldsymbol{S}$ називається сумою ряду, а число

$$r_n = S - S_n = u_{n+1} + \ldots + u_{n+k} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k} \tag{1.4}$$

залишком ряду. Якщо границя S_n не існує (нескінченна), то ряд називається *розбіжним*.

Теорема 1. Якщо збігається ряд, то збігається його залишок; і навпаки, із збіжності залишку випливає збіжність ряду.

Наслідок 1. Із розбіжності ряду випливає розбіжність його залишку, і навпаки.

Наслідок 2. Якщо відкинути скінченну кількість перших членів ряду або додати до нього кілька нових членів, то це не вплине на його збіжність.

Теорема 2. Якщо члени збіжного ряду (1.1) помножити на сталий множник c, то його збіжність не порушиться, а сума (1.3) помножиться на це число c:

$$cu_1 + cu_2 + \ldots + cu_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot u_n = c \cdot S .$$

Теорема 3. Збіжні ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma$ можна почленно додавати або віднімати, при цьому ряд $(u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \ldots + (u_n \pm v_n) + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ також збігається, а його сума буде $S \pm \sigma$.

Теорема 4. Необхідна умова збіжності числового ряду.

Якщо ряд збігається, то границя його загального члена прямує до 0, тобто:

$$\left(\lim_{n \to \infty} S_n = S \right) \Rightarrow \left(\lim_{n \to \infty} u_n = 0 \right).$$

Наслідок. Якщо $\lim\limits_{n \to \infty} u_n \neq 0$, тобто необхідна умова збіжності ряду не виконується, то ряд розбігається.

Приклад. Перевірити виконання необхідної умови збіжності для ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{5n+2}.$$

Загальний член ряду $u_n = \frac{2n+1}{5n+2}$.

Розглянемо $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{5n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{5+\frac{2}{n}} = \frac{2}{5} \neq 0$. Необхідна умова збіжності ряду не виконується. Ряд розбігається.

Ряд геометричної прогресії

Сума членів нескінченної геометричної прогресії є ряд виду

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n+1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}, a \neq 0 \qquad (1.5)$$

із загальним членом $u_n = aq^{n-1}$.

Ряд (1.5) збігається, якщо знаменник прогресії $|q| < 1$ і його сума $S = \frac{a}{1-q}$. Це випливає з таких міркувань:

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q};$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q} \lim_{n\to\infty} (1-q^n) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} q^n \to 0 \\ n \to \infty \end{array} \text{при } |q| < 1 \right| = \frac{a}{1-q}.$$

Ряд геометричної прогресії буде розбіжним, якщо $|q| \geq 1$. У цьому випадку не виконується необхідна умова збіжності ряду, бо $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} aq^{n-1} \neq 0, |q| \geq 1$.

Приклад. Досліdити на збіжність ряд $\frac{5}{6}+\frac{13}{36}+\frac{35}{216}+\ldots+\frac{3^{n}+2^{n}}{6^{n}}+\ldots.$

Загальний член ряду можна записати так:

$$\boldsymbol{u_n}=\frac{3^{n}+2^{n}}{6^{n}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+\left(\frac{1}{3}\right)^{n}.$$

Отже, даний ряд можна записати у вигляді суми двох збіжних рядів геометричної прогресії $\sum_{n\to\infty}^{\infty}\frac{3^{n}+2^{n}}{6^{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n}}$.

За теоремою 3, ряд $\sum_{n\to\infty}^{\infty}\frac{3^{n}+2^{n}}{6^{n}}$ збігається і його сума $\boldsymbol{S}$ дорівнює:

$$\boldsymbol{S}=\frac{0{,}5}{1-0{,}5}+\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}.$$

9.2. Достатні ознаки збіжності для рядів з додатними членами

Розглянемо ряд $\sum_{n\to\infty}^{\infty}=\boldsymbol{u_n}$ з додатними членами $\boldsymbol{u_n}>0,\ \boldsymbol{u}_2>0,\ldots,\ \boldsymbol{u_n}>0,\ldots$ Частинні суми ряду утворюють при цьому монотонно зростаючу послідовність $\boldsymbol{S}_1,\ \boldsymbol{S}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{S_n},\ \ldots.$

Критерій збіжності. Для того щоб ряд з додатними членами збігався, необхідно і достатньо, щоб усі його частинні суми були обмеженими.

Наслідок. Для того щоб ряд з додатними членами розбігався, необхідно і достатньо, щоб послідовність його частинних сум була необмеженою.

Сформулюємо достатні умови збіжності числового ряду у вигляді наступних теорем.

Теорема (ознака порівняння рядів). Якщо для рядів з додатними членами:

$$\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2+\ldots+\boldsymbol{u_n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{u_n}, \tag{2.1}$$

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \tag{2.2}$$

виконується умова $v_n \geq u_n$, то:

а) із збіжності ряду (2.2) випливає збіжність ряду (2.1);

б) із розбіжності ряду (2.1) випливає розбіжність ряду (2.2).

Означення. Якщо для рядів (2.1), (2.2) виконується умова $u_n \leq v_n$, то ряд (2.2) називається *мажорантним* відносно ряду (2.1), а ряд (2.1) — *мінорантним* відносно ряду (2.2).

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Загальний член ряду $u_n = \frac{1}{n!} > 0$. Зауважимо, що

$$\left(n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \geq 1 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n-1} = 2^{n-1} \right) \Rightarrow \left(u_n = \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} = v_n \right).$$

Ряд порівняння $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ збігається як ряд геометричної прогресії із $q = 0{,}5 < 1$.

За ознакою порівняння ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ — збігається.

Теорема (ознака порівняння в граничній формі). Якщо для рядів з додатними членами (2.1), (2.2) існує границя $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = c \quad (0 < c < +\infty)$, то ряди (2.1) і (2.2) збігаються або розбігаються разом.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+5}{n^3 + 10n + 20}}$.

Загальний член ряду $u_n = \sqrt{\frac{n+5}{n^3 + 10n + 20}}$ являє собою алгебраїчний вираз. Для того щоб цілеспрямовано вибрати ряд порівняння, побудуємо величину, еквівалентну u_n при $n \to \infty$ $u_n = \sqrt{\dfrac{n+5}{n^3+10n+20}} \sim \sqrt{\dfrac{n}{n^3}} = \dfrac{1}{n} = v_n$. Вибираємо ряд порівняння $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ — гармонічний ряд, він є розбіжним. Обчислюємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\dfrac{n+5}{n^3+10n+20}}}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{(n+5)n^2}{n^3+10n+20}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1+\dfrac{5}{n}}{1+\dfrac{10}{n^2}+\dfrac{20}{n^3}}} = 1 \quad (0<1<+\infty).$$

За ознакою порівняння буде розбіжним і ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+5}{n^3+10n+20}}.$$

Теорема (ознака Даламбера). Якщо для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ з додатними членами $u_n > 0$ існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$, тоді:

— при $l < 1$ ряд збігається;

— при $l > 1$ ряд розбігається;

— при $l = 1$ питання про збіжність ряду ознака не вирішує.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n!}$.

Загальний член ряду $u_n = \dfrac{2^n}{n!} > 0$. Побудуємо $u_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{2\cdot 2^n}{n!(n+1)}$ і розглянемо $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\cdot 2^n \cdot n!}{(n+1)\cdot n!\cdot 2^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n+1} = 0 < 1$. За ознакою Даламбера ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n!}$ збігається.

Теорема (ознака Коші (радикальна)). Якщо для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ з додатними членами $u_n > 0$ існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, тоді:

— при $l < 1$ ряд збігається;

— при $l > 1$ ряд розбігається;

— при $l = 1$ питання про збіжність ряду ознака не вирішує.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n}$.

Загальний член ряду $u_n = \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n} > 0$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3-\frac{1}{n}}\right)^2 = \frac{1}{9} < 1.$$

За радікальною ознакою Коші ряд збігається.

Теорема (ознака Коші (інтегральна)). Якщо функція $f(x)$ неперервна, додатна і монотонно спадає при $x \ge 1$**,** то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ і невластивий інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$ збігаються або розбігаються разом.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд Діріхле (узагальнений гармонічний ряд)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots$$

Загальний член ряду $u_n = \frac{1}{n^p} > 0$. Побудуємо функцію $f(x)$:

$$u_n = \frac{1}{n^p} = f(n) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^p}.$$

Збіжність інтегралу Діріхле $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ встановлено раніш, таким чином, за теоремою

$$\left(\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}-\begin{bmatrix}\text{збігається при } p>1;\\ \text{розбігається при } p\le 1\end{bmatrix}\right)\Leftrightarrow\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}-\begin{bmatrix}\text{збігається при } p>1;\\ \text{розбігається при } p\le 1\end{bmatrix}\right).$$

У частинному випадку при $p=1$ маємо гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=$ $=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots,$ який, як тепер встановлено, буде розбіжним.

Рекомендації щодо використання ознак збіжності рядів з додатними членами

1. Ознака Даламбера, як правило, дає результати тоді, коли загальний член ряду є відношенням алгебраїчного і трансцендентного виразів або відношенням трансцендентних виразів.

Якщо загальний член ряду — алгебраїчний вираз, то ознака Даламбера питання про збіжність не вирішує.

2. Радикальна ознака Коші зручна в тому випадку, коли загальний член ряду містить степенево-показниковий вираз.

3. Інтегральна ознака Коші використовується тоді, коли функція загального члена ряду $u_n=f(n)\Rightarrow f(x)$ легко інтегрується.

4. Ознака порівняння рядів може бути використана для рядів з будь-яким загальним членом. При дослідженні ряду за допомогою ознаки порівняння треба вибрати ряд порівняння, збіжність чи розбіжність якого відома. Рядами порівняння зручно вибирати ряд геометричної прогресії (6) або ряд Діріхле (8).

5. Якщо загальний член ряду — алгебраїчний вираз, тоді для дослідження збіжності ряду зручно використовувати ознаку порівняння рядів у граничній формі (теорема 3), як це було показано на прикладі.

6. При дослідженні збіжності рядів рекомендується така послідовність дій: 1) встановити тип ряду (знакододатний чи знакозмінний); 2) перевірити виконання необхідної умови збіжності; 3) використати одну із достатніх ознак збіжності.

Приклад. Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n}$.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n}=\frac{1^3}{e}+\frac{2^3}{e^2}+\ldots+\frac{n^3}{e^n}+\ldots;\quad u_n=\frac{n^3}{e^n}>0\Rightarrow$ ряд знакододатний.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3}{e^n}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\left|\begin{matrix}n\sim x\\ n\to\infty\\ x\to+\infty\end{matrix}\right|=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x^3)'''}{(e^x)'''}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3\cdot2\cdot1}{e^x}=0\Rightarrow$

необхідна умова збіжності виконується (ряд може бути як збіжним, так і розбіжним).

3) Використаємо достатню ознаку збіжності Даламбера. Побудуємо $u_{n+1}=\frac{(n+1)^3}{e^{n+1}};\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3\cdot e^n}{e^{n+1}\cdot n^3}=\frac{1}{e}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3=\frac{1}{e}<1\Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n}$ за ознакою Даламбера збігається.

➤ *Завдання для самостійного розв'язування*

Дослідити збіжність числового ряду:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}$. *Відповідь*. Збігається.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$. *Відповідь*. Розбігається.

3 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-4n+5}$. *Відповідь*. Збігається.

4 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)!}$. *Відповідь*. Збігається.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$. *Відповідь*. Збігається.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{4n-3}\right)^{\frac{n}{2}}$. *Відповідь*. Збігається.

9.3. Знакозмінні та знакопочергові ряди.
Абсолютна та умовна збіжність знакозмінних рядів

Означення. Ряд називається *знакозмінним*, якщо він містить нескінченне число як додатних, так і від'ємних членів.

Теорема (Коші). Якщо збігається ряд із абсолютних величин членів знакозмінного ряду, то збігається і знакозмінний ряд, тобто

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| - \text{збіжний}\right) \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n - \text{збіжний}\right).$$

Означення. Знакозмінний ряд називається абсолютно збіжним, якщо збігається ряд із абсолютних величин членів знакозмінного ряду.

Означення. Знакозмінний ряд називається *умовно збіжним*, якщо цей ряд збігається, а ряд із абсолютних величин його членів розбігається.

Зауваження. Якщо знакозмінний ряд збігається абсолютно, то його збіжність зумовлена достатнім спаданням за абсолютною величиною його членів.

Зауваження. Якщо знакозмінний ряд збігається умовно, то його збіжність зумовлена не тільки спаданням за абсолютною величиною його членів, але і взаємною компенсацією додатних і від'ємних членів ряду.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$.

Загальний член ряду $u_n = \frac{\sin n}{n^2}$ залежно від n може бути як додатним, так і від'ємним.

Отже, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n^2}$ — знакозмінний. Побудуємо ряд із абсолютних величин членів даного: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|\sin n|}{n^2}$. Цей ряд буде знакододатним $|u_n| = \dfrac{|\sin n|}{n^2} > 0$, так що для дослідження його на збіжність можна використати ознаки збіжності знакододатних рядів. Скористаємось ознакою порівняння рядів: $|u_n| = \dfrac{|\sin n|}{n^2} \le \dfrac{1}{n^2} = v_n \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ — ряд порівняння, він збігається, як ряд Діріхле, з $p = 2 > 1$. Отже, за ознакою порівняння ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|\sin n|}{n^2}$ збігається, а це означає, що за теоремою Коші збігається і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n^2}$, причому збігається абсолютно.

Знакопочергові ряди. Ознака Лейбніца

Означення. Ряд, кожний член якого відрізняється знаком від попереднього, називається *знакопочерговим*. Цей ряд має вигляд:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n .$$

Загальний член ряду $u_n = (-1)^{n-1} a_n$, де $a_n > 0$.

Теорема Лейбніца. Якщо члени знакопочергового ряду спадають за абсолютною величиною і границя абсолютної величини загального члена ряду дорівнює нулю, то ряд збігається.

Коротко цю теорему можна записати так:

$$\left(\begin{cases} a_n > a_{n+1} > 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \end{cases}\right) \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \text{ — збіжний}\right).$$

Наслідок 1. Знак суми збіжного знакопочергового ряду такий само, як і знак першого члена ряду (на рис. 1 $\boldsymbol{a}_1 > 0, \boldsymbol{S} > 0$).

Геометрична інтерпретація

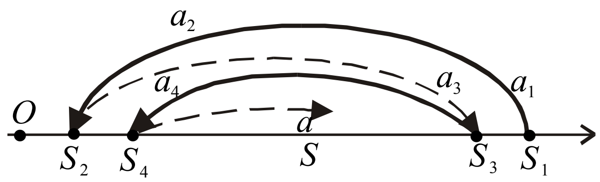


Рис. 1

Наслідок 2. Якщо знакопочерговий ряд збігається, то його сума за абсолютною величиною не перевищує першого члена ряду, тобто $|\boldsymbol{S}| < |\boldsymbol{a}_1|$ (на рис. 1) 0< ***S*** <***a*₁**).

Наслідок 3. Якщо при обчисленні суми збіжного знакопочергового ряду обмежитись тільки першими $\boldsymbol{n}$ членами, а всі інші відкинути, то похибка за абсолютною величиною не перевищить першого із відкинутих членів, тобто

$$|\boldsymbol{r_n}| < |\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}+1}|.$$

Наслідок 4. Якщо для ряду не виконується умова теореми Лейбніца $\lim\limits_{\boldsymbol{n}\to\infty} \boldsymbol{a_n} \neq 0$, то ряд розбігається (не виконується необхідна умова збіжності).

Приклад. Дослідити збіжність ряду Лейбніца

$$\sum_{\boldsymbol{n}=1}^{\infty} (-1)^{\boldsymbol{n}-1} \cdot \frac{1}{\boldsymbol{n}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{\boldsymbol{n}-1} \frac{1}{\boldsymbol{n}} + \ldots$$

Загальний член ряду $\boldsymbol{u_n} = (-1)^{\boldsymbol{n}-1} \cdot \frac{1}{\boldsymbol{n}}$ почергово змінює знак, отже, ряд Лейбніца — знакопочерговий. Обидві умови теореми Лейбніца для цього ряду виконуються:

1) $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \ldots > \frac{1}{\boldsymbol{n}} > \frac{1}{\boldsymbol{n}+1} > \ldots;$

2) $\lim\limits_{\boldsymbol{n}\to\infty} |\boldsymbol{u_n}| = \lim\limits_{\boldsymbol{n}\to\infty} \frac{1}{\boldsymbol{n}} = 0$.

Таким чином, ряд Лейбніца буде збіжним, але збіжність умовна, бо ряд із абсолютних величин: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ — гармонічний ряд, що розбігається.

Приклад. Скільки членів збіжного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{5^n}$ треба залишити, щоб обчислити його суму з точністю до 0,001?

З огляду на те, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{5^n}$ — знакопочерговий і збіжний, скористаємось наслідком 3. Почергово обчислимо за абсолютною величиною члени ряду, поки не знайдемо такий член, який буде за модулем меншим за 0,001:

$|u_1|=\frac{1}{5};\ |u_2|=\frac{2}{25};\ |u_3|=\frac{3}{125};\ |u_4|=\frac{4}{625};\ |u_5|=\frac{1}{625}>0{,}001;\ |u_6|=\frac{6}{625\cdot 25}<0{,}001.$

Отже, достатньо залишити п’ять членів ряду.

➤ *Завдання для самостійного розв’язування*

Дослідити на абсолютну або умовну збіжність знакопочерговий числовий ряд:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}.$ *Відповідь*. Умовно збіжний.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^3}.$ *Відповідь*. Абсолютно збіжний.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n2^n}.$ *Відповідь*. Абсолютно збіжний.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n+1}{n}.$ *Відповідь*. Розбіжний.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}.$ *Відповідь*. Умовно збіжний.

9.4. Функціональні ряди. Основні поняття. Степеневі ряди

Означення. Ряд $$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots, \qquad (6.1)$$

де членами ряду $u_n(x)$ є функції від аргументу x, називається *функціональним рядом*. При $x=x_0$ ряд перетворюється на числовий

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+\ldots+u_n(x_0)+\ldots \qquad (6.2)$$

Якщо ряд (6.2) збігається (розбігається), то кажуть, що при $x=x_0$ збігається (розбігається) функціональний ряд (6.1).

Означення. Усі значення аргументу x, при яких функціональний ряд збіжний, називаються *областю збіжності функціонального ряду*.

В області збіжності існує границя часткових сум функціонального ряду

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x)=S(x), \quad S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x),$$

де функція $S(x)$ — сума ряду.

Ряд $r_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots$ називається *залишком ряду*.

В області збіжності функціонального ряду виконується формула

$$S(x)=S_n(x)+r_n(x), \text{ де } \lim_{n\to\infty} r_n(x)=0.$$

Означення. Ряд (6.1) збіжний для всіх x із області X, називається *рівномірно збіжним* у цій області, якщо для будь-якого числа $\varepsilon>0$ існує такий незалежний від x номер N, що при $n>N$ виконується одночасно для всіх $x\in X$ така нерівність: $\quad |S_n(x)-S(x)|<\varepsilon.$

Ознака Вейєрштрасса. Якщо ряд, складений із абсолютних величин членів функціонального ряду, для всіх $x\in X$ мажорується одним і тим самим збіжним числовим рядом, то функціональний ряд буде *рівномірно збіжним* для $x\in X$.

Приклад. Дослідити характер збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2}$.

Оскільки $u_n=\frac{1}{x^2+n^2}=\left|\frac{1}{x^2+n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$, тобто члени даного функціонального ряду для будь-якого x мажоруються членами збіжного числового ряду Діріхле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, то за ознакою Вейєрштрасса ряд буде рівномірно збіжним для $x\in(-\infty;+\infty)$.

Властивості рівномірно збіжних рядів

1. Сума рівномірно збіжного ряду неперервних функцій є неперервна функція.

2. Якщо ряд (6.1) рівномірно збіжний на інтервалі $(a;b)$ та існують границі $\lim\limits_{x\to a}u_n(x)=A_n\quad(n=1,2,\dots)$, то виконується рівність

$$\lim_{x\to a}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n\to 1}^{\infty}\lim_{n\to\infty}u_n(x).$$

3. Якщо члени збіжного ряду (6.1) мають неперервні похідні для $x\in(a;b)$ та ряд складений із похідних членів ряду (6.1) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n{}'(x)$ рівномірно збіжний для $x\in(a;b)$, то $\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x),\quad x\in(a;b).$

4. Якщо члени ряду (6.1) неперервні, а сам ряд рівномірно збіжний для $x\in[a;b]$, то $\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx.$

У загальному випадку, при дослідженні на збіжність функціонального ряду використовується та сама методика, що і для знакозмінного ряду.

Приклад. Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}=\frac{\sqrt{1}}{x-2}+\frac{\sqrt{2}}{(x-2)^2}+\frac{\sqrt{3}}{(x-2)^3}+\dots+\frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}+\dots$$

Побудуємо ряд із абсолютних величин членів даного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{|x-2|^n}$. Цей ряд буде знакододатний. Отже, маємо право застосовувати до нього ознаку Даламбера, при цьому x вважатимемо деяким параметром:

$$|u_n(x)|=\frac{\sqrt{n}}{|x-2|^2};\ |u_{n+1}(x)|=\frac{\sqrt{n}+1}{|x-2|^{n+1}};\ \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x-2|}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{|x-2|}.$$

За ознакою Даламбера ряд буде збігатись, якщо

$$\frac{1}{|x-2|}<1\Leftrightarrow|x-2|>1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-2>1\\x-2<-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>3\\x<1\end{array}\right.,$$

і розбігатись, якщо $\frac{1}{|x-2|}>1\Leftrightarrow|x-2|<1\Leftrightarrow\begin{cases}x-2<1\\x-2>-1\end{cases}\Leftrightarrow1<x<3$.

Залишається дослідити ряд на збіжність у точках $x=1$ і $x=3$.

При $x = 1$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}$, а при $x = 3$ — ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}$. Ці ряди розбігаються, бо, очевидно, для них не виконується необхідна умова збіжності. Таким чином, область збіжності функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}$ буде $x\in(-\infty;\ 1)\cup(3;\ +\infty)$. У цій області ряд збігається абсолютно.

Означення. Функціональний ряд

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \qquad (6.3)$$

називається ***степеневим рядом***, його загальний член $u_n(x)=a_nx^n$;

числа $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ називаються *коефіцієнтами степеневого ряду*.

Розглядають і більш загальний вигляд степеневого ряду

$$a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \ldots + a_n(x-c)^n + \ldots \qquad (6.4)$$

Якщо в (6.4) візьмемо $x - c = y$, то дістанемо ряд типу (6.3), тому властивості ряду (6.3) неважко перефразувати і для ряду (6.4).

Теорема Абеля. Якщо степеневий ряд (6.3):

1) збігається при $x = x_0$, то він абсолютно збігається для будь-якого x, що задовольняє нерівність $|x| < |x_0|$;

2) якщо ряд (6.3) розбігається при $x = x_1$, то він розбігається при всіх x, що задовольняють нерівність $|x| > |x_1|$.

Ілюстрацію до теореми Абеля наведено на рис. 2.

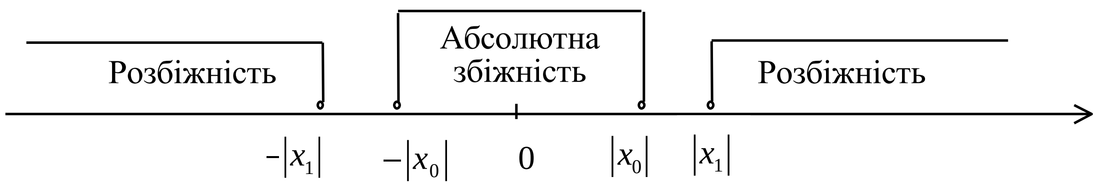


Рис.2

Інтервал і радіус збіжності степеневого ряду

Як наслідок із теореми Абеля для степеневого ряду (6.3) існує інтервал збіжності з центром у точці $x = 0$ (рис. 3).

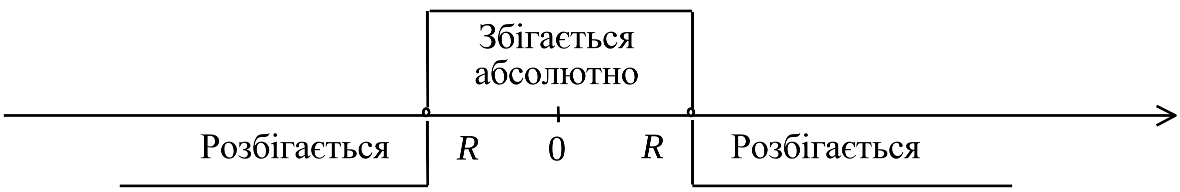


Рис. 3

Означення. *Інтервалом збіжності степеневого ряду* називається такий інтервал, у всіх внутрішніх точках якого ряд збігається абсолютно, а для всіх точок $|x| > R$ ряд є розбіжним; при цьому число $R > 0$ називається радіусом збіжності степеневого ряду.

Для узагальненого степеневого ряду (6.4) інтервал збіжності $(c-R;\ \ c+R)$ має центр симетрії в точці $x = c$.

Зауваження. На кінцях інтервалу збіжності, тобто в точках $x = -R,\ \ x = R$ ряд може як збігатись, так і розбігатись. Це питання потребує спеціального дослідження в кожному випадку.

Виведемо формулу для знаходження радіуса збіжності ряду (6.3). Для цього побудуємо ряд із абсолютних величин членів ряду:

$$|a_0|+|a_1|\cdot|x|+|a_2|\cdot|x|^2+\ldots+|a_n|\cdot|x|^n+\ldots. \qquad (6.5)$$

Нехай існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=l$. Тоді, застосовуючи ознаку Даламбера до ряду (6.5) дістаємо:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|\cdot|x|^{n+1}}{|a_n|\cdot|x|^n}=|x|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=|x|\cdot l\,.$$

При $|x|\cdot l<1$ ряд (6.5) збігається, а отже, ряд (6.3) збігається абсолютно; при $|x|\cdot l>1$ ряд (6.5) розбігається. Розбіжність ряду, установлена за ознакою Даламбера, означає, що для цього ряду не виконується необхідна умова збіжності: $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n(x)|\neq 0$, а тому не виконується необхідна умова збіжності і для ряду (6.3) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n(x)\neq 0$, і ряд (7.1) при $|x|\cdot l>1$ буде також розбіжним. Отже, нерівність $|x|\cdot l<1$ визначає інтервал збіжності ряду (6.3): $|x|\cdot l<1 \Leftrightarrow |x|<\dfrac{1}{l}\Leftrightarrow -\dfrac{1}{l}<x<\dfrac{1}{l}$.

Радіус збіжності визначається за формулою

$$R=\frac{1}{l}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \qquad (6.6)$$

Аналогічно, використовуючи радикальну ознаку Коші, можна дістати формулу для радіуса збіжності, степеневого ряду у вигляді: $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$. (6.7)

Зауваження. Формулами (6.6) і (6.7) можна користуватися лише в тих випадках, коли указані границі існують. У загальному випадку дослідження збіжності степеневого ряду виконується за такою самою методикою, що і для довільного функціонального ряду, наприклад такою, що була використана під час виведення формули радіуса збіжності .

Приклад. Знайти інтервал і радіус збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n x^n}{3^n+7^n}$.

Порівнюючи загальні члени ряду (6.3) і досліджуваного ряду, знайдемо коефіцієнт степеневого ряду a_n: $u_n(x)=\dfrac{2^n x^n}{3^n+7^n}=a_n x^n \Rightarrow \quad a_n=\dfrac{2^n}{3^n+7^n}$. За формулою радіуса збіжності маємо:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\left(3^{n+1}+7^{n+1}\right)}{2^{n+1}\left(3^n+7^n\right)}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^n+7}{\left(\frac{3}{7}\right)^n+1}=\frac{7}{2}.$$

Тоді інтервал збіжності буде $\left(-\dfrac{7}{2};\ \dfrac{7}{2}\right)$.

Приклад. Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{n\cdot 2^n}=\frac{x^3}{1\cdot 2}+\frac{x^6}{2\cdot 4}+\frac{x^9}{3\cdot 8}+\ldots+\frac{x^{3n}}{n\cdot 2^n}+\ldots$$

Загальний член ряду можна записати так $u_n(x)=\dfrac{x^{3n}}{n\cdot 2^n}$. Цей ряд містить не всі степені ***x,*** коефіцієнти a_{3n-2}, a_{3n-1} (n = 1, 2, 3, ...) дорівнюють нулю. Скористатися формулами для радіуса збіжності (6.6) чи (6.7) в даному випадку неможливо. Отже, будемо досліджувати ряд за загальною методикою дослідження функціональних рядів. Побудуємо ряд із абсолютних величин членів даного ряду $|u_n(x)|=\left|\dfrac{x^{3n}}{n\cdot 2^n}\right|=\dfrac{|x|^{3n}}{n\cdot 2^n}\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|x|^{3n}}{n\cdot 2^n}$, до якого застосуємо ознаку Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot 2^n|\,x\,|^{3(n+1)}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}|\,x\,|^{3n}}=\frac{|\,x\,|^3}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{|\,x\,|^3}{2}.$$

Знайдемо інтервал збіжності ряду (на цьому інтервалі ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{n\cdot 2^n}$ збігатиметься абсолютно): $\frac{|x|^3}{2}<1\Leftrightarrow|x|^3<2\Leftrightarrow-\sqrt[3]{2}<x<\sqrt[3]{2}$. Радіус збіжності буде: $R=\sqrt[3]{2}$.

Проведемо дослідження збіжності ряду на кінцях інтервалу збіжності:

При $x=-\sqrt[3]{2}$ $u_n\left(-\sqrt[3]{2}\right)=\frac{\left(-\sqrt[3]{2}\right)^{3n}}{n\cdot 2^n}=\frac{(-1)^n}{n}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$. Одержали ряд Лейбніца, який умовно збігається.

При $x = \sqrt[3]{2}$, $u_n\left(\sqrt[3]{2}\right)=\frac{\left(\sqrt[3]{2}\right)}{n\cdot 2^n}=\frac{1}{n}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Маємо гармонічний ряд, який, як відомо, розбігається. Таким чином, $x\in[-\sqrt[3]{2};\sqrt[3]{2})$ буде областю збіжності ряду.

9.5. Ряд Маклорена для деяких елементарних функцій

$$\left[\begin{array}{l} e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \\ \sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^{(-1)^n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots \\ \cos=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\ n=0,1,2,\ldots \end{array}\right.$$

Область збіжності $(-\infty;+\infty)$.

$$\left[(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots\right.$$

Інтервал збіжності (–1; 1).

$\ln(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots$ Область збіжності (–1; 1).

$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$ Область збіжності [–1; 1].

Використовуючи ці формули, можна у ряді випадків записати розвинення функції в ряд Маклорена без обчислення коефіцієнтів цього ряду .

Приклад. Розвинути в ряд Маклорена функцію $f(x)=\sin^2 x$ і знайти область збіжності ряду.

Перетворимо функцію так: $f(x)=\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$. Скористаємось формулою розвинення в ряд Маклорена функції $\cos x$, тоді дістанемо:

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{(2x)^2}{2\cdot 2!}-\frac{(2x)^4}{2\cdot 4!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{(2x)^{2n}}{2\cdot(2n)!}+\ldots=$$

$$=\frac{2}{2!}x-\frac{2^3}{4!}x^4+\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

Область збіжності новоутвореного ряду для $f(x)=\sin^2 x$ буде така ж, як і для $\cos x$, тобто $x\in(-\infty;\ +\infty)$.

➤ *Завдання для самостійного розв'язування*

Знайти область збіжності степеневих рядів.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}10^n x^n$. *Відповідь.* $(-0{,}1;\ 0{,}1)$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$. *Відповідь.* $(-1;\ 1]$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 10^{n-1}}$. *Відповідь.* $[-10;\ 10)$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n-1)3^n x^{n-1}$. *Відповідь.* $\left(-\frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right)$.

Розкласти задані функції в околі точки $x=0$, користуючись формулами розкладу в ряд Маклорена функцій e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^m$.

1. $y=e^{2x}$. **2.** $y=\sin\frac{x}{2}$. **3.** $y=\sqrt{x^2+1}$. **4.** $y=\ln(x+10)$. **5.** $y=\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

➤ *Тести для самоконтролю*

Тест №1

Перший рівень

1. Какой из рядов является знакоположительным числовым рядом:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n!}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2x)^n}{n!}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$

2. Обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ сходится, если:

а) $\alpha = 1$ б) $\alpha > 1$ в) $\alpha < 1$ г) другой ответ

3. Для какого ряда выполняется необходимый признак сходимости знакоположительного числового ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^3+1}{n^2}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot arctg\,\frac{1}{n}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,ln^3\,n}$

4. Какой из рядов является степенным рядом:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cdot tg^n x$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2\cdot\sqrt{x-1}\cdot e^{-n/x}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n(n+e^x)}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{(n+4)ln(n+4)}$

5. Если для степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\cdot 2^{n-1}}$ радиус сходимости равен 2 (т. е. $R=2$), то интервал сходимости ряда равен:

а) $(-2;2)$ б) $(0;2)$ в) $(-4;0)$ г) другой ответ

Другий рівень

1. Найти интервалы сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$.

2. Написать разложение функции в ряд Маклорена и найти интервалы сходимости $f(x)=e^x\cdot ln(1+x)$.

Тест №2

Перший рівень

1. Какой из рядов является знакоположительным числовым рядом:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{2n!}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2n!}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-7x)^n}{2n!}$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-7)^n}{2n!}$

2. Обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ расходится, если:

а) другой ответ; б) $\alpha<1$; в) $\alpha>1$; г) $\alpha\le 1$.

3. Для какого ряда выполняется необходимый признак сходимости знакоположительного числового ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{(2n+1)!}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2+1}{2n^2}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\cdot \arcsin\frac{1}{2n}$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6n^3-7}{n^2}$

4. Какой из рядов является степенным рядом:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cdot \sin^n x$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n(n+e^x)}$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}x^{2n}\cos(x+\pi n)$

5. Если для степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{2^n(n+1)(n+2)}$ радиус сходимости равен 2 (т. е. $R=2$), то интервал сходимости ряда равен:

а) $(-3;1)$ б) $(-2;2)$ в) $(-1;3)$ г) другой ответ

Другий рівень

1. Найти интервалы сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}x^{n-1}}{(2n-1)^2\sqrt{3^{n-1}}}$.

2. Написать разложение функции в ряд Маклорена и найти интервалы сходимости $f(x)=e^{-x}\cdot \sin x$.

Список літератури

1. Фортуна В. В. Вища та прикладна математика: навч. посіб. для студ. ден. форми навчання екон. спец. / В. В. Фортуна, О. І. Бескровний. – Львів : Магнолія 2006, 2017. – 647 с. – ISBN 978-617-574-071-2.
2. Клепко В. Ю. Вища математика в прикладах і задачах: навч. посіб. / В.Ю. Клепко, В.Л. Голець. – 2-ге вид. – Київ : Центр учбової літ., 2017. – 594 с. – ISBN 978-966-364-928-3.
3. Буріменко Ю. І. Вища математика для менеджерів та економістів: навч. посіб. / Ю. І. Буріменко, П. В. Керекеша. – Одеса: Ортімум, 2001. – 294 с. – ISBN 966-7776-44-8.
4. Кремер Н. Ш. Высшая математика для экономистов: учебник для студентов вузов / [Н.Ш. Кремер и др.]; под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – 3-е изд. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2010. – 479 с. – ISBN 5-238-00991-9.
5. Кремер Н. Ш. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб. пособие для вузов / [Н.Ш. Кремер и др.]; под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. – 423 с. – ISBN 5-238-00459-1.
6. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: учеб. пособие. В 3 ч. Ч. 1. / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть; под общ. ред. А. П. Бябушко – Мн.: Выш. школа, 1990. – 270 с.: ил. – ISBN 5-339-00326-4.
7. Мережа Internet:
   «Чиста» та прикладна математика. Форум. Тести онлайн. (Матеріали сайту адресовані студентам економічних і технічних факультетів вищих навчальних закладів) - Режим доступу: https://function-x.ru