Міністерство освіти і науки України

ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

«ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ»

Навчальний посібник

для здобувачів вищої освіти за спеціальностями 122 – Комп’ютерні науки, 125 – Кібербезпека, 121 – Інженерія програмного забезпечення

Одеса – 2022

Міністерство освіти і науки України

ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

«ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ»

Навчальний посібник

для здобувачів вищої освіти за спеціальностями 122 – Комп'ютерні науки, 125 – Кібербезпека, 121 – Інженерія програмного забезпечення

Затверджено на засіданні
кафедри вищої математики
та моделювання систем
Протокол №8 від 24.03.2022 року

Одеса – 2022

Навчальний посібник «Теорія ймовірностей» для здобувачів вищої освіти за спеціальностями 122 – Комп'ютерні науки, 125 –Кібербезпека, 121 – Інженерія програмного забезпечення / Уклад.: В.В. Грібова, В.В. Перстньова, Ю.Є. Сікіраш. Одеса: Держ. ун-т «Одеська політехніка», 2022. – 176 с.

Укладачі: **Грібова В.В.**, канд. фіз. - мат. наук, доцент
Перстньова В.В., ст. викладач
Сікіраш Ю.Є., ст. викладач

ВСТУП

Теорія ймовірностей є розділом математики, в якому вивчають математичні моделі випадкових експериментів, тобто експериментів, результати яких не можна визначити однозначно умовами проведення випробування. При цьому припускається, що сам експеримент можна повторювати будь-яку кількість разів при незмінному комплексі умов (хоча б у принципі).

Така властивість стійкості частоти дозволяє, не маючи можливості передбачити результат окремого випробування, достатньо точно прогнозувати властивості явищ, які пов'язані з цим випробуванням. Тому методи теорії ймовірностей у сучасному житті проникли в усі сфери діяльності людини, причому не тільки в природничі, економічні, але й в гуманітарні, такі, як історія, лінгвістика тощо.

РОЗДІЛ 1

Елементарна подія. Подія. Простір елементарних подій. Алгебра подій

1.1 Основні поняття теорії ймовірностей

Теорія ймовірностей вивчає ***математичні моделі*** експериментів і явищ, результати яких неможливо передбачити до проведення експерименту. Такі експерименти і явища називаються ***випадковими***. Характерно, що експеримент за тих самих умов (іноді, можливо, і теоретично) можна повторити скільки-завгодно раз, а результати експерименту є ***статистично-сталими***.

Послідовність операцій, що виконується з додержанням певного комплексу умов, називають ***експериментом (дослідом, спробою)***. Наслідок будь-якого експерименту називають ***подією***.

Простором* Ω** або ***U елементарних подій називається вся множина результатів (наслідків) експерименту $\{\omega_k\}$, взаємовиключних один одного, доповнену Ø та **Ω** як підмножиною самої себе. Простір **Ω** елементарних подій для даного експерименту може бути ***дискретним***, ***неперервним*** або мати більш складну структуру. Поняття елементарної події, простору елементарних подій є первинними в теорії ймовірностей, як точка в евклідовій геометрії та множина в математичному аналізі.

Простір* Ω** елементарних подій називається ***дискретним, якщо множина його значень дискретна (кінцева або злічена).

Простір* Ω** елементарних подій називається ***неперервним, якщо кожній елементарній події не можна поставити у взаємно однозначну відповідність певне ціле число.

Класифікація подій. Події поділяються на ***достовірні***, ***неможливі*** та ***випадкові***.

Подія називається ***достовірною*** (або ***вірогідною***), якщо вона відбувається при кожному здійсненні експерименту. Достовірна подія позначається символом $\boldsymbol{U}$ або $\boldsymbol{\Omega}$.

Приклади достовірних подій:

1. При киданні ігрової кості «випадання на верхній грані кості одного з шести очок» є достовірною подією.
2. Якщо в урні містяться білі та чорні кульки, то подія, що кулька, вийнята навмання, буде білою або чорною, є достовірною.

Подія називається ***неможливою***, якщо в результаті експерименту вона не настає ніколи. Неможлива подія позначається символами $\boldsymbol{V}$ або $\boldsymbol{\varnothing}$.

Приклади неможливих подій:

1. «Випадання на верхній грані ігрової кості сімки» - неможлива подія.
2. Якщо в урні містяться білі та чорні кульки, то подія «навмання вийнята кулька – червона» є неможливою.

Подія називається ***випадковою***, якщо в результаті експерименту вона може настати або не настати. Випадкові події позначають символами $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \ldots$, або $\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}, \ldots , \boldsymbol{A_n}$.

Приклади випадкових подій:

1. Монету підкидають один раз. Поява герба чи цифри – випадкова подія.
2. Попадання та промах при пострілі є випадковою подією.
3. Відмова апаратури в даний момент часу теж є випадковою подією.

Якщо внаслідок однієї спроби ніякі дві події не можуть настати одночасно, то такі події називаються ***попарно несумісними***.

Якщо немає підстав вважати, що одна подія має більшу ймовірність настати, ніж інша, то такі події називають ***рівноможливими***.

Якщо наслідком спроби можуть бути лише події із певної групи подій і ніякі інші, то ця група події називається ***повною групою подій***. Подія, що входить до повної групи подій, є рівноможливою і попарно несумісною з іншими, називається ***простою (елементарною)*** подією. Випадкова подія є ***складеною***, якщо її можна розкласти на прості елементарні події. Складені випадкові події позначають великими латинськими буквами $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \ldots$.

Випадкова подія є будь-якою підмножиною простору Ω елементарних подій.

Приклад 1. Монету підкидають двічі. Визначити елементарні події цього експерименту.

Розв’язання. Елементарні події $\{\omega_k\}$, $k = \overline{1,4}$.

ω_1 = ГГ (два герба)

ω_2 = ГЦ (герб, цифра)

ω_3 = ЦГ (цифра, герб)

ω_4 = ЦЦ (дві цифри)

Приклад 2. Кількість викликів, що надійшли до АТС за час T.

Розв’язання. $\Omega = \{k\}, k = 0, 1, 2, \ldots$.

Приклад 3. Гральний кубик підкидають один раз. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Побудувати такі випадкові події:

1. З'явиться парне число (подія A).
2. З'явиться число, кратне 3 (подія B).
3. З'явиться число, менше 5 (подія C).

Розв'язання. A={2; 4; 6}; B={3;6}; C={1; 2; 3; 4}.

У розглянутих раніше прикладах простори елементарних подій були дискретними (обмеженими і необмеженими).

Приклади неперервних елементарних подій:

1. Відхилення від точки прицілу.
2. Час безвідмовної роботи деяких приладів.

1.2 Алгебра подій

Означення. ***Добутком*** двох подій A і B називається така подія $A \cdot B$ або $A \cap B$, яка внаслідок експерименту настає з одночасним настанням подій A і B (рис. 1.2.1).

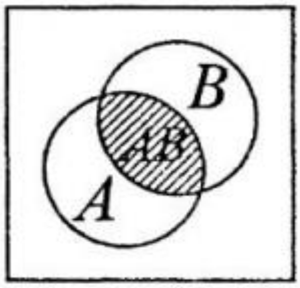


Рис.1.2.1

Означення . Події. A і B називаються ***несумісними***, якщо їх добуток є неможливою подією ($A \cdot B = \emptyset$). Якщо $A \cdot B \neq \emptyset$, то події A і B називаються ***сумісними***.

Означення. ***Сумою*** двох подій A і B називається така подія $A + B$ або $A \cup B$, яка настає, принаймні, з настанням однієї з подій A або B (рис. 1.2.2).

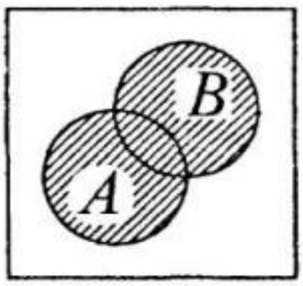


Рис. 1.2.2

Аналогічно знаходять добуток та суму для будь-якого скінченного числа подій.

Так, подія

$$A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i \qquad (1.2.1)$$

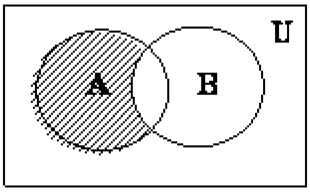
включає в себе елементарні події, які належать всім подіям A_i $(i = \overline{1,n})$, а подія

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \qquad (1.2.2)$$

включає елементарні події, які належать принаймні одній із подій A_i $(i = \overline{1,n})$.

Події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називають попарно несумісними, якщо $A_i A_j = \emptyset$ для будь-яких $i, j = \overline{1,n},\ i \neq j$ і несумісними у сукупності, якщо $A_1 A_2 \cdot \ldots \cdot A_n = \emptyset$.

Означення. ***Різницею*** двох подій A і B називається така подія $A \backslash B$, яка внаслідок експерименту настає з настанням події A і одночасним ненастанням події B (рис. 1.2. 3).



A \ B

Рис.1.2.3

Приклад 1. Задано множину чисел $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Навмання з неї беруть одне число. Побудувати події:

1) A – узяте число, кратне 2.
2) B – узяте число, кратне 3.
3) Визначити $A \cup B, A \cdot B, A \backslash B$.

Розв'язання.

$A = \{2,4,6,8,10\}$; $B = \{3,6,9\}$; $A \cup B = \{2,3,4,6,8,9,10\}$; $A \cdot B = \{6\}$;

$A \backslash B = \{2,4,8,10\}$.

Означення. Якщо $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$; $A_i A_j = \emptyset$; $i, j = \overline{1,n}$; $i \neq j$, то саме такі події утворюють ***повну групу подій***, а саме: унаслідок експерименту якась із подій A_i обов'язково настане.

Означення. Дві несумісні випадкові події, що утворюють повну групу, називають ***протилежними*** (рис. 1.2.4).

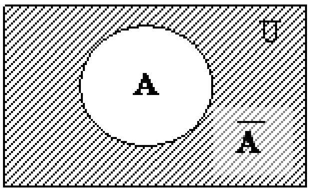


Рис. 1.2.4

Наведемо основні властивості операцій над подіями, правильність яких можна перевірити за допомогою діаграм Ейлера-Венна.

1. Комутативність суми та добутку:

$$A \cup B = B \cup A; \quad A \cdot B = B \cdot A$$

2. Асоціативність суми та добутку:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C); \quad (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

3. Дистрибутивність відносно додавання і множення:

$$(A \cup B) \cdot C = A \cdot C \cup B \cdot C$$

$$AB \cup C = (A \cup C)(B \cup C)$$

4. Якщо $A \subset B,$ то $\bar{A} \supset \bar{B}.$

5. Операції суми та добутку пов'язані за допомогою доповнення

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

$$\overline{A \cdot B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Більше того,

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \ldots \cdot \overline{A_n}$$

$$\overline{A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \ldots \cup \overline{A_n}$$

Усі ці рівності називаються з*аконами де Моргана*.

6. $A \cup A = A;\ A \cdot A = A$

7. $A \cup \emptyset = A;\ A \cdot \Omega = A$

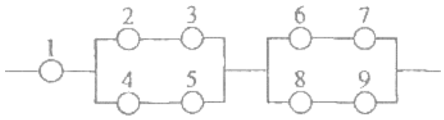
8. $A \cup \Omega = \Omega;\ A \cdot \emptyset = \emptyset$

9. $A \cup \bar{A} = \Omega;\ A \cdot \bar{A} = \emptyset$

10. $A \backslash B = A \cdot \bar{B}$

11. $\bar{\bar{A}} = A$

Приклад 2. Електричний ланцюг складений за схемою наведеною на малюнку



Подія $A_k = \{$елемент з номером k вийшов з ладу$\}$, $k = \overline{1,9}.$
Подія $B = \{$розрив ланцюга$\}$. Виразити події $B, \bar{B}$ в алгебрі подій A_k, $k = \overline{1,9}.$

Розв'язання. $B = B_1 + B_2 + B_3,$

де $B_1 = A_1, B_2 = (A_2 + A_3) \cdot (A_4 + A_5), B_3 = (A_6 + A_7) \cdot (A_8 + A_9).$

Згідно з законом де Моргана, $\bar{B} = \overline{B_1} \cdot \overline{B_2} \cdot \overline{B_3}$,

де $\overline{B_1} = \overline{A_1}$, $\overline{B_2} = \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} + \overline{A_4} \cdot \overline{A_5}$, $\overline{B_3} = \overline{A_6} \cdot \overline{A_7} + \overline{A_8} \cdot \overline{A_9}$.

Контрольні запитання

1. Простір елементарних подій. Означення. Приклади.
2. Дати означення елементарної випадкової події, події.
3. Дати означення достовірної, неможливої події, сумісної, несумісної подій.
4. Перечисліть операції над подіями.
5. Основні властивості операцій над подіями.

Задачі для самостійного розв'язання

- *Чи утворюють повну групу наступні групи подій:*

1. Експеримент – підкидання монети;
   Події: A_1 – поява герба;
   A_2 – поява цифри;
2. Експеримент – підкидання двох монет;
   Події: A_1 – поява двох гербів;
   A_2 – поява двох цифр;
3. Експеримент – два постріли по цілі;
   Події: A_1 – жодного попадання;
   A_2 – одне попадання;
   A_3 – два попадання;
4. Експеримент – два постріли по цілі;
   Події: A_1 – хоча б одне попадання;
   A_2 – хоча б один промах;
5. Експеримент – виймання карти з колоди;
   Події: A_1 – поява карти пікової масті;
   A_2 – поява карти бубнової масті ;
   A_3 – поява карти трефової масті.

- *Чи є несумісними наступні події:*

6. Експеримент – підкидання монети;
   Події: A_1 – поява герба;
   A_2 – поява цифри;
7. Експеримент – підкидання двох монет;
   Події: A_1 – поява герба на першій монеті;
   A_2 – поява цифри на другій монеті;
8. Експеримент – два постріли по цілі;
   Події: A_1 – жодного попадання;
   A_2 – одне попадання;
   A_3 – два попадання;
9. Експеримент – два постріли по цілі;
   Події: A_1 – хоча б одне попадання;
   A_2 – хоча б один промах.

- *Чи є рівноможливими наступні події:*

10. Експеримент – підкидання симетричної монети;
Події: A_1 – поява герба;
A_2 – поява цифри;
11. Експеримент – підкидання несиметричної монети;
Події: A_1 – поява герба;
A_2 – поява цифри;
12. Експеримент – постріл по цілі;
Події: A_1 – попадання;
A_2 – промах;
13. Експеримент – виймання однієї карти з колоди;
Події: A_1 – поява карти пікової масті;
A_2 – поява карти бубнової масті ;
A_3 – поява карти трефової масті;

- *Чи є випадковими наступні групи подій:*

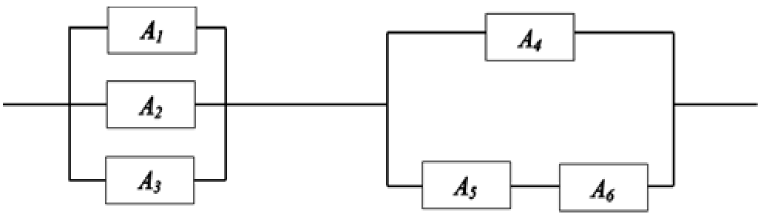
14. Експеримент – підкидання двох монет;
Події: A_1 – поява двох гербів;
A_2 – поява двох цифр;
15. Експеримент – виймання двох карт з колоди;
Події: A_1 – поява двох червоних карт;
A_2 – поява двох чорних карт.

- *Наведіть приклади:*

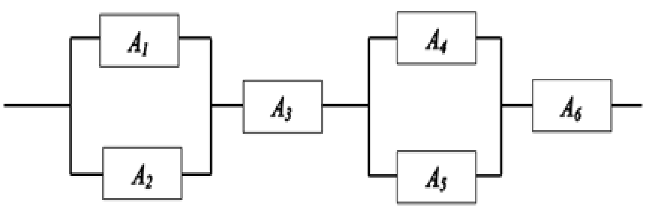
16. Трьох подій, рівноможливих і несумісних, які не утворюють повну групу;
17. Двох подій, несумісних, які утворюють повну групу, але не є рівно можливими ;
18. Двох подій, рівноможливих, які утворюють повну групу, але сумісних.

- Електричне коло зібрано за схемою, наданою на рисунку. Нехай A_i - подія, яка полягає в тому, що за час T вийде з ладу i-й елемент кола. Різні елементи кола виходять з ладу незалежно один від одного. Нехай A – подія «коло вийде з ладу за час T». Виразити події A і $\bar{A}$ через події A_i.

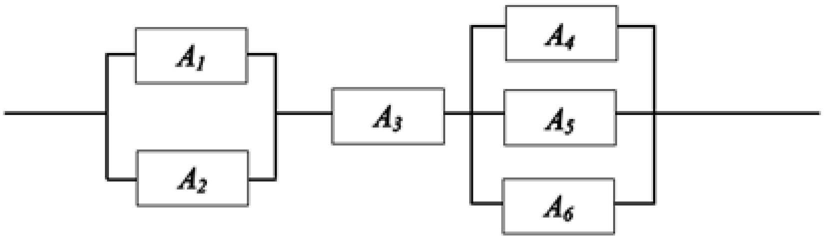
19.



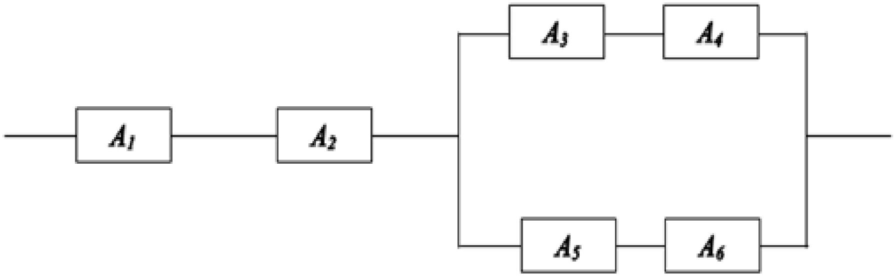
20.



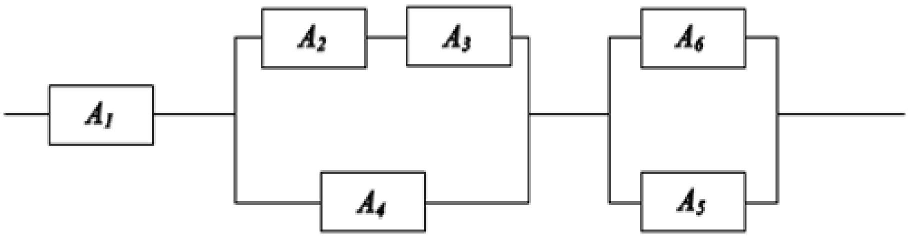
21.



22.



23.



РОЗДІЛ 2

Ймовірність події. Різні означення ймовірності події. Класична ймовірність. Геометрична ймовірність. Статистична ймовірність. Аксіоматичне означення ймовірності

2.1 Класична ймовірність

Нехай простір Ω складається з n елементарних рівноможливих подій. ***Класичною ймовірністю*** події A називається число p=$p(A)$, що дорівнює відношенню числа m подій, сприяючих події A, до всього числа n подій, утворюючих повну систему подій:

$$p(A) = \frac{m}{n} \qquad (2.1.1)$$

Для неможливої події $p(\varnothing) = 0$ ($m = 0$).

Для достовірної події $p(\Omega) = 1$ ($m = n$).

Таким чином, для довільної випадкової події

$$0 \leq p(A) \leq 1 \qquad (2.1.2)$$

Приклад 1. Куб з пофарбованими гранями розрізаний на 27 однакових кубиків. Знайти ймовірність того, що у вибраного навмання кубика буде пофарбована одна грань (дві грані, три грані, жодної грані).

Розв'язання. Число всіх елементарних подій n = 27. Нехай A – подія, що полягає в тому, що у вибраного кубика пофарбована лише одна грань, B – дві грані, C – три грані, D – жодної грані. Події A сприяє m = 6 елементарних подій (число граней куба), події B – m = 12 (число ребер куба), C – m = 8 (число вершин куба), D – m = 1.

Згідно з (2.1.1), маємо:

$$p(A) = \frac{6}{27},\ p(B) = \frac{12}{27},\ p(C) = \frac{8}{27},\ p(D) = \frac{1}{27}.$$

Перевіримо: $p(A) + p(B) + p(C) + p(D) = 1$.

Приклад 2. Кидають дві гральні кості. Чому дорівнює ймовірність того, що сума очок, що випадають на двох костях, не більша 5?

Розв'язання. Нехай n_1 очок випало на першій кості, n_2 – на другій. Простір елементарних подій є множина пар (n_1, n_2):

$$\Omega = \{(n_1, n_2);\ n_1, n_2 = 1,2,3,4,5,6\}.$$

Подія A має вигляд:

$$A = \{(n_1, n_2);\ n_1, n_2 = 1,2,3,4,5,6;\ n_1 + n_2 \leq 5\}.$$

Множина Ω містить 36 елементів, множина A – 10 елементів

A = {(1, 1); (1, 2); (2, 1); (2, 2); (1, 3); (3, 1); (2, 3); (3, 2); (1, 4); (4, 1)}.

Маємо класичну схему, тому

$$p(A) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$$

Приклад 3. Серед 25-ти екзаменаційних білетів 5 «щасливих» та 20 «нещасливих». Студенти підходять по черзі за білетами. У кого більша ймовірність витягти «щасливий» білет; у того, хто підійшов першим за білетом, чи у того, хто підійшов другим?

Розв'язання. Нехай щасливі білети пронумеровані 1, 2, 3, 4, 5. Позначимо i_1 – номер білету, який взяв перший студент, i_2 – номер білету, що взяв другий студент. Тоді:

$$\Omega = \{(i_1, i_2);\ i_1, i_2 = 1, \dots, 25;\ i_1 \neq i_2\}.$$

Подія A – перший студент взяв «щасливий» білет має вигляд:

$$A = \{(i_1, i_2);\ i_1 = 1,2,3,4,5;\ i_2 = 1, \dots, 25;\ i_1 \neq i_2\}.$$

Подія B – другий студент взяв «щасливий» білет має вигляд:

$$B = \{(i_1, i_2);\ i_2 = 1,2,3,4,5;\ i_1 = 1, \dots, 25;\ i_1 \neq i_2\}.$$

Кожна з подій A і B містить по 120 елементів, Ω – 600 елементів, тому

$$p(A) = p(B) = \frac{120}{600} = \frac{1}{5}.$$

Зауваження. Класичне означення ймовірності є означенням ймовірності в ідеалі. В природі часто неможливо встановити чисельність повної групи подій, неможливо, напевно, стверджувати про рівноможливість подій. В цих випадках ймовірність випадкової події обчислюється або іншим чином, або наближено.

2.2 Геометрична ймовірність

Геометричне поняття ймовірності є узагальненням класичного означення (2.1.1) ймовірності на випадок неперервних множин з нескінченним числом елементарних наслідків.

Означення. Нехай Ω - вимірна область, що має міру $\mu(\Omega)$. Розглядається схема: в області Ω навмання беруть точку. Ймовірність $p(A)$ того, що точка попаде в область $A \subseteq \Omega$ дорівнює

$$p(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}, \qquad (2.2.1)$$

де $\mu(A)$ – міра множин елементарних подій, що сприяють події *A*, $\mu(\Omega)$ – міра простору елементарних подій Ω.

Зауважимо, що:

1) Якщо Ω - одновимірна область, то $\mu(\Omega)$ – її довжина;
2) Якщо Ω - плоска множина, то $\mu(\Omega)$ – її площа;
3) Якщо Ω - тривимірна область, то $\mu(\Omega)$ – її об'єм.

Приклад 1. У коло радіуса *R* вписано правильний n-кутник. У коло навмання кидають точку. Яка ймовірність того, що точка попаде всередину n-кутника?

Розв'язання. Простір елементарних подій є коло радіуса *R*; подія *A* – правильний n-кутник, вписаний в коло.

Відповідно до (2.2.1), маємо

$$p(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{\frac{n}{2}R^2 sin\frac{360}{n}}{\pi R^2} = \frac{n\, sin\frac{360}{n}}{2\pi}.$$

Приклад 2. У будь-який проміжок часу *T* на вхід радіолокаційного пристрою надходять два незалежні сигнали. Сигнали пошкоджуються, якщо різниця між моментами їх прийому менше τ. Знайти ймовірність того, що сигнали будуть пошкоджені.

Розв'язання. Нехай x – час надходження першого сигналу, y – час надходження другого сигналу. Тоді $x \in [0, T]$, $y \in [0, T]$. $\Omega = \{[0, T] \times [0, T]\}$ – квадрат. Оскільки сигнали пошкоджуються, коли різниця між моментами їх прийому менше τ, то *A* – область, така, що $|x\text{-}y| < \tau$.

$$\mu(\Omega) = T \cdot T = T^2,$$

$$\mu(A) = T^2 - 2\frac{(T-\tau)^2}{2} = 2T\tau - \tau^2.$$

Таким чином, шукана ймовірність $p(A) = \frac{2T\tau - \tau^2}{T^2}$.

2.3 Статистична ймовірність

Нехай була проведена серія із n дослідів, в кожному з яких можлива чи неможлива подія *A*.

Означення. Відносною частотою $p^*(A)$ події *A* називається

$$p^*(A) = \frac{m}{n}, \qquad (2.3.1)$$

тобто відношення m – числа появи даної події до загального числа проведених дослідів.

При проведенні досліду частота $p^*(A)$ є числом випадковим, яке неможливо точно визначити для жодного скінченного числа дослідів n.

Однак на практиці по мірі збільшення n числа дослідів спостерігається тенденція відносної частоти ставати все менш випадковою та стабілізуватися біля якогось постійного й невипадкового числа $p(A)$ – ймовірності події A в даному експерименті. Ця властивість відносних частот називається ***властивістю стійкості***.

Означення. ***Статистичною ймовірністю*** $p(A)$ події A називається число, біля якого стійко відбувається коливання частоти $p^*(A)$ при повторенні серії дослідів.

$$p(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{m}{n} \qquad (2.3.2)$$

Приклад 1. Підприємство виготовляє деталі, в яких доля браку становить 3 відсотки. З великої партії деталей навмання вибрали одну. Яка ймовірність того, що вона виявиться бракованою?

Статистична ймовірність $p(A) = \frac{3}{100}$.

Зауважимо, що як і для ймовірності випадкової події, для відносної частоти виконується нерівність

$$0 \le p^*(A) \le 1.$$

2.4 Аксіоматичне означення ймовірності

Аксіоматична теорія ймовірностей була створена *А.Н. Колмогоровим* у 1933р. Вона поєднала класичне, геометричне та статистичне означення ймовірності.

Означення. Нехай кожній події $A \subseteq \Omega$ поставлена у відповідність числова функція $p(A)$, визначена для всіх $A \subseteq \Omega$, яка задовольняє трьом умовам (*аксіомам ймовірності):*

Аксіома1 (аксіома невід'ємності): $p(A) \ge 0$;

Аксіома2 (аксіома нормованості): $p(\Omega) = 1$;

Аксіома3 (аксіома додавання): для будь-якої скінченної чи нескінченної послідовності подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$, таких що $A_i A_j \ne \emptyset$ при $i \ne j$, виконується рівність

$$p\left(\sum_i A_i\right) = \sum_i p(A_i) \qquad (2.4.1)$$

Функцію $p(A)$ називають ймовірністю події A. Приймемо без доведення наступну теорему.

Теорема_. Ймовірність задовольняє властивостям:

1. $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

2. $p(\emptyset) = 0$
3. Якщо $A \subseteq B$, то $p(A) \leq p(B)$
4. $0 \leq p(A) \leq 1$
5. Теорема додавання

$$p(A + B) = p(A) + p(B) - p(AB)$$
$$p(A + B + C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(AB) - p(AC) - p(BC) + p(ABC)$$

Приклад 1. Довести теорему 5.

$A + B = A + B\backslash A$

За аксіомою 3: $p(A + B) = p(A + B\backslash A) = p(A) + p(B\backslash A)$.

$B = B\backslash A + AB$, $p(B) = p(B\backslash A) + p(AB)$.

Тому $p(A + B) = p(A) + p(B) - p(AB)$.

Контрольні запитання

1. Дати класичне означення ймовірності. Формула класичної ймовірності.
2. Вказати недоліки класичного означення ймовірності.
3. Дати означення геометричної ймовірності. Коли вона застосовується? Формула геометричної ймовірності.
4. Дати означення статистичної ймовірності. Формула статистичної ймовірності.
5. Дати аксіоматичне означення ймовірності. Перечисліть аксіоми ймовірності.
6. Перечисліть основні властивості ймовірності.

Задачі для самостійного розв'язання

1. В урні a білих та b чорних кульок. Із урни навмання виймають одну кульку. Знайти ймовірність того, що ця кулька біла.
2. В урні a білих та b чорних кульок. Із урни навмання виймають одну кульку і відкладають в сторону. Ця кулька виявилася білою. Після чого беруть ще одну кульку. Знайти ймовірність того, що ця кулька також біла.
3. В урні a білих та b чорних кульок. Із урни навмання одну за одною виймають всі кульки, окрім останньої. Знайти ймовірність того, що остання кулька також біла.
4. Гральний кубик підкидається один раз. Знайти ймовірності наступних подій:
   A – поява парного числа очок;
   B – поява не менш ніж 5 очок;
   C – поява не більш ніж 5 очок.
5. Гральний кубик підкидається два рази. Знайти ймовірність того, що обидва рази випаде однакове число очок.
6. Стрижень довжиною l навмання розламали на три частини. Яка ймовірність того, що з одержаних частин можна утворити трикутник?
7. В ящику є 10 монет вартістю 25 копійок, 5 монет вартістю 10 копійок і 2 монети по 50 копійок. Навмання беруть 6 монет. Яка ймовірність того, що в сумі буде не більше однієї гривні?

8. Для кожного приладу ймовірність того, що він включений в даний момент дорівнює 0,6. Знайти ймовірність того, що в даний момент включений хоча б один із трьох приладів.

9. В ящику три деталі. Всі припущення щодо кількості стандартних деталей серед них однаково ймовірні. Навмання взяли деталь і виявилося, що вона стандартна. Знайти ймовірність всіх припущень щодо кількості стандартних деталей.

10. Відомо, що всі деталі однієї партії задовольняють технічним умовам, а четверта частина другої партії складає брак. Деталь, що взяли з навмання вибраної партії, виявилась доброякісною. Визначити ймовірність того, що друга деталь, взята з тієї ж партії виявиться також доброякісною, якщо першу деталь після перевірки повернули назад в партію.

11. У довільні моменти проміжку часу T рівно можливе надходження в приймач двох сигналів. У прийманні сигналу можливий збій, якщо різниця між моментами надходження буде менше τ. Визначити ймовірність того, що в приймачі буде збій.

12. Гравці А та В грають в шахи. За виграш у партії зараховується одне очко. Ймовірність того, що партію виграє гравець А дорівнює α, а гравець В - β ($\alpha > \beta$, $\alpha + \beta = 1$). Всю гру виграє той, хто обжене суперника на 2 очки.
    а) Яка ймовірність того, що гру виграє гравець А?
    б) Яка ймовірність того, що гру виграє гравець В?
    в) Що вигідніше для А: грати одну партію чи цілу гру?
    г) Яка ймовірність того, що гра ніколи не закінчиться?

13. Обирають навмання один член визначника n-го порядку. Яка ймовірність того, що він не містить елементів головної діагоналі?

14. Ймовірність банкрутства для першої фірми – це розв'язок рівняння $5p^2 + 6p = 8$, для другої фірми ця ймовірність на 20 % менша. Знайти ймовірність того, що із двох фірм збанкрутує хоча б одна фірма.

15. Два пеленгатори незалежно один від одного пеленгують об'єкт, перший - з ймовірністю 0,3, а другий - з ймовірністю 0,6. Знайти ймовірність того, що об'єкт буде запеленговано.

16. Знайти ймовірність того, що навмання вибране натуральне число не ділиться на 2; на 3.

17. При одному циклі огляду радіолокаційна станція, що слідкує за космічним об'єктом, виявляє об'єкт із ймовірністю 0,6. Виявлення об'єкта в кожному циклі проходить незалежно від інших. Знайти ймовірність, що при 20 циклах огляду об'єкт виявлено не буде.

18. Радіотехнічна схема складається із трьох паралельних ланцюгів, одного основного та двох резервних, кожний із яких включає в себе два послідовно

з'єднаних елемента. Надійність кожного елемента дорівнює 0,9. Знайти надійність всієї схеми.

19. Ймовірності здачі заліку для першого та другого студентів задовольняють системі рівнянь:

$$\begin{cases} 3p_1 + 2p_2 = 2{,}7; \\ 4p_1 + 5p_2 = 5. \end{cases}$$

Знайти ймовірність здачі заліку:
а) тільки одним студентом;
б) хоча б одним студентом.

20. З повного набору кісток доміно навмання беруть дві. Визначити ймовірність того, що одну із цих кісток можна приставити до другої.

21. Визначити ймовірність того, що викликаний навмання студент виявиться відмінником, якщо відомо, що 2% всіх студентів невстигаючі, а 25% встигаючих студентів – відмінники.

22. Ймовірність розв'язання задачі для першого студента дорівнює абсцисі вершини параболи $y = 2p^2 - p + 1$, для другого ця ймовірність складає 0,85, а для третього вона становить 60% від суми ймовірностей перших двох студентів. Знайти ймовірність розв'язання задачі:
а) тільки двома студентами;
б) хоча б двома студентами.

23. З колоди в 52 карти навмання виймають 3 карти. Знайти ймовірність того, що серед них будуть трійка «пік», сімка «пік», туз «пік».

24. Людина має N ключів, з яких тільки один підходить до його дверей. Вона послідовно тестує їх, обираючи навмання (без повернення). Знайти ймовірність того, що цей процес закінчиться на k-му тесті, $k \leq N$.

25. З десяти перших букв українського алфавіту навмання без повернення обираються 4 букви і записуються зліва направо. Яка ймовірність того, що отримане «слово» буде закінчуватися на букву «А»?

РОЗДІЛ 3

Елементи комбінаторики. Правило суми. Правило добутку. Комбінації із n елементів по k. Перестановки. Розміщення із n по k. Розміщення з повтореннями. Комбінації з повтореннями. Гіпергеометрична схема

При розв’язанні задач теорії ймовірностей найбільш складним є підрахунок числа елементарних подій. В цьому разі доцільно звернутись до формул комбінаторики.

Теорема 1 (правило суми). Якщо об’єкт A можна вибрати m способами, а об’єкт B – n способами, то об’єкт A чи B можна вибрати $(m + n)$ способами.

Теорема 2 (правило добутку). Якщо об'єкт A можна вибрати m способами, а об'єкт B – n способами, то об'єкт A і B можна вибрати $(m \cdot n)$ способами.

Приклад 1. У трьох урнах знаходяться радіодеталі трьох типів: у першій урні – $n_1 = 20$ резисторів, у другій – $n_2 = 15$ конденсаторів, у третій – $n_3 = 10$ транзисторів. Знайти ймовірність $P(A)$ того, що схема, зібрана з трьох навмання взятих елементів, буде включати елементи з мінімальним значенням параметрів.

Розв'язання. $P(A) = \frac{m}{n}$,

m= 1 – число подій, сприяючих події A

$n = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 20 \cdot 15 \cdot 10 = 3000$ (згідно з правилом добутку)

$P(A) = \frac{1}{3000}$

Означення. Результат вибору m елементів із n елементів називається ***вибіркою*** із n елементів по m елементів. Якщо при цьому елемент після вибору повертається в групу, то вибірку називають вибіркою з поверненням(з повтореннями). Якщо елемент, що вибрали, не повертається назад в групу, то вибірку називають вибіркою без повернення(без повторень). Якщо розглядаються вибірки без повторень, то слова «без повторень» часто не вживають.

Означення. Вибірки, де порядок розташування елементів не грає ролі називають ***комбінаціями***(сполученнями). Ті вибірки, де цей порядок є важливим, називають ***розміщеннями***.

Зауваження. Розміщення без повторень із n елементів по n елементів називають перестановками.

Теорема 3. Число розміщень без повторень із n елементів по m елементів дорівнює

$$\boldsymbol{A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}} \tag{3.1.1}$$

$$\boldsymbol{P_n = n!} \tag{3.1.2}$$

Теорема 4. Число сполучень із n елементів по m елементів дорівнює

$$\boldsymbol{C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}} \tag{3.1.3}$$

$C_n^m = C_n^{n-m};\ C_n^0 = C_n^n = 1;\ C_n^1 = C_n^{n-1} = n; n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n; 0! = 1.$

Числа C_n^m називають біноміальними коефіцієнтами.

Приклад 2. Із семи карток, які утворюють слово «МАЙСТЕР» навмання вибирають чотири картки. Яка ймовірність, що утвориться слово «ТЕМА»?

Розв'язання. Елементарною подією в даному експерименті є будь-яка четвірка карток з урахуванням порядку їх вибору, тобто розміщення без повторень із n=7 по m=4 елементів.

Число елементарних подій, сприяючих події A: m=1,

$$P(A) = \frac{1}{A_7^4} = \frac{3!}{7!} = \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{1}{840}.$$

Приклад 3. Скільки існує способів розкласти n книг по n місцях?

Розв'язання. Іншими словами, скільки існує перестановок із n елементів? Відповідь: $P_n=n!$

Приклад 4. Група складається із n=20 студентів. Для чергування по інституту навмання відбирають m=3 студента. Знайти ймовірність того, що будуть відібрані перші три студента за списком.

Розв'язання. Нехай подія A - вибрані перші три за списком студенти.
$P(A) = \frac{m}{n}$, m=1.

Так як порядок вибору студентів неважливий, то $n = C_{20}^{3}$.

$$P(A) = \frac{1}{C_{20}^{3}} = \frac{3!\cdot 17!}{20!} = \frac{2\cdot 3!}{18\cdot 19\cdot 20} = \frac{1}{3\cdot 19\cdot 20} = \frac{1}{1140}$$

Теорема 5. Число $\tilde{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{m}}$ розміщень з повтореннями із n типів елементів по m елементів задається формулою:

$$\tilde{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{n}^{\boldsymbol{m}}. \tag{3.1.4}$$

Приклад 5. Телефонний номер складається з 6 цифр. Визначити ймовірність того, що при випадковому наборі номер буде закінчуватися на 240.

Розв'язання. Подія A – номер має шість цифр, останні 3 – «240», цифри можуть повторюватися. Тому

$P(A) = \frac{m}{n}$, $m = \tilde{A}_{10}^{3} = 10^3$, $n = \tilde{A}_{10}^{6} = 10^6$

$P(A) = \frac{1}{10^3}$.

Теорема 6. Число сполучень $\tilde{\boldsymbol{C}}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{m}}$ з повтореннями із n типів елементів по m елементів визначається формулою

$$\tilde{\boldsymbol{C}}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n+m-1}}^{\boldsymbol{m}} = \frac{(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{m}-\boldsymbol{1})!}{\boldsymbol{m}!(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{1})!} \tag{3.1.5}$$

Розглянемо ще одну важливу задачу комбінаторики. Треба знайти число перестановок з повтореннями із m елементів, в яких перший елемент зустрічається рівно m_1 разів, другий елемент рівно m_2 разів, …, n-й елемент рівно – m_n разів $(m_1 + m_2 + \cdots m_n = m)$. Число таких перестановок позначимо $C(m_1, \dots, m_n)$.

Теорема 7. Число $C(m_1, \dots, m_n)$ визначається формулою

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{m_1}, \dots, \boldsymbol{m_n}) = \frac{\boldsymbol{m}!}{\boldsymbol{m_1}!\cdot \boldsymbol{m_2}!\cdot \dots \cdot \boldsymbol{m_n}!} \tag{3.1.6}$$

Зауваження. Число $C(m_1, \dots, m_n)$ називають поліноміальним коефіцієнтом. Воно співпадає з числом способів, за допомогою яких можна заповнити m різних комірок n різними частинками без обмежень на число частинок, які потрапили в кожну комірку таким чином, щоб у першій комірці знаходилось m_1 частинок,…, у n-ій – m_n частинок.

Приклад 6. Із цифр 1,2,3 навмання склали шестизначне число. Знайти ймовірність $P(A)$ того, що в цьому числі цифра 1 буде зустрічатися 1 раз, цифра 2 – два рази, 3 – три рази.

Розв'язання. Елементарними подіями експерименту є всі розміщення з повтореннями із трьох елементів по шість елементів, тому

$$n = \tilde{A}_3^6 = 3^6 = 729.$$

Число елементарних подій, що сприяють події A,

$$m = C(1{,}2{,}3) = \frac{(1+2+3)!}{1!2!3!} = \frac{6!}{2!3!} = 60.$$

Тому $P(A) = \frac{60}{729} \approx 0{,}082.$

Наведемо розв'язання задачі, яка часто зустрічається.

Нехай маємо $n = n_1 + \cdots + n_k$ різних елементів, причому: n_1 елементів першого типу, n_2 – другого типу,…, n_k – k-го типу. Навмання вибирають m елементів. Подія A: серед вибраних m елементів рівно $m_1 \le n_1$ елементів першого типу, $m_2 \le n_2$ елементів другого типу,…, $m_k \le n_k$ елементів k-го типу; $m_1 + m_2 + + \cdots + m_k = m$. Ймовірність цієї події позначають $P(m_1, m_2, \dots m_k)$.

Означення. Розглянутий спосіб вибору елементів називають гіпергеометричною схемою, а сукупність ймовірностей $P(m_1, m_2, \dots m_k)$ називають гіпергеометричним розподілом.

Теорема 8. Ймовірність $P(m_1, m_2, \dots m_k)$ в гіпергеометричній схемі визначається формулою

$$\boldsymbol{P(m_1, m_2, \dots m_k) = \frac{C_{n_1}^{m_1} \cdot C_{n_2}^{m_2} \cdot \ldots \cdot C_{n_k}^{m_k}}{C_n^m}}. \quad (3.1.7)$$

Приклад 7. Маємо N телевізорів, серед яких $M \le N$ бракованих. Навмання вибирають n телевізорів, $1 \le n \le N$. Знайти ймовірність, що серед них буде бракованих рівно m, $0 \le m \le \min(n,m)$.

Розв'язання. Зрозуміло, що $k = 2$ і в рамках класичної схеми маємо

$$P(m,\ n\text{-}m) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

Контрольні запитання

1. Сформулюйте правило суми.
2. Сформулюйте правило добутку.
3. Дайте означення вибірки без повторення, з повторенням.
4. Що називається розміщеннями, перестановками, сполуками?
5. Наведіть формули числа розміщень без повторень, з повтореннями, числа перестановок, числа сполук без повторень і з повтореннями.
6. Чому дорівнює число розміщень з повтореннями із n елементів по m елементів, в яких перший елемент зустрічається рівно m_1 разів, другий – рівно m_2 разів,…, n-й елемент – m_n разів?

7. Що називають гіпергеометричною схемою? Напишіть формулу обчислення ймовірностей за гіпергеометричною схемою.

Задачі для самостійного розв'язання

1. В урні a білих та b чорних кульок ($a \geq 2$, $b \geq 2$). Із урни навмання виймають дві кульки. Яка подія найімовірніша:
A – кульки одного кольору;
B – кульки різних кольорів?

2. З урни, в якій є n перенумерованих кульок навмання виймають одну за одною всі кульки. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих кульок будуть йти в порядку зростання: 1, 2, …, n.

3. Та ж сама урна, що й в попередній задачі, але кожна кулька після виймання повертається назад. Знайти ймовірність того, що будуть вийняті кульки, номери яких утворюють послідовність 1, 2, …, n.

4. .Повна колода карт (52 карти) ділиться навпіл на 2 пачки по 26 карт. Знайти ймовірності наступних подій:
A – в кожній пачці по 2 тузи;
B – в одній пачці не буде жодного туза, а в іншій – всі 4;
C – в одній пачці буде 1 туз, а в іншій – 3.

5. На 9-ти картках написані цифри: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Дві з них виймаються навмання і кладуться на стіл в порядку появлення. Знайти ймовірність того, що отримане число буде парним.
6. На 5-ти картках написані цифри: 1, 2, 3, 4, 5. Дві з них виймаються одна за одною. Знайти ймовірність того, що число на другій картці буде більшим, ніж на першій.

7. Те ж питання, що й в попередній задачі, але перша картка після виймання повертається назад і змішується з іншими, а число на ній записується.

8. В урні a білих, b чорних та c червоних кульок. З урни навмання одну за одною виймають всі кульки і записують їхні кольори. Знайти ймовірність того, що в цьому списку білий колір з'явиться раніше чорного.

9. Маємо 2 урни: в першій a білих та b чорних кульок, в другій c білих та d чорних кульок. Із кожної урни навмання виймають кульку. Знайти ймовірність того, що обидві кульки білі.

10. Із 5-ти літер азбуки складено слово «книга». Букви перемішали та знов зібрали в довільному порядку. Знайти ймовірність того, що знов з'явилося слово «книга».

11. Те ж питання для слова «ананас».

12. У три вагони потяга заходять 9 пасажирів. Яка ймовірність того, що:
а) у перший вагон зайде три пасажири?
б) у кожен вагон зайде по три пасажири?

в) в один із вагонів зайде чотири, в другий - три і в третій - два пасажири?

13. У партії із 15 резисторів 5 бракованих. Яка ймовірність того, що із 5 взятих навмання резисторів 2 бракованих і 3 справних?

14. В ящику три деталі. Всі припущення щодо кількості стандартних деталей серед них однаково ймовірні. Навмання взяли деталь і виявилося, що вона стандартна. Знайти ймовірність всіх припущень щодо кількості стандартних деталей.

15. Дві з чотирьох незалежно працюючих лампи у пристрої відмовили. Знайти ймовірність того, що відмовила перша і друга лампи, якщо ймовірність відмови першої, другої, третьої та четвертої ламп відповідно дорівнює 0,1; 0,2; 0,3; 0,4.

16. Два з трьох незалежно працюючих елементів обчислювального пристрою відмовили. Знайти ймовірність того, що відмовили перший та третій елементи, якщо ймовірність відмови першого, другого та третього елементів відповідно дорівнює 0,1; 0,2; 0,3.

17. Пристрій складається із 5 елементів, три елементи із них зношені. При вмиканні пристрою вмикаються довільним чином два елементи. Знайти ймовірність того, що ввімкнуться незношені елементи.

18. Відділ технічного контролю перевіряє вироби на стандартність. Ймовірність того, що виріб стандартний дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що із двох перевірених виробів тільки один стандартний.

19. На перше вересня заплановано три лекції з різних предметів. Всього на курсі вивчається 10 предметів. Студент, який не встиг познайомитися з розкладом занять, намагається його вгадати. Яка ймовірність успіху в даному експерименті, якщо вважати, що будь який розклад із трьох предметів однаково можливий?

20. Регістр калькулятора складається із 8 розрядів. Вважається, що поява будь-якого числа на регістрі однаково ймовірна. Визначити ймовірність наступних подій:
A = {у всіх розрядах знаходяться одні нулі};
B = {у всіх розрядах стоять одні й ті ж цифри};
C = {на регістрі містяться дві однакові цифри}.

21. П'ять чоловіків і чотири жінки розсаджуються довільним способом в коло. Яка ймовірність того, що всі жінки будуть сидіти поряд?

22. Для кожного приладу ймовірність того, що він буде увімкнутий в даний момент часу дорівнює 0,6. Знайти ймовірність того, що в даний момент буде вимкнутий:
а)хоча б один із трьох приладів;
б)тільки один прилад.

23. В ящику знаходиться 15 деталей, серед них 10 пофарбованих. Збиральник навмання витягує з ящика 3 деталі. Знайти ймовірність того, що витягнуті деталі будуть пофарбованими.

24. В партії із 20 резисторів 4 бракованих. Яка ймовірність того, що із 8 навмання вибраних резисторів 3 бракованих і 5 справних?

25. У шафі знаходяться 9 однотипних приладів. На початку досліду вони були всі нові і жодного разу не використовувалися в роботі. Для тимчасової експлуатації беруть навмання три прилади, які потім повертають назад до шафи. На зовнішній вигляд прилад, що був у експлуатації, не відрізняється від нового. Знайти ймовірність події A = {після трикратного вибору та експлуатації не залишиться нових приладів}.

РОЗДІЛ 4

Залежні та незалежні події. Умовна ймовірність. Формула множення ймовірностей

4.1 Умовна ймовірність

Якщо ймовірність випадкової події A обчислюється за умови, що подія B відбулася, то така ймовірність називається ***умовною*** і обчислюється за формулою

$$\boldsymbol{P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}\ ,\ P(B)\neq 0} \tag{4.1.1}$$

Читають: ймовірність події A за умови, що подія B відбулася.

Аналогічно

$$\boldsymbol{P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)},\ P(A)\neq 0} \tag{4.1.2}$$

4.2 Ймовірність добутку подій

Теорема 1.(добуток ймовірностей):

$$\boldsymbol{P(AB)=P(A)\ P(B|A)=P(B)\ P(A|B)} \tag{4.2.1}$$

Розглянемо ще раз задачу про «щасливі» білети для першого і другого студентів.

Приклад 1. (другий спосіб розв'язання)**.** Серед 25 екзаменаційних білетів 5 «щасливих» і 20 «нещасливих». Студенти по черзі підходять за білетами. У кого більша ймовірність витягти «щасливий» білет - у того, хто підійшов першим, чи у того, хто підійшов другим?

Розв'язання. Два студента витягли по одному білету. Нехай A_1 –перший студент витяг щасливий білет, A_2 –другий студент витяг щасливий білет. Простір елементарних подій містить 4 події. $\Omega: A_1A_2, A_1\bar{A}_2, \bar{A}_1A_2, \bar{A}_1\ \bar{A}_2$.
За теоремою добутку: $P(A_1A_2)= P(A_1)\ P\ (A_2\,|\,A_1)$.

$P(A_1)=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$; $P(A_2|A_1)=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$. Тому $P(A_1A_2)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{30}$.

$P(A_1\bar{A}_2)=\frac{1}{5}\cdot\frac{20}{24}=\frac{1}{6}=$, $P(\bar{A}_1A_2)=\frac{20}{25}\cdot\frac{5}{24}=\frac{1}{6}$, $P(\bar{A}_1\,\bar{A}_2)=\frac{20}{25}\cdot\frac{19}{24}=\frac{19}{30}$.

Оскільки події простору Ω несумісні, то $P(A_2)=P(A_1A_2)+P(\bar{A}_1A_2)=\frac{1}{30}+\frac{1}{6}=\frac{1}{5}$

Отже, $P(A_1)=P(A_2)=\frac{1}{5}$.

Теорема. Умовна ймовірність задовольняє всім ознакам безумовної:

1) $P(A|B)\geq 0$;
2) $P(\Omega|A)=1$;
3) $P((A_1+\ldots+A_n)|B)=P(A_1|B)+\ldots+P(A_n|B)$.

4.3 Залежні і незалежні події

Означення. Випадкові події А і В називаються ***залежними***, якщо поява однієї з них (*A* або *B*) впливає на ймовірність появи іншої. В іншому разі випадкові події *A* і *B* називаються ***незалежними***.

Приклад 1. В урні міститься 10 однакових кульок, з них 6 білих і 4 чорних. З урни навмання беруть дві кульки по одній без повернення. З'ясувати, чи будуть залежними такі події: перша кулька виявиться білою і друга теж.

Розв'язання. Позначимо через *A* появу білої кульки при першому вийманні, а через *B* - при другому. Випадкові події *A* і *B* будуть залежними, оскільки поява білої кульки при першому її вийманні (подія *A*) впливатиме на ймовірність її появи при другому вийманні (події *B*).

Приклад 2. З урни, де 6 білих і 4 чорних кульки, виймають 2 кульки по одній з поверненням. З'ясувати, чи будуть залежними такі події: перша кулька біла, друга-теж.

Розв'язання. Нехай подія *A* – поява білої кульки при першому вийманні, подія *B* – при другому вийманні. Подія *A* не впливатиме на ймовірність появи білої кульки при другому вийманні, тобто подію *B*, оскільки співвідношення між білими і чорними кульками в цьому разі не змінюється.

Означення. Події *A* і *B*, які мають ненульову ймовірність називають ***незалежними***, якщо умовна ймовірність події *A* за умови, що подія *B* відбулася, дорівнює безумовній ймовірності події *A*, тобто

$$P(A|B)=P(A) \tag{4.3.1}$$

Теорема. Події *A* і *B*, які мають ненульову ймовірність, є незалежними тоді і тільки тоді, коли

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B) \tag{4.3.2}$$

Теорема. Якщо події *A* і *B* незалежні, то незалежними є також пари подій $\bar{A}$ і B, A і $\overline{B}$, $\bar{A}$ і $\overline{B}$.

Означення: Події $A_1, A_2,\ldots, A_n$ називаються незалежними у сукупності, якщо

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n) \qquad (4.3.3)$$

Теорема. Нехай події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ незалежні у сукупності. Тоді

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = 1 - \left(1 - P(A_1)\right)\left(1 - P(A_2)\right) \ldots \left(1 - P(A_n)\right) \qquad (4.3.4)$$

Приклад 3. Із колоди n=36 карт навмання виймають одну карту. Нехай подія A – карта «пікової» масті, подія B – ця карта «дама». Залежні чи незалежні події A і B?

Розв'язання. Знайдемо $P(A|B)$ – ймовірність, що витягнута карта - «пікова дама».

$P(A|B) = \frac{1}{4}$, так як витягнута «дама», і вона «пікова».

$P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

Так як $P(A)= P(A|B)$,то події A і B незалежні.

Приклад 4. Змінимо умову задачі. Нехай в колоду додали N=100 «порожніх» карт. Чи зміниться відповідь?

Розв'язання.

$P(A) = \frac{9}{136}$; $P(A|B) = \frac{1}{4}$.

$P(A) \neq P(A|B)$, події A і B стали залежними.

Приклад 5. Партія, що містить 100 деталей, підлягає вибірковому контролю. Навмання вибирають 5 деталей, і якщо серед них виявиться хоча б одна бракована деталь, то бракується вся партія. Відомо, що в партії 5% бракованих деталей. Яка ймовірність для цієї партії бути забракованою?

Розв'язання. Нехай подія A_i – i-а деталь бракована($i=\overline{1,5}$).

Подія $A = A_1 + A_2 + \cdots + A_5$ – хоча б одна деталь бракована, тобто вся партія відбраковується.

$$P(\bar{A}) = P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4\bar{A}_5) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)P(\bar{A}_3|\bar{A}_1\bar{A}_2)P(\bar{A}_4|\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3) \times$$

$$\times P(\bar{A}_5|\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4) = \frac{95}{100} \cdot \frac{94}{99} \cdot \frac{93}{98} \cdot \frac{92}{97} \cdot \frac{91}{97} = 0{,}71.$$

Отже, шукана ймовірність $P(A)=1-P(\bar{A})=1-0{,}71=0{,}29$.

Приклад 6. Кожен комп'ютер може повести себе несподівано й кожен власник персонального комп'ютера це підтвердить. А тому для підвищення надійності результату часто розв'язують задачу паралельно на незалежно працюючих комп'ютерах.

Задача розв'язується на трьох комп'ютерах, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що протягом доби перший комп'ютер не вийде з ладу – 0,9, для другого – 0,8 і для третього – 0,85. Яка ймовірність того, що протягом доби: а)всі комп'ютери будуть працювати нормально; б)всі три комп'ютери вийдуть з ладу; в)який-небудь комп'ютер вийде з ладу; г) хоча б один комп'ютер вийде з ладу?

Розв'язання.

а) P=0,9·0,8·0,85=0,612.

б) P=0,1·0,2·0,15=0,003.

в) P=0,1·0,8·0,85+0,9·0,2·0,85+0,9·0,8·0,15=0,329.

г) $P = 1 - P(\bar{A})$=1-0,612=0,388.

Приклад 7. Для підвищення надійності приладу він дублюється (n - 1) іншими такими приладами, надійність кожного приладу дорівнює p. Знайти надійність P системи. Скільки треба взяти приладів, щоб підвищити надійність до заданої P_1?

Розв'язання.

1) Відмова системи потребує сумісної відмови всіх n приладів, тому, згідно з формулою (4.3.4), надійність системи $P=1-(1-p)^n$.

2) Нехай для підвищення надійності потрібно взяти n приладів. За умовою задачі $P_1 \geq 1-(1-p)^n$. Звідки $n \geq \frac{\lg(1-P_1)}{\lg(1-p)}$.

Контрольні запитання

1. Залежні та незалежні події. Приклади.
2. Дайте означення умовної ймовірності. Формула умовної ймовірності.
3. Властивості умовної ймовірності.
4. Формула множення ймовірностей.
5. Ймовірність суми незалежних подій.

Задачі для самостійного розв'язання

1. З колоди карт (52 карти) навмання виймається одна карта. Розглядаються такі події:
   A – поява туза;
   B – поява карти червоної масті;
   C – поява бубнового туза;
   D – поява десятки.
   Залежні чи незалежні наступні пари подій: A і B; A і C; B і C; B і D; C і D?
2. В урні a білих та b чорних кульок. З урни навмання виймаються 2 кульки. Знайти ймовірність того, що ці кульки будуть різних кольорів.
3. В лотереї n білетів, серед яких l щасливих. X придбає k білетів. Знайти ймовірність того, що він виграє хоча б на один білет.
4. При одному циклі огляду радіолокаційна станція, що слідкує за космічним об'єктом, виявляє об'єкт із ймовірністю 0,6. Виявлення об'єкта в кожному циклі проходить незалежно від інших. Знайти ймовірність, що при 20 циклах огляду об'єкт виявлено не буде.
5. Обчислювальний центр, який виконує неперервну обробку інформації, що надходить, має в своєму розпорядженні два обчислювальних пристрої. Відомо, що кожний із них має ймовірність відмови на деякий час, вона дорівнює 0,2.Потрібно визначити ймовірність:

а) того, що один пристрій відмовить, а другий буде працювати;
б) безвідмовної роботи кожного пристрою.

6. Прилад складається із двох вузлів. Ймовірність безвідмовної роботи першого вузла упродовж часу T дорівнює p_1, а для другого - p_2. Прилад випробували упродовж часу T і він відмовив. Вартість ремонту першого вузла дорівнює A грн, а другого - B грн. Знайти ймовірність того, що на ремонт приладу буде витрачено A грн.

7. Припустимо, що $P(A) = 0{,}25$; $P(C) = 0{,}45$; $P(A \cup C) = 0{,}55$. Обчислити: $P(A \cap C)$, $P(C/A)$, $P(A/C)$.Чи будуть події A і C незалежними?

8. Пристрій складається з двох незалежно працюючих елементів. Ймовірність відмови елементів відповідно дорівнює 0,05 і 0,08. Знайти ймовірність відмови пристрою, якщо для цього достатньо щоб відмовив хоча б один елемент.

9. Ймовірність попадання в десятку при одному пострілі дорівнює $p = 0{,}2$. Скільки потрібно виконати незалежних пострілів, щоб із ймовірністю не менше 0,9 попасти в десятку хоча б один раз?

10. В ящику лежать n нових тенісних м’ячів; k з них виймаються і з ними грають ($k \le \frac{n}{2}$). Після гри м’ячі повертаються в ящик. Наступного разу з ящика знов беруть навмання k м’ячів. Знайти ймовірність того, що всі ці k м’ячів будуть новими.

11. Ведеться стрільба по літаку, уразливими агрегатами якого є 2 двигуни і кабіна пілота. Для того, щоб вивести із строю літак, достатньо вразити обидва двигуна разом або кабіну пілота. Ймовірність враження першого двигуна – p_1, другого – p_2, кабіни пілота – p_3. Агрегати літака уражаються незалежно один від одного. Знайти ймовірність того, що літак буде уражений.

12. Із повної колоди карт (52 карти) навмання виймають 4 карти. Розглянемо події:
A – серед вийнятих карт є хоча б одна бубнова;
B – серед вийнятих карт э хоча б одна червова.
Знайти ймовірність події $C = A+B$.

13. Із повної колоди карт (52 карти) навмання виймають 4 карти. Знайти ймовірність того, що всі ці карти різної масті.

14. Попередня задача, але кожна карта після виймання повертається в колоду.

15. Обчислювальна машина складається з n блоків. Надійність протягом часу T першого блоку – p_1, другого – p_2 і т.д. Блоки відмовляють незалежно один від одного. При відмові будь-якого блоку відмовляє машина. Знайти ймовірність того, що машина відмовить за час T.

16. При включенні запалювання двигун починає роботу з ймовірністю p. Знайти ймовірність того, що двигун почне роботу при другому включенні

запалювання; знайти ймовірність того, що для введення двигуна в роботу потрібно буде включити запалювання не більше двох разів.

17. Завод випускає деякі прилади. Кожен прибор може мати дефект. Ймовірність дефекту – p. Після виготовлення прилад оглядається послідовно k контролерами; i-й контролер виявляє дефект, якщо він є, з ймовірністю p_i (i=1, 2, …, k). Якщо дефект виявляється, прилад бракується . Знайти ймовірність подій:
A – прилад буде забраковано;
B – прилад буде забраковано другим контролером;
C – прилад буде забраковано всіма контролерами.

18. Прилад складається із n однакових блоків, з'єднаних послідовно. Вихід із ладу кожного блока означає вихід із ладу приладу в цілому. Блоки виходять із ладу незалежно один від одного. Надійність (ймовірність безвідмовної роботи) кожного блоку дорівнює p. Знайти надійність P приладу в цілому.

19. Для підвищення надійності приладу він дублюється таким самим приладом(з'єднується паралельно). Надійність кожного приладу дорівнює p. При виході з ладу першого приладу відбувається миттєве переключення на другий. Знайти надійність системи двох дублюючих один одного приладів.

20. В урні містяться 30 однакових кульок, які пронумеровані від 1 до 30. Навмання з урни беруть одну кульку. Яка ймовірність того, що номер кульки виявиться кратним 3 або 5?

21. Чотири спортсмени мають виконати норму майстра спорту. Кожен з них може виконати її з певною ймовірністю. Яка ймовірність того, що з чотирьох спортсменів норму майстра спорту виконують не менш як два спортсмени; не більш як три?

22. Задана множина цілих чисел. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Навмання беруть одне число. Яка ймовірність того, що це число виявиться кратним 3, коли відомо, що воно є непарним?

23. Відомі значення: $P(A\bar{B}) = 0{,}3$; $P(\bar{A}B) = 0{,}4$; $P(\bar{A}\bar{B}) = 0{,}9$.З'ясувати, чи є залежними випадкові події A і B.

24. В ящику знаходяться 15 однакових деталей. З них 9 стандартні, а решта— браковані. Деталі виймають по одній без повернення. Так було вийнято три деталі. Обчислити ймовірності таких випадкових подій: 1) A – три деталі виявляться стандартними; 2) B – всі три виявляться бракованими; 3) C – дві стандартні й одна бракована.

25. Три студенти складають іспит з математики. Ймовірність того, що перший складе іспит, дорівнює 0,9; для другого та третього студента ця ймовірність становить відповідно 0,8 і 0,7. Обчислити ймовірності таких випадкових подій: 1) A – три студенти склали іспит; 2) B – три студенти не склали іспит; 3) C – два студенти склали іспит.

РОЗДІЛ 5

Формула повної ймовірності. Формула Байєса

5.1 Формула повної ймовірності

При обчисленні ймовірностей складних подій часто одночасно застосовують теореми суми та добутку.

Теорема. Нехай подія A може наступати одночасно з однією із подій $H_1, H_2, \ldots, H_n$, які складають повну групу подій ($H_iH_j = \varnothing$, $i,j = \overline{1,n}$, $i \neq j$; $H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \Omega$). Тоді ймовірність події A обчислюється за формулою:

$$\boldsymbol{P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + \ldots + P(A|H_n)P(H_n)}$$

або (5.1.1)

$$\boldsymbol{P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i)}.$$

Події $H_1, \ldots, H_n$ називаються гіпотезами, ймовірності $P(A|H_1), \ldots, P(A|H_n)$ називаються апріорними, тобто отриманими до експерименту, а формула (5.1.1) називається формулою повної ймовірності.

Ця формула дає можливість визначити ймовірність події A, якщо відомі ймовірності гіпотез і апріорні ймовірності.

Приклад 1. Для даної місцевості стан погоди можна охарактеризувати за допомогою одного із трьох основних типів погоди: H_1 – напрям вітру, H_2 – рівень атмосферного тиску, H_3 – розміщення ізобар в даній частині земної кулі. Відомо, що в даній місцевості в певний момент часу: $P(H_1) = 0{,}3$, $P(H_2) = 0{,}5$, $P(H_3) = 0{,}2$. Зрозуміло, що $\sum_{k=1}^{3} P(H_k) = 1$. Знайти ймовірність події A – у випадково взятий день будуть атмосферні опади, якщо $P(A|H_1) = 0{,}4$, $P(A|H_2) = 0{,}8$, $P(A|H_3) = 0{,}7$.

Розв'язання. За формулою (5.1.1):

$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + P(A|H_3)P(H_3)$

$P(A) = 0{,}3 \cdot 0{,}4 + 0{,}5 \cdot 0{,}8 + 0{,}2 \cdot 0{,}7 = 0{,}66$.

Числове значення ймовірності показує, що атмосферні опади спостерігались приблизно в 66% усіх днів цього періоду.

Приклад 2. Розглянемо ще раз задачу про «щасливий» білет. Серед 25 екзаменаційних білетів 5 «щасливих» та 20 «нещасливих». Студенти підходять по черзі. У кого більша ймовірність витягти «щасливий» білет: у того, хто підійшов першим, чи у того, хто підійшов другим?

Розв’язання. (3-й спосіб розв’язання). Нехай подія A – перший студент витяг «щасливий» білет, подія B – другий студент витяг «щасливий» білет.

$P(A) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$.

Подія B може настати з однією із гіпотез H_1, H_2, де

H_1 – перший студент витяг «щасливий» білет;

H_2 – перший студент витяг «нещасливий» білет.

$H_1 + H_2 = \Omega$, $H_1 \cdot H_2 = \varnothing$.

Тоді $P(B) = P(B|H_1)P(H_1) + P(B|H_2)P(H_2)$

$P(H_1) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$; $P(H_2) = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$

$P(B|H_1) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$; $P(B|H_2) = \frac{5}{24}$

$P(B) = \frac{4}{24} \cdot \frac{1}{5} + \frac{5}{24} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

$P(A) = P(B) = \frac{1}{5}$

5.2 Формула Байєса

Нехай подія A може наставати за однієї з гіпотез $H_1, \ldots, H_n$, які утворюють повну групу подій і відомі ймовірності гіпотез: $P(H_1), \ldots, P(H_n)$ ($P(H_i)>0$, $i=\overline{1,n}$). Відомо, що подія A настала. Як зміняться ймовірності гіпотез, за умови, що подія A настала, тобто чому дорівнюють $P(H_1|A), \ldots, P(H_n|A)$?

Ці ймовірності називають «апостеріорними», тобто отриманими після експерименту.

Теорема. Нехай для деякої події A, ($P(A)>0$) і гіпотез $H_1, \ldots, H_n$ відомі $P(H_1), \ldots, P(H_n)$ ($P(H_i)>0$, $i=\overline{1,n}$) і $P(A|H_1), \ldots, P(A|H_n)$. Тоді умовна ймовірність $P(H_i|A)$ ($i=\overline{1,n}$) – гіпотези H_i за умови, що подія A відбулась, обчислюється за формулою Байєса:

$$\boldsymbol{P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A|H_1)P(H_1)+ \ldots +P(A|H_n)P(H_n)}, \; i = \overline{1,n}} \tag{5.2.1}$$

Приклад 1. Каналом зв'язку передається один із двох сигналів x_1 та x_2, причому перший із двох сигналів зустрічається у 2 рази частіше за другий. Через наявність перешкод можливі спотворення: замість сигналу x_1 на прийомному кінці може бути прийнятий сигнал x_2 та навпаки. Властивості каналу такі, що сигнал x_1 піддається спотворенню у 10% випадків, а сигнал x_2 – у 40%.

1. Визначити ймовірність того, що буде прийнятий сигнал x_1.
2. Якщо прийнятий сигнал x_1, то яка ймовірність того, що цей сигнал був переданий?

Розв'язання. Нехай подія A – прийнятий сигнал x_1, а B – прийнятий сигнал x_2. H_1 – переданий сигнал x_1, H_2 – переданий сигнал x_2.

За умовою задачі маємо:

$P(H_1) = \frac{2}{3}$, $P(H_2) = \frac{1}{3}$, $P(A|H_1) = 0{,}9$; $P(A|H_2) = 0{,}4$;

$P(B|H_1) = 0{,}1$; $P(B|H_2) = 0{,}6$.

Необхідно визначити $P(A)$, $P(H_1|A)$.

За формулою повної ймовірності (5.1.1)

$$P(A) = 0{,}9 \cdot \frac{2}{3} + 0{,}4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{18}{30} + \frac{4}{30} = \frac{11}{15}$$

За формулою Байєса (5.2.1)

$$P(H_1|A) = \frac{0{,}9 \cdot \frac{2}{3}}{\frac{11}{15}} = \frac{9}{11}.$$

Формула Байєса знаходить широке застосування в математичній статистиці, теорії прийняття рішень. Відзначимо важливий наслідок із формули Байєса. Якщо всі гіпотези до початку досліду рівні, тобто $P(H_1) = \cdots = P(H_n)$, то ймовірності гіпотез після проведення досліду будуть пропорційними ймовірностям появ події A за умовою вірогідної гіпотези, тобто

$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A|H_i)}.$$

Контрольні запитання

1. Запишіть формулу повної ймовірності. За яких умов вона застосовується?
2. Запишіть формулу Байєса.

Задачі для самостійного розв’язання

1. Збиральник отримав 3 коробки деталей, виготовлених заводом N_1 і дві коробки виготовлених заводом N_2. Ймовірність того, що деталь, яка виготовлена заводом N_1 є стандартною, дорівнює 0,8, а для заводу N_2 вона дорівнює 0,9. Складальник навмання дістав деталь із навмання вибраної коробки. Знайти ймовірність того, що витягнута стандартна деталь.
2. У двох ящиках знаходяться радіолампи. У першому – 12 ламп, із яких одна нестандартна, в другому – 10 ламп, серед яких дві нестандартні. Із першого ящика в другий переклали одну лампу. Знайти ймовірність того, що навмання вийнята із другого ящика лампа буде нестандартною.
3. Абонент не пам’ятає останню цифру номеру телефону і тому набирає її навмання. Знайти ймовірність того, що йому потрібно буде зателефонувати не більше, ніж в три місця. Як зміниться ймовірність, якщо відомо, що остання цифра непарна?
4. На роботу менеджера претендують 40% жінок і 60% чоловіків. Серед жінок 30% мають університетську освіту, а серед чоловіків 60%. Яка ймовірність, що вибрана навмання заява буде від:
   а) жінки з університетською освітою;
   б) чоловіка без університетської освіти?
5. Завод випускає за кожну із трьох декад місяця відповідно 20%, 30%, 50% від завдання. Причому ймовірність браку складає відповідно 0,010; 0,012; 0,015. Знайти ймовірність того, що виріб випущено в першій декаді, коли відомо, що в ньому виявлено брак.
6. Радіолампа може належати до одної із трьох партій з ймовірностями p_1, p_2, p_3, де $p_1 = p_3 = 0{,}25$; $p_2 = 0{,}5$. Ймовірність того, що лампа відпрацює задану кількість годин дорівнює для цих партій відповідно 0,1; 0,2 і 0,4. Знайти ймовірність того, що лампа відпрацює задану кількість годин.

7. Телеграфне повідомлення складається із сигналів "точка" і "тире". Статистичні властивості перешкод такі, що спотворюються у середньому 2/5 повідомлень "точка" і 1/3 повідомлень "тире". Відомо, що сигнали "точка" і "тире" зустрічаються у відношенні 5:3. Знайти ймовірність того, що прийнято переданий сигнал, якщо:
   а) прийняли сигнал "точка";
   б) прийняли сигнал "тире".
8. У спеціалізовану лікарню поступає в середньому 50% хворих із захворюванням K, 30% – із захворюванням L, 20% – із захворюванням M. Ймовірність повного вилікування від хвороби K дорівнює 0,7; від захворювань L і M ця ймовірність відповідно дорівнює 0,8 і 0,9. Хворий, що надійшов до лікарні, був виписаний здоровим. Знайти ймовірність, що в нього було захворювання K.
9. Третя частина однієї із трьох партій деталей другосортна, а решта деталей у всіх партіях першого сорту. Деталь, що взяли із довільної партії виявилась першосортною. Визначити ймовірність того, що деталь була взята з партії, що має другосортні деталі. Знайти ту ж ймовірність за умови, що взята із тієї ж партії друга деталь виявиться першосортною, якщо першу деталь після перевірки повернули назад в партію.
10. В ящику три деталі. Всі припущення щодо кількості стандартних деталей серед них однаково ймовірні. Навмання взяли деталь і виявилося, що вона стандартна. Знайти ймовірність всіх припущень щодо кількості стандартних деталей.
11. Радіолампа може належати до однієї з трьох партій із ймовірностями p_1, p_2, p_3, де $p_1 = p_3 = 0{,}25$; $p_2 = 0{,}5$. Ймовірність того, що лампа відпрацює задане число годин для цих партій відповідно дорівнює 0,1; 0,2; 0,4. Визначити ймовірність того, що лампа, яку взяли з довільної партії, відпрацює задане число годин.
12. У зібраному електричному ланцюгу може бути поставлений запобіжник першого типу, який при перевантаженні спрацьовує з ймовірністю 0,8, або запобіжник другого типу, який при перевантаженні спрацьовує з ймовірністю 0,9. Запобіжник першого типу може бути поставлений в ланцюг з ймовірністю 0,6, а другий – із ймовірністю 0,4. Запобіжник у ланцюгу спрацював. Яка ймовірність того, що був поставлений запобіжник першого типу?
13. В урні знаходиться одна куля, про яку відомо, що вона або біла, або чорна. В урну поклали білу кулю, а потім після ретельного перемішування взяли навмання одну кулю, яка виявилась білою. Яка ймовірність того, що після цього візьмуть з урни білу кулю?
14. На вхід радіолокаційного пристрою із ймовірністю 0,8 надходить суміш корисного сигналу з перешкодою, а з ймовірністю 0,2 тільки перешкода. Якщо поступає корисний сигнал з перешкодою, то пристрій реагує на присутність

будь-якого сигналу з ймовірністю 0,7, якщо тільки перешкода, то з ймовірністю 0,3. Відомо, що прилад зареєстрував наявність якогось сигналу. Знайти ймовірність того, що в його складі є корисний сигнал.

15. Прилад, що встановлений на борту літака, може працювати у двох режимах: в умовах крейсерського польоту та в умовах переобтяжування при зльоті і посадці. Упродовж 80% часу літак знаходиться у крейсерському польоті, а 20% часу в умовах переобтяжування. Ймовірність виходу із ладу приладу за час крейсерського польоту дорівнює 0,1, а в умовах переобтяжування – 0,4. Обчислити надійність приладу за час польоту.

16. У першому ящику знаходяться 20 справних радіоламп, в другому – 10 справних і 10 несправних, а в третьому ящику – 20 несправних радіоламп. Із вибраного навмання ящика вийняли справну радіолампу. Обчислити ймовірність того, що радіолампу вийняли з першого ящика.

17. Із 10 мікросхем 4 марковані. Ймовірність того, що маркована мікросхема важча норми, дорівнює 0,3, а для немаркованої ця ймовірність дорівнює 0,1. Навмання взята мікросхема виявилася важче норми. Знайти ймовірність того, що вона маркована.

18. Задача про чотирьох брехунів. Із чотирьох чоловіків А, Б, В, Г один (А) отримав інформацію, яку у вигляді сигналу "так" чи "ні" повідомляє другому (Б), другий - третьому (В), а третій - четвертому (Г), а останній об'являє результат отриманої інформації таким же чином, як і інші. Відомо, що кожний з них каже правду тільки в одному випадку із трьох. Яка ймовірність того, що перший із цих брехунів сказав правду, якщо четвертий сказав правду?

19. На вхід радіолокаційного пристрою з ймовірністю p надходить суміш корисного сигналу з перешкодою, а з ймовірністю $1-p$ - тільки перешкода. Якщо надходить корисний сигнал з перешкодою, то пристрій реагує на присутність будь-якого сигналу з ймовірністю p_1, якщо тільки перешкода - то з ймовірністю p_2. Відомо, що пристрій зареєстрував наявність якогось сигналу. Знайти ймовірність того, що в його складі не буде корисного сигналу.

20. При відхилені від нормального режиму роботи автомата сигналізатор A спрацьовує з ймовірністю 0,8, а сигналізатор B – з ймовірністю 1. Ймовірності того, що автомат споряджений сигналізаторами A або B відповідно дорівнюють 0,6 і 0,4. Отримано сигнал про відхилення в роботі автомата. Наявність якого сигналізатора у автомата більш ймовірна?

21. Перша фірма виготовила 80 виробів, а друга – в 1,5 разів більше. У першій фірмі 2% виробів браковані, а в другій – 5%. Вироби надходять на спільний ринок. Навмання куплений виріб виявився небракованим. Яка ймовірність того, що він вироблений першою фірмою?

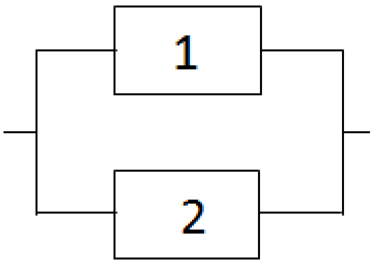
22. Однотипні прилади випускаються трьома заводами в кількісному відношенні 1:2:3, причому ймовірності браку для цих заводів відповідно дорівнюють p_1,

p_2, p_3. Прилад, що його купив науково-дослідний інститут виявився бракованим. Яка ймовірність того, що даний прилад випущений першим заводом (марка заводу на приладі відсутня)?

23. Характеристика матеріалу, взятого для виготовлення продукції, з ймовірностями 0,09; 0,16; 0,25; 0,25; 0,16; 0,09 може належати до однієї із шести груп відповідно. Залежно від властивостей матеріалу ймовірності отримання першосортної продукції відповідно дорівнюють 0,2; 0,3; 0,4; 0,4; 0,3; 0,2. Знайти ймовірність отримання першосортної продукції.

24. Маємо 2 урни: в першій a білих кульок і b чорних; в другій – c білих і d чорних. Із першої урни в другу перекладають, не дивлячись одну кульку, після чого із другої урни беруть одну кульку. Знайти ймовірність того, що ця кулька буде білою.

25. Прилад складається із двох дублюючих один одного вузлів (див. рис.) і може випадковим чином працювати в одному із двох режимів: сприятливому і несприятливому. В сприятливому режимі надійність кожного із вузлів дорівнює p_1, в несприятливому – p_2. Ймовірність того, що прилад буде працювати в сприятливому режимі дорівнює P_1, а в несприятливому – 1-P_1. Знайти повну надійність приладу.



РОЗДІЛ 6

Схема Бернуллі. Формула Бернуллі. Формула Пуассона. Локальна та інтегральна формули Муавра-Лапласа

6.1 Схема Бернуллі. Формула Бернуллі

Означення. ***Схемою Бернуллі*** або ***схемою послідовних незалежних випробувань*** називають послідовність спроб, яка задовольняє наступним умовам:
1) В кожній спробі можливі лише два результати: поява події A («успіх») з ймовірністю p , або поява події $\bar{A}$ («неуспіх») з ймовірністю $q = 1-p$.
2) Іспити є незалежними, тобто ймовірність в k-му іспиті не залежить від результатів випробувань всіх іспитів до k-го.

Наведемо приклади експериментів, які вписуються в модель схеми Бернуллі.

1. Послідовне підкидання n разів симетричної монети. Тут «успіхом» є поява герба з ймовірністю $p=\frac{1}{2}$, а «неуспіхом» – поява цифри з ймовірністю $q=\frac{1}{2}$.

2. Послідовність n пострілів по мішені.

3. Іспити n виробів на надійність за деякий проміжок часу T.

При розгляді схеми Бернуллі основною є задача знайти ймовірність того, що в n незалежних спробах «успіх» з'явиться рівно k разів: $P_n(k)$.

Теорема. Ймовірність $P_n(k)$ того, що в n незалежних спробах буде рівно k успіхів, визначається формулою:

$$\boldsymbol{P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k},\ k=\overline{0,n}} \qquad (6.1.1)$$

Формулу (6.1.1) називають формулою Бернуллі, а також біноміальною ймовірністю.

Із формули Бернуллі випливають два наслідки.

Наслідок 1. Ймовірність появи успіху в n спробах не більше k_1 разів і не менше k_2 разів визначається формулою:

$$\boldsymbol{P_n(k_1 \le k \le k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}} \qquad (6.1.2)$$

Наслідок 2. Ймовірність появи хоча б одного успіху в n іспитах в схемі Бернуллі визначається формулою:

$$\boldsymbol{P_n(k \ge 1) = 1 - P_n(k = 0) = 1 - q^n} \qquad (6.1.3)$$

Приклад 1. Для даного підприємства відома ймовірність перевитрати енергії протягом доби: $p = \frac{1}{4}$. Визначте ймовірність того, що серед 6 робочих днів тижня:

1) Перевитрата енергії спостерігається рівно k днів (k=0,1,…,6).
2) Перевитрата енергії спостерігається від 1 до 3 днів.

Розв'язання. 1) Маємо n=6 , $p = \frac{1}{4}$, $q = \frac{3}{4}$.

Використовуючи формулу Бернуллі, запишемо:

$P_6(0)=\left(\frac{3}{4}\right)^6 \approx 0{,}178$; $P_6(1)=6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5 \approx 0{,}356$;

$P_6(2)=\frac{6\cdot5}{2!} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 \approx 0{,}294$; $P_6(3)=\frac{6\cdot5\cdot4}{3!} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 \approx 0{,}140$;

$P_6(4)=\frac{6\cdot5}{2!} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \approx 0{,}040$; $P_6(5)=6 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \frac{3}{4} \approx 0{,}006$; $P_6(6)=\left(\frac{1}{4}\right)^6 \approx 0{,}000$.

2) $P_6(1 \le k \le 3) = P_6(1) + P_6(2) + P_6(3) = 0{,}356 + 0{,}294 + 0{,}140 = 0{,}790$.

Приклад 2. Контрольна робота з теорії ймовірностей містить 6 завдань. За умовою, щоб ця робота була зарахована, необхідно, щоб студент за деякий час виконав будь-які чотири завдання. Якщо студент буде виконувати лише 4 завдання, то ймовірність правильного виконання будь-якого з них дорівнює 0,8. Якщо він виконує 5 завдань, то ймовірність дорівнює 0,7, і шість завдань – 0,6.Які дії студента слід вважати найбільш раціональними?

Розв'язання. Порівняємо числа $P_6(4)$, якщо p=0,8; $P_6(5)$, якщо p=0,7; $P_6(6)$, якщо p=0,6.

$$P_6(4) = C_6^4 \cdot (0{,}8)^4 \cdot (0{,}2)^2 \approx 0{,}246$$

$$P_6(5) = C_6^5 \cdot (0{,}7)^5 \cdot 0{,}3 \approx 0{,}303$$

$$P_6(4) = C_6^6 \cdot (0{,}3)^6 \approx 0{,}047$$

Студенту слід виконувати 5 завдань.

Приклад 3. Ймовірність виграшу на один лотерейний білет дорівнює 0,01. Скільки потрібно купити білетів, щоб ймовірність хоча б одного виграшу в лотереї була не менше, ніж P=0,9.

Розв'язання. Нехай треба купити n білетів. Тоді $P_n(k \geq 1) = 1 - q^n \geq P$,

$$q^n \leq 1 - P$$

$$n \ \geq \frac{\ln(1-P)}{\ln q} = \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}99} \approx 230$$

Треба купити не менше, ніж 230 білетів.

В схемі Бернуллі важливою є задача про *найімовірніше число* K_0 появи події A(успіхів) в n випробуваннях.

Теорема.

$$\boldsymbol{n \cdot p - q \leq K_0 \leq n \cdot p + p} \qquad (6.1.4)$$

$$\boldsymbol{K_0 = [n \cdot p + p]} \qquad (6.1.5)$$

де $[n \cdot p + p] -$ ціла частина числа $n \cdot p + p$.

6.2 Формула Пуассона (розподіл рідкісних подій в схемі Бернуллі)

Якщо в схемі Бернуллі p - «мале», n – «велике» і np – «мале», то користуватися формулою Бернуллі незручно. Ймовірність Бернуллі приблизно замінюють ймовірностями Пуассона.

Теорема Пуассона. Нехай $n \to \infty$ і $p \to 0$ так, що $np=\lambda$. Тоді в схемі Бернуллі

$$\boldsymbol{P_n(k) = \ C_n^k \cdot p^k \,(1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda},\ \lambda = np} \qquad (6.2.1)$$

Наближену формулу (6.2.1) називають формулою ***Пуассона***, а сукупність ймовірностей $P(k,\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda},\ \lambda = np, k = \overline{0,\infty}$ називають ***розподілом Пуассона***.

Значення чисел $P(k,\lambda), , k = \overline{0,\infty}$ наведені в таблиці чисел Пуассона.

Формула Пуассона справедлива також і для невдач, коли $\lambda = nq$ також мале. Зрозуміло, що слова «мале» і «велике» досить умовні і повинні визначатися в кожному конкретному випадку.

Приклад 1. Фірма відправила на базу 5000 якісних деталей. Ймовірність того, що деталь пошкодиться під час транспортування p=0,0002. Знайти ймовірність того, що на базу прибуде 3 пошкоджені деталі.

Розв'язання. За умовою n=5000, p=0,0002, k=3, $\lambda = np = 1$.

$$P_n(k) \approx P(k,\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

Отже, $P_{5000}(3) = C_{5000}^3 \cdot (0{,}0002)^3 \cdot (0{,}9998)^{4997} \approx P(3{,}1) = \frac{e^{-3}}{3!} = 0{,}06.$

6.3 Локальна формула Муавра-Лапласа

Якщо в схемі Бернуллі n – «велике», p і q – також «великі», то користуватися формулою Бернуллі також незручно. Ймовірності Бернуллі приблизно обчислюються за допомогою ***локальної формули Муавра-Лапласа***.

Теорема. Якщо в схемі Бернуллі n – «велике», а також «великі» p і q, то

$$\boldsymbol{P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)} \tag{6.3.1}$$

$$\boldsymbol{\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}} \tag{6.3.2}$$

$$\boldsymbol{x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}} \tag{6.3.3}$$

Функцію $\varphi(x)$ називають щільністю стандартного нормального (або гаусового) розподілу. Значення функції $\varphi(x)$ наведені в таблиці, причому $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Приклад 1. Ймовірність влучити в ціль при одному пострілі дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що при 400 пострілах буде рівно 300 влучень у ціль.

Розв'язання. В даному випадку n = 400 і p = 0,8 – «великі», np =320 – теж «велике», k= 300. Тому за формулою (6.3.1):

$$P_{400}(300) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}\, \varphi\left(\frac{300 - 400 \cdot 0{,}8}{\sqrt{400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}\right)$$

$$P_{400}(300) \approx \frac{1}{8}\, \varphi(-2{,}5) = \frac{1}{8}\, \varphi(2{,}5)$$

Знаходимо $\varphi(2{,}5)$ за таблицею функції щільності гаусового розподілу: $\varphi(2{,}5) = 0{,}01753$.

Відповідь: $P_{400}(300) \approx 0{,}0022$.

6.4 Інтегральна формула Муавра-Лапласа

Теорема. Якщо в схемі Бернуллі n – « велике», p і q також «великі», то ймовірність, що k – число успіхів в n іспитах не менше k_1 і не більше k_2 приблизно знаходиться за інтегральною формулою Муавра-Лапласа

$$\boldsymbol{P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)} \tag{6.4.1}$$

$$\boldsymbol{\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt,\ (-\infty < x < \infty)} \tag{6.4.2}$$

$$\boldsymbol{x_i = \frac{k_i - np}{\sqrt{npq}}, \quad i = 1, 2} \qquad (6.4.3)$$

$\Phi(x) -$ функція нормального стандартного (гаусового) розподілу.

Означення. Інтегралом Лапласа називається функція

$$\boldsymbol{\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt}, \ (-\infty < \boldsymbol{x} < \infty) \qquad (6.4.4)$$

$$\boldsymbol{\Phi}_0(-x) = -\boldsymbol{\Phi}_0(x)$$

$$\boldsymbol{\Phi(x) = \frac{1}{2} + \Phi_0(x) \ \Rightarrow P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1)} \qquad (6.4.5)$$

Значення інтегралу Лапласа наведені в таблиці значень інтегралу Лапласа.

Приклад 1. У переданій каналом зв'язку послідовності знаків, що утворюють повідомлення, будь-який знак через перешкоди незалежно спотворюється з ймовірністю 0,2. Передано 10000 знаків. Яка ймовірність того, що в отриманій послідовності буде від 2000 до 2100 перекручувань? Знайти найімовірніше число перекручувань та обчислити його ймовірність за теоремами Пуассона і Муавра-Лапласа.

Розв'язання. За умовами задачі маємо:

n= 10000, p= 0,2, q= 0,8; $2000 \le k \le 2100$.

1) $P_n(k_1 \le k \le k_2)$–?

Так як n – «велике», q – «велике» і np = 2000 – «велике», тому шукану ймовірність знаходимо за формулою (6.4.5):

$$P_{10000}(2000 \le k \le 2100) \approx \Phi_0\left(\frac{2100 - 2000}{\sqrt{10000 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}}\right) - \Phi_0(0) = \Phi_0(2{,}5) - \Phi_0(0)$$

За таблицею інтеграла Лапласа $\Phi_0(2{,}5) = 0{,}49379$, $\Phi_0(0) = 0$,

$$P_{10000}(2000 \le k \le 2100) \approx 0{,}494.$$

2) Найімовірніше число K_0 перекручувань знаходимо за формулою (6.1.5):

$$K_0 = [np + p] = [2000 + 0{,}2] = 2000 \,.$$

3) $P_{10000}(2000)$–?

За формулою Пуассона (6.2.1) $\boldsymbol{\lambda}$ = 2000.

$$P_{10000}(2000) \approx \frac{(2000)^{2000}}{2000!} e^{-2000}.$$

За формулою Муавра-Лапласа (6.3.1)

$$P_{10000}(2000) \approx \frac{1}{\sqrt{10000 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} \varphi\left(\frac{2000 - 10000 \cdot 0{,}2}{\sqrt{10000 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}\right) = \frac{1}{40} \varphi(0) \approx 0{,}01.$$

6.5 Відхилення відносної частоти від ймовірності події в одному іспиті в схемі Бернуллі

Теорема. Ймовірність того, що в n незалежних іспитах, в кожному з яких ймовірність появи успіху дорівнює p, абсолютна величина відхилення відносної частоти $\frac{m}{n}$ появи успіху від p буде не більша за невід'ємне число ε, обчислюється за формулою:

$$\boldsymbol{P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\approx 2\,\Phi_0\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)}, \tag{6.5.1}$$

де $\Phi_0(x)$ – інтеграл Лапласа.

Приклад 1. Ймовірність появи події A в кожному із n=625 незалежних іспитах дорівнює p = 0,8. Знайти ймовірність того, що відносна частота появи події A відхилиться від її ймовірності по абсолютній величині не більш, ніж на ε = 0,04.

Розв'язання. За формулою (6.5.1)

$$P\left(\left|\frac{m}{625}-0{,}8\right|<0{,}04\right)\approx 2\,\Phi_0\left(0{,}04\sqrt{\frac{625}{0{,}8\cdot 0{,}2}}\right)=2\Phi_0(2{,}5)=2\cdot 0{,}49379\approx 0{,}9878.$$

6.6 Поліноміальна схема

У схемі Бернуллі дослід має два результати: «успіх» і «неуспіх». Якщо при окремому досліді в схемі n незалежних випробувань можливі результати $A_1, A_2, \ldots, A_n$ з відповідними ймовірностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ($p_1+p_2+\ldots+p_n=1$), то така схема називається ***поліноміальною***. Яка ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях подія $\boldsymbol{A_1}$ з'явиться рівно k_1 разів, подія A_2 – k_2 разів,…, A_n – k_n разів?

$$\boldsymbol{P_n(k_1,k_2,\ldots,k_n)=\frac{n!}{k_1!,k_2!,\ldots,k_n!}{p_1}^{k_1}{p_2}^{k_2}\ldots{p_n}^{k_n}} \tag{6.6.1}$$

Ймовірність (6.6.1) називається ***поліноміальною***.

Приклад 1. На оптовій базі знаходяться 500 однакових коробок із взуттям. Відомо, що 250 коробок містять взуття чорного кольору, 150 білого та 100 коробок коричневого кольору. Коробки не розкладено за кольором і продавець навмання бере 10 коробок. Знайти ймовірність того, що серед них буде 5 коробок із взуттям чорного кольору, 3 – білого та 2 – коричневого кольору.

Розв'язання. За гіпергеометричною схемою:

$$P=\frac{C_{250}^{5}\cdot C_{150}^{3}\cdot C_{100}^{2}}{C_{500}^{10}}=0{,}085.$$

За формулою (6.6.1) маємо:

$$P=\frac{10!}{5!3!2!}\cdot(0{,}5)^5\cdot(0{,}3)^3\cdot(0{,}2)^2\approx 0{,}085.$$

Контрольні запитання

1. Що називають схемою Бернуллі? Запишіть формулу Бернуллі.
2. Напишіть формулу того, що число успіхів у схемі Бернуллі буде у межах від k_1 до k_2 разів, якщо число випробувань дорівнює n.

3. Що означає найімовірніше число у схемі Бернуллі? За якою формулою воно обчислюється?
4. Напишіть формулу для обчислення ймовірності того, що у випробуваннях за схемою Бернуллі буде хоча б один успіх.
5. Напишіть формулу Пуассона. В яких випадках вона застосовується?
6. Напишіть локальну формулу Муавра-Лапласа. В яких випадках вона застосовується?
7. Напишіть інтегральну формулу Муавра-Лапласа. Функція Лапласа.
8. Що називається поліноміальною схемою? Напишіть формулу для обчислення ймовірностей того, що в цій схемі подія A_1 наступить k_1 разів, подія A_2 – k_2 разів,…, A_n – k_n разів ($k_1+ k_2+…+ k_n=n$).

Задачі для самостійного розв'язання

1. Радіоелектронний комплекс літака-бомбардувальника складається із 10 блоків. Ймовірність безвідмовної роботи кожного блоку протягом часу T є розв'язком рівняння $5p^2 - 13p + 6 = 0$. Обчислити ймовірність того, що за час T:
   а) відмовить хоча б один блок;
   б) відмовить два блоки;
   в) відмовить не менше двох блоків.

2. На обмежувач надходить послідовність із восьми випадкових по амплітуді незалежних відеоімпульсів. Ймовірність перевищення порогу обмеження кожним імпульсом дорівнює 0,25. Обчислити:
   а) ймовірність того, що із 8 імпульсів не менше, ніж 6 відеоімпульсів перевищать поріг;
   б) найімовірніше число відеоімпульсів, що перевищать поріг.

3. При обертанні антени оглядового радіолокатора за час опромінювання цілі необхідно, щоб через приймач на індикатор прийшло не менше, ніж 6 віддзеркалених імпульсів. Ймовірність придушення імпульсу шумом у приймачі дорівнює 0,1. Визначити:
   а) ймовірність виявлення цілі за один оберт антени;
   б) найімовірніше число імпульсів, що пропустить приймач.

4. У партії виробів кожний виріб може бути незалежно від інших дефектним з ймовірністю p = 0,3. Із партії навмання вибирають 15 виробів. Якщо серед них дефектних буде не більше 2, то партію приймають, інакше проводять суцільний контроль. Яка ймовірність того, що партія буде прийнята?

5. Лінією зв'язку передано чотири радіосигнали, що мають різну амплітуду. Ймовірності прийому кожного із сигналів не залежать від прийому інших сигналів і відповідно дорівнюють 0,2; 0,3; 0,4; 0,5. Визначити ймовірність того, що:
   а) буде прийнято K сигналів (K = 0,1,2,3,4);

б) буде встановлено двосторонній радіозв'язок, якщо ймовірність цієї події при прийомі одного сигналу дорівнює 0,2; при прийомі двох сигналів – 0,6, а при прийомі трьох і чотирьох сигналів – одиниці.

6. Завод, що виготовляє радіодеталі відправив на базу споживача 400 старанно упакованих доброякісних виробів. Ймовірність того, що один виріб пошкодиться за час шляху дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що на базу поступить від 3 до 5 пошкоджених деталей.

7. На факультеті навчається 730 студентів. Ймовірність того, що день народження студента випадає на визначений день року дорівнює 1/365. Знайти ймовірність того, що:
   а) тільки у трьох студентів дні народження співпадають;
   б) не більше ніж у десяти студентів дні народження співпадають.

8. Ймовірність попадання в десятку при одному пострілі дорівнює $p = 0{,}2$. Скільки потрібно виконати незалежних пострілів, щоб із ймовірністю не менше 0,9 попасти в десятку хоча б один раз?

9. У хлібопекарні при випічці здобних булочок з родзинками планується в середньому 3 родзинки на одну булочку. Чому дорівнює ймовірність того, що куплена в магазині булочка містить хоча б одну родзинку? Скільки родзинок слід планувати в середньому на одну булочку, щоб з імовірністю більшою ніж 0,99 випадково вибрана булочка містила хоча б одну родзинку?

10. Підводний човен атакує корабель і випускає по ньому послідовно і незалежно одну за одною 4 торпеди. Кожна торпеда попадає в корабель з ймовірністю $\frac{3}{4}$. Кожна з торпед з однаковою ймовірністю може пробити один із 10 відсіків корабля, у результаті чого він затоплюється водою. Знайти ймовірність загибелі корабля, якщо для цього потрібно затопити не менше, ніж два відсіки.

11. Для даного баскетболіста ймовірність закинути м'яч у кошик при одному кидку дорівнює 0,4. Виконано 10 кидків. Знайти ймовірність того, що він влучить від 3 до 5 кидків. Знайти найімовірніше число влучань у кошик.

12. Визначити число N повторних незалежних випробувань, які потрібно провести для того, щоб найімовірніше число появ події дорівнювало 20, якщо ймовірність появи цієї події при кожному випробуванні дорівнює 0,8.

13. Із ящика, в якому знаходяться 20 білих та 2 чорних кулі, N разів виймають кулі одна за одною, причому після кожного такого виймання кулю повертають назад до ящика. Визначити найменше число дослідів, при якому ймовірність дістати хоча б один раз чорну кулю буде більше половини.

14. Коректура книжки, що складається із 500 сторінок містить в собі 500 друкарських помилок. Знайти ймовірність того, що на одній сторінці буде не менше трьох друкарських помилок.

15. Упродовж години на комутатор надходить в середньому 60 викликів. Яка ймовірність того, що за 30 секунд (час, на протязі якого телефоністка була відсутня) не буде ні одного виклику?

16. Ймовірність того, що будь-який абонент зателефонує на комутатор протягом години дорівнює 0,01. Телефонна станція обслуговує 300 абонентів. Яка ймовірність того, що протягом години:
    а) зателефонує 4 абоненти?
    б) зателефонує менше 4-х абонентів?
    в) зателефонує від 10 до 12 абонентів?

17. Апаратура складається із 2000 однаково надійних елементів. Ймовірність відмови для кожного з них дорівнює $p = 0{,}0005$. Яка ймовірність відмови апаратури, якщо вона наступає тоді, коли відмовить хоча б один із елементів.

18. Ймовірність того, що виріб не витримає випробування, дорівнює 0,001. Знайти ймовірність того, що із 5000 виробів більш ніж один не витримає випробування.

19. За час, що розглядався, середнє число помилкових з'єднань, що припадає на одного телефонного абонента, дорівнює 8. Яка ймовірність того, що для даного абонента число помилкових з'єднань буде більше 4?

20. Знайти ймовірність того, що серед 200 виробів буде більш ніж три бракованих, якщо в середньому браковані вироби складають 1% від всього об'єму продукції.

21. При виготовленні зливків отримують 20% дефектних. Скільки потрібно запланувати зливків, щоб з ймовірністю не менше, ніж 0,95 була забезпечена програма випуску деталей, для виготовлення яких необхідно забезпечити 50 бездефектних зливків.

22. При штампуванні виходить 60% деталей першого сорту, 30% - другого, 10 % - третього. Знайти, скільки потрібно взяти відштампованих деталей, щоб з ймовірністю 0,8 можна було стверджувати, що частка деталей першого сорту буде відрізнятися від ймовірності виготовлення деталі першого сорту за абсолютною величиною не більш ніж на 0,005.

23. При роботі персонального комп'ютера час від часу виникають збої. У середньому можна вважати, що число збоїв за добу досягає 1,5. Знайти ймовірність наступних подій:
    а) протягом трьох діб не буде ні одного збою;
    б) протягом доби буде хоча б один збій;
    в) за тиждень роботи буде не менше трьох збоїв.

24. За один цикл автомат виготовляє 10 деталей. За яку кількість циклів ймовірність виготовлення хоча б однієї бракованої деталі буде не менше, ніж 0,8, якщо ймовірність того, що будь-яка деталь бракована дорівнює 0,01?

25. Знайти найімовірніше число від'ємних і додатних помилок і відповідну ймовірність при чотирьох вимірах, якщо при кожному вимірі ймовірність отримання додатної помилки дорівнює 2/3, а від'ємної помилки 1/3.

РОЗДІЛ 7

Випадкові величини. Дискретні і неперервні випадкові величини. Функція розподілу та її властивості. Щільність розподілу та її властивості

7.1 Випадкові величини

Одним із найважливіших понять у теорії ймовірностей є випадкова величина.

Означення. ***Випадковою величиною*** називається числова функція $X(\omega)$, значення якої залежать від того, яка елементарна подія $\omega \epsilon \Omega$ відбудеться в результаті досліду. Множина всіх значень, які випадкова величина може прийняти, називається ***множиною значень випадкової величини.***

Випадкові величини позначають великими латинськими буквами, а їхні значення малими буквами:

$$\boldsymbol{X, Y, Z, \ldots;\ X_1, X_2, \ldots, X_n} \qquad (7.1.1)$$

$$\boldsymbol{x, y, z, \ldots;\ x_1, x_2, \ldots, x_n} \qquad (7.1.2)$$

Прикладами випадкових величин є величина виграшу, число успіхів в n випробуваннях в схемі Бернуллі, число результатів даного типу у поліноміальній схемі і т. д.

Якщо множина значень випадкової величини X скінченна $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, або зліченна $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, то така випадкова величина називається дискретною. У іншому випадку її називають неперервною . Число успіхів в схемі Бернуллі є дискретною випадковою величиною. Похибка вимірювання, що виникає внаслідок округлення, є неперервною величиною.

Закон розподілу дискретної випадкової величини X можна задати в табличній формі або за допомогою ймовірнісного многокутника.

У разі табличної форми запису подається послідовність можливих значень випадкової величини X, розміщених у порядку зростання, та ймовірностей, з якими вона набуває цих значень.

$\boldsymbol{X = x_k}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{\ldots}$	$\boldsymbol{x_k}$	$\boldsymbol{\ldots}$	$\boldsymbol{x_n}$
$\boldsymbol{P(X = x_k)}$	$\boldsymbol{p_1}$	$\boldsymbol{p_2}$	$\boldsymbol{\ldots}$	$\boldsymbol{p_k}$	$\boldsymbol{\ldots}$	$\boldsymbol{p_n}$

(7.1.3)

Оскільки події $(X = x_k)$ і $(X = x_m)$ $(k, m = \overline{1, n}, k \neq m)$ несумісні і утворюють повну групу $\sum_{k=1}^{n(\infty)}(X = x_k) = \Omega$, то

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n(\infty)} P(X = x_k) = \sum_{k=1}^{n(\infty)} p_k = 1} \qquad (7.1.4)$$

Рівність (7.1.4) називається ***умовою нормування*** для дискретної випадкової величини. Таблицю (7.1.3) називають ***рядом розподілу*** дискретної випадкової величини, а графік (рис. 7.1.1), де точки з координатами (x_i, p_i), $i = \overline{1,n}$ з'єднані ламаною, називають ймовірнісним многокутником.

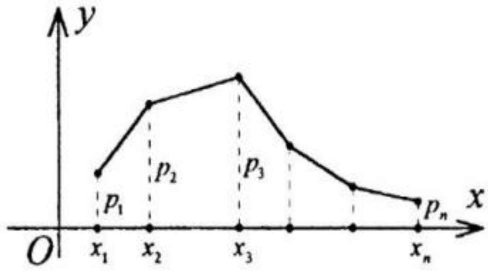


Рис. 7.1.1

Приклад 1. Схема Бернуллі з одного випробування

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, \omega \in A \\ 0, \omega \in \bar{A} \end{cases}$$

Закон розподілу задається таблицею:

$X = x_k$	0	1
$P(X = x_k)$	q	p

Приклад 2. Закон розподілу дискретної випадкової величини задано таблицею

$X = x_k$	0	1	2	3
$P(X = x_k)$	$2a$	a	$3a$	$4a$

Знайти:
1) ймовірності можливих значень випадкової величини X;
2) ймовірності таких подій: $(X < 1)$, $(X \leq 2)$, $(X < 3)$, $(X \geq 3)$, $(2 \leq X < 3)$.

Розв'язання.

1) За умовою нормування (7.1.4): a+2a+3a+4a=10a=1; $a = \frac{1}{10}$.

Закон розподілу матиме вигляд

$X = x_k$	0	1	2	3
$P(X = x_k)$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$

2) $P(X < 1) = P(X = 0) = \frac{2}{10}$

$P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{3}{10}$

$P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{6}{10}$

$P(X \geq 3) = P(X = 3) = \frac{4}{10}$

$P(2 \leq X < 3) = P(X < 3) - P(X < 2) = \frac{6}{10} - \frac{3}{10} = \frac{3}{10}$

7.2 Функція розподілу випадкової величини

Незалежно від типу випадкової величини *X* (дискретної або неперервної), для будь-якого дійсного x, $-\infty < x < +\infty$, розглянемо подію $\text{X}(\omega) < x$. Коротко будемо писати:

$$(\boldsymbol{X} < \boldsymbol{x}) \tag{7.2.1}$$

Означення. Функцією розподілу ймовірностей випадкової величини *X* в точці x називається ймовірність події $(\text{X} < x)$

$$\boldsymbol{F_X(x) = P(X < x)} \tag{7.2.2}$$

Теорема. Функція $F_X(x)$ має наступні властивості:

1. $0 \leq F_X(x) \leq 1$ (7.2.3)
2. Якщо $x_1 \leq x_2$, то $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$, тобто F_X – неспадна функція.
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = F_X(-\infty) = 0;$ (7.2.4)

   $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = F_X(+\infty) = 1.$ (7.2.5)
4. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} F_X(x) = F_X(x_0)$, тобто функція $F_X(x)$ неперервна зліва. (7.2.6)
5. $P(x_1 \leq X < x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1).$ (7.2.7)

Властивості (7.2.3)-(7.2.6) очевидні. Для доведення (7.2.7) розглянемо

$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \leq X < x_2);$

$P(x_1 \leq X < x_2) = P(X < x_2) - P(X < x_1).$

Згідно з (7.2.1), випливає 5.

Зауваження. З геометричної точки зору, значення функції розподілу ймовірностей в точці *x* дорівнює ймовірності попадання випадкової точки в інтервал $(-\infty, x)$.

Функцію розподілу випадкової величини *X* називають також інтегральним законом розподілу. Її типовий графік неперервної випадкової величини *X* має вигляд

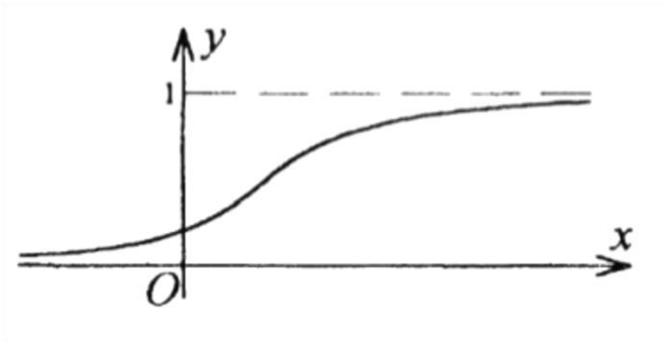


Рис. 7.2.1

Для дискретної випадкової величини X, заданої рядом розподілу (7.2.1) маємо:

$$F_X(x) = \begin{cases} P(X < x) = 0, \quad x \le x_1 \\ P(x < x_2) = P(x = x_1) = p_1, \quad x < x_1 \le x_2 \\ \mathrm{P}(x < x_3) = P(x = x_1) + P(x = x_2) = p_1 + p_2, x_2 < x \le x_3 \\ \dots \\ \mathrm{P}(x < x_{n-1}) = P(x = x_1) + \dots + P(x = x_{n-1}) = p_1 + \dots + p_{n-1}, x_{n-1} < x \le x_n \\ 1, x > x_n \end{cases}$$

Типовий графік функції розподілу дискретної випадкової величини має вигляд:

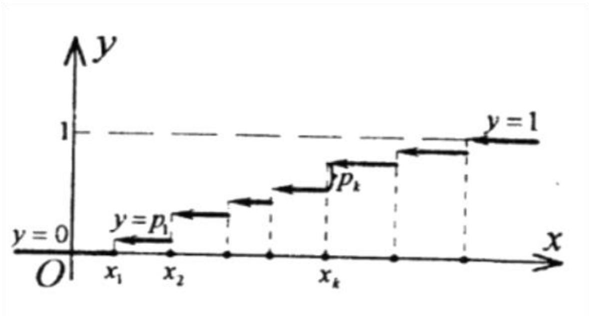


Рис. 7.2.2

Приклад 1. Гральний кубик кидають один раз. Якщо випадає парне число, гравець виграє 10 грн, якщо непарне, але більше одного – програє 5 грн, якщо випадає одно очко – він програє 10 грн. Знайти розподіл випадкової величини X – розміру виграшу в даній грі. Побудувати функцію розподілу.

Розв'язання. X – розмір виграшу – дискретна випадкова величина, яка приймає значення -10;-5;10.

Знайдемо $P(X = -10) = \frac{1}{6}$ (один випадок із шести).

$P(X = -5) = \frac{2}{6}$ (так як всього шість варіантів, а непарних більше одного – 2).

$P(X = 10) = \frac{1}{2}$ (в половині випадків випадає парне число).

Ряд розподілу має вигляд:

X=k	-10	-5	10
P(X=k)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

$\sum_{i=1}^{3} p_i = 1.$

Побудуємо функцію розподілу величини *X*:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, \ x \le -10 \\ \frac{1}{6}, \ -10 < x \le -5 \\ \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}, -5 < x \le 10 \\ 1, \ x > 10 \end{cases}$$

7.3 Щільність розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини

Означення. Випадкову величину *X* називають ***неперервною***, якщо її функцію розподілу $F_X(x)$ можна задати у вигляді

$$\boldsymbol{F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_x(y)\, dy} \qquad (7.3.1)$$

Припускається, що невласний інтеграл (7.3.1) збігається.

Функцію $p_X(x)$ називають щільністю розподілу ймовірностей випадкової величини *X*.

$$\boldsymbol{p_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}} \qquad (7.3.2)$$

Функцію $F_X(x)$ називають інтегральним, а функцію $p_X(x)$ диференціальним законами розподілу випадкової величини *X*.

Теорема. Щільність розподілу задовольняє таким властивостям:

1. $p_X(x) \ge 0$
2. $P(x_1 \le X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{p_x}(x)dx$
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)dx = 1$ (умова нормування)
4. $P(x \le X < x + \Delta x) \approx p_X(x)\Delta x$
5. $P(X = x) = 0$

Доведення.

1) $p_X(x) \ge 0$ як похідна невід'ємної функції $F_X(x)$.
2) $P(x_1 \le X < x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1) = \int_{-\infty}^{x_2} p_X(x)dx - \int_{-\infty}^{x_1} p_X(x)dx =$
   $= \int_{-\infty}^{x_1} p_X(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} p_X(x)dx - \int_{-\infty}^{x_1} p_X(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} p_X(x)dx$
3) $\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)dx = F_X(+\infty) - F_X(-\infty) = 1 - 0 = 1$
4) $P(x \le X < x + \Delta x) = \int_{x}^{x+\Delta x} p_X(x)dx \approx p_X(x)\Delta x$
5) $P(X = 0) \ = \lim\limits_{\Delta x \to 0} P(x \le X < x + \Delta x) \approx \lim\limits_{\Delta x \to 0} p_X(x)\Delta x = 0$

На рис. (7.3.1) зображено типовий графік $p_X(x)$.

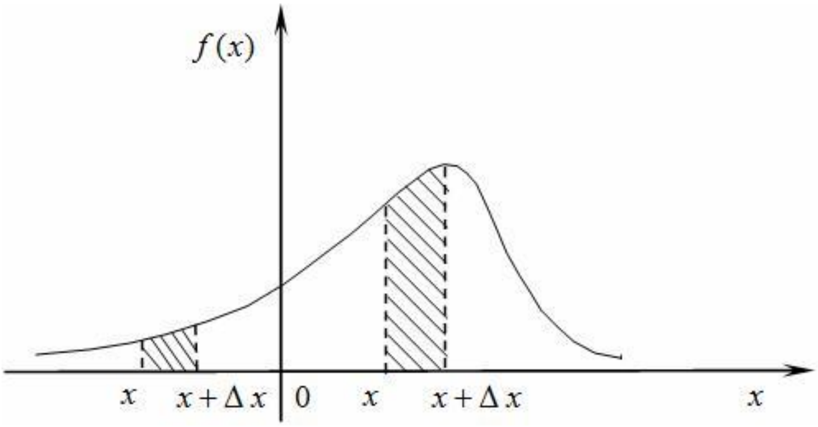


Рис. 7.3.1

Згідно з властивістю 2, ймовірність попадання випадкової величини X у проміжок $[x, x+\Delta x]$ дорівнює площі криволінійної трапеції, яка заштрихована. Згідно з 3, площа під всією кривою $p_X(x)$ дорівнює одиниці.

Згідно з 4, ймовірність попадання випадкової величини X в малий проміжок $(x, x+\Delta x)$ пропорційна Δx з коефіцієнтом пропорційності $p_X(x)$, тому вираз $p_X(x)\Delta x$ називають елементом ймовірності.

Приклад 1. Випадкова величина X задана щільністю розподілу

$$p_X(x) = \frac{A}{e^x + e^{-x}} \;, x \in R$$

Знайти:

1) Коефіцієнт A.
2) Функцію розподілу.
3) Ймовірність того, що в трьох незалежних випробуваннях величина X два рази набуде значення менше 1.

Розв'язання.

1) Згідно з умовою нормування, $\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)dx = A\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{e^x+e^{-x}} =$
$= A\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^x dx}{e^{2x}+1} = Aarctge^x\Big|_{-\infty}^{\infty} = A\frac{\pi}{2} = 1 => A = \frac{2}{\pi}.$
2) $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{x}\frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \frac{2}{\pi}arctge^x\Big|_{-\infty}^{x} = \frac{2}{\pi}arctge^x,$
$x \in R$.

$$F_X(x) = \frac{2}{\pi}arctge^x, -\infty < x < \infty$$

3) $p = P(X<1) = F_X(1) = \frac{2}{\pi}arctge => q = P(X \geq 1) = 1 - \frac{2}{\pi}arctge$

$$P_3(k=2) = C_3^2 p^2 q = 3\frac{2}{\pi}arctg^2 e(1 - \frac{2}{\pi}arctge)$$

Приклад 2. Функція розподілу неперервної випадкової величини X визначається формулою:

$$F_X(x) = c + b \cdot arctg\frac{x}{a},\; x \in R, a > 0.$$

Знайти сталі c і b.

Розв'язання. Оскільки $F_X(-\infty) = 0,\ F_X(+\infty) = 1,$ то

$$\begin{cases} c + b\dfrac{\pi}{2} = 1 \\ c - b\dfrac{\pi}{2} = 0 \end{cases} => c = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{\pi}$$

Отже, $F_X(x) = c + b \cdot arctg\frac{x}{a},\ x \epsilon R$ – розподіл Коші.

Приклад 3. Крива щільності розподілу випадкової величини X представляє собою напівеліпс з півосями a і b. Величина a відома. Потрібно знайти b, функцію розподілу ймовірностей $F_X(x)$ і ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$.

Розв'язання. Величина b знаходиться з умови нормування щільності, тобто рівності площі напівеліпса одиниці. Відомо, що площа еліпса з півосями a і b дорівнює πab.

$$\frac{\pi ab}{2} = 1; \quad b = \frac{2}{\pi a}.$$

Щільність розподілу $f_X(x)=\begin{cases} \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}, x \epsilon (-a; a) \\ 0, x \notin (-a; a) \end{cases}$

Функція розподілу

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx = \begin{cases} 0, & x < -a \\ \frac{1}{\pi a^2} \cdot \left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \cdot arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2\pi}{2}\right), & -a < x < a. \\ 1, & x > a \end{cases}$$

Перевіримо неперервність функції $F_X(x)$:

$F_X(-a - 0) = F_X(-a + 0) = 0$

$F_X(a - 0) = F_X(a + 0) = 1$

$P(X \epsilon (-\frac{a}{2}, \frac{a}{2})) = F_X\left(\frac{a}{2}\right) - F_X\left(-\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi}$

Контрольні запитання

1. Дати означення випадкової величини: дискретної та неперервної. Приклади.
2. Що являє собою закон розподілу дискретної випадкової величини? Умова нормування.
3. Що називається функцією розподілу ймовірностей? Перечисліть її властивості.
4. Графік функції розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини.
5. Що називається ймовірнісним многокутником?
6. Що називається щільністю розподілу випадкової величини?

7. Зв’язок між функцією і щільністю розподілу ймовірностей випадкової величини.
8. Властивості щільності розподілу ймовірностей випадкової величини.
9. Ескіз графіка функції розподілу неперервної випадкової величини.
10. Ескіз графіка щільності розподілу неперервної випадкової величини.

Задачі для самостійного розв’язання

1. Чи може при якомусь значенні аргументу бути:
   1) функція розподілу більше одиниці?
   2) щільність розподілу більше одиниці?
   3) функція розподілу негативною?
   4) щільність розподілу негативною?

2. Проводиться три незалежних досліди, в кожному з яких подія A з'являється з ймовірністю 0,4. Розглядається випадкова величина X – число появ події A в трьох дослідах. Побудувати ряд розподілу і функцію розподілу випадкової величини X.

3. Монета підкидається n разів; випадкова величина X – число гербів, що випали. Побудувати ряд розподілу і функцію розподілу випадкової величини.

4. Проводиться n незалежних дослідів, в кожному з яких з ймовірністю p з'являється подія A. Написати ряд і функцію розподілу випадкової величини X – числа появ протилежної події $\bar{A}$.

5. Два стрільці стріляють кожен по своїй мішені, роблячи незалежно один від одного по одному пострілу. Ймовірність попадання в мішень для першого стрільця – p_1, для другого – p_2. Розглядаються дві випадкові величини: X_1 – число влучень першого стрільця; X_2 – число влучень другого стрільця і їх різниця $Z = X_1 - X_2$. Побудувати ряд і функцію розподілу випадкової величини Z.

6. Проводиться два незалежних постріли по мішені. Ймовірність попадання при кожному пострілі дорівнює p. Розглядаються випадкові величини: X – різниця між числом влучень і числом промахів; Y – сума числа влучень і числа промахів. Побудувати для кожної з випадкових величин X і Y ряд і функцію розподілу.

7. Випадкова величина ексцентриситету деталі характеризується функцією розподілу Релея
$$F_X(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, (x \geq 0).$$
   Знайти:
   а) щільність ймовірності $f_X(x)$;
   б) $P(X<2\sigma)$.

8. Проводяться послідовні незалежні іспити п'яти приладів на надійність. Кожен наступний прилад випробовується тільки в тому випадку, якщо попередній

виявився надійним. Побудувати ряд і функцію розподілу випадкового числа випробуваних приладів, якщо ймовірність витримати іспит для кожного з них дорівнює 0,9.

9. Незалежні досліди продовжують до першого позитивного результату, після чого вони припиняються. Знайти для випадкового числа *X* дослідів:
   а) ряд розподілу;
   б) багатокутник розподілу;
   в) найімовірніше число дослідів, якщо ймовірність позитивного результату при кожному досліді дорівнює 0,5.

10. $f_X(x)$ – щільність випадкової величини *X*.

$$f_X(x) = \begin{cases} Ax^2 exp\{-kx\}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Потрібно визначити:
1. число *A* і побудувати графік $f_X(x)$;
2. функцію розподілу $F_X(x)$ випадкової величини *X* і побудувати її графік;
3. $P(1 \leq X < 2)$.

11. $f_X(x)$ – щільність випадкової величини *X*.

$$f_X(x) = \begin{cases} Acos^2 x, & |x| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Потрібно визначити:
1. число *A* і побудувати графік $f_X(x)$;
2. функцію розподілу $F_X(x)$ випадкової величини *X* і побудувати її графік;
3. $P(0 \leq X < \frac{\pi}{4})$.

12. $f_X(x)$ – щільність випадкової величини *X*.

$$f_X(x) = \begin{cases} A(1 - \frac{|x|}{2}), & |x| \leq 2, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases}$$

Потрібно визначити:
1. число *A* і побудувати графік $f_X(x)$;
2. функцію розподілу $F_X(x)$ випадкової величини *X* і побудувати її графік;
3. $P(0 \leq X < 1)$.

13. $f_X(x)$ – щільність випадкової величини *X*.

$$f_X(x) = \begin{cases} Ax^2 exp\{-kx\}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Потрібно визначити:
1. число *A* і побудувати графік $f_X(x)$;
2. функцію розподілу $F_X(x)$ випадкової величини *X* і побудувати її графік;
3. $P(1 \leq X < 2)$.

14. $f_X(x)$ – щільність випадкової величини *X*.

$$f_X(x) = Ae^{-2|x|} \qquad , x \in R.$$

Потрібно визначити:
1. число *A* і побудувати графік $f_X(x)$;
2. функцію розподілу $F_X(x)$ випадкової величини *X* і побудувати її графік;
3. $P(1 \leq X < 3)$.

15. $f_X(x)$ – щільність випадкової величини *X*.

$$f_X(x) = \begin{cases} Axe^{-3x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Потрібно визначити:
1. число *A* і побудувати графік $f_X(x)$;
2. функцію розподілу $F_X(x)$ випадкової величини *X* і побудувати її графік;
3. $P(1 \leq X < 3)$.

16. $f_X(x)$ – щільність випадкової величини *X*.

$$f_X(x) = \begin{cases} Axe^{-3x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Потрібно визначити:
1. число *A* і побудувати графік $f_X(x)$;
2. функцію розподілу $F_X(x)$ випадкової величини *X* і побудувати її графік;
3. $P(1 \leq X < 2)$.

17. $f_X(x)$ – щільність випадкової величини *X*.

$$f_X(x) = \begin{cases} Axe^{-k^2x^2}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Потрібно визначити:
1. число *A* і побудувати графік $f_X(x)$;
2. функцію розподілу $F_X(x)$ випадкової величини *X* і побудувати її графік;
3. $P(1 \leq X < 2)$.

18. $f_X(x)$ – щільність випадкової величини *X*.

$$f_X(x) = \begin{cases} Asin^2x, & |x| \leq \pi, \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases}$$

Потрібно визначити:
1. число *A* і побудувати графік $f_X(x)$;
2. функцію розподілу $F_X(x)$ випадкової величини *X* і побудувати її графік;
3. $P(0 \leq X < \frac{\pi}{4})$.

19. $f_X(x)$ – щільність випадкової величини *X*.

$$f_X(x) = \frac{A}{(1+x^2)^2}, x \in R$$

Потрібно визначити:

1. число A і побудувати графік $f_X(x)$;
2. функцію розподілу $F_X(x)$ випадкової величини X і побудувати її графік;
3. $P(0 \le X < 2)$.

20. $f_X(x)$ – щільність випадкової величини X.

$$f_X(x) = \begin{cases} A\cos^2 x, & |x| \le \pi, \\ 0, & |x| > 0. \end{cases}$$

Потрібно визначити:
1. число A і побудувати графік $f_X(x)$;
2. функцію розподілу $F_X(x)$ випадкової величини X і побудувати її графік;
3. $P(0 \le X < \frac{\pi}{3})$.

21. $f_X(x)$ – щільність випадкової величини X.

$$f_X(x) = \begin{cases} A\cos\frac{x}{2}, & x \in [-\pi; \pi], \\ 0, & x \notin [-\pi; \pi]. \end{cases}$$

Потрібно визначити:
1. число A і побудувати графік $f_X(x)$;
2. функцію розподілу $F_X(x)$ випадкової величини X і побудувати її графік;
3. $P(0 \le X < \frac{\pi}{2})$.

22. $f_X(x)$ – щільність випадкової величини X.

$$f_X(x) = \begin{cases} A(2x+1)e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

Потрібно визначити:
1. число A і побудувати графік $f_X(x)$;
2. функцію розподілу $F_X(x)$ випадкової величини X і побудувати її графік;
3. $P(0 \le X < 2)$.

23. $f_X(x)$ – щільність випадкової величини X.

$$f_X(x) = A\begin{cases} 1, & |x| \le 1, \\ 2 - |x| & 1 < |x| \le 2, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases}$$

Потрібно визначити:
1. число A і побудувати графік $f_X(x)$;
2. функцію розподілу $F_X(x)$ випадкової величини X і побудувати її графік;
3. $P(0 \le X < 1{,}5)$.

24. $f_X(x)$ – щільність випадкової величини X.

$$f_X(x) = \begin{cases} A\left(1 - \frac{x}{2}\right), & x \in (-4; 2), \\ 0, & x \notin (-4; 2). \end{cases}$$

Потрібно визначити:

1. число A і побудувати графік $f_X(x)$;
2. функцію розподілу $F_X(x)$ випадкової величини X і побудувати її графік;
3. $P(-2 \leq X < 2)$.

25. $f_X(x)$ – щільність випадкової величини X.

$$f_X(x) = \begin{cases} A(x+1)e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Потрібно визначити:

1. число A і побудувати графік $f_X(x)$;
2. функцію розподілу $F_X(x)$ випадкової величини X і побудувати її графік;
3. $P(1 \leq X < 2)$.

РОЗДІЛ 8

Числові характеристики випадкових величин. Математичне сподівання. Дисперсія і середньоквадратичне відхилення. Початкові і центральні моменти. Асиметрія и ексцес. α-квантиль, медіана, мода, найімовірніше значення. Ентропія

Як відомо, функція розподілу або щільність розподілу випадкової величини, цілком визначають випадкову величину X. Однак, у значній кількості реальних задач закон розподілу вдається знайти досить приблизно. На практиці немає потреби так докладно описувати випадкові величини, а достатньо знати лише певні параметри, що характеризують їх істотні ознаки. Ці параметри називають числовими характеристиками випадкових величин.

8.1 Математичне сподівання та його властивості

Однією з найчастіше застосованих на практиці характеристик є математичне сподівання.

Математичне сподівання – середнє значення випадкової величини.

Означення. ***Математичним сподіванням*** дискретної випадкової величини X називається величина

$$M(X) = \sum_i x_i p_i \tag{8.1.1}$$

У випадку незліченої випадкової величини передбачається, що ряд в (8.1.1) абсолютно збігається.

Означення. Математичним сподіванням неперервної випадкової величини X з щільністю $p_X(x)$ називається величина

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) dx \tag{8.1.2}$$

Передбачається, що невласний інтеграл (8.1.2) абсолютно збігається.

Властивості математичного сподівання.

1. $MC=C$, C – стала випадкова величина. (8.1.3)

2. $M(CX)=C\cdot MX$ (8.1.4)

3. $M(X+Y)=MX+MY$ (8.1.5)

4. $M(X\cdot Y)=MX\cdot MY$ (тільки для незалежних випадкових величин X і Y) (8.1.6)

Зауваження. Математичне сподівання вимірюється в тих самих одиницях, що й X. $[MX]=[X]$.

8.2 Дисперсія та середньоквадратичне відхилення

Математичне сподівання не дає достатньої інформації про випадкову величину, оскільки одному й тому ж $M(X)$ може відповідати безліч випадкових величин.

Приклад 1. Закони розподілу X і Y задані таблицями:

X_i	-0,6	-0,2	0,2	0,6
P_i	0,4	0,1	0,1	0,4

Y_i	-100	-60	-10	10	60	100
P_i	0,1	0,2	0,2	0,2	0,2	0,1

Обчислити MX, MY.

Розв'язання. MX= -0,6·0,4-0,2·0,1+0,2·0,1+0,6·0,4=0;

MY=-100·0,1-60·0,2-10·0,2+10·0,2+60·0,2+100·0,1=0;

$MX=MY$.

Отже, два різні закони розподілу мають однакові математичні сподівання. Математичне сподівання називається центром розсіювання. Для вимірювання розсіювання, тобто відхилення від середнього значення, вводиться характеристика, яку називають дисперсією.

Означення. Випадкова величина $\dot{X}=X-MX$ називається *центрованою*. $M\dot{X}=0$.

Означення. ***Дисперсією*** випадкової величини X називається математичне сподівання квадрата центрованої випадкової величини.

$$DX=M[(\dot{X})^2] \tag{8.2.1}$$

$$DX=M(X-MX)^2 \tag{8.2.2}$$

Для дискретної випадкової величини X

$$DX=\sum_i (x_i-MX)^2 p_i \qquad (8.2.3)$$

Для неперервної випадкової величини X

$$DX=\int_{-\infty}^{\infty}(x-MX)^2 p_X(x)dx \qquad (8.2.4)$$

Передбачається, що ряд (8.2.3) і інтеграл (8.2.4) збігаються абсолютно.

Властивості дисперсії.

1. $DC=0$, C – стала величина (8.2.5)
2. $D(aX)=a^2DX$ (8.2.6)
3. $D(X+Y)=DX+DY$, тільки для незалежних випадкових величин (8.2.7)
4. $DX=M[X^2]-(MX)^2$ (8.2.8)
5. $DX\geq 0$ (8.2.9)

Отже, дисперсія характеризує відхилення від середнього значення випадкової величини. Дисперсія вимірюється в одиницях X^2: $[DX]=[X]^2$.

Для того, щоб мати величину, яка характеризує те саме, що і дисперсія, а вимірюється у одиницях випадкової величини X, вводиться ще одна числова характеристика – середньоквадратичне відхилення.

Означення: Величина $\sigma=\sqrt{DX}$ називається ***середньоквадратичним відхиленням***.

Приклад 2. Випадкова величина X задана таблицею

$X=K$	0	1	2	3
$P(X=K)$	0,41	0,43	0,11	0,05

Знайти: MX, DX, σ.

Розв'язання. За формулою (8.1.1)

$MX=0\cdot 0{,}41+1\cdot 0{,}43+2\cdot 0{,}11+3\cdot 0{,}05=0{,}8.$

За формулою (8.2.8) $DX=M[X^2]-(MX)^2$,

$M[X^2]=0\cdot 0{,}41+1\cdot 0{,}43+4\cdot 0{,}11+9\cdot 0{,}05=1{,}32;$

$DX=1{,}32-0{,}8^2=0{,}68;\ \sigma=\sqrt{0{,}68}\approx 0{,}82.$

Приклад 3. Знайти MX, DX, σ для випадкової величини X з щільністю

$$p_X(x)=\begin{cases}0, & |x|>\frac{\pi}{2},\\ \frac{1}{2}cosx, & |x|\leq\frac{\pi}{2}\end{cases}.$$

Розв'язання. За формулою (8.1.2)

$$MX = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx = 0$$ (як інтеграл від непарної функції в симетричних границях).

$$DX = M\left[X^2\right] - \left(MX\right)^2 = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx = \frac{\pi^2}{4} - 2 \approx 0{,}468; \ \ \sigma = \sqrt{0{,}468} \approx 0{,}684.$$

8.3 Початкові та центральні моменти випадкової величини. Асиметрія та ексцес

Означення. ***Початковим моментом*** k-ого порядку випадкової величини X називається величина

$$m_k = M[X^k], k = 1,2,\ldots \qquad (8.3.1)$$

Для дискретної випадкової величини

$$m_k = \sum_i x_i^k p_i, k = 1,2,\ldots \qquad (8.3.2)$$

Для неперервної випадкової величини

$$m_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p_X(x) dx, \ k = 1,2,\ldots \qquad (8.3.3)$$

Очевидно, що $m_1 = MX$.

Означення. ***Центральним моментом*** k-ого порядку випадкової величини X називається величина

$$\mu_k = M\left(X - MX\right)^k, \ k = 1,2,\ldots \qquad (8.3.4)$$

Для дискретної випадкової величини

$$\mu_k = \sum_i \left(x_i - MX\right)^k p_i, k = 1,2,\ldots \qquad (8.3.5)$$

Для неперервної

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - MX\right)^k p_X(x) dx, \ k = 1,2,\ldots \qquad (8.3.6)$$

Очевидно, що $\mu_1 = M(X - MX) = 0;\ \mu_2 = M(X - MX)^2 = DX.$

Знайдемо зв’язок між початковими і центральними моментами k-ого порядку.

$\mu_1 = 0,\ \mu_2 = DX;$

$\mu_3 = M(X - MX)^3 = M(X^3 - 3X^2MX + 3X(MX)^2 - (MX)^3) =$

$= M(X)^3 - 3M(X^2)MX + 3MX(\mathrm{M}X)^2 - (MX)^3 =$

$= M(X^3) - 3MX \cdot M(X^2) + 2(MX)^2.$

Отже,

$$\mu_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^2 \quad (8.3.7)$$

Аналогічно

$$\mu_4 = m_4 - 4m_1m_3 + 6m_1^2m_2 - 3m_1^4.$$

У багатьох задачах виникає необхідність порівняння розподілу з нормальним.

Означення. ***Асиметрією*** *A* випадкової величини *X* називають безрозмірну величину

$$A = \frac{\mu_3}{\sigma^3},\ \sigma \neq 0. \quad (8.3.8)$$

Якщо $A = 0$, то розподіл симетричний відносно прямої $X = MX$.

Якщо крива щільності різко зростає, а потім повільно спадає, то кажуть, що розподіл має лівосторонню асиметрію ($A > 0$). Якщо $A < 0$, то правосторонню асиметрію (рис. 8.3.1).

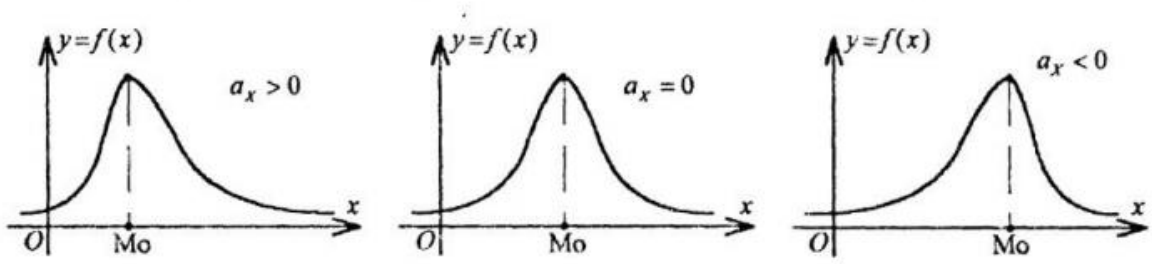


Рис. 8.3.1

Означення. ***Ексцесом*** *E* випадкової величини називається безрозмірна величина:

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3,\ \sigma \neq 0. \quad (8.3.9)$$

Ексцес є показник більш або менш гострої вершини функції щільності ймовірності в порівнянні з нормальним розподілом (рис. 8.3.2).

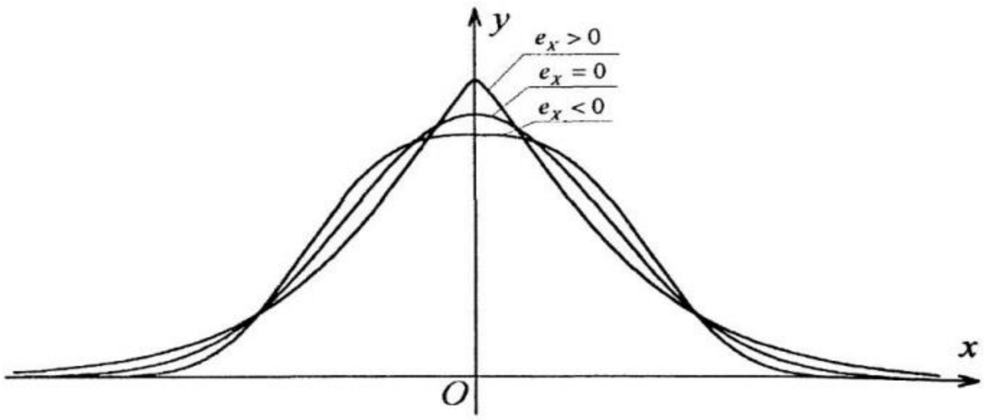


Рис. 8.3.2

8.4 Інші числові характеристики

Означення. ***Квантиллю*** рівня α, або α-квантиллю (0 < α < 1) випадкової величини *X*, називається число Q_α таке, що задовольняє нерівності

$$P(X \leq Q_\alpha) \leq \alpha \quad i \quad P(X > Q_\alpha) \leq 1 - \alpha \tag{8.4.1}$$

Означення. ***Медіана*** – це квантиль рівня $\frac{1}{2}$.

$$M_e = Q_{\frac{1}{2}} \tag{8.4.2}$$

$$P(X \leq M_e) \leq \frac{1}{2} \;\; i \;\; P(X > M_e) \leq \frac{1}{2} \tag{8.4.3}$$

Для неперервної випадкової величини *X* α-квантиль Q_α є корінь рівняння:

$$F_X(Q_\alpha) = \alpha \tag{8.4.4}$$

або

$$\int_{-\infty}^{Q_\alpha} p_X(x)dx = \alpha \tag{8.4.5}$$

Означення. ***Модою*** *M* неперервної випадкової величини називають точку локального максимуму щільності розподілу $p_X(x)$ випадкової величини *X*. Розрізняють ***унімодальні*** (одна мода) і ***мультимодальні*** (декілька мод) розподіли.

$$\max_{x=M} \; p_X(x) - ? \tag{8.4.6}$$

Означення. ***Модою*** дискретної випадкової величини називають таке значення x_i, при якому $p_{i-1} < p_i \quad i \quad p_{i+1} < p_i$ (p_i – максимальна).

Означення. Найімовірнішим значенням випадкової величини називають моду, при якій досягається глобальний максимум ймовірності або щільності розподілу випадкової величини.

Означення. ***Ентропією*** *H*(*X*) дискретної випадкової величини називають число, яке дорівнює

$$H = H(X) = -\sum_i p_i \log_2 p_i \tag{8.4.7}$$

Означення. ***Ентропією*** *H*(*X*) неперервної випадкової величини називають число, яке дорівнює

$$H = H(X) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) \log_2 p_X(x) dx \tag{8.4.8}$$

Ентропія використовується в теорії «захисту інформації».

Приклад 1. Щільність розподілу випадкової неперервної величини *X* має вигляд

$$p_X(x) = \begin{cases} 0, x \notin (0,1) \\ 2x, x \in (0,1) \end{cases}$$

Знайти початкові і центральні моменти першого, другого, третього, четвертого порядків, асиметрію, ексцес.

Розв'язання.

$$m_1 = MX = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}$$

$$m_2 = MX^2 = \int_0^1 2x^3 dx = \frac{1}{2}$$

$$m_3 = MX^3 = \int_0^1 2x^4 dx = \frac{2}{5}$$

$$m_4 = MX^4 = \int_0^1 2x^5 dx = \frac{1}{3}$$

$$\mu_1 = 0,\ \mu_2 = m_2 - m_1^2 = \frac{1}{18}$$

$$\mu_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3 = -\frac{1}{135}$$

$$\mu_4 = m_4 - 4m_1m_3 + 6m_1^2m_2 - 3m_1^4 = \frac{1}{135}$$

$$A = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = -\frac{2\sqrt{2}}{5}, \quad E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = -\frac{3}{5}$$

Приклад 2. Для випадкової величини з розподілом Релея з параметром γ знайти α-квантиль, медіану, моду і найімовірніше значення.

Розв'язання. Функція розподілу Релея має вигляд

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\gamma x^2}, & x \geq 0 \end{cases}$$

α -квантиль Q_α знаходимо як корінь рівняння

$$1 - e^{-\gamma Q_\alpha^2} = \alpha$$

$$Q_\alpha = \sqrt{-\frac{\ln(1-\alpha)}{\gamma}}$$

Так як медіана $Me = Q_{\frac{1}{2}}$, то $Me = \sqrt{\frac{\ln 2}{\gamma}}$.

$$p_X(x) = F'_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2\gamma x e^{-\gamma x^2}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Щоб знайти моду, обчислимо

$$p'_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2\gamma(1 - 2\gamma x^2)e^{-\gamma x^2}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$p'_X(x) = 0, \Longrightarrow M = \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}$$

В точці M досягається як локальний, так і глобальний максимум, тому мода M є найімовірнішим значенням випадкової величини X.

Приклад 3. Випадкова величина *X* має розподіл

x_i	-2	-1	0	$\sum_{i=1}^{3} p_i=1$
p_i	0,3	0,3	0,4	

Знайти *H*(*X*).

Розв'язання. За формулою (8.4.7)

$$H(X) = -(0{,}3\log_2 0{,}3 + 0{,}3\log_2 0{,}3 + 0{,}4\log_2 0{,}4) =$$
$$= -0.6\log_2 3 - 0.4 + 0.4\log_2 5.$$

Контрольні запитання

1. Що називається :
   – математичним сподіванням випадкової величини (дискретної та неперервної);
   – дисперсією випадкової величини;
   – середньоквадратичним відхиленням випадкової величини;
   – початковим і центральним моментами випадкової величини;
   – коефіцієнтом асиметрії випадкової величини;
   – ентропією випадкової величини;
   – ексцесом випадкової величини?
2. Вкажіть властивості:
   – математичного сподівання;
   – дисперсії.

Задачі для самостійного розв'язання

1. До випадкової величини *X* додали постійну, невипадкову величину a. Як від цього зміняться її характеристики: 1) математичне сподівання; 2) дисперсія; 3) середньоквадратичне відхилення; 4) другий початковий момент?
2. Випадкову величину *X* помножили на a. Як від цього зміняться її характеристики: 1) математичне сподівання; 2) дисперсія; 3) середньоквадратичне відхилення; 4) другий початковий момент?
3. Проводиться три незалежних досліди, в кожному з яких подія *A* з'являється з ймовірністю 0,4. Розглядається випадкова величина *X* – число появ події *A* в трьох дослідах. Знайти математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, моду, медіану, асиметрію, ексцес.
4. Монета підкидається *n* разів; випадкова величина *X* – число гербів, що випали. Знайти математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, моду, медіану.
5. Проводиться *n* незалежних дослідів, в кожному з яких з ймовірністю *p* з'являється подія *A*. Випадкова величина *X* – число появ протилежної події $\bar{A}$. Знайти математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, моду, медіану.

6. Два стрільці стріляють кожен по своїй мішені, роблячи незалежно один від одного по одному пострілу. Ймовірність попадання в мішень для першого стрільця - p_1 , для другого - p_2. Розглядаються дві випадкові величини: X_1 - число влучень першого стрільця; X_2 - число влучень другого стрільця і їх різниця $Z = X_1 - X_2$. Знайти математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, моду, медіану, асиметрію, ексцес.

7. Проводиться два незалежних постріли по мішені. Ймовірність попадання при кожному пострілі дорівнює p. Розглядаються випадкові величини: X - різниця між числом влучень і числом промахів; Y- сума числа влучень і числа промахів. Для кожної з випадкових величин X і Y знайти математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, моду, медіану, асиметрію, ексцес.

8. Випадкова величина ексцентриситету деталі характеризується функцією розподілу Релея

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},\ (x \geq 0).$$

Знайти математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, асиметрію, ексцес.

9. Проводяться послідовні незалежні іспити п'яти приладів на надійність. Кожен наступний прилад випробується тільки в тому випадку, якщо попередній виявився надійним. Знайти математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, випадкового числа випробуваних приладів, якщо ймовірність витримати іспит для кожного з них дорівнює 0,9.

10. Незалежні досліди продовжують до першого позитивного результату, після чого вони припиняються. Для випадкового числа X дослідів знайти математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, якщо ймовірність позитивного результату при кожному досліді дорівнює 0,5.

11. $f_X(x)$ – щільність випадкової величини X.

$$f_X(x) = \begin{cases} Ax^2 exp\{-kx\}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Потрібно визначити: число A, математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, асиметрію, ексцес.

12. $f_X(x)$ – щільність випадкової величини X.

$$f_X(x) = \begin{cases} Acos^2 x, & |x| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Потрібно визначити: число A, математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, асиметрію, ексцес.

13. $f_X(x)$ – щільність випадкової величини X.

$$f_X(x) = \begin{cases} A(1-\frac{|x|}{2}), & |x| \le 2, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases}$$

Потрібно визначити: число A, математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, асиметрію, ексцес.

14. $f_X(x)$ – щільність випадкової величини X.

$$f_X(x) = Ae^{-2|x|} \quad , x \in R$$

Потрібно визначити: число A, математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, асиметрію, ексцес.

15. $f_X(x)$ – щільність випадкової величини X.

$$f_X(x) = \begin{cases} Axe^{-3x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

Потрібно визначити: число A, математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, асиметрію, ексцес.

16. $f_X(x)$ – щільність випадкової величини X.

$$f_X(x) = \begin{cases} Axe^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

Потрібно визначити: число A, математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, моду, медіану.

17. $f_X(x)$ – щільність випадкової величини X.

$$f_X(x) = \begin{cases} Axe^{-k^2x^2}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Потрібно визначити: число A, математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, моду, медіану.

18. $f_X(x)$ – щільність випадкової величини X.

$$f_X(x) = \begin{cases} Asin^2x, & |x| \le \pi, \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases}$$

Потрібно визначити: число A, математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, моду, медіану.

19. $f_X(x)$ – щільність випадкової величини X.

$$f_X(x) = \frac{A}{(1+x^2)^2}, x \in R$$

Потрібно визначити: число A, математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, моду, медіану.

20. $f_X(x)$ – щільність випадкової величини X.

$$f_X(x) = \begin{cases} Acos^2x, & |x| \le \pi, \\ 0, & |x| > 0. \end{cases}$$

Потрібно визначити: число A, математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, моду, медіану.

21. $f_X(x)$ – щільність випадкової величини *X*.

$$f_X(x) = \begin{cases} A\cos\dfrac{x}{2}, & x \in [-\pi;\pi], \\ 0, & x \notin [-\pi;\pi]. \end{cases}$$

Потрібно визначити: число A, математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, моду, медіану.

22. $f_X(x)$ – щільність випадкової величини *X*.

$$f_X(x) = \begin{cases} A(2x+1)e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

Потрібно визначити: число A, математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, моду, медіану.

23. $f_X(x)$ – щільність випадкової величини *X*.

$$f_X(x) = A\begin{cases} 1, & |x| \le 1, \\ 2-|x| & 1 < |x| \le 2, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases}$$

Потрібно визначити: число A, математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, моду, медіану.

24. $f_X(x)$ – щільність випадкової величини *X*.

$$f_X(x) = \begin{cases} A\left(1-\dfrac{x}{2}\right), & x \in (-4;2), \\ 0, & x \notin (-4;2). \end{cases}$$

Потрібно визначити: число A, математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, моду, медіану.

25. $f_X(x)$ – щільність випадкової величини *X*.

$$f_X(x) = \begin{cases} A(x+1)e^{-x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Потрібно визначити: число A, математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, асиметрію, ексцес.

26. $f_X(x)$ – щільність випадкової величини *X*.

$$f_X(x) = \begin{cases} A(x+1)e^{-x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0; \end{cases}$$

Потрібно визначити: число A, математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, асиметрію, ексцес.

РОЗДІЛ 9

Деякі розподіли випадкових величин

9.1 Біномний розподіл

Дискретна випадкова величина X має біномний розподіл, якщо вона приймає значення 0,1,2,…,n з ймовірностями $P(X=i)=C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$, $i=\overline{0,n}$.

Ряд розподілу X має вигляд:

X	0	1	…	i	…	n
P	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	…	$C_n^i p^i q^{n-i}$	…	p^n

(9.1.1)

$i=\overline{0,n}$; $q=1-p$.

Перевіримо умови нормування

$$\sum_{i=0}^{n} p_i = \sum_{i=0}^{n} C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = (p+1-p)^n = 1$$

Можна показати, що $M(X)=np$, $D(X)=npq$.

Біномний розподіл є розподілом числа успіхів X в n незалежних випробуваннях в схемі Бернуллі з ймовірністю успіху p і невдачі $q=1-p$ в одному іспиті.

9.2 Розподіл Пуассона з параметром λ ($\lambda>0$).

Дискретна випадкова величина розподілена за законом Пуассона, якщо X=0,1,... з ймовірностями $P(X=n)=\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$, *де* $\lambda=np$.

Таблиця розподілу X:

X	0	1	2	…	n	…
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$	…	$\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$	…

(9.2.1)

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1 \qquad (9.2.2)$$

З'ясуємо сенс параметру λ.

Знайдемо:

$$M(X) = \sum_{n=0}^{\infty} n\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} = \lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda \qquad (9.2.3)$$

$M(X)=\lambda$, тобто $\lambda=np$ – середнє значення випадкової величини X.

Можна показати, що

$$D(X)=\lambda \qquad (9.2.4)$$

З розподілом Пуассона ми зустрічались в формулі Пуассона. Його також називають *розподілом рідких подій.* За розподілом Пуассона розподілені, наприклад, число викликів, які надійшли на телефонну станцію за час T.

9.3 Геометричний розподіл ($0<p<1$)

Нехай X – число іспитів, які необхідно провести до першого успіху. Тоді X=0,1,…,n,… , $P(X=0)=p$, $P(X=1)=pq$, $P(X=2)=q^2p,\dots,P(X=n)=q^np,\dots$.

Таблиця розподілу X має вигляд:

X	0	1	2	…	n	…
P	p	qp	q^2p	…	q^np	…

(9.3.1)

Перевіримо умови нормування

$$\sum_{n=0}^{\infty} pq^n = p\frac{1}{1-q} = 1.$$

Можна показати, що $M(X) = \frac{q}{p}$, $D(X) = \frac{q}{p^2}$. (9.3.2)

Приклад 1. Ймовірність збити літак пострілом із гвинтівки дорівнює p=0,004. Знайти ймовірність P того, що буде збитий літак, якщо одночасно буде зроблено по одному пострілу із 250 гвинтівок.

Розв'язання. Знайдемо ймовірність того, що літак не буде збитий жодним із 250 пострілів (подія A). Це відбудеться тоді, коли одночасно буде зроблено 250 промахів. Так як ці події незалежні:

$$\mathrm{P}(\bar{A}) = (1-p)^{250} = (1-0{,}004)^{250} = 0{,}996^{250}$$

$$P(A) = 1 - 0{,}996^{250}$$

Таке число важко підрахувати.

Так як n=250 велике, а np=250·0,004=1 – мале, то цю ймовірність можна знайти за формулою Пуассона $P(\bar{A}) = P(\lambda; k)$, де $\lambda = 1, k = 0$.

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - e^{-1} \approx 0{,}63$$

Відповідь: $P \approx 0{,}63$.

Приклад 2. Ймовірність p окремої деталі бути бракованою дорівнює 0,005. Яка ймовірність того, що в партії із 10000 деталей бракованих буде:

а) рівно 40;

б) не більше 70.

Розв'язання.

а) Нехай X – випадкова величина, кількість радіодеталей, які можуть вийти з ладу. $X = K$, де $K = 0,1,\dots,10000$. X підпорядковується закону Бернуллі:

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \text{ де } n = 10000, k = 40, p = 0{,}005.$$

$P_{10000}(4) = C_{10000}^{4}(0{,}005)^{40}(0{,}995)^{9960}$. Таке число важко підрахувати.

Оскільки n – велике, p – мале, $np = 50$ – велике, то ймовірність Бернуллі $P_n(k)$ приблизно замінюється диференціальною формулою Муавра-Лапласа

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}\varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right),$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, x \in R,$$

$\varphi(x)$ – щільність нормального стандартоного розподілу.

$$\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{10000 \cdot 0{,}005(1-0{,}005)} \approx \sqrt{5 \cdot 9{,}95} \approx 7.$$

Значення функції $\varphi(x)$ затабульовані. За таблицею значень функції $\varphi(x)$ знаходимо

$$\varphi\left(\frac{40-50}{7}\right) = \varphi\left(-\frac{10}{7}\right) = \varphi\left(\frac{10}{7}\right) = \varphi(1{,}41) = 0{,}148.$$

$$P_{10000}(40) \approx \frac{1}{7} \cdot 0{,}148 \approx 0{,}021.$$

б) Треба знайти $P_{10000}(0 \le k \le 70)$.

За інтегральною формулою Муавра-Лапласа:

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1), \text{де}$$

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \text{функція Лапласа}$$

$$x_i = \frac{k_i - np}{\sqrt{np(1-p)}}, \qquad i = \overline{1{,}2}$$

Таким чином,

$$x_1 = \frac{0 - 10000 \cdot 0{,}005}{\sqrt{10000 \cdot 0{,}005(1-0{,}005)}} \approx -\frac{50}{7} = -7{,}141$$

$$x_2 = \frac{70 - 10000 \cdot 0{,}005}{\sqrt{10000 \cdot 0{,}005(1-0{,}005)}} = \frac{70-50}{\sqrt{50 \cdot 9{,}95}} \approx \frac{20}{7} = 2{,}818$$

$$P_{10000}(0 \le k \le 70) \approx \Phi_0(2{,}818) - \Phi_0(-7{,}141) = \Phi_0(2{,}818) + \Phi_0(7{,}141).$$

За таблицею значень функції Лапласа:

$$\Phi_0(2{,}818) \approx 0{,}4976, \quad \Phi_0(7{,}141) \approx 0{,}4999$$

$$P_{10000}(0 \le k \le 70) \approx 0{,}498 + 0{,}499 = 0{,}997$$

9.4 Рівномірний розподіл на відрізку [*a*, *b*] (*a*<*b*)

Випадкова величина X має рівномірний розподіл ($X \sim R(a,b)$) на відрізку $[a, b]$, якщо

$$p_X(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a,b] \\ 1/(b-a), & x \in [a,b] \end{cases} \tag{9.4.1}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \le b \\ 1, & x > b \end{cases} \tag{9.4.2}$$

Графіки функцій $p_X(x)$, $F_X(x)$ наведені на рис. (9.4.1).

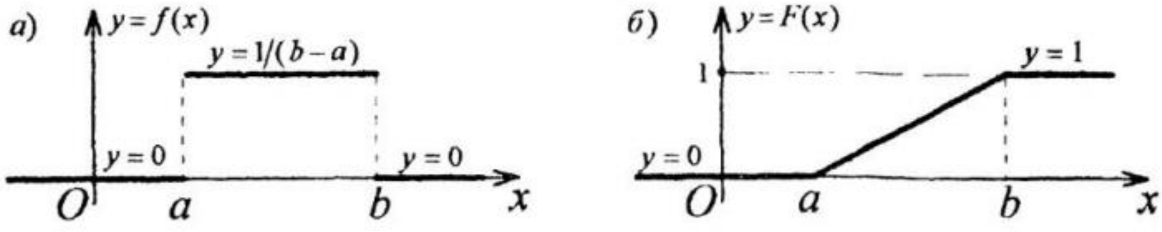


Рис. 9.4.1

Можна показати, що початкові моменти k-го порядку дорівнюють

$$MX^k = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{(b-a)(k+1)} \quad (k = 1,2, \dots) \tag{9.4.3}$$

Математичне сподівання

$$M(X) = \frac{a+b}{2} \tag{9.4.4}$$

Дисперсія

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12} \tag{9.4.5}$$

Коефіцієнт асиметрії

$$A = 0 \tag{9.4.6}$$

Ексцес

$$E = \frac{9}{5}$$

Ймовірність попадання в інтервал (c, d) ($a<c<d<b$)

$$P(c \le X \le d) = \frac{d-c}{b-a} \tag{9.4.7}$$

9.5 Показниковий розподіл з параметром (λ>0)

Випадкова величина X має показниковий розподіл з параметром $\lambda > 0$ (X~$E(\lambda)$), якщо

$$p_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \tag{9.5.1}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \tag{9.5.2}$$

Графіки щільності та функції розподілу ймовірностей наведені на рис. (9.5.1).

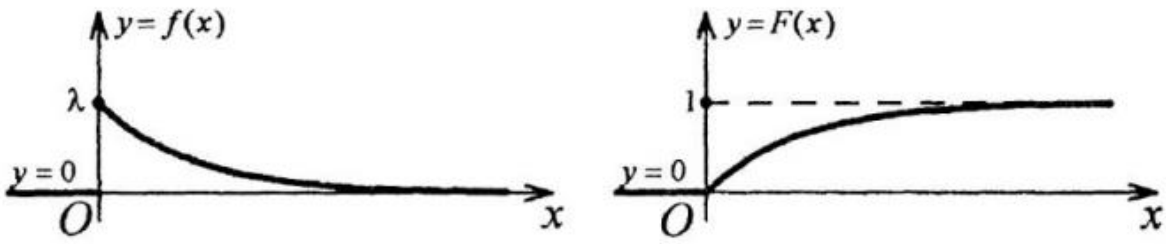


Рис. 9.5.1

Початкові моменти k-го порядку дорівнюють

$$MX^k = \frac{k!}{\lambda^k} \quad (9.5.3)$$

Математичне сподівання

$$MX = \frac{1}{\lambda} \quad (9.5.4)$$

Дисперсія

$$DX = \frac{1}{\lambda^2} \quad (9.5.5)$$

Асиметрія

$$A = 2 \quad (9.5.6)$$

Ексцес

$$E = 6 \quad (9.5.7)$$

Медіана

$$M_e = ln\frac{2}{\lambda} \quad (9.5.8)$$

Ймовірність попадання в інтервал (c, d) ($a<c<d<b$)

$$P(c \le X \le d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d} \quad (9.5.9)$$

9.6 Нормальний розподіл з параметрами $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\sigma})$ $(\boldsymbol{\sigma} > \mathbf{0}, \boldsymbol{m} \in \boldsymbol{R})$

Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами m і σ $(X\sim N(m, \sigma))$, якщо

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < \infty \quad (9.6.1)$$

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt, -\infty < x < \infty \quad (9.6.2)$$

Графіки щільності і функції нормального розподілу наведені на рис. (9.6.1).

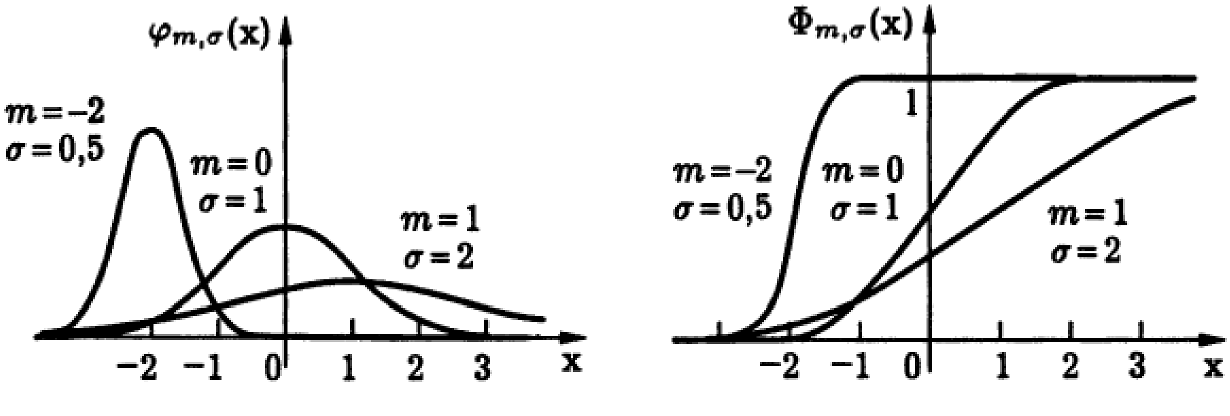


Рис. 9.6.1

Якщо m=0, σ=1, то закон розподілу називається нормальним стандартним ($X\sim N(0, 1)$).

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, -\infty < x < \infty \quad (9.6.3)$$

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, -\infty < x < \infty \tag{9.6.4}$$

Можна показати, що $M(X) = m, D(X) = \sigma^2$.

$$MX = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \left| \begin{matrix} t = \dfrac{x-m}{\sigma} \\ dt = \dfrac{1}{\sigma} dx \end{matrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma t + m) e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{m}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \left| \begin{matrix} \text{перший інтеграл дорівнює 0 як} \\ \text{інтеграл від непарної функції} \\ \text{в симетричних границях;} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \ = 1 \text{ за умовою} \\ \text{нормування.} \end{matrix} \right| = m$$

$$DX = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \left| \begin{matrix} t = \dfrac{x-m}{\sigma} \\ dt = \dfrac{1}{\sigma} d\sigma \end{matrix} \right| = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = t, du = dt \\ dv = t e^{-\frac{t^2}{2}} \\ v = -e^{-\frac{t^2}{2}} \end{matrix} \right| = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left(-t e^{-\frac{t^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) =$$

$$= \left| \begin{matrix} \text{Неінтегральний додаток дорівнює нулю за правилом Лопіталя,} \\ \text{а } \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1, \qquad \text{за умовою нормування} \end{matrix} \right| = \sigma^2$$

Також можна довести, що

$$M(X^k) = M(X^{k-1}) + (k-1)\sigma^2 M(X^{k-2}), \ k = 2,3, \dots \tag{9.6.5}$$

$$\mu_{2k-1} = 0, \ k = 1,2, \dots \tag{9.6.6}$$

$$\mu_{2k} = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)\sigma^{2k}, k = 1,2, \dots \tag{9.6.7}$$

$$A = 0 \tag{9.6.8}$$

$$E = 0 \tag{9.6.9}$$

За допомогою лінійного перетворення $Y = (X\text{-}m)/\sigma$ нормальний розподіл з параметрами (m, σ) зводиться до стандартного нормального закону $N(0,1)$.

Якщо $X \sim N(m, \sigma)$, то

$$P(x < b) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) \tag{9.6.10}$$

$$P(a \le x < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_a^b e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right), \qquad (9.6.11)$$

де

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt \qquad (9.6.12)$$

− функція нормального стандартного розподілу.

Так як

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \Phi_0(x),$$

де

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt \text{ – функція Лапласа,} \qquad (9.6.13)$$

то

$$P(a \le x \le b) = \Phi_0\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) \qquad (9.6.14)$$

Функція Лапласа $\Phi_0(x)$ затабульована. Для обчислення $\Phi_0(x)$ використовують формулу

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(x - \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^5}{2!2^2\cdot 5} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)\cdot 2^n} + \cdots\right) \qquad (9.6.15)$$

Нормально розподілена випадкова величина набуває значення близьке до свого математичного сподівання, що виражається правилом k-сигм (рис. 9.6.2).

$$p(|X-m| < k\sigma) = \begin{cases} 2\Phi_0(1) \approx 0.68, & k=1 \\ 2\Phi_0(2) \approx 0.95, & k=2 \\ 2\Phi_0(3) \approx 0.99, & k=3 \end{cases}$$

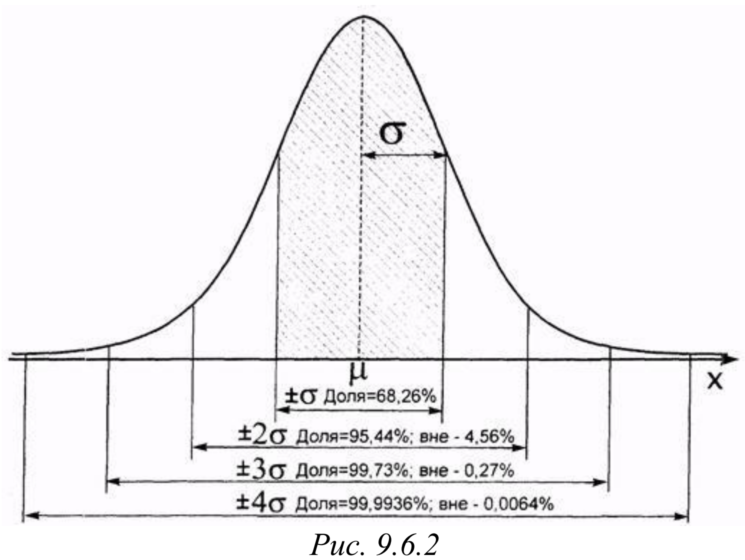


Рис. 9.6.2

Приклад 1. Випадкова величина *X* розподілена за експоненціальним законом з параметром $\lambda = 3$.

Знайти:

1) ймовірність того, що випадкова величина набуде значення меншого, ніж її математичне сподівання;

2) ймовірність того, що X набуде додатного значення.

Розв'язання. $X \sim E(3)$, $p_X(x) = \begin{cases} 3e^{-3x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-3x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases},$$

$MX = 1/\lambda = 1/3$.

1) $P(X<3) = F_X(1/3) = 1 - e^{-1}$

2) $P(X>0) = 1 - P(X \leq 0) = 1 - F_X(0) = 1\text{-}0 = 1$.

Приклад 2. Випадкове відхилення розміру деталі від номіналу має нормальний розподіл з параметрами $m = 1$ мм і $\sigma = 2$ мм. ($X \sim N(1, 2)$). Знайти:

1) ймовірність того, що відхилення від номіналу буде від'ємним;

2) відсоток деталей, які будуть мати відхилення від номіналу в границях ± 5мм;

3) верхню границю відхилення від номіналу, яку забезпечує ймовірність P=0,9.

Розв'язання. $X \sim N(1, 2)$, $p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 2} e^{-\frac{(x-1)^2}{8}}, -\infty < x < \infty$

1) $P(X<0) = P(-\infty < X < 0) = \Phi_0\left(\frac{0-1}{2}\right) - \Phi_0\left(\frac{-\infty-1}{2}\right) = \Phi_0\left(-\frac{1}{2}\right) - \Phi_0(-\infty) =$

$= -\Phi_0\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = 0{,}5 - 0{,}19146 = 0{,}30854$ (значення $\Phi_0\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}19146$ знаходимо за таблицею значень інтегралу Лапласа).

2) $P(-5 \leq X \leq 5) = \Phi_0\left(\frac{5-1}{2}\right) - \Phi_0\left(\frac{-5-1}{2}\right) = \Phi_0(2) - \Phi_0(-3) = 0{,}47725 -$

$-(-0{,}49865) = 0{,}9759$

3) $P(X < x^+) = \Phi_0\left(\frac{x^+-1}{2}\right) - \Phi_0\left(\frac{-\infty-1}{2}\right) = \Phi_0\left(\frac{x^+-1}{2}\right) + 0{,}5 = 0{,}9$, тому

$\Phi_0\left(\frac{x^+-1}{2}\right) = 0{,}4;\ \frac{x^+-1}{2} = 1{,}28;\ x^+ = 3{,}56.$

Отже, з імовірністю 0,9 відхилення від номіналу буде меншим, ніж 3,56.

Приклад 3. На курси з підготовки водіїв категорії В набрали 10 груп слухачів по 20 чоловік у кожній. З усіма ними працює один і той же викладач. Перед екзаменом в ДАІ він перевірив теоретичні знання в групах і з'ясував, що в середньому в кожній групі 2 слухачі підготовлені незадовільно. Скільки задовільних оцінок з ймовірністю 0,95 можна очікувати в ДАІ, якщо з'явились на екзамен 150 слухачів?

Розв'язання. Можна вважати задовільну оцінку кожного із слухачів випадковою величиною, ймовірність p якої дорівнює $\frac{18}{20} = 0{,}9$. За умовою задачі n=150. Позначимо через X частку слухачів, що знають правила дорожнього руху задовільно. Тоді

$$P(|X-0{,}9|<\varepsilon)=2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)=0{,}95 \Rightarrow \Phi_0\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)=0{,}475 \Rightarrow \frac{\varepsilon}{\sigma}=1{,}96$$

Оскільки $\sigma=\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}=\sqrt{\frac{0{,}9(1-0{,}9)}{150}}\approx 0{,}0245,$ то $\varepsilon=0{,}048,$ звідки $0{,}9-0{,}048<X<0{,}9+0{,}048 \Rightarrow 0{,}852<X<0{,}948$.

Враховуючи, що $n=150$, $X=\frac{m}{n}$, отримуємо $127{,}8<m<142{,}2$.

Отже, на екзамені в ДАІ з ймовірністю 0,95 слід очікувати від 128 до 142 задовільних оцінок із 150.

Контрольні запитання

1. Який розподіл називають біномним? Чому дорівнюють $M(X)$, $D(X)$ випадкової величини, яка має біномний розподіл?
2. Який розподіл називають розподілом Пуассона? Чому дорівнюють $M(X)$, $D(X)$ випадкової величини, розподіленої за законом Пуассона?
3. Що називається геометричним розподілом? Чому дорівнюють $M(X)$, $D(X)$ випадкової величини, яка має геометричний розподіл?
4. Запишіть щільність і функцію рівномірного розподілу. Чому дорівнюють математичне сподівання, дисперсія, ймовірність попадання в інтервал (c, d) випадкової величини, розподіленої за рівномірним законом.
5. Який розподіл називають показниковим з параметром λ ($\lambda>0$)? Щільність і функція розподілу? Математичне сподівання і дисперсія? Ймовірність попадання в інтервал (c, d)?
6. Нормальний розподіл з параметрами m, σ. Щільність і функція розподілу. Зміст параметрів m і σ. Нормальний стандартний розподіл. Ймовірність попадання в інтервал (a, b). Функція Лапласа. Правило k-сигм. Значення нормального розподілу в математичній статистиці.

Задачі для самостійного розв’язання

1. Розподіл випадкового часу безвідмовної роботи радіоапаратури підпорядковується експоненціальному закону. Знайти :
   а) ймовірність безвідмовної роботи протягом часу T;
   б) щільність ймовірності $f(t)$;
   в) медіану розподілу.

2. Ймовірність появи події A в одному досліді дорівнює 1/2. Чи можна з імовірністю, більшою 0,97, стверджувати, що число появ події A в 1000 незалежних дослідах буде в межах від 400 до 600? Знайти найімовірніше число появ події A і обчислити ймовірність цього числа.

3. Проводяться послідовні незалежні іспити п'яти приладів на надійність. Кожен наступний прилад випробується тільки в тому випадку, якщо попередній виявився надійним. Побудувати ряд розподілу випадкового числа випробуваних приладів, якщо ймовірність витримати іспит для кожного з них дорівнює 0,9. Знайти моду і медіану цього розподілу.

4. Ймовірність появи події при одному досліді дорівнює 0,3. З якою ймовірністю можна стверджувати, що частота цієї події при 100 дослідах буде лежати в межах від 0,2 до 0,4? Знайти найімовірніше число появ цієї події і обчислити ймовірність цього числа.

5. Незалежні досліди продовжують до першого позитивного результату, після чого вони припиняються. Знайти для випадкового числа X дослідів:
   а) ряд розподілу;
   б) багатокутник розподілу;
   в) найімовірніше число дослідів, якщо ймовірність позитивного результату при кожному досліді дорівнює 0,5;
   г) математичне сподівання MX.

6. Маємо 100 верстатів однакової потужності, що працюють незалежно один від одного в однаковому режимі, при якому їхній привід виявляється включеним протягом 0,8 усього робочого часу. Яка ймовірність того, що в довільно узятий момент часу виявляться включеними від 70 до 86 верстатів? Яке найбільш ймовірніше число включених верстатів і чому дорівнює ймовірність цього числа?

7. Ймовірність виходу з ладу за час T одного конденсатора дорівнює 0,2. Визначити ймовірність того, що за час T із 100 конденсаторів вийдуть з ладу:
   а) не менше 20 конденсаторів;
   б) менше 28 конденсаторів;
   в) від 14 до 26 конденсаторів;
   г) рівно 20 конденсаторів.

8. При роботі електронної обчислювальної машини час від часу виникають несправності (збої). Потік збоїв можна вважати найпростішим (пуассонівським). Середнє число збоїв за добу дорівнює 1,5. Знайти ймовірність наступних подій:
   A – протягом двох діб не буде жодного збою;
   B – протягом доби відбудеться хоча б один збій;
   C – за тиждень роботи машини відбудеться не менше трьох збоїв.

9. Виріб, виготовлений на автоматичній лінії, вважається стандартним, якщо при його вимірюванні відхилення від проектного не перевищує 2 мм. Якщо вважати, що процес вимірювання описується нормальним законом $N(0;16)$, то який відсоток стандартних виробів буде виготовлено на автоматичній лінії?

10. Досліджено, що середній прибуток студента даної групи знаходиться в межах [90; 100] гривень і розподілений нормально $N(95;\frac{1}{3})$. Яка частка студентів буде мати прибуток за цими межами? Яка частка має прибуток в межах [92; 98]?

11. Ймовірність появи події A в даному випробуванні на 50% більша від числа 0,4. Побудувати закон розподілу числа появи події A при проведенні трьох

випробувань. Обчислити математичне сподівання, дисперсію і моду цього розподілу.

12. Випадкова величина X підкоряється закону Пуассона з математичним сподіванням $\lambda = 3$. Побудувати багатокутник розподілу і функцію розподілу випадкової величини X. Знайти:
а) ймовірність того, що випадкова величина прийме значення менше, ніж її математичне сподівання;
б) ймовірність того, що величина X прийме позитивне значення.
в) найімовірніше значення випадкової величини X.

13. Проведене обстеження студентів на можливу кількість присідань. Обґрунтовано, що це число підкоряється $N(22,5)$. Навмання вибрано одного студента. Обчислити ймовірність, що він зробить
а) більше, ніж 15 присідань;
б) від 25 до 35 присідань;
в) рівно 30 присідань.

14. Закон розподілу дискретної випадкової величини X визначено таблицею:

5	6	7
p_1	p_2	p_3

Знайти p_1, p_2, p_3, якщо $MX = 6{,}1,\ DX = 3{,}49$.

15. Ймовірність того, що прилад за час випробувань вийде з ладу дорівнює 0,8. Визначити ймовірність того, що за час випробувань 100 приладів не менше 70 з них вийдуть з ладу. Чому дорівнює найімовірніше число приладів, що можуть вийти з ладу за час випробувань? Знайти ймовірність цього числа.

16. Щільність ймовірностей випадкових амплітуд бічної хитавиці корабля визначається формулою (закон Релея):
$f(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, (x > 0)$, де σ^2 – дисперсія кута крену.
Чи однаково часто зустрічаються амплітуди, менші і більші середньої?

17. Яке найменше число випробувань потрібно зробити для того, щоб з ймовірністю, не меншою 0,9 частота відхилялася від ймовірності рівної 0,5 не більше, ніж на 0,01?

18. Ймовірність появи події в одному досліді дорівнює 0,04. Визначити ймовірність того, що в 50 дослідах подія з'явиться не менше трьох разів. Обчислення провести за теоремами Муавра - Лапласа і Пуассона. Результати порівняти.

19. Розглядається випадкова величина X – число появ події A в трьох дослідах. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X. Знайти її математичне сподівання MX, дисперсію DX, середнє квадратичне відхилення σ і третій центральний момент M_3. Побудувати графік функції розподілу $F(x)$. Якщо

випадкову величину X помножити на 2, то як зміняться її числові характеристики $MX,\ DX, M_3$?

20. У переданій каналом зв'язку послідовності знаків, що утворюють повідомлення, будь-який знак через перешкоди незалежно спотворюється з імовірністю 0,2. Передано 10000 знаків. Яка ймовірність того, що в прийнятій послідовності буде від 2000 до 2100 перекручувань? Знайти найімовірніше число перекручувань та обчислити його ймовірність за теоремами Пуассона і Муавра-Лапласа.
21. Ймовірність браку при виготовленні деяких деталей дорівнює 0,02. Визначити ймовірність того, що серед узятих 1000 штук деталей виявиться бракованих не більше 25. Знайти найімовірніше число бракованих деталей та його ймовірність.
22. Відомо, що серед студентів другого курсу відсоток хлопців складає 60 %. Ймовірність того, що навмання взятий хлопець палить цигарку дорівнює 0,4, а для дівчини ця ймовірність складає 0,7. Обстеження показало, що навмання взятий студент другого курсу, що палить, палить в середньому 24 цигарки щодня. Кількість цигарок, випалених щодня має нормальний розподіл з середнім квадратичним 8. Яка ймовірність, що випадково вибраний студент, який палить, випалить протягом дня:
    а) більше, ніж 2 пачки цигарок;
    б) менше однієї пачки;
    в) від 30 до 40 цигарок?
23. Знайти математичне сподівання виграшу у лотереї, якщо розіграно 1000 білетів, із яких 20 виграшних, а придбано 40 білетів. На кожний виграшний білет нараховується 100 гривень.
24. Скласти закон розподілу числа влучень у мішень, якщо 3 стрільця стріляють по одному разу і ймовірність влучення дорівнює відповідно 0,7; 0,4 та 0,5.
25. Деталь, виготовлена станком автоматом, вважається придатною, якщо відхилення її контрольованого розміру від номіналу підкоряється нормальному закону з параметрами m=0, σ=5. Скільки відсотків придатних деталей виготовляє станок автомат? Скільки необхідно виготовити деталей, щоб з ймовірністю не менше, ніж 0,95, виявилась хоча б одна бракована деталь?

РОЗДІЛ 10

Гамма-розподіл. Розподіл χ^2. Розподіл Стьюдента (*T*-розподіл). *F*-розподіл або розподіл Фішера

В курсі математичної статистики при розв’язанні задач побудови довірчих інтервалів, перевірки параметричних та статистичних гіпотез та інших задач, використовуються центральні статистики, підпорядковані різним законам розподілу. Розглянемо деякі більш детально.

10.1 Гамма-розподіл

Нехай випадкова величина *X* має гамма-розподіл з параметрами λ, α. Цей факт позначається $X \sim \Gamma(\lambda, \alpha)$.

Щільність даного розподілу має вигляд

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, x > 0 \\ 0, \qquad x \leq 0 \end{cases} \qquad (10.1.1)$$

і залежить від *двох параметрів* $\lambda>0$ і $\alpha>0$.

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \text{ – гамма-функція} \qquad (10.1.2)$$

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha), \quad \Gamma(k+1) = k! \qquad (10.1.3)$$

Графіки щільності гамма-розподілу, при різних значеннях параметра α представлені на рис. 10.1.1.

Початкові моменти k-ого порядку $MX^k = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)}{\lambda^k}$,

$$MX = \frac{\alpha}{\lambda}, \qquad DX = \frac{\alpha}{\lambda^2}, \qquad A = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}, \qquad E = \frac{6}{\alpha}. \qquad (10.1.4)$$

Твердження. Якщо $X \sim \Gamma(\lambda, \alpha)$ і $Y \sim \Gamma(\lambda, \beta)$ незалежні, то $X + Y \sim \Gamma(\lambda, \alpha + \beta)$.

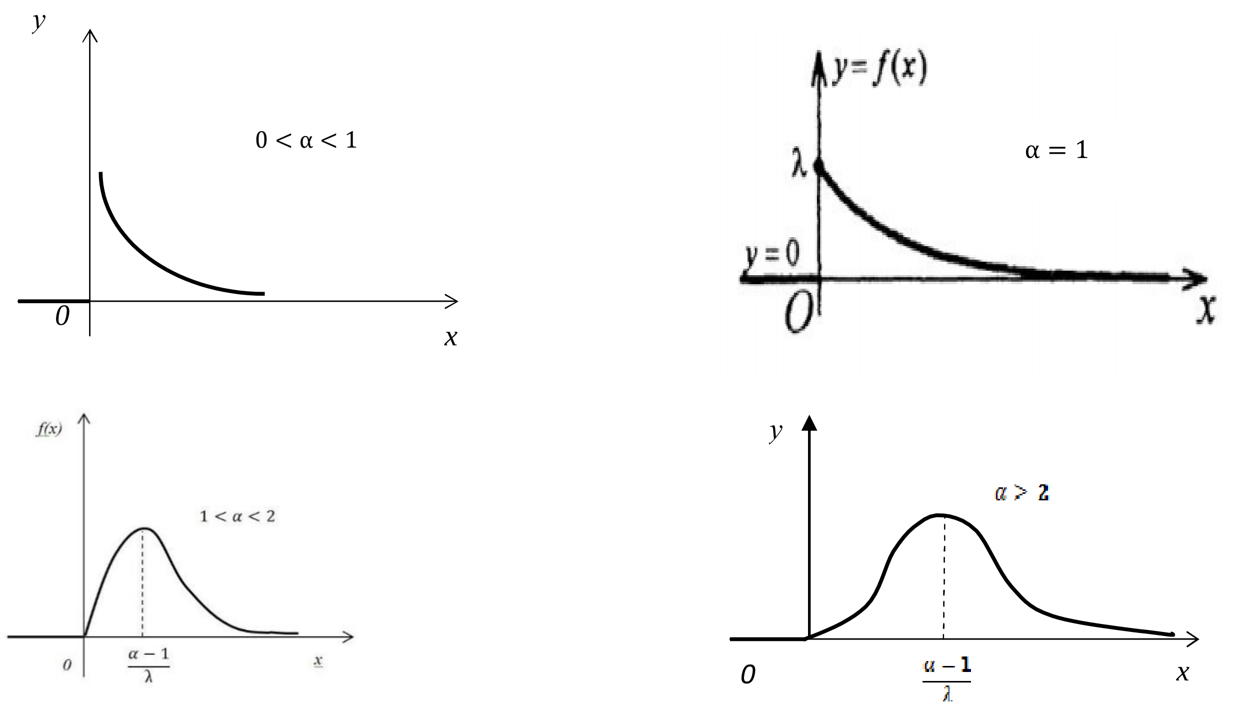


Рис. 10.1.1

Твердження. Якщо $X_1, X_2, \ldots X_n$ – незалежні випадкові величини, $X_i \sim \Gamma(\lambda, \alpha_i)$, то

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n \sim \Gamma(\lambda, \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n).$$

10.2 Розподіл χ^2

Розподілом χ^2 з k ступенями вільності називається розподіл випадкової величини $\chi^2(k)$ **,** яка дорівнює сумі квадратів k незалежних, нормально розподілених по закону $N(0,1)$ випадкових величин X_i, $i = \overline{1, k}$, тобто

$$\chi^2(k) = \sum_{i=1}^{k} X_i^2 \qquad (10.2.1)$$

Випадкова величина X має розподіл χ^2 з k ступенями вільності ($X \sim \chi^2(k)$), якщо щільність розподілу має вигляд

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases} \qquad (10.2.2)$$

Графіки щільності $\chi^2(k) -$ розподілу при різних значеннях параметру k наведені на рисунку 10.2.1.

Початкові моменти i-го порядку:

$$MX^i = k(k+2) \ldots \big(k + 2(i-1)\big), i = 1,2, \ldots$$

$$MX = k, \qquad DX = 2k, \qquad A = \sqrt{\frac{8}{k}}, \qquad E = \frac{12}{k} \qquad (10.2.3)$$

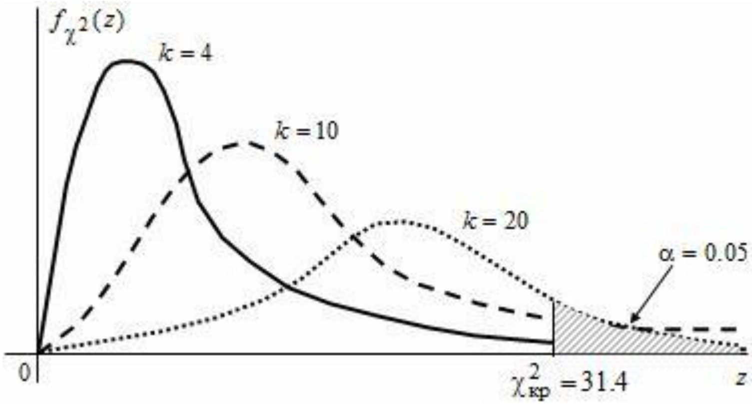


Рис. 10.2.1

Розподіл χ^2 часто використовується в статистичних обчисленнях, а саме в зв'язку з наступною теоремою.

Теорема. Нехай $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – вибірка із нормально розподіленої генеральної сукупності $N(m, \sigma)$, а $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum X_i$, $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum(X_i - \bar{X})^2$ – відповідно вибіркове середнє і вибіркова незміщена дисперсія. Тоді статистики $\bar{X}$ і S^2 – незалежні випадкові величини, причому статистика $\frac{(n-1)}{\sigma^2}S^2$ має розподіл $\chi^2(n-1)$.

Велика кількість застосувань χ^2 – розподілу в математичній статистиці засновані на такій інтерпретації:

1)Якщо $\chi^2(k_1)$ і $\chi^2(k_2)$ – незалежні випадкові величини, які мають розподіл χ^2 з k_1 і k_2 ступенями вільності відповідно, то сума цих випадкових величин має розподіл χ^2 з k_1+k_2 ступенями вільності:

$$\chi^2(k_1) + \chi^2(k_2) = \chi^2(k_1+k_2) \tag{10.2.4}$$

2)Якщо $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$ – незалежні випадкові величини, причому $X_i \sim N(m_i; \sigma^2)$, $i=\overline{1,n}$, то випадкова величина $Y=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ має розподіл χ^2 з n ступенями вільності і $MX=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} m_i^2$.

3) Якщо X – випадкова величина, яка має розподіл χ^2 з n ступенями вільності, то випадкова величина $\sqrt{2X}-\sqrt{2n-1}$ має приблизно нормальний стандартний розподіл.

Розподіл $\chi^2(k)$ при великих значеннях k (k>30) апроксимується нормальним розподілом . Ця властивість використовується для приблизного обчислення квантилів ${\chi^2}_p(k)$ розподілу $\chi^2(k)$ через квантилі u_p нормального розподілу N(0,1):

$$ {\chi^2}_p(k) \approx \frac{1}{2}\left(u_p+\sqrt{2k-1}\right)^2 \tag{10.2.5}$$

$$ {\chi^2}_p(k) \approx k\left(1-\frac{2}{9k}+u_p\cdot\sqrt{\frac{2}{9k}}\right)^3 \tag{10.2.6}$$

Формула (10.2.5) використовується при k>30 і p≥0,5, дає відносну похибку в границях 1%.

Формула (10.2.6) використовується для обчислення квантилів малого порядку.

Приклад 1. Обчислити квантилі ${\chi^2}_{0,01}(10)$, ${\chi^2}_{0,95}(40)$, ${\chi^2}_{0,01}(40)$.

Розв'язання. За таблицею квантилів χ^2 - розподілу ${\chi^2}_p(k)$ знаходимо ${\chi^2}_{0,01}(10)=2{,}56$. Для обчислення ${\chi^2}_{0,95}(40)$ використовуємо формулу (10.2.5). Так як $u_{0,95}$=1,645 (знаходимо за таблицею квантилів нормального розподілу), то ${\chi^2}_{0,95}(40) \approx \frac{1}{2}\left(1{,}645+\sqrt{2\cdot 40-1}\right)^2 \approx 55{,}47$.

За формулою (10.2.6), використовуючи значення $u_{0,01}=-u_{0,99}=-2{,}326$, отримуємо ${\chi^2}_{0,01}(40) \approx 40\left(1-\frac{2}{9\cdot 40}-2{,}326\cdot\sqrt{\frac{2}{9\cdot 40}}\right)^3 \approx 22{,}14$.

10.3 Розподіл Стьюдента (*T*-розподіл)

Розподілом Стьюдента з k ступенями вільності називається розподіл випадкової величини $T(k)$, яка дорівнює відношенню двох незалежних випадкових величин U і $\sqrt{\chi^2(k)\,/k}$, де U має нормальний розподіл $N(0,1)$.

$$T(k) = \frac{U}{\sqrt{\chi^2(k)\,/k}} \qquad (10.3.1)$$

Щільність розподілу Стьюдента з k ступенями вільності має вигляд

$$f_T(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\cdot\sqrt{\pi k}}\left(1+\frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}, -\infty < x < \infty \qquad (10.3.2)$$

Графік щільності розподілу Стьюдента наведений на рис. 10.3.1.

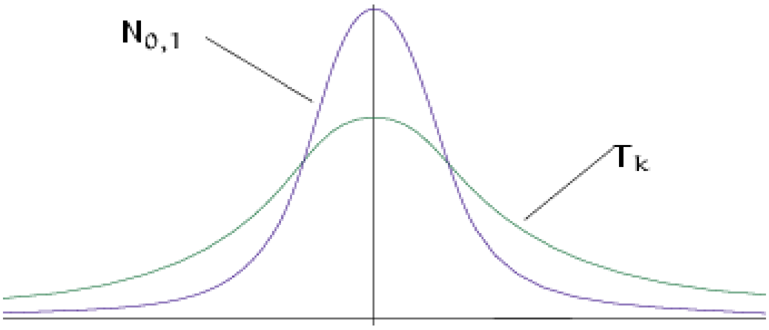


Рис. 10.3.1

$$M(T(k)) = 0 \qquad (10.3.3)$$

$$D\big(T(k)\big) = \begin{cases} \frac{k}{k-2}, k > 2 \\ \infty, \text{якщо } k \le 2 \end{cases} \qquad (10.3.4)$$

Твердження. Якщо X і Y незалежні випадкові величини, причому X має нормальний стандартний розподіл, а Y – розподіл χ^2 з n ступенями вільності, то випадкова величина $Z = \frac{Y\sqrt{m}}{\sqrt{X}}$ має розподіл Стьюдента з n ступенями вільності.

Щільність розподілу Стьюдента симетрична відносно осі ординат, тому для квантилів $t_p(k)$ має місце співвідношення

$$t_p(k) = -t_{1-p}(k) \qquad (10.3.5)$$

При великих k (k>30) для квантилів $t_p(k)$ розподілу Стьюдента має місце приблизна рівність $t_p(k) \approx u_p$**.** Уточнююча формула має вигляд

$$t_p(k) \approx u_p\left(\left(1-\frac{1}{4k}\right)^2 - \frac{u_p^2}{2k}\right)^{-1/2} \qquad (10.3.6)$$

Приклад 1. Знайти квантилі $t_{0,05}(8)$ і $t_{0,9}(40)$.

Розв'язання . За таблицею квантилів розподілу Стьюдента знаходимо

$t_{0,95}(8) = 1,86;\ t_{0,05}(8) = -t_{0,95}(8) = -1,86.$

Квантиль $t_{0,9}(40)$ знайдемо**,** використовуючи формулу (10.3.6).

Так як $u_{0,9} = 1,28$, то $t_{0,9}(40) \approx 1,28\left(\left(1 - \frac{1}{4\cdot 40}\right)^2 - \frac{1,28^2}{2\cdot 40}\right)^{-1/2} \approx 1,297.$

10.4 *F*-розподіл або розподіл Фішера

Розподілом Фішера з k_1 і k_2 ступенями вільності називається розподіл випадкової величини $F(k_1, k_2)$, яка дорівнює відношенню двох незалежних випадкових величин $\chi^2(k_1)\ /k_1$ і $\chi^2(k_2)\ /k_2$:

$$F(k_1, k_2) = \frac{\chi^2(k_1)\ /k_1}{\chi^2(k_2)\ /k_2} \qquad (10.4.1)$$

Розподіл Фішера з k_1 і k_2 ступенями вільності має щільність $f_F(x)$:

$$f_F(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)k_1^{\frac{k_1}{2}}k_2^{\frac{k_2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)} x^{\frac{k_1}{2}-1}(k_2 + k_1 x)^{\frac{-(k_1+k_2)}{2}}, x > 0 \\ 0, \qquad x \le 0 \end{cases} \qquad (10.4.2)$$

Графік щільності розподілу Фішера наведений на рис. 10.4.1.

Моменти:

$$M[F] = \frac{k_2}{k_2-2}(k_1 > 2),\ D[F] = \frac{2k_2^2(k_1+k_2-2)}{k_1(k_2-2)^2(k_2-4)} \quad (k_2 > 4) \qquad (10.4.3)$$

Мода
$$M = \frac{k_2(k_1-2)}{k_1(k_2+2)}, k_1 > 2 \qquad (10.4.4)$$

$$A = \frac{(2k_1+k_2-2)\sqrt{8(k_2-4)}}{(k_2-6)\sqrt{k_1+k_2-2}},\ k_2 > 6 \qquad (10.4.5)$$

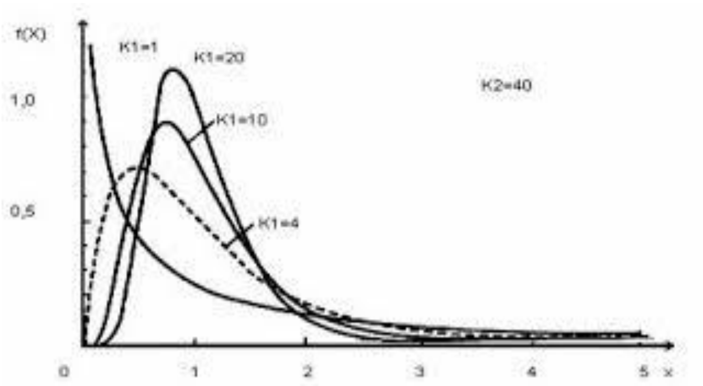


Рис. 10.4.1

Квантилі розподілу Фішера порядку *p* і *1-p* пов'язані формулою

$$F_{1-p}(k_1, k_2) = \frac{1}{F_p(k_2, k_1)} \qquad (10.4.6)$$

Між випадковими величинами, які мають нормальний розподіл, розподіл χ^2, Стьюдента і Фішера, мають місце співвідношення:

$$T^2(k) = F(1, k) \quad (10.4.7)$$

$$F(k, \infty) = \frac{\chi^2(k)}{k} \quad (10.4.8)$$

$$\chi^2(1) = U^2 \quad (10.4.9)$$

При $k_1 \gg 1, k_2 \gg 1$ квантилі розподілу Фішера можна обчислити, використовуючи формулу

$$F_p(k_1, k_2) \approx \frac{k_2}{k_2-2}\sqrt{\frac{2\cdot(k_1+k_2-2)}{k_1(k_2-4)}} \cdot u_p + \frac{k_2}{k_2-2} \quad (10.4.10)$$

Приклад 1. Обчислити квантилі $F_{0,01}(3;5)$, $F_{0,9}(4;100)$, $F_{0,05}(60;120)$.

Розв'язання. За формулою (10.4.6) і таблицею квантилів розподілу Фішера, маємо $F_{0,01}(3,5) = \frac{1}{F_{0,99}(5,3)} = \frac{1}{28,24} \approx 0,035$. За формулою (10.4.8) і таблицею квантилів розподілу χ^2, знаходимо $F_{0,9}(4,100) \approx \frac{\chi^2_{0,9}(4)}{4} = \frac{7,78}{4} = 1,945$.

За формулою (10.4.10), а також значеннями $u_{0,05} = -u_{0,95} = -1,645$, маємо $F_{0,05}(60,120) \approx \frac{120}{120-2}\sqrt{\frac{2(60+120-2)}{60(120-4)}} \cdot (-1,645) + \frac{120}{120-2} \approx 0,639$.

Контрольні запитання

1. Гамма-розподіл. Основні характеристики: щільність, математичне сподівання, дисперсія, асиметрія, ексцес.
2. Розподіл $\chi^2(k)$. Умови виникнення розподілу χ^2. Основні характеристики: щільність, математичне сподівання, дисперсія, асиметрія, ексцес. Квантилі розподілу ${\chi^2}_p(k)$.
3. Розподіл Стьюдента $T(k)$. Умови виникнення розподілу $T(k)$. Основні характеристики: щільність, математичне сподівання, дисперсія, асиметрія, ексцес. Квантилі розподілу $t_p(k)$.
4. Розподіл Фішера $F(k_1, k_2)$. Умови виникнення розподілу $F(k_1, k_2)$. Основні характеристики: щільність, математичне сподівання, дисперсія, асиметрія, ексцес. Квантилі розподілу $F(k_1, k_2)$.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Маємо n незалежних випадкових величин $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$, розподілених за нормальним законом $N(0,1)$. Як отримати випадкову величину з розподілом χ^2 ? Чому дорівнюють щільність, математичне сподівання, дисперсія, асиметрія та ексцес?

2. Як отримати випадкову величину з розподілом $T(k)$? Чому дорівнюють щільність, математичне сподівання, дисперсія, асиметрія та ексцес?
3. Як отримати випадкову величину з розподілом $F(k_1, k_2)$? Чому дорівнюють щільність, математичне сподівання, дисперсія, асиметрія та ексцес?
4. Використовуючи таблиці квантилів і властивості розподілів, знайти квантилі ${\chi^2}_{0,05}(8)$ і ${\chi^2}_{0,99}(130)$.
5. Використовуючи таблиці квантилів і властивості розподілів, знайти квантилі ${\chi^2}_{0,01}(10)$ і ${\chi^2}_{0,95}(150)$.
6. Використовуючи таблиці квантилів і властивості розподілів, знайти квантилі ${\chi^2}_{0,1}(15)$ і ${\chi^2}_{0,9}(120)$.
7. Використовуючи таблиці квантилів і властивості розподілів, знайти квантилі $t_{0,01}(7)$ і $t_{0,95}(110)$.
8. Використовуючи таблиці квантилів і властивості розподілів, знайти квантилі $t_{0,05}(10)$ і $t_{0,99}(100)$.
9. Використовуючи таблиці квантилів і властивості розподілів, знайти квантилі $t_{0,1}(5)$ і $t_{0,9}(150)$.
10. Використовуючи таблиці квантилів і властивості розподілів, знайти квантилі $F_{0,05}(2; 3), F_{0,99}(100; 5)\ i\ F_{0,01}(60; 90)$.
11. Використовуючи таблиці квантилів і властивості розподілів, знайти квантилі $F_{0,01}(3; 2), F_{0,95}(5; 100)\ i\ F_{0,05}(90; 60)$.
12. Використовуючи таблиці квантилів і властивості розподілів, знайти квантилі $F_{0,1}(4; 5), F_{0,9}(6; 120)\ i\ F_{0,01}(50; 120)$.
13. Показати, що вибіркове середнє $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum X_i$, де $X_i \sim N(m, \sigma)$ має нормальний розподіл $N(m, {}^{\sigma}/_{\sqrt{n}})$.
14. Маємо дві незалежні випадкові величини з розподілом χ^2 з k_1 і k_2 ступенями вільності відповідно. Як отримати випадкову величину з розподілом χ^2 з $k_1 + k_2$ ступенями вільності?
15. Маємо *n* незалежних випадкових величин $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$, розподілених за нормальним законом $N(m,\sigma)$. Як отримати випадкову величину, розподілену за законом χ^2 з *n* ступенями вільності?
16. Показати, що $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)\ \Gamma(k + 1) = k!$
17. Обчислити Γ(1/2), Γ(3/2).

18. Використовуючи таблиці квантилів і властивості розподілів, знайти квантилі ${\chi^2}_{0,05}(9)$ і ${\chi^2}_{0,99}(135)$.
19. Використовуючи таблиці квантилів і властивості розподілів, знайти квантилі ${\chi^2}_{0,01}(4)$ і ${\chi^2}_{0,95}(145)$.
20. Використовуючи таблиці квантилів і властивості розподілів, знайти квантилі ${\chi^2}_{0,1}(20)$ і ${\chi^2}_{0,9}(130)$.
21. Використовуючи таблиці квантилів і властивості розподілів, знайти квантилі $t_{0,01}(6)$ і $t_{0,95}(120)$.
22. Використовуючи таблиці квантилів і властивості розподілів, знайти квантилі $t_{0,05}(8)$ і $t_{0,99}(110)$.
23. Використовуючи таблиці квантилів і властивості розподілів, знайти квантилі $t_{0,1}(9)$ і $t_{0,9}(135)$.
24. Використовуючи таблиці квантилів і властивості розподілів, знайти квантилі $F_{0,05}(4;5), F_{0,99}(105;5)\ i\ F_{0,01}(65;95)$.
25. Використовуючи таблиці квантилів і властивості розподілів, знайти квантилі $F_{0,01}(4;3), F_{0,95}(4;100)\ i\ F_{0,05}(95;65)$.

РОЗДІЛ 11

Граничні теореми теорії ймовірностей

З самого початку вивчення курсу теорії ймовірностей ми говоримо, що якщо дослід проводити при однакових умовах, то при доволі великій кількості випробувань деякі характеристики випадкових величин або подій, наприклад, частота $\frac{m_n}{n}$ або середнє арифметичне $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, де x_i – результати вимірів, стають майже невипадковими, тобто при $n \to \infty$ вони практично втрачають характер випадковості.

Група теорем, які встановлюють співвідношення між практичними і емпіричними характеристиками випадкових величин при великій кількості n повторень експерименту в однакових умовах, носить назву *граничних теорем* теорії ймовірностей.

11.1 Нерівність Чебишова

Теорема (перша нерівність Чебишова). Якщо для невід'ємної випадкової величини X існує MX, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ справедливо

$$P(X > \varepsilon) < \frac{MX}{\varepsilon} \qquad (11.1.1)$$

$$P(X \le \varepsilon) \ge 1 - \frac{MX}{\varepsilon} \quad (11.1.2)$$

Теорема (друга нерівність Чебишова). Якщо для випадкової величини X існують MX, DX, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ справедливо

$$P(|X - MX| > \varepsilon) < \frac{DX}{\varepsilon^2} \quad (11.1.3)$$

або

$$P(|X - MX| \le \varepsilon) \ge 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2} \quad (11.1.4)$$

Тобто ймовірність того, що відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання MX буде за абсолютною величиною більшим додатного ε, обмежене зверху величиною $\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$.

Нерівність Чебишова дає можливість оцінювати ймовірність відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання, знаючи лише DX.

Приклад 1. Пристрій складається з 10 незалежно працюючих елементів. Ймовірність відмови кожного елемента упродовж часу t дорівнює 0,05. Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність того, що абсолютна величина різниці між кількістю елементів, які відмовили, і середньою кількістю (математичним сподіванням) відмов упродовж часу t буде менше двох.

Розв'язання. Нехай X – кількість відмов протягом часу t. Очевидно, що $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{10}$, де X_i – дискретна випадкова величина, що визначається законом розподілу

X_i	0	1
P_i	0,95	0,05

Тоді $MX_i = 0{,}05$, $DX_i = 0{,}05 - (0{,}05)^2 = 0{,}0475$, звідки випливає $MX = np = 10 \cdot 0{,}05 = 0{,}5$, $DX = npq = 10 \cdot 0{,}0475 = 0{,}475$. Згідно з нерівністю (11.1.3), маємо:

$$P(|X - 0{,}5| < 2) > 1 - \frac{0{,}475}{4} \approx 1 - 0{,}12 = 0{,}88.$$

Приклад 2. Технічний контролер перевіряє партію однотипних приладів. З ймовірністю 0,01 прилад має дефект A і, незалежно від цього, з імовірністю 0,02 – дефект B.

1. Застосовуючи нерівність Чебишова, оцінити, в яких межах знаходиться число бракованих приладів в партії із 1000 штук, якщо за ймовірність практичної ймовірності приймається 0,997?
2. Відповісти на запитання, застосовуючи інтегральну теорему Муавра-Лапласа.

Розв'язання. Знайдемо спочатку ймовірність бути бракованим одному приладу:

$P(A \cup B) = 1 - P\big((\bar{A}\bar{B})\big) = 1 - P(\bar{A})P(\bar{B}) = 1 - 0{,}98 \cdot 0{,}99 = 0{,}0298.$

Нехай X – кількість бракованих приладів в партії із 1000 штук. Тоді

$MX = np = 1000 \cdot 0{,}0298 \approx 30; DX = npq = 1000 \cdot 0{,}0298 \cdot 0{,}9702 \approx 29.$

За нерівністю Чебишова:

$$P(|X - MX| \le \varepsilon) \ge 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2} \approx 0{,}997 \Rightarrow \varepsilon = \sqrt{\frac{DX}{0{,}003}} \approx 98.$$

Отже, $0 < |X - 30| < 98$, внаслідок чого $X \in (30; 128)$ за нерівністю Чебишова.

Якщо використати інтегральну теорему Муавра-Лапласа, то

$$P(|X - np| < \varepsilon) = P\left(\left|\frac{X - np}{\sqrt{npq}}\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) = 2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) = 0{,}997 \Rightarrow$$

$$\Phi_0\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) = 0{,}4985 \Rightarrow \frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}} = 2{,}96\,, \varepsilon = 16\,.$$

Отже, $X \in (13, 46)$ за теоремою Муавра-Лапласа.

Нерівність Чебишова, взагалі, має теоретичне значення, оскільки оцінки завищені, грубі. Але деякі цікаві факти можна отримати з (11.1.3) або (11.1.4).

Наприклад, при $\varepsilon = 3\sigma$ маємо нерівність «трьох сигм»:

$$P(|X - MX| \ge 3\sigma) \le \frac{1}{9}$$

Нерівністю Чебишова на практиці слід користуватись при відносно великих $\varepsilon > 0$.

11.2 Різне поняття збіжності послідовності випадкових величин

Нехай задано послідовність випадкових величин $X_1, X_2, \dots .. X_n, \dots$ визначених на одному й тому ж ймовірнісному просторі Ω. Оскільки випадкові величини є функціями елементарних результатів $\omega \in \Omega$, отримаємо числову послідовність

$$X_1(\omega_0), X_2(\omega_0), \dots, X_n(\omega_0), \dots,$$

яка може збігатися або розбігатися.

Означення. Послідовність випадкових величин $X_n,\ n = \overline{1, \infty}$, збігається до X із ймовірністю 1, якщо

$$P(\omega \in \Omega;\ \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)) = 1 \qquad (11.2.1)$$

Означення. Послідовність випадкових величин $X_n,\ n = \overline{1, \infty}$, збігається до величини X за ймовірністю, якщо:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1 \text{ або } \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \ge \varepsilon\,) = 0 \quad (11.2.2)$$

У такому випадку пишуть

$$X_n \xrightarrow{P} X \qquad (11.2.3)$$

Означення. Послідовність випадкових величин $X_n,\ n = \overline{1, \infty}$, збігається до величини X в середньоквадратичному, якщо

$$\lim_{n\to\infty} M(X_n - X)^2 = 0 \qquad (11.2.4)$$

Припустимо, що відомі функції розподілу $F_n(x) = P(X_n < x)$ випадкових величин $X_n,\ n = \overline{1,\infty}$.

Означення. Послідовність функцій розподілу $F_n(x),\ n = \overline{1,\infty}$, збігається за розподілом (або слабко збігається, або збігається в основному) до функції $F_X(x)$, якщо для будь-якої точки x, де $F_X(x)$ неперервна, виконується

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F_X(x) \tag{11.2.5}$$

У фундаментальних підручниках доводиться, що із збіжності (11.2.1) або (11.2.2) випливає збіжність (11.2.4) і (11.2.5).

11.3 Закон великих чисел (слабкий)

Розглянемо $X_1, X_2, \dots\dots X_n, \dots$, які мають математичні сподівання $m_1, m_2, \dots, m_n \dots$.

Теорема. ***Закон великих чисел***. Послідовність $X_1, X_2, \dots\dots X_n, \dots$ випадкових величин задовольняє закону великих чисел (слабкому), якщо для будь якого $\varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i\right| \ge \varepsilon\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{11.3.1}$$

або

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \ \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\longrightarrow}}\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i \tag{11.3.2}$$

Зауваження. Виконання закону великих чисел відображає граничну сталість середньоарифметичного випадкових величин: при великому числі іспитів вони практично перестають бути випадковими і співпадають зі своїми середніми значеннями.

11.4 Закон великих чисел у формі Чебишова

Теорема Чебишова. Якщо послідовність $X_1, X_2, \dots\dots X_n, \dots$ випадкових величин така, що існують $MX_i = m_i$ і $DX_i = {\sigma_i}^2$, причому дисперсії ${\sigma_i}^2 \le C$ $\forall\, i = \overline{1,\infty}$, то для послідовності $X_1, X_2, \dots\dots X_n, \dots$ виконується закон великих чисел.

Наслідок. Якщо випадкові величини $X_i,\ n = 1,2,\dots$, в умовах теореми Чебишова є однаково розподіленими ($m_i = m,\ {\sigma_i}^2 = \sigma^2$) , то послідовність $X_1, X_2, \dots\dots X_n, \dots$ задовольняє закону великих чисел у формі Чебишова.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \ \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\longrightarrow}}\ m \tag{11.4.1}$$

11.5 Закон великих чисел у формі Бернуллі

Теорема Бернуллі. Нехай проводиться n іспитів в схемі Бернуллі, Y_n – число успіхів в n іспитах, тоді $r_n = \frac{Y_n}{n}$ збігається з ймовірністю до ймовірності p успіху в одному випробуванні:

$$P(|r_n - p| \geq \varepsilon) \underset{n \to \infty}{\overset{P}{\longrightarrow}} 0 \tag{11.5.1}$$

Приклад. Нехай задана послідовність $X_1, X_2, \ldots \ldots X_n, \ldots$ – незалежних випадкових величин, ряд розподілу кожної X_nзадано таблицею:

X_n	-5n	0	5n
P_n	$\frac{1}{2n^2}$	$1 - \frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{2n^2}$

Покажемо, що послідовність $X_1, X_2, \ldots \ldots X_n, \ldots$ задовольняє закону великих чисел в формі Чебишова.

Розв'язання. $MX_n = (-5n)\frac{1}{2n^2} + 0\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + 5n \cdot \frac{1}{2n^2} = 0$

$$DX_n = MX_n{}^2 - (MX_n)^2 = (-5n)^2 \frac{1}{2n^2} + 0^2\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + (5n)^2 \frac{1}{2n^2} = 25$$

$$DX_n = 25 < \infty \ \forall \ n = \overline{1, \infty}$$

Тобто послідовність $X_1, X_2, \ldots \ldots X_n, \ldots$ задовольняє закону великих чисел у формі Чебишова. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \underset{n \to \infty}{\overset{P}{\longrightarrow}} 0.$

11.6 Центральна гранична теорема Ляпунова

У законі великих чисел нас не цікавили функції розподілу $F_n(x) = P(X_n < x)$ випадкових величин $X_n, \ n = \overline{1, \infty}$.

Інша група теорем, яка має назву центральної граничної теореми, вказує умови, при яких закон розподілу суми великої кількості незалежних випадкових величин наближений до нормального. Вперше центральна гранична теорема була сформульована і доведена російським математиком А.М. Ляпуновим (1875-1918). При більш загальних умовах її довели Феллер, Хінчін, Леві та інші. Ці дослідження привели до переконливості у тому, що при додаванні великої кількості слабко залежних один від одного величин, кожна з яких робить невеликий внесок до сумарного результату, закон розподілу їх суми буде приблизно нормальним.

Теорема Ляпунова. Нехай $X_n, \ n = \overline{1, \infty}$, – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, $MX_n = m, \ DX_n = \sigma^2$. Тоді

$$P\left(\frac{S_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} < x\right) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \Phi(x), \tag{11.6.1}$$

де $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $\Phi(x)$ – функція нормального стандартного розподілу.

Теорема Муавра-Лапласа. Нехай S_n – число успіхів в n незалежних випробуваннях в схемі Бернуллі з ймовірністю успіху p і невдачі $q = 1 - p$. З ростом n послідовність функцій розподілу випадкових величин $\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}}$ збігається до функції нормального стандартного розподілу:

$$P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{n\sigma^2}} < x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x) \qquad (11.6.2)$$

Теорема Бернуллі. Нехай проводиться n незалежних випробувань в схемі Бернуллі з ймовірністю p появи події A в одному іспиті. Тоді

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 2\Phi_0\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right), \text{де } \Phi_0(x) - \text{інтеграл Лапласа} \qquad (11.6.3)$$

Отримана формула пов'язує чотири величини: p, n, P, ε. Якщо задано три з них, то можна знайти четверту. Якщо ж задано дві величини і при цьому p невідома, то добуток pq приймають рівним 0,25, оскільки найбільш можливе значення $p = 0{,}5$.

Приклад 1. Випадкова величина X є середньоарифметичним із 3200 незалежних однаково розподілених випадкових величин, причому кожний доданок має математичне сподівання 3 і дисперсію 2. Знайти ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $(2{,}925; 3{,}075)$.

Розв'язання.

$$MX = 3;\ DX = \frac{2}{3200} = \frac{1}{1600}$$

Розглянемо

$$Y = \frac{X - MX}{\sqrt{DX}} = \frac{X - 3}{\sqrt{1600}} = \frac{X - 3}{40}$$

Відповідно до центральної граничної теореми, Y має нормальний стандартний розподіл.

$$P(2{,}925 < X < 3{,}075) = P(2{,}925 - 3 < X - 3 < 3{,}075 - 3) =$$

$$= P\left(\frac{2{,}925 - 3}{40} < \frac{X - 3}{40} < \frac{3{,}075 - 3}{40}\right) = \Phi_0(3) - \Phi_0(-3) = 2\Phi_0(3)$$

Користуючись значенням інтегралу Лапласа,

$$P(2{,}925 < X < 3{,}075) \approx 2 \cdot 0{,}49865 = 0{,}9973.$$

Приклад 2. Потяг складається із $n = 100$ вагонів. Вага кожного вагона – випадкова величина з математичним сподіванням $MX = 65$ т та середньоквадратичним відхиленням $\sigma = 9$ т. Локомотив може тягти потяг, якщо його вага не перевищує 6600 т, інакше доведеться використовувати ще один локомотив.

Знайти:

а) ймовірність p того, що буде достатньо одного локомотива;

б) скільки треба взяти вагонів, що із ймовірністю 0,99 було достатньо одного локомотива?

Розв'язання. Для того, щоб локомотив зміг тягти потяг, необхідно, щоб вага X поїзда була в межах $(0; 6600)$. Випадкову величину X можна вважати нормальною з $MX = 100 \cdot 65 = 6500; DX = 100 \cdot 81 = 8100$.

а) за формулою (11.6.1) маємо

$$P(0 \le X < 6600) = \Phi_0\left(\frac{6600 - 6500}{90}\right) - \Phi_0\left(\frac{0 - 6600}{90}\right) \approx \Phi_0(1{,}1) - \Phi_0(-72) \approx$$

$$\approx 0{,}387 + 0{,}5 = 0{,}887 .$$

б) позначимо через n необхідну кількість вагонів, яке знайдемо, розв'язуючи рівняння:

$$0{,}99 = \Phi_0\left(\frac{6600 - 65n}{90}\right) - \Phi_0\left(\frac{0 - 65n}{90}\right)$$

Коли $n = 100$, то права частина останньої рівності менша 0,99, а тому візьмемо $n = 99$. Оскільки

$$\Phi_0\left(\frac{6600 - 6435}{90}\right) - \Phi_0\left(\frac{0 - 6435}{90}\right) \approx \Phi_0(1{,}8) - \Phi_0(-71{,}5) =$$

$$= 0{,}46 + 0{,}5 = 0{,}96 < 0{,}99$$

Візьмемо $n = 98$.

$$\Phi_0\left(\frac{6600 - 6370}{90}\right) - \Phi_0\left(\frac{0 - 6370}{90}\right) \approx \Phi_0(2{,}56) - \Phi_0(-70{,}8) =$$

$$= 0{,}49 + 0{,}5 = 0{,}99.$$

Отже, один локомотив (з достовірною ймовірністю) зможе тягти потяг, що складається з 98 вагонів.

Приклад 3. Ймовірність того, що деталь нестандартна дорівнює $p = 0{,}05$. Скільки треба відібрати деталей, щоб із ймовірністю $P = 0{,}9544$ можна було б стверджувати, що відносна частота відхилення від постійної ймовірності p за абсолютною величиною не більша ніж на 0,04.

Розв'язання. За умовою $p = 0{,}05, q = 0{,}95, \varepsilon = 0{,}04$.

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - 0{,}05\right| \le 0{,}04\right) = 0{,}9544$$

Потрібно знайти n.

$$0{,}9544 = 2\Phi_0\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 2\Phi_0\left(0{,}04\sqrt{\frac{n}{0{,}05 \cdot 0{,}95}}\right)$$

З таблиці інтегралу Лапласа знаходимо, що $0.183\sqrt{n} = 2$, звідки $n = 119$.

Зміст отриманого результату такий: якщо взяти досить велике число проб, що містять 119 деталей, то приблизно в 95,44% цих проб відносна частота настання події (появи нестандартної деталі) буде знаходитися в межах від 0,05–0,04 до 0,05+0,04, тобто в проміжку (0,01; 0,09).

Контрольні запитання

1. Які типи збіжності випадкових величин ви знаєте?
2. Запишіть нерівність Чебишова для послідовності випадкових величин, які мають скінченні дисперсії.
3. В якому випадку кажуть, що послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин підкорюється закону великих чисел?
4. Сформулювати закон великих чисел у формі
   а) слабкій;
   б) Чебишова;
   в) Бернуллі.
5. Що означає слабка збіжність послідовності випадкових величин? Які теореми називають центральними граничними теоремами?
6. Сформулюйте центральну теорему Ляпунова, теорему Муавра-Лапласа, теорему Бернуллі.

Задачі для самостійного розв’язання

1. Середнє число сонячних днів в році для даної місцевості дорівнює 90. Оцінити ймовірність того, що протягом року в цій місцевості буде не більше 240 сонячних днів.

2. Середня вага бульби картоплі дорівнює 150 г. Оцінити ймовірність того, що навмання взята бульба картоплі буде важити не більше 500 г?

3. Середнє значення швидкості вітру на поверхні землі в даному пункті дорівнює 16 км/год. Оцінити ймовірність того, що в цьому пункті швидкість вітру (при одному спостережені) не перевищить 80 км/год.

4. Середнє споживання електроенергії за травень населенням одного з мікрорайонів Києва становить 360 000 кВт/год. Оцінити ймовірність того, що споживання електроенергії в травні поточного року перевищить 1000 000 кВт/год.

5. Ймовірність появи події в кожному з 100 незалежних випробувань дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що відносна частота відхилиться від імовірності появи події (по абсолютній величині) не більше ніж на 0,03.

6. Оцінити ймовірність того, що при 3600 незалежних підкидань грального кубика число появ шести очок буде не менше 900.

7. Сума всіх вкладів в деякому банку становить 2000000 грн, а ймовірність того, що випадково взятий вклад не перевищує 10000 грн, дорівнює 0,8. Зробіть оцінку числа вкладників даного банку.

8. Середній термін служби мотора становить 4 роки. Оцінити ймовірність того, що даний мотор не прослужить більше 20 років.

9. Прийнявши ймовірність попадання в ціль при одному пострілі 0,4, оцінити ймовірність того, що при 120 пострілах виявиться не більше ніж 80 влучень. Знайти наближене значення цієї ймовірності за інтегральною теоремою Муавра-Лапласа.

10. Середнє значення витрат води в населеному пункті становить 50000 л в день. Оцінити ймовірність того, що в цьому населеному пункті витрата води не буде перевищувати 120000 л день.

11. Для деякого автопарку середнє число автобусів, що відправляються в ремонт після місяця експлуатації на міських лініях, дорівнює 5. Оцінити ймовірність того, що після закінчення місяця в даному автопарку буде відправлено в ремонт менше 15 автобусів, якщо: а) відсутня інформація про дисперсію; б) відомо, що дисперсія дорівнює 4; в) передбачається, що число автобусів, що відправляються після місяця експлуатації, підкоряється закону розподілу Пуассона з параметром $\lambda = 5$.

12. Пристрій складається з 10 незалежно працюючих елементів. Ймовірність відмови кожного елемента за час T дорівнює 0,05. За допомогою нерівності Чебишова оцінити ймовірність того, що абсолютна величина різниці між числом елементів, що відмовили і середнім числом (математичним сподіванням) відмов за час T виявиться: а) менше двох; б) не менше двох.

13. Розподіл випадкової величини X дається наступною таблицею:

X	1	2	3	4	5	6
P	0,05	0,10	0,25	0,30	0,20	0,10

Чому дорівнює ймовірність того, що $| X\text{-}MX | <2$? Оцінити цю ймовірність, користуючись нерівністю Чебишова.

14. Для визначення середньої тривалості горіння електролампи в партії з 200 однакових ящиків було взято на вибірку по одній лампі з кожного ящика. Оцінити ймовірність того, що середня тривалість горіння відібраних 200 електроламп відрізняється від середньої тривалості горіння всієї партії по модулю менше ніж на 5 год, якщо відомо, що середнє квадратичне відхилення тривалості горіння ламп в кожному ящику не більше 7 год.

15. Скільки має бути здійснено незалежних вимірювань деякої фізичної величини, щоб з ймовірністю, не меншою 0,98, можна було стверджувати, що середнє арифметичне результатів вимірювань відрізняється від істинного значення по модулю не більш ніж на 0,01, якщо дисперсія окремого результату вимірювання не перевищує 1?

16. В освітлювальну мережу паралельно включено 20 ламп. Ймовірність того, що за час T лампа буде включена, дорівнює 0,8. Користуючись нерівністю

Чебишова, оцінити ймовірність того, абсолютна величина різниці між числом ввімкнених ламп і середнім числом (математичним сподіванням) ввімкнених ламп за час T виявиться: а) менше трьох; б) не менш трьох.

17. Випадкова величина X підпорядковується показниково-степеневому закону з щільністю $f(x) = \frac{x^m}{m!}e^{-x}, x \geq 0$. Довести справедливість нерівності
$$P(0 < X < (m+1)^2) > \frac{m}{m+1}.$$

18. Послідовність незалежних випадкових величин $\{X_m\}$ задана законом розподілу

X_m	-1	1
P	$\frac{m}{2m+1}$	$\frac{m+1}{2m+1}$

Чи застосуємо до даної послідовності теорему Чебишова?

19. Ймовірність наявності щербини на металевих брусках, заготовлених для обточування, дорівнює 0,2. Оцінити ймовірність того, що в партії з 1000 брусків відхилення числа придатних брусків від 800 не перевищує 5%.

20. Скільки разів потрібно підкинути монету, щоб з ймовірністю, не меншою 0,997, можна було стверджувати, що відносна частота випадіння герба буде між 0,499 і 0,501?

21. Стрільба по цілі ведеться по черзі з трьох гармат, причому ймовірності попадання в ціль дорівнюють відповідно 0,2, 0,3 і 0,5. Таким чином зроблено 300 пострілів. Оцінити ймовірність того, що при цьому відносна частота відрізняється від середньої ймовірності попадання по абсолютній величині не більше ніж на 0,1.

22. Проростання насіння кукурудзи в деяких умовах дорівнює 93%. Знайти границі для відносної частоти насіння, що зійшло з 1000 посіяних, якщо ці межі треба гарантувати з ймовірністю, не меншою 0,99.

23. Нехай ймовірність того, що покупцеві взуттєвого магазину необхідні туфлі 41-го розміру, дорівнює 0,15. Оцінити границі відсотка покупців серед 2000, які побували в магазині, яким потрібні такі туфлі, якщо ці границі треба гарантувати з ймовірністю 0,98.

24. Проведено 4000 незалежних випробувань: в 500 з них ймовірність появи очікуваного результату була 0,4; в 1200 випробуваннях ця ймовірність була 0,5; в останніх випадках ймовірність сприятливого результату дорівнювала 0,6. Знайти границі, в яких повинна знаходитись відносна частота появи очікуваного результату, якщо це необхідно гарантувати з ймовірністю 0,98.

25. Відомо, що дисперсія кожної з даних незалежних випадкових величин не перевищує 4. Визначити число таких величин, при якому ймовірність відхилення середньої арифметичної випадкових величин від середньої

арифметичної їх математичних очікувань не більше ніж на 0,25, перевищить 0,99.

РОЗДІЛ 12

Багатовимірні випадкові величини. Функція і щільність їхнього розподілу

12.1 *n*-вимірні випадкові вектори

У прикладних задачах зазвичай необхідно враховувати не одну випадкову величину, а кілька випадкових величин, що одночасно спостерігаються в експерименті.

Означення. Сукупність

$$X_1 = X_1(\omega),\ X_2 = X_2(\omega), \dots, X_n = X_n(\omega) \quad (12.1.1)$$

випадкових величин, які задані на одному й тому ж ймовірнісному просторі $\mathbf{\Omega}$, називають n-вимірною випадковою величиною, або n-вимірним випадковим вектором.

Позначаються n-вимірні випадкові вектори:

$$\bar{X}_n = (X_1, X_2, \dots, X_n),\ \text{де}\ X_1, X_2, \dots, X_n \text{ – компоненти вектора} \quad (12.1.2)$$

Значення, які вони приймають:

$$\bar{x}_n = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n,\ x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathrm{R} \quad (12.1.3)$$

$\bar{X} = (X, Y)$ – двовимірний випадковий вектор,
$\bar{x} = (x, y)$ – його значення.

Наведемо приклади випадкових векторів:

Приклад 1. Відхилення точки розриву снаряда від точки прицілювання при стрільбі по повітряній цілі описується випадковим вектором:
$\bar{X} = (X, Y, Z)$, де
X – відхилення по осі Ox;
Y – відхилення по осі Oy;
Z – відхилення по осі Oz.

Приклад 2. При тестуванні пристрою на надійність сукупність зовнішніх впливів можна описати випадковим вектором $(X, Y, Z, \dots)$, де
X – температура навколишнього середовища;
Y – вологість повітря;
Z – вібрація платформи, на якій встановлений пристрій і т.д.

В основному ми будемо вивчати двовимірні випадкові вектори.

12.2 Сумісна функція розподілу

Розглянемо перетин подій:

$$(X_1 < x_1) \cap (X_2 < x_2) \cap \ldots \cap (X_n < x_n) \qquad (12.2.1)$$

У подальшому замість запису (12. 2.1) ми будемо використовувати:

$$(X_1 < x_1;\ X_2 < x_2; \ldots ; X_n < x_n) \qquad (12.2.2)$$

Означення. Функцією розподілу (ймовірностей) $F_{\bar{X}}(x_1, x_2, \ldots , x_n)$ n-вимірного випадкового вектора $\bar{X}_n = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ в точці $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ називають ймовірність сумісного настання (перетину) подій $(X_1 < x_1; \ldots ; X_n < x_n)$, тобто:

$$F_{\bar{X}}(x_1, x_2, \ldots , x_n) = P(X_1 < x_1;\ X_2 < x_2; \ldots ; X_n < x_n) \qquad (12.2.3)$$

(12.2.3) — сумісна n-вимірна функція розподілу ймовірностей.

$$F_{\bar{X}}(x, y) = P(X < x;\ Y < y) \qquad (12.2.4)$$

(12.2.4) — двовимірна функція розподілу ймовірностей.

З геометричної точки зору, значення $F_{\bar{X}}(x, y)$ дорівнюють ймовірності потрапляння випадкової точки $\bar{X} = (X, Y)$ в необмежений квадрат з вершиною в точці (x, y) (рис. 12.2.1).

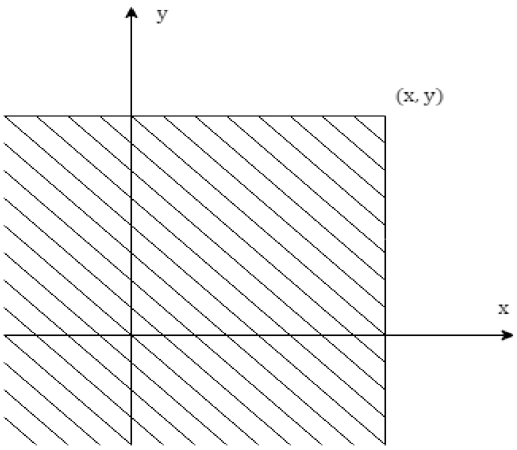


Рис. 12.2.1

12.3 Властивості двовимірної функції розподілу

1. $0 \le F_{\bar{X}}(x, y) \le 1$ (тому, що $F_{\bar{X}}(x, y)$ є ймовірність події $(X < x; Y < y)$).

2. $F_{\bar{X}}(x, y)$ — неспадна функція за обома аргументами.

Доведення. Нехай $x_1 \le x_2$. Подія $(X < x_1; Y < y)$ міститься у події $(X < x_2; Y < y)$. Тому $P(X < x_1; Y < y) \le P(X < x_2; Y < y)$.

$F_{\bar{X}}(x_1, y) \le F_{\bar{X}}(x_2, y)$, що і потрібно було довести.

3. $F_{\bar{X}}(-\infty, y) = F_{\bar{X}}(x, -\infty) = F_{\bar{X}}(-\infty, -\infty) = 0$ (як ймовірності неможливих подій).

4. $F_{\bar{X}}(+\infty, +\infty) = 1$ (як ймовірність достовірної події).

5. $P(a \le X < b; c \le Y < d) = F_{\bar{X}}(b, d) + F_{\bar{X}}(a, c) - F_{\bar{X}}(a, d) - F_{\bar{X}}(b, c)$.

Доведення.

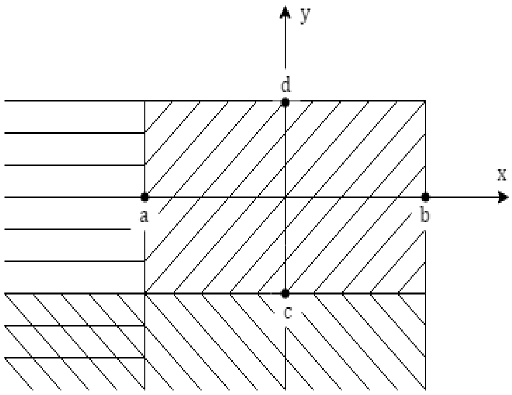


Рис. 12.3.1

$$P(a \le X < b; c \le Y < d) = P(X < b; Y < d) - P(X < b; Y < c) -$$
$$-P(X < a; Y < d) + P(X < a; Y < c) = F_{\bar{X}}(b,d) - F_{\bar{X}}(b,c) - F_{\bar{X}}(a,d) + F_{\bar{X}}(a,c),$$
що й потрібно було довести.

6. $F_{\bar{X}}(x,y)$ неперервна зліва в будь-якій точці (це випливає із означення $F_{\bar{X}}(x,y)$).

7. $F_{\bar{X}}(x,+\infty) = F_X(x)$

$F_{\bar{X}}(+\infty,y) = F_Y(y)$

Функції $F_X(x)$, $F_Y(y)$ – одновимірні функції розподілу компонент вектора $\bar{X} = (X,Y)$.

12. 4 Дискретні двовимірні випадкові величини

Двовимірну випадкову величину $\bar{X} = (X,Y)$ називають дискретною, якщо кожна з її компонент дискретна. Двовимірну дискретну випадкову величину $\bar{X} = (X,Y)$ зручно задавати таблицею (рис.12.4.1).

X \ Y	y_1	y_2	...	y_j	...	y_m	$P(X = x_i)$
x_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1j}	...	p_{1m}	P_{X_1}
x_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2j}	...	p_{2m}	P_{X_2}
$\vdots$	...	...	...	...	...	...	...
x_i	p_{i1}	p_{i2}	...	p_{ij}	...	p_{im}	P_{X_i}
$\vdots$	...	...	...	...	...	...	...
x_n	p_{n1}	p_{n2}	...	p_{nj}	...	p_{nm}	P_{X_n}
$P(Y = y_j)$	P_{Y_1}	P_{Y_2}	...	P_{Y_j}	...	P_{Y_m}	1

Рис.12.4.1

$x_1, x_2, \dots, x_n$ — значення X, $y_1, y_2, \dots, y_m$ — значення Y,

$p_{ij} = P\big(X = x_i; Y = y_j\big), i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}.$

У таблиці є додатковий рядок і додатковий стовпець:

$$P_{Y_j} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij},\ P_{X_i} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}.$$

Суми ймовірностей останнього рядка й останнього стовпця дорівнюють 1.

Перший і останній стовпці таблиці – закон розподілу випадкової величини X:

$X = x_i$	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n	
$P(X = x_i)$	P_{X_1}	P_{X_2}	…	P_{X_i}	…	P_{X_n}	1

$P_{X_i} = P(X = x_i), i = \overline{1, n}.$

Перший і останній рядки таблиці – закон розподілу випадкової величини Y:

$Y = y_j$	y_1	y_2	…	y_j	…	y_m	
$P(Y = y_j)$	P_{Y_1}	P_{Y_2}	…	P_{Y_j}	…	P_{Y_m}	1

$P_{Y_j} = P(Y = y_j), j = \overline{1, m}.$

Використовуючи таблицю (12.4.1), неважко визначити сумісну функцію розподілу ймовірностей як накопичену ймовірність.

$$F_{\overline{X}}\left(x, y\right) = \sum_{\substack{i: x_i < x \\ j: y_j < y}} p_{ij} \qquad (12.4.1)$$

Приклад 1. Два рази підкидаємо ігрову кость. Випадкова величина X – число появ шести очок, Y – число появ парного числа очок.

а) Описати закон розподілу випадкового вектора $\bar{X} = (X, Y)$;

б) описати закони розподілу окремих компонент X, Y;

в)знайти сумісну функцію розподілу $F_{\overline{X}}(x, y)$ і одновимірні функції розподілу $F_X(x)$, $F_Y(y)$;

г) обчислити ймовірність $P(X \geq Y)$.

Розв'язання.

а) Закон розподілу двовимірного випадкового вектора $\bar{X} = (X, Y)$:

$X \backslash Y$	0	1	2	P_X
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{25}{36}$
1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{10}{36}$
2	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
P_Y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

$P(X=0;Y=0)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$

$P(X=0;Y=1)=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$

$P(X=0;Y=2)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

$P(X=1;Y=0)=0$

$P(X=1;Y=1)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

$P(X=1;Y=2)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

$P(X=2;Y=0)=0$

$P(X=2;Y=1)=0$

$P(X=2;Y=2)=\frac{1}{36}$

Сумуючи ймовірності по стовпцям і рядкам, отримаємо

$P_{Y_1}=P(X=0;Y=0)+P(X=1;Y=0)+P(X=2;Y=0)=\frac{1}{4}$.

Аналогічно

$$P_{Y_2}=\frac{1}{2};\ P_{Y_3}=\frac{1}{4};\ P_{X_1}=\frac{25}{36};\ P_{X_2}=\frac{10}{36};\ P_{X_3}=\frac{1}{36}.$$

б)

$X=k$	0	1	2	
$P(x=k)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

– Закон розподілу компоненти X

$Y=k$	0	1	2	
$P(y=k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

– Закон розподілу компоненти Y

в) $$F_{\bar{X}}(x,y)=\begin{cases} 0, \text{якщо } x\le 0 \text{ або } y\le 0\\ \frac{1}{4}, \text{якщо } 0<x\le 1 \text{ і } 0<y\le 1\\ \frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}, 0<x\le 1 \text{ і } 1<y\le 2\\ \frac{25}{36}, 0<x\le 1 \text{ і } y>2\\ \frac{1}{4}, 1<x\le 2 \text{ і } 0<y\le 1\\ \frac{7}{12}+\frac{1}{6}=\frac{3}{4}, 1<x\le 2 \text{ і } 1<y\le 2\\ \frac{25}{36}+\frac{10}{36}=\frac{35}{36}, 1<x\le 2 \text{ і } y>2\\ \frac{1}{4}, x>2 \text{ і } 0<y\le 1\\ \frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}, x>2 \text{ і } 1<y\le 2\\ 1, x>2 \text{ і } y>2 \end{cases}$$

$F_{\bar{X}}(x,y)$ —сумісна функція розподілу ймовірностей $\bar{X}=(X,Y)$.

$$F_X(x)=\begin{cases} 0,\ x\le 0\\ \frac{25}{36}, 0<x\le 1\\ \frac{35}{36}, 1<x\le 2\\ 1, x>2 \end{cases} \quad F_Y(y)=\begin{cases} 0,\ y\le 0\\ \frac{1}{4}, 0<y\le 1\\ \frac{3}{4}, 1<y\le 2\\ 1, y>2 \end{cases}$$

$F_X(x)$, $F_Y(y)$ — одновимірні функції розподілу компонент X, Y.

г) $P(X\ge Y)=P(X=0;Y=0)+P(X=1;Y=0)+P(X=1;Y=1)+$

$+P(X=2;Y=0)+P(X=2;Y=1)+P(X=2;Y=2)=$

$=\frac{1}{4}+0+\frac{1}{6}+0+0+\frac{1}{36}=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}.$

12.5 Неперервні випадкові величини. Сумісна щільність розподілу ймовірностей

Означення. Двовимірну випадкову величину називають неперервною, якщо її сумісну функцію розподілу $F_{\bar{X}}(x,y)$ можна задати у вигляді:

$$F_{\bar{X}}(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{\bar{X}}(x,y)dxdy, \quad (12.5.1)$$

де $f_{\bar{X}}(x,y)$ – сумісна щільність розподілу ймовірностей двовимірного випадкового вектора $\bar{X}=(X,Y)$.

$$f_{\bar{X}}(x,y)=\frac{\partial^2 F_{\bar{X}}(x,y)}{\partial x\partial y} \quad (12.5.2)$$

Аналогічно

$$F_{\bar{X}}(x_1,x_2,\dots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\dots\int_{-\infty}^{x_n} f_{\bar{X}}(x_1,x_2,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n \quad (12.5.3)$$

$$f_{\bar{X}}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F_{\bar{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} \qquad (12.5.4)$$

(12.5.3), (12.5.4) – сумісна функція і сумісна щільність розподілу ймовірностей n-вимірного випадкового вектора $\bar{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Властивості $\boldsymbol{f_{\bar{X}}(x, y)}$ (довести самостійно).

1. $f_{\bar{X}}(x, y) \geq 0$.
2. $P(a \leq X < b; c \leq Y < d) = \int_a^b \int_c^d f_{\bar{X}}(x, y) dxdy$.
3. Нормуюча властивість щільності: $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\bar{X}}(x, y) dxdy = 1$.
4. $P(x \leq X < x + \Delta x; y \leq Y < y + \Delta y) \approx f_{\bar{X}}(x, y) \Delta x \Delta y$.
5. $P(X = x; Y = y) = 0$.
6. $P\big((X, Y) \in D\big) = \iint_D f_{\bar{X}}(x, y) dxdy$.
7. $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\bar{X}}(x, y) dy$; $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\bar{X}}(x, y) dx$.

$f_X(x)$, $f_Y(y)$ – маргінальні щільності розподілу компонентів X і Y.

Приклад 1. Щільність розподілу двовимірного випадкового вектора (X, Y) має вигляд:

$$f_{\bar{X}}(x, y) = \begin{cases} c(x + y), \text{при } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, \text{в інших випадках} \end{cases}$$

1) визначити c;
2) сумісну функцію розподілу;
3) одновимірні функції розподілу;
4) маргінальні щільності розподілу;
5) $P(X + Y < 1)$.

Розв'язання.

1) Знайдемо c, використовуючи нормуючу властивість щільності:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\bar{X}}(x, y) dxdy = \mathrm{c} \int_0^1 dx \int_0^1 (x + y) dy =$$

$$= c \int_0^1 xy + \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 dx = \mathrm{c} \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2}\right) dx = c\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x\right) \Big|_0^1 = c \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = c = 1$$

$c = 1$

2) Розіб'ємо площину OXY на області (рис. 12.5.1):

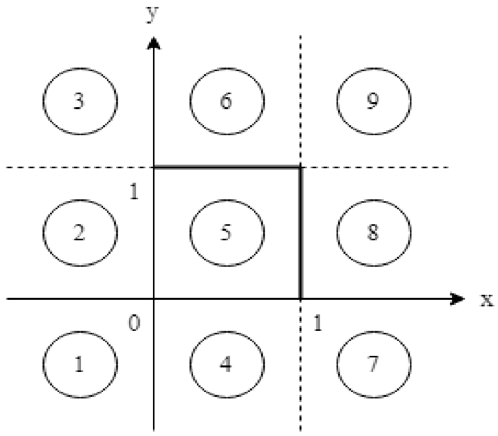


Рис. 12.5.1

В областях 1, 2, 3, 4, 7: $F_{\bar{X}}(x,y) = 0$, так як в них $f_{\bar{X}} = 0$ і

$$F_{\bar{X}}(-\infty, y) = F_{\bar{X}}(x, -\infty) = F_{\bar{X}}(-\infty, -\infty) = 0.$$

В області 5: $F_{\bar{X}}(x,y) = \int_0^x dx \int_0^y (x+y)\, dy = \int_0^x xy + \frac{y^2}{2}\Big|_0^y dx =$

$$= \int_0^x \left(xy + \frac{y^2}{2}\right) dx = \frac{1}{2}x^2 y + \frac{xy^2}{2}\Big|_0^x = \frac{1}{2}x^2 y + \frac{1}{2}xy^2 = \frac{1}{2}xy(x+y),$$

$0 \le x < 1, 0 \le y < 1.$

В області 6: $F_{\bar{X}}(x,y) = F_{\bar{X}}(x,+\infty) = F_{\bar{X}}(x,1) = \frac{1}{2}x(x+1), 0 \le x < 1.$

В області 8: $F_{\bar{X}}(x,y) = F_{\bar{X}}(+\infty,y) = F_{\bar{X}}(1,y) = \frac{1}{2}y(y+1), 0 \le y < 1.$

В області 9: $F_{\bar{X}}(x,y) = F_{\bar{X}}(+\infty,\infty) = 1.$

Перевірте, що функція $F_{\bar{X}}(x,y)$ змінюється неперервно при переході через $x = 0, x = 1; y = 0, y = 1$. Таким чином, сумісна функція розподілу ймовірностей має вигляд:

$$F_{\bar{X}}(x,y) = \begin{cases} 0, x < 0 \text{ або } y < 0 \\ \frac{1}{2}xy(x+y), 0 \le x < 1, 0 \le y < 1 \\ \frac{1}{2}x(x+1), 0 \le x < 1, y > 1 \\ \frac{1}{2}y(y+1), 0 \le y < 1, x > 1 \\ 1, x > 1 \text{ і } y > 1 \end{cases}$$

3) Одновимірні функції розподілу ймовірностей:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ \frac{1}{2}x(x+1), 0 \le x < 1 \\ 1, x \ge 1 \end{cases} \qquad F_Y(y) = \begin{cases} 0, y < 0 \\ \frac{1}{2}y(y+1), 0 \le y < 1 \\ 1, y > 1 \end{cases}$$

4) Знайдемо маргінальні щільності $f_X(x)$, $f_Y(y)$.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\bar{X}}(x,y)dy = \int_0^1 (x+y)dy = xy + \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = x + \frac{1}{2},\ 0 \le x < 1$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\bar{X}}(x,y)dx = \int_0^1 (x+y)dx = \frac{x^2}{2} + xy\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + y,\ 0 \le y < 1$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \text{ або } x > 1 \\ x + \dfrac{1}{2}, 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, y < 0 \text{ або } y > 1 \\ y + \dfrac{1}{2}, 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

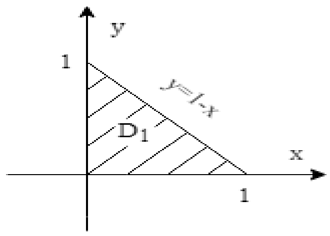
Або:

$$f_X(x) = F'_X(x) = \begin{cases} 0, x \overline{\in} [0,1] \\ x + \dfrac{1}{2}, x \in [0,1] \end{cases}$$

$$f_Y(x) = F'_Y(y) = \begin{cases} 0, y \overline{\in} [0,1] \\ y + \dfrac{1}{2}, y \in [0,1] \end{cases}$$

5) Знайдемо ймовірність:

$P(X+Y<1) = P\big((X,Y) \in D_1\big) = \Bigg|$ де D_1:



$\Bigg| =$

$$= \iint\limits_{D_1} f_{\bar{X}}(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} (x+y)dxdy = \left| D_1\colon \begin{matrix} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1-x \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+y)dy = \int_0^1 (xy + \frac{y^2}{2})\Big|_0^{1-x} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x(1-x) + \frac{1}{2}(1-x)^2 \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2 \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}(x - \frac{x^3}{3})\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

12.6 Залежність і незалежність компонент випадкового вектора

Означення. Випадкові величини X і Y називають ***незалежними***, якщо

$$F_{\bar{X}}(x,y) = F_X(x)F_Y(y) \qquad (12.6.1)$$

Якщо (12.6.1) не виконується, то випадкові величини X і Y залежні.

Можна показати, що якщо X і Y незалежні, то незалежними є події $(X < x)$ і $(Y < y)$, а також події $(a \leq X < b)$ і $(c \leq Y < d)$. (Довести самостійно).

Теорема. Для того, щоб неперервні випадкові величини X і Y були незалежними, необхідно і достатньо

$$f_{\bar{X}}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) \qquad (12.6.2)$$

(Довести самостійно).

Означення. Дискретні випадкові величини X і Y називаються ***незалежними***, якщо

$$\forall i,j: p_{ij} = P_{X_i} \cdot P_{Y_j} \qquad (12.6.3)$$

Означення. Випадкові величини $X_1, \dots, X_n$, що задані на одному й тому ж ймовірнісному просторі називають ***незалежними в сукупності***, якщо

$$F_{\bar{X}}(X_1, \dots, X_n) = F_{x_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{x_n}(x_n) \qquad (12.6.4)$$

Зауваження. Із незалежності випадкових величин в сукупності випливає незалежність будь яких двох, трьох і т.д. комбінацій випадкових величин. Обернене невірно.

Зауваження. В прикладі 1 (12.4) компоненти двовимірного випадкового вектора $X = (X, Y)$ залежні, так як, наприклад, $p_{11} = \frac{1}{4}$, $p_{X_1} = \frac{25}{36}$, $p_{Y_1} = \frac{1}{4}$. $p_{11} \neq p_{X_1}p_{Y_1}$.

Зауваження. В прикладі 1 (12.5) компоненти двовимірного неперервного випадкового вектора залежні, так як $F_{\bar{X}}(X,Y) \neq F_X(x) \cdot F_Y(y)$.

Контрольні запитання

1. Що називається n-вимірним випадковим вектором?
2. Визначити сумісну функцію розподілу n-вимірного випадкового вектора; сумісну функцію розподілу двовимірного випадкового вектора. Її геометричне значення.
3. Перелічіть властивості $F_{\bar{X}}(x,y)$.
4. Як задати дискретний двовимірний випадковий вектор?
5. Функція розподілу двовимірного дискретного випадкового вектора.
6. Неперервний двовимірний випадковий вектор. Сумісна щільність розподілу ймовірностей. Її властивості. Зв'язок із сумісною функцією розподілу. Нормуюча властивість щільності.
7. Залежні та незалежні випадкові величини. Означення. Необхідна і достатня умова незалежності (залежності) випадкових величин. Незалежність у сукупності.

РОЗДІЛ 13

Випадкові вектори. Числові характеристики компонентів *n*-вимірного випадкового вектора

Раніше ми розглядали такі числові характеристики випадкових величин, як математичне сподівання, дисперсія, середньоквадратичне відхилення, початкові та центральні моменти k-го порядку, квантиль рівня α, медіана, мода, найімовірніше значення та ентропія випадкових величин.

13.1 Коваріація випадкових величин

Нехай $\overline{X} = (X, Y)$ – двовимірний випадковий вектор.

Означення. ***Коваріацією*** (кореляційним моментом) $cov(X, Y)$ випадкових величин X, Y називається математичне сподівання добутку випадкових величин $\dot{X} = X - MX$ і $\dot{Y} = Y - MY$.

$$cov(X, Y) = M(\dot{X}\,\dot{Y}) = M((X - MX)\,(Y - MY)) \qquad (13.1.1)$$

Коваріація дискретного випадкового вектора $\overline{X} = (X, Y)$:

$$cov(X, Y) = \sum_{i,j}(x_i - MX)(y_j - MY)p_{ij} \qquad (13.1.2)$$

Для неперервних випадкових величин X і Y

$$cov(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x - MX)(y - MY)f_{\overline{X}}(x, y)dxdy \qquad (13.1.3)$$

Раніше ми сформулювали, що

$$D(X + Y) = DX + DY \qquad (13.1.4)$$

Рівність (13.1.4) справедлива лише для незалежних випадкових величин. Отримаємо відповідну формулу для загального випадку:

$$D(X + Y) = M\left(\left(X + Y - M(X + Y)\right)^2\right) = M[((X - MX) + (Y - MY))^2] =$$

$$= M\,[\,(X - MX)^2 + 2(X - MX)(Y - MY) + (Y - MY)^2] =$$

$$= M[(X - MX)^2] + 2M[(X - MX)(Y - MY)] + M[(Y - MY)^2] =$$

$$= DX + 2\,cov(X, Y) + DY$$

$$D(X + Y) = DX + 2\,cov(X, Y) + DY \qquad (13.1.5)$$

Цю формулу можна узагальнити для будь-якої кінцевої кількості доданків:

$$D(X_1 + \cdots + X_n) = DX_1 + \cdots + DX_n + 2\sum_{1 \le i < j \le n} cov\left(X_i, X_j\right) \qquad (13.1.6)$$

Основні властивості коваріації:

1. $cov(X, X) = DX$

Доведення. $cov(X, X) = M\big((X - MX)(X - MX)\big) = M\,((X - MX)^2) = DX.$

2. Коваріація незалежних випадкових величин *X, Y* дорівнює 0.

Доведення. Нехай *X, Y* – незалежні випадкові величини, тоді

$$cov(X,Y) = M\big((X-MX)(Y-MY)\big) = M(X-MX)M(Y-MY) = M\dot{X}M\dot{Y} = 0.$$

3. Якщо $Y_1 = a_1X_1 + b_1, Y_2 = a_2X_2 + b_2$, то $cov(Y_1,Y_2) = a_1a_2cov\ (X_1,X_2)$.

Доведення. $cov(Y_1,Y_2) = cov\ (a_1X_1 + b_1, a_2X_2 + b_2) =$

$= M\big[\big(a_1X_1 + b_1 - M\ (a_1X_1 + b_1)\big)\big(a_2X_2 + b_2 - M\ (a_2X_2 + b_2)\big)\big] =$

$= M\ [a_1(X_1 - MX_1) * a_2(X_2 - MX_2)] = a_1a_2M\ [(X_1 - MX_1)(X_2 - MX_2)] =$

$= a_1a_2cov\ (X_1,X_2)$,

що й потрібно було довести.

4. $-\sqrt{DXDY} \le cov\ (X,Y) \le \sqrt{DXDY}$

Доведення. Розглянемо дисперсію випадкової величини $Z_x = xX - Y$, де *x* – довільне дійсне число.

$$DZ_x = D(xX - Y) = x^2DX - 2xcov(X,Y) + DY \qquad (13.1.7)$$

Вираз (13.1.7) (права частина) є квадратним тричленом відносно *x*. Так як це дисперсія випадкової величини Z_x , то $DZ_x \ge 0$. Таким чином, дискримінант квадратного тричлена менше або дорівнює 0.

$$4cov^2(X,Y) - 4DXDY \ \le 0,$$

$$|cov(X,Y)| \le \sqrt{DXDY},$$

що й потрібно було довести.

5. $|cov(X,Y)| = \sqrt{DXDY}$ тоді, коли між *X* і *Y* існує лінійна функціональна залежність, тобто існують такі числа *a* і *b*, що *Y=aX+b*.

Доведення. Нехай дискримінант квадратного тричлена дорівнює нулю. Рівняння $|cov(X,Y)| = \sqrt{DXDY}$ має один корінь *x=a*, $Z_a = aX - Y$, позначимо $Z_a = -b$. Звідси *Y=aX+b*, що й потрібно було довести.

6. $cov(X,Y) = M(XY) - MXMY$.

Доведення. $cov(X,Y) = M\big((X-MX)(Y-MY)\big) = M\ (XY - XMY - YMX +$ $+MXMY) = M(XY) - MXMY - MYMX + MXMY = M(XY) - MXMY$,
що й потрібно було довести.

Наслідок 1. $M(XY) = MXMY + cov(X,Y)$.

Наслідок 2. $M(\prod_{i=1}^{n} X_i) = \prod_{i=1}^{n} MX_i + \sum_{1\le i\ne j\le n} cov(X_i,X_j)$.

7. Якщо *X* і *Y* пов'язані лінійною залежністю, тобто *Y=aX+b*, то

$$cov(X,Y) = cov(X,aX+b) = cov(X,aX) = a\ cov(X,X) = a\ DX.$$

Тому знак $cov(X,Y)$ співпадає зі знаком *a*, тобто

$$cov\ (X,Y) = \sqrt{DXDY}, \text{якщо } a > 0$$

$$cov\ (X,Y) = -\sqrt{DXDY}, \text{якщо } a < 0$$

Зауваження. Із властивостей дисперсії та коваріації випливає

$$D(a_1X + a_2Y + b\,) = \, a_1^2DX + \, a_2^2DY + 2a_1a_2cov(X,Y)\,.$$

Приклад 1. Нехай випадкова величина X розподілена рівномірно в інтервалі (-1,1), тобто

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, x\,\bar{\epsilon}\,(-1{,}1) \\ \frac{1}{2}, x\epsilon(-1{,}1) \end{cases} \quad Y = X^2. \text{ Знайти } cov\,(X,Y).$$

Розв'язання.

$$cov\,(X,Y) = M(XY) - MXMY = M(X \cdot X^2) - MXM[X^2] = M[X^3] - MXM[X^2]$$

$$MX = \,\frac{-1+1}{2} = 0\;(MX = \,\frac{a+b}{2})$$

$$M(X^3) = \,\int_{-\infty}^{\infty} x^3 f_X(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^3 dx = 0 => cov(X,Y) = 0$$

Означення. Випадкові величини X, Y називають ***некорельованими***, якщо $cov(X,Y) = 0$.

Наведений раніше приклад 1 показує, що з некорельованості випадкових величин не випливає їх незалежність, так як $Y = X^2$.

Коваріація випадкових величин показує наскільки залежність між ними близька до лінійної.

13.2 Коваріаційна матриця

Розглянемо *n*-вимірний випадковий вектор $\overline{\mathrm{X}} = (\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \dots, \mathrm{X}_\mathrm{n})$.

Означення. ***Матрицею коваріацій*** (коваріаційною матрицею) називають матрицю, яка складається з коваріацій випадкових величин $\mathrm{X}_\mathrm{i}, \mathrm{X}_\mathrm{j}$, $i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}$.

$$\sum = (cov\,(X_i, X_j))_{i,j=\overline{1,n}} \tag{13.2.1}$$

$$\sum = \begin{pmatrix} cov\,(X_1,X_1) & cov\,(X_1,X_2) \dots . . & cov\,(X_1,X_n) \\ cov\,(X_2,X_1) & cov\,(X_2,X_2) \dots . . & cov\,(X_2,X_n) \\ \dots \dots \dots \dots \dots & \dots \dots \dots \dots \dots & \dots \dots \dots \dots . \\ cov\,(X_n,X_1) & cov\,(X_n,X_2) \dots . . & cov\,(X_n,X_n) \end{pmatrix} \tag{13.2.2}$$

Твердження 1. Матриця коваріацій $\sum$ симетрична, тобто $\sum = \sum^T$.

Твердження 2. Нехай $\bar{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$ – m-вимірний вектор, який отримали з *n*-вимірного вектора $\bar{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ за допомогою лінійного перетворення *Y*=*XB*+*C*. Тоді матриця коваріацій $\sum$ вектора *Y*:

$$\sum{}_{\bar{Y}} = \, B^T \sum{}_{\bar{X}} B \tag{13.2.3}$$

Твердження 3. Матриця коваріацій $\sum$ є невід'ємно визначеною, тобто $\forall\,\bar{B}: B^T \sum B \geq 0$.

13.3 Коефіцієнт кореляції випадкових величин

Означення. Коефіцієнтом кореляції випадкових величин величин X і Y називається число

$$\rho = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{DXDY}} \qquad (13.3.1)$$

Властивості коефіцієнта кореляції випливають з властивостей коваріації:

1. $\rho(X,X) = 1$.
2. Якщо X і Y незалежні і $DX, DY > 0$, то $\rho(X,Y) = 0$.
3. $\rho(a_1X + b_1, a_2Y + b_2) = \pm\rho(X,Y)$, причому знак «+» якщо a_1, a_2 −одного знаку, знак «−» якщо a_1, a_2 −різних знаків.
4. $-1 \le \rho(X,Y) \le 1$.
5. $|\rho(X,Y)| = 1 \Leftrightarrow Y = aX + b$.

13.4 Розв'язання задач

Приклад 1. Закон розподілу дискретної випадкової величини (X, Y) задано таблицею

$X \backslash Y$	-1	0	1
1	0,15	0,3	0,35
2	0,05	0,05	0,1

а) Знайти безумовні закони розподілу компонент *X, Y*.
б) Встановити залежні чи незалежні компоненти *X, Y*.
в) Обчислити P (X=2, Y=0) и $P(X>Y)$.
г) Побудувати $F_{\overline{X}}(x,y)$, оформити результат у вигляді таблиці.
д) Знайти *MX, MY*.
е) Обчислити коваріаційну та кореляційну матриці.

Розв'язання.

а) Просумуємо ймовірності за рядками і стовпчиками

$X \backslash Y$	-1	0	1	P_X
1	0,15	0,3	0,35	0,8
2	0,05	0,05	0,1	0,2
P_Y	0,2	0,35	0,45	1

Закон розподілу компоненти *X*:

$X=k$	1	2	$\sum$
$P(X=k)$	0,8	0,2	1

Закон розподілу компоненти *Y*:

$Y=m$	-1	0	1	$\sum$
$P(Y=m)$	0,2	0,35	0,45	1

б) Компоненти X і Y залежні, так як P_{11}= 0,15, P_{X_1}=0,8, P_{Y_1}=0,8, і $P_{11} \neq P_{X_1} \cdot P_{Y_1}$.

в) p_{21} =P(X=2; Y=0) = 0,05.

$P(X>Y) = 1-P\ (X\leq Y) = 1\text{-}P\ (X=1;\ Y=1) = 1-0{,}35 = 0{,}65$.

г) Сумісна функція розподілу ймовірностей задана таблицею

$X \backslash Y$	$y\leq -1$	$-1< y \leq 0$	$0<y\leq 1$	$y>1$
$x\leq 1$	0	0	0	0
$1<x\leq 2$	0	0,15	0,45	0,8
$x>2$	0	0,2	0,55	1

д) MX=1·0,8+2·0,2=1,2; MY=−1·0,2+0·0,35+1·0,45=0,25.

е) $cov(X,X) = DX = M[X^2] - (MX)^2 = 1\cdot 0{,}8 + 4\cdot 0{,}2 - 1{,}2\cdot 1{,}2 = 0{,}16$

$$cov(Y,Y) = DY = M[Y^2] - (MY)^2 = 1\cdot(0{,}2+0{,}45) + 0\cdot 0{,}35 - 0{,}25\cdot 0{,}25 = = 0{,}5875$$

$cov(X,Y) = M(XY) - MXMY$

Розглянемо випадкову величину XY:

$XY= k$	-2	-1	0	1	2
$P(XY=k)$	0,05	0,15	0,35	0,35	0,1

$M(XY)$=-2·0,05-1·0,15+0·0,35+1·0,35+2·0,1=0,3;

$cov(X,Y)$= 0,3-1,2·0,25=0,3-0,3=0.

Висновок: величини X і Y некорельовані, але залежні.

$\sum = \begin{pmatrix} 0{,}16 & 0 \\ 0 & 0{,}5875 \end{pmatrix}$ – матриця коваріацій; $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – кореляційна матриця.

Приклад 2. Два постріли були зроблені по цілі в незмінних умовах. Ймовірність вразити ціль одним пострілом дорівнює p. Випадкові величини: X – кількість пострілів до першого попадання (включно), Y – кількість промахів.

а) Описати закон розподілу (X,Y).

б) Знайти центр розсіювання (MX, MY).

в) Знайти DX, DY.

г) Знайти $P(X \geq Y+1)$.

д) Знайти $\rho\ (X,Y)$.

Розв’язання.

а) Закон розподілу (X, Y):

$X \backslash Y$	0	1	2	P_X
1	p^2	pq	0	p
2	0	pq	q^2	q
P_Y	p^2	$2pq$	q^2	1

$p_{11} = P(X = 1; Y = 0) = p^2$
$p_{12} = P(X = 1; Y = 1) = pq$
$p_{13} = P(X = 1; Y = 2) = 0$

$p_{21} = P(X = 2; Y = 0) = 0$
$p_{22} = P(X = 2; Y = 1) = pq$
$p_{23} = P(X = 2; Y = 2) = q^2$

X	1	2	$\sum$
P_X	p	q	1

Y	0	1	2	$\sum$
P_Y	p^2	$2pq$	q^2	1

б) Центр розсіювання:

$MX = 1p + 2q = 1 + q$, $MY = 0p^2 + 1 \cdot 2pq + 2q^2 = 2q$,

$$(MX, MY) = (1 + q, 2q).$$

в) DX, DY:

$DX = M[X^2] – (MX)^2 = 1 \cdot p + 4 \cdot q – (1 + q)^2 = p + 4q – (1 + 2q + q^2) =$
$= p + 2q – 1 – q^2 = p – (1 - q)^2 = p - p^2 = p(1 - p) = pq.$

$DY = M[Y^2] - (MY)^2 = 0 \cdot p^2 + 1 \cdot 2pq + 4q^2 - (2q)^2 = 2pq + 4q^2 - 4q^2 = 2pq.$

г) $P(X \geq Y + 1)$:

$P(X \geq Y + 1) = 1 - P(X < Y + 1) =$

$= 1 - P(X = 1; Y = 1) – P(X = 1; Y = 2) – P(X = 2; Y = 2) =$

$= 1 - pq - 0 - q^2 = 1 - q(p + q) = 1 - q = p.$

д) $\rho\ (X, Y)$:

$\rho\ (X, Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX\ DY}}$

$cov(X, Y) = M(X\ Y) – MXMY$

XY	0	1	2	4	$\sum$
$P\ (XY)$	p^2	pq	pq	q^2	1

$M(XY) = 0 \cdot p^2 + 1 \cdot pq + 2 \cdot pq + 4q^2 = 3pq + 4q^2 = 4pq + 4q^2 - pq =$
$= 4q(p + q) - pq = 4q - pq = q(4 - p) = q(3 + q).$

$cov(X,Y) = q(3+q) - (1+q)\cdot 2q = 3q + q^2 - 2q - 2q^2 = q - q^2 =$
$= q(1-p) = qp.$

$$\rho\ (X,Y) = \frac{qp}{\sqrt{pq\cdot 2pq}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

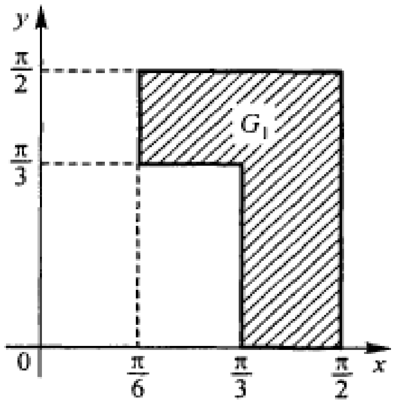
$P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{pmatrix}$ – кореляційна матриця.

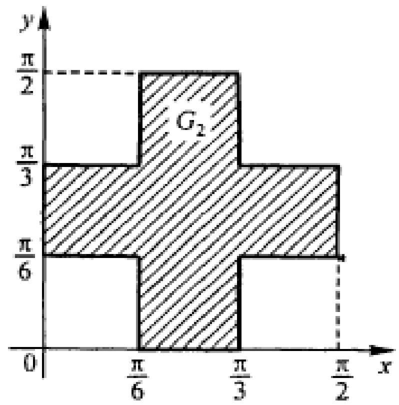
Приклад 3. Функція розподілу неперервного випадкового вектора $(X,\ Y)$ має вигляд:

$$F_{\bar{X}}(x) = \begin{cases} 0, \text{якщо } x < 0, \text{або } y < 0 \\ \frac{1}{2}(\sin x + \sin y - \sin(x+y)), \text{якщо } \ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}; 0 \le y \le \frac{\pi}{2} \\ \quad 1, \text{якщо } x > \frac{\pi}{2} \text{ і } y > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Обчислити

а) $p_1 = P((X,Y) \in G_1)$ і $p_2 = P\ ((X,Y) \in G_2)$, де G_1, G_2 – області, зображені на рисунку:





б) $F_{\bar{X}}(x,y)$.

в) (MX, MY).

Розв'язання.

а) $P\big((X,Y) \in G_1\big) = P\big((X,Y) \in P_1\big) + P\big((X,Y) \in P_2\big) = F_{\bar{X}}\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right) + F_{\bar{X}}\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right) -$

$-F_{\bar{X}}\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right) - F_{\bar{X}}\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right) + F_{\bar{X}}\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) + F_{\bar{X}}\left(\frac{\pi}{3};0\right) - F_{\bar{X}}\left(\frac{\pi}{2};0\right) - F_{\bar{X}}\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right) =$

$= \frac{1}{2}\Big(\sin\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{2} +$

$+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) + \sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} - \sin\pi\Big) == \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$

$p_2 = P\ ((X,Y) \in G_2)$ – обчисліть самостійно.

б) $f_{\overline{X}}(x,y)=\frac{\partial^2 F_{\overline{X}}(x,y)}{\partial x\,\partial y}=$

$$=\begin{cases}0, \text{якщо } x<0, \text{або } y<0, \text{або } x>\frac{\pi}{2}, \text{або } y>\frac{\pi}{2}\\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}((\sin x+\sin y-\sin(x+y))=\frac{1}{2}\sin(x+y),\ 0\le x\le\frac{\pi}{2} \text{ і } 0\le y\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

$$f_{\overline{X}}(x,y)=\begin{cases}0, \quad \text{зовні квадрату}\\ \frac{1}{2}sin(x+y), \qquad \text{якщо } 0\le x\le\frac{\pi}{2} \text{ і } 0\le y\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

в) Щоб знайти центр розсіювання (*MX*, *MY*), знайдемо $f_X(x)$, $f_Y(y)$ – маргінальні щільності:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{\overline{X}}(x,y)\,dy=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x+y)\,dy=-\frac{1}{2}\cos(x+y)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos x\right)=-\frac{1}{2}(-\sin x-\cos x)=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x).$$

$$f_X(x)=\begin{cases}0, \text{якщо } x\,\overline{\in}\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\\ \frac{1}{2}(\sin x+\cos x), \text{якщо } x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\end{cases}$$

Перевіримо умову нормування:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)\,dx=1\Rightarrow\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)\,dx=\frac{1}{2}(-\cos x+\sin x)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\cos\frac{\pi}{2}+\cos 0+\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)=\frac{1}{2}\cdot 2=1.$$

Аналогічно $f_Y(y)=\begin{cases}0, \text{якщо } \ y\,\overline{\in}\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\\ \frac{1}{2}(\sin y+\cos y), \text{якщо } y\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\end{cases}$.

$$MX=\int_{-\infty}^{\infty}xf_x(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(\sin x+\cos x)\,dx=\left|\begin{matrix}u=x, du=dx\\ dv=(\sin x+\cos x)dx\\ v=-\cos x+\sin x\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+(\cos x+\sin x)\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+0+1-1-0\right)=\frac{\pi}{4}.$$

Аналогічно

$$MY=\frac{\pi}{4}\Rightarrow(MX,MY)=\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right).$$

Приклад 4. Випадковий вектор $\overline{X} = (X, Y)$ розподілений рівномірно в області $G = \{(x, y), -1 \le x \le 2; 1 \le y \le 2\}$. Потрібно:

а) отримати вираз для $f_{\overline{X}}(x, y)$;

б) знайти $F_{\overline{X}}(x, y)$;

в) з'ясувати, чи залежні X і Y;

г) знайти $(MX; MY)$;

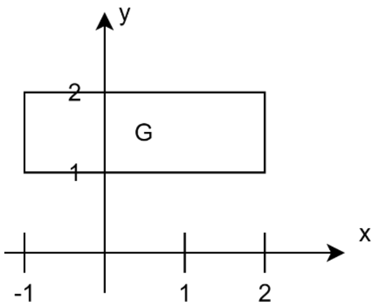
д) обчислити DX, DY;

е) знайти $P\big((X, Y) \in G_1\big)$, де $G_1 = \{(x, y); 0{,}5 \le x \le 1{,}5; 1{,}5 \le y \le 2{,}5\}$.

Розв'язання. Говорять, що випадковий вектор $\overline{X} = (X, Y)$ розподілений рівномірно в області G, якщо:

$$f_{\overline{X}}(x, y) = \begin{cases} 0, \text{якщо } (x, y) \overline{\in} G \\ \frac{1}{S_G}, \text{якщо } (x, y) \in G \end{cases}$$

а) $f_{\overline{X}}(x, y) = \begin{cases} 0, \text{якщо } (x, y) \overline{\in} G \\ \frac{1}{3}, \text{якщо } (x, y) \in G \end{cases}$



б) $F_{\overline{X}}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{\overline{X}}(x, y)\, dx\, dy =$

$$= \begin{cases} 0, \quad \text{якщо } x \le -1 \text{ або } y \le 1 \\ \dfrac{1}{3} \displaystyle\int_{-1}^{x} dx \int_{1}^{y} dy = \dfrac{1}{3}(x+1)(y-1), \text{якщо } -1 < x \le 2, 1 < y \le 2 \\ F_X(x) = \dfrac{1}{3}(x+1), \text{якщо } -1 < x \le 2, y > 2 \\ F_Y(y) = y - 1, \text{якщо } x > 2, 1 < y \le 2 \\ 1, \text{якщо } x > 2, y > 2 \end{cases}$$

Таблиця $F_{\overline{X}}(x, y)$:

X \ Y	$y \le 1$	$1 < y \le 2$	$y > 2$
$x \le -1$	0	0	0
$-1 < x \le 2$	0	$\frac{1}{3}(x+1)(y-1)$	$\frac{1}{3}(x+1)$
$x > 2$	0	$y - 1$	1

в) Знайдемо одновимірні функції розподілу $F_X(x)$, $F_Y(y)$.

$$F_X(x) = F_{\overline{X}}(x, +\infty) = F_{\overline{X}}(x, 2) = \frac{1}{3}(x+1)$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, \text{якщо } x \le -1 \\ \frac{1}{3}(x+1), \text{якщо} -1 < x \le 2 \\ 1, \text{якщо } x > 2 \end{cases}$$

Аналогічно

$$F_Y(y) = F_{\overline{Y}}(+\infty, y) = F_{\overline{Y}}(2, y) = y - 1$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, \text{якщо } y \le 1 \\ y-1, \text{якщо } 1 < y \le 2 \\ 1, \text{якщо } y > 2 \end{cases}$$

$F_{\overline{X}}(x, y) = F_X(x)F_Y(y) =>$ X і Y незалежні.

г) $(MX; MY)$-?

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx, f_X(x) = F_{\text{x}}^{'}(x) = \begin{cases} 0, \text{якщо } x \le -1 \text{ або } x > 2 \\ \frac{1}{3}, \text{якщо} -1 < x \le 2 \end{cases}$$

$$MX = \frac{1}{3}\int_{-1}^{2} x\,dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg|_{-1}^{2} = \frac{1}{6}(4-1) = \frac{1}{2}$$

$$MY = \int_{-\infty}^{\infty} y f_y(y)\,dy, f_y(y) = F_Y^{'}(y) = \begin{cases} 0, \text{якщо } y \le 1 \text{ або } y > 2 \\ 1, \text{якщо } 1 < y \le 2 \end{cases}$$

$$MY = \int_{1}^{2} y\,dy = \frac{y^2}{2}\Bigg|_{1}^{2} = \frac{1}{2}(4-1) = \frac{3}{2}$$

$$(MX; MY) = \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$$

д) DX, DY - ?

$DX = M[X^2] - (MX)^2$

$$M[X^2] = \frac{1}{3}\int_{-1}^{2} x^2\,dx = \frac{1}{9}x^3\Bigg|_{-1}^{2} = \frac{1}{9}(8+1) = 1$$

$$DX = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$DY = M[Y^2] - (MY)^2$

$$M[Y^2] = \int_{1}^{2} y^2\,dy = \frac{y^3}{3}\Bigg|_{1}^{2} = \frac{8-1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$DY = \frac{7}{3} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{7}{3} - \frac{9}{4} = \frac{28-27}{12} = \frac{1}{12}$$

e) $P\big((X,Y) \in G_1\big)$, де $G_1 = \{(x,y); 0{,}5 \le x \le 1{,}5; 1{,}5 \le y \le 2{,}5\}$.

$P\big((X,Y) \in G_1\big) = \int_{0,5}^{1,5} dx \int_{1,5}^{2} f_{\overline{X}}(x,y)\,dy = \frac{1}{3}\int_{0,5}^{1,5} dx \int_{1,5}^{2} dy = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 0{,}5 = \frac{1}{6}$.

Контрольні запитання

1. Що називається коваріацією випадкових величин?
2. Властивості коваріації.
3. Наведіть формули для обчислення коваріації для дискретної та неперервної випадкових величин.
4. Що характеризує коваріація?
5. Матриця коваріацій та її властивості.
6. Коефіцієнт кореляції та його властивості.
7. Кореляційна матриця та її властивості (самостійно).
8. Що характеризує кореляція випадкових величин?

РОЗДІЛ 14

Багатовимірний нормальний розподіл

14.1. Нормальний розподіл на площині

Нехай координати випадкового вектора $\overline{X}=(X,Y)$ є випадковими величинами, які розподілені за нормальним законом, тобто щільності розподілу мають вигляд:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}, x\epsilon R$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}}, y\epsilon R \qquad (14.1.1)$$

Параметри m_x, m_y – математичні сподівання X і Y, σ_x, σ_y - середньоквадратичні відхилення X, Y ($\sigma_x, \sigma_y \ge 0$).

Якщо X і Y незалежні , то сумісна щільність має вигляд:

$$f_{\overline{X}}(x,y) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2 \sigma_x \sigma_y} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}}, (x,y)\epsilon R^2 \qquad (14.1.2)$$

В загальному випадку, сумісна щільність двовимірного випадкового вектора, який розподілений за нормальним законом, має вигляд:

$$f_{\bar{X}}(x,y) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2\sqrt{1-\rho^2}\,\sigma_x\,\sigma_y} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{2\rho(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}\right]} \qquad (14.1.3)$$

Тут ρ – коефіцієнт кореляції.

Позначимо

$$Q(x,y) = \left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho xy}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)\frac{1}{1-\rho^2} \qquad (14.1.4)$$

Тоді

$$f_{\bar{X}}(x,y) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\,)^2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2}Q(x-m_x, y-m_y)} \qquad (14.1.5)$$

$Q(x,y)$ – додатно визначена квадратична форма, $\forall x,y \;\; Q(x,y) \geq 0$.

Розглянемо матрицю коваріацій

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \rho\sigma_x\sigma_y \\ \rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2 \end{pmatrix} \qquad (14.1.6)$$

Знайдемо обернену матрицю $\tilde{\Sigma} = \Sigma^{-1}$ (наприклад, методом приєднаної матриці).

detΣ = $\sigma_x^2\sigma_y^2 - \rho^2\sigma_x^2\sigma_y^2 = (1-\rho^2)\,\sigma_x^2\sigma_y^2$.

$$\tilde{\Sigma} = \frac{1}{(1-\rho^2)\sigma_x^2\sigma_y^2}\begin{pmatrix} \sigma_y^2 & -\rho\sigma_x\sigma_y \\ -\rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_x^2 \end{pmatrix} \qquad (14.1.7)$$

$$\tilde{\Sigma} = \frac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_x^2} & -\frac{\rho}{\sigma_x\sigma_y} \\ -\frac{\rho}{\sigma_x\sigma_y} & \frac{1}{\sigma_y^2} \end{pmatrix} \qquad (14.1.8)$$

-матриця, обернена до матриці коваріацій.

Неважко помітити, що $Q(\bar{x}\,) = \bar{x}\tilde{\Sigma}\bar{x}^T$, $\bar{x} = (x,y)$. (14.1.9)

Перевіримо це:

$$Q(\bar{X}) = \frac{1}{1-\rho^2}(x\,,y)\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_x^2} & -\frac{\rho}{\sigma_x\sigma_y} \\ -\frac{\rho}{\sigma_x\sigma_y} & \frac{1}{\sigma_y^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{1-\rho^2}\left[\frac{x^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho xy}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right].$$

Зазначимо, що $\sqrt{det\Sigma} = \sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}$.

З урахуванням (14.1.9):

$$f_{\bar{X}}(x,y) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2(det\Sigma)^{\frac{1}{2}}} e^{-0.5(\bar{x}-\bar{m})\tilde{\Sigma}(\bar{x}-\bar{m})^T}, \qquad (14.1.10)$$

де $\bar{X} = (X,Y)$, $\bar{m} = (m_x, m_y)$.

Нехай $\bar{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ – n-вимірний нормальний вектор. Тоді сумісна щільність для n-вимірного нормального вектора має вигляд:

$$f_{\bar{X}}(\bar{x}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n (det\Sigma)^{\frac{1}{2}}} e^{-0.5(\bar{x}-\bar{m})\tilde{\Sigma}(\bar{x}-\bar{m})^T} \qquad (14.1.11)$$

Тут $\bar{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ – центр розсіювання, $\tilde{\Sigma}$ – матриця, обернена до матриці коваріацій.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \rho\sigma_{x_1}\sigma_{x_2} & \dots & \rho\sigma_{x_1}\sigma_{x_n} \\ \rho\sigma_{x_1}\sigma_{x_2} & \sigma_{x_2}^2 & \dots & \rho\sigma_{x_2}\sigma_{x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho\sigma_{x_1}\sigma_{x_n} & \rho\sigma_{x_2}\sigma_{x_n} & \dots & \sigma_{x_n}^2 \end{pmatrix} \qquad (14.1.12)$$

$$\tilde{\Sigma} = \Sigma^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_{x_1}^2} & -\frac{\rho}{\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}} & \dots & -\frac{\rho}{\sigma_{x_1}\sigma_{x_n}} \\ -\frac{\rho}{\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}} & \frac{1}{\sigma_{x_2}^2} & \dots & -\frac{\rho}{\sigma_{x_2}\sigma_{x_n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{\rho}{\sigma_{x_1}\sigma_{x_n}} & -\frac{\rho}{\sigma_{x_2}\sigma_{x_n}} & \dots & \frac{1}{\sigma_{x_n}^2} \end{pmatrix} \qquad (14.1.13)$$

Якщо матриця Σ (а значить і обернена Σ^{-1}) співпадає з одиничною і $\bar{m} = (0,0,\dots,0)$, то

$$f_{\bar{X}}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + \dots + x_n^2)} \qquad (14.1.14)$$

Таку щільність називають щільністю стандартного багатовимірного (n-вимірного) нормального розподілу.

Повернемося до двовимірного випадку $\bar{X}$=(X, Y). Функція (14.1.3) або (14.1.5) ($f_{\bar{X}}(x, y)$) задає деяку поверхню у тривимірному просторі.

Лінії рівня цієї поверхні мають рівняння:

$$f_{\bar{X}}(x, y)=a$$

або, з урахуванням (14.1.5),

$$Q(x - m_X, y - m_Y) = b \text{ , де } b = -2ln\, 2\pi a(det\Sigma)^2 \qquad (14.1.15)$$

$$\frac{1}{1-\rho^2}\left(\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right) = b \qquad (14.1.16)$$

Останнє рівняння представляє сімейство еліпсів при різних значеннях b.

Осі симетрії O_1X' і O_1Y' цих еліпсів проходять через т. $O_1(m_X, m_Y)$, їх напрям співпадає з напрямом власних векторів матриці $\tilde{\Sigma}$. Нагадаємо, що ненульовий вектор X називається власним вектором матриці $\tilde{\Sigma}$, а число λ власним значенням, що відповідає власному вектору X, якщо

$$\tilde{\Sigma}X = \lambda X \qquad (14.1.17)$$

Власні числа (λ_1, λ_2) або $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ знаходимо як корені характеристичного рівняння

$$\det(\tilde{\Sigma} - \lambda E) = 0, \qquad (14.1.18)$$

а власні вектори – як розв'язок системи однорідних алгебраїчних рівнянь

$$\left(\tilde{\Sigma} - \lambda_i E\right)X = 0,\ i = \overline{1,n}. \qquad (14.1.19)$$

Осі симетрії еліпсів називаються осями розсіювання, самі еліпси - еліпсами розсіювання (або еліпсами рівної ймовірності), а центри еліпсів - т. $O_1(m_X, m_Y)$ - центром розсіювання.

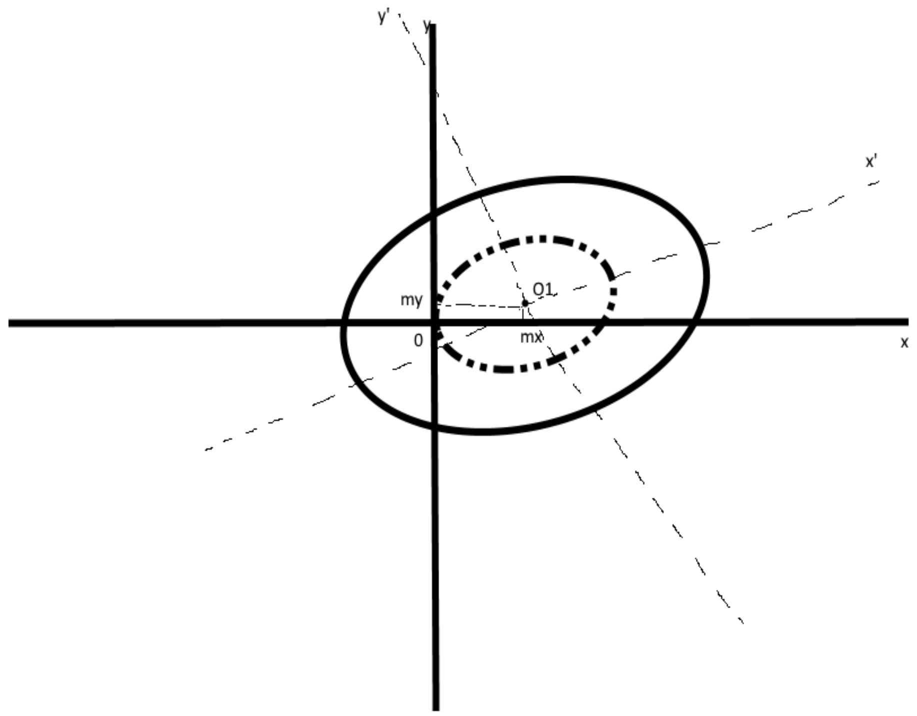


Рис. 14.1.1

Вводимо нову систему координат із центром в т. $O_1(m_X, m_Y)$ і осями O_1X', O_1Y' - канонічна система координат. У цій системі координати (X', Y') випадкової точки мають нормальний розподіл з нульовим вектором середніх (0,0) і матрицею коваріацій $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x'^2 & 0 \\ 0 & \sigma_y'^2 \end{pmatrix}$, $\sigma_x' = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$, $\sigma_y' = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$,

$$f_{\bar{X}}(x', y') = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x'^2}{\sigma_x'^2} + \frac{y'^2}{\sigma_y'^2}\right]},\ (x', y') \epsilon R^2. \qquad (14.1.20)$$

В канонічній системі координат $\rho = 0$. З некорельованості компонентів X', Y' випливає їх незалежність (справедливо тільки для нормального закону).

Якщо змінити масштаб на осях координат в канонічній системі координат, взявши за одиниці відліку $\sigma_x{}'$ і $\sigma'{}_y$, то в такій системі координат випадкові точки будуть мати нормальний розподіл з нульовим вектором середніх і одиничною матрицею коваріацій, тобто

$$f_{\bar{X}}(x,y)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)},\ (x,y)\epsilon\ R^2. \qquad (14.1.21)$$

Такий розподіл називається круговим.

При $n > 2$ n-вимірний випадковий вектор трактується як координати випадкової точки в n-вимірному просторі. Нехай $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – канонічна система координат еліпсоїдів розсіювання. Тоді координати $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будуть описуватися n- вимірним нормальним законом, який має нульовий вектор середніх та діагональну матрицю коваріацій, причому $\sigma_{x_i} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$, $i = \overline{1,n}$.

Ще раз вводячи нові координати $y_i = \sigma_i x_i$ $(i = \overline{1,n})$ (тобто змінюючи масштаби на осях координат), отримаємо, що в останній системі координат $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ координати випадкової точки мають нормальний стандартний розподіл.

$$f_{\bar{Y}}(y_1, y_2, \ldots, y_n)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}e^{-\frac{1}{2}(y_1^2+y_2^2\ldots+y_n^2)} \qquad (14.1.22)$$

14.2. Розв’язання задач

Приклад 1. Двовимірна випадкова величина (X, Y), що становить координати падіння випадкової точки на площину, підпорядковується нормальному закону з вектором середніх $\overline{m}$= (1;2) і матрицею коваріацій

$$\Sigma = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) вигляд сумісної щільності розподілу ймовірностей $f_{\bar{X}}(x,y)$;

б) маргінальні щільності $f_X(x)$, $f_Y(y)$;

в) звести $f_{\bar{X}}(x,y)$ до канонічного вигляду;

г) осі розсіювання (X, Y);

д) $P(X\in(\frac{1}{3};\ 1))$;

е) $P((X, Y)\in D)$, де D-область, обмежена еліпсом

$$5x^2+4xy+8y^2-18x-36y+41=0.$$

Розв’язання.

а) Знайдемо $\tilde{\Sigma} = \Sigma^{-1}$.

$\Sigma = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $\det \Sigma = \frac{8}{36} \cdot \frac{5}{36} - \frac{2}{36} \cdot \frac{2}{36} = \frac{36}{36 \cdot 36} = \frac{1}{36}$,

$$\tilde{\Sigma} = \Sigma^{-1} = 36\begin{pmatrix} \frac{5}{36} & \frac{2}{36} \\ \frac{2}{36} & \frac{8}{36} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Знайдемо

$$\bar{x}\tilde{\Sigma}\bar{x}^T = (x\,, y)\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x\,, y)\begin{pmatrix} 5x + 2y \\ 2x + 8y \end{pmatrix} = 5x^2 + 2xy + 2xy + 8y^2 =$$

$= 5x^2 + 4xy + 8y^2$.

У відповідності до (14.1.10) сумісна щільність нормального розподілу має вигляд

$$f_{\bar{X}}(x, y) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2\sqrt{\frac{1}{36}}} e^{-\frac{1}{2}(5(x-1)^2 + 4(x-1)(y-2) + 8(y-2)^2)}$$

або

$$f_{\bar{X}}(x, y) = \frac{6}{(\sqrt{2\pi})^2} e^{-\frac{1}{2}(5(x-1)^2 + 4(x-1)(y-2) + 8(y-2)^2)} \qquad (14.2.1)$$

б) Знайдемо маргінальні щільності.

$\sigma_x^2 = \frac{8}{36} = \frac{2}{9} \Rightarrow \sigma_x = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $\sigma_y^2 = \frac{5}{36} \Rightarrow \sigma_y = \frac{\sqrt{5}}{6}$,

$\rho\sigma_x\sigma_y = -\frac{2}{36} = -\frac{1}{18}$, $\rho\frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{6} = -\frac{1}{18} \Rightarrow \rho = -\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Маргінальні щільності по x і y мають вигляд:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{\sqrt{2}}{3}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2 \cdot \frac{2}{9}}}, x \epsilon R, \;\; f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{\sqrt{5}}{6}} e^{-\frac{(y-2)^2}{2 \cdot \frac{5}{36}}}, y \epsilon R. \qquad (14.2.2)$$

в) Зведемо $f_{\bar{X}}(x, y)$ до канонічного вигляду. Для цього розв'яжемо рівняння:

$$\det(\tilde{\Sigma} - \lambda E) = 0 \text{ та } (\tilde{\Sigma} - \lambda E)X = 0.$$

$$\tilde{\Sigma} - \lambda E = \begin{pmatrix} 5 - \lambda & 2 \\ 2 & 8 - \lambda \end{pmatrix}$$

$\det(\tilde{\Sigma} - \lambda E) = (5 - \lambda)(8 - \lambda) - 4 = 0$,
$\lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0$,
$\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 9$.
$(\tilde{\Sigma} - \lambda E)X = 0$, $\lambda_1 = 4$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$,
$Rang(A - 4E) = 1$,
$y = c, x = -2c$.

$X_1(c) = (-2c; c)$ – множина власних векторів, що відповідають $\lambda_1 = 4$.

Виділимо з них один, одиничний:

$E_1 = \frac{X_1}{|X_1|}$, $|X_1| = \sqrt{4c^2 + c^2} = c\sqrt{5}$, $E_1 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

$\lambda_2 = 9, \quad (\tilde{\Sigma} - 9E)X = 0, \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0,$

$Rang(\tilde{\Sigma} - 9E) = 1,$

$y = c \Rightarrow x = \frac{c}{2}.$

$X_2(c) = \left(\frac{c}{2}; c\right)$ - множина власних векторів, що відповідають $\lambda_2 = 9$.

$|X_2| = \sqrt{c^2 + \frac{c^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}c,\ E_2 = \frac{X_2}{|X_2|} = (\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}).$

Ортогональна матриця переходу до канонічного вигляду:

$$U = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

det$U$=$-\frac{4}{5} - \frac{1}{5} = -1.$

Змінимо знаки в першому стовпці так, щоб det U =1:

$$U = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

det U =1 (стовпці ортогональні),

$$U^T = U^{-1}$$

Введемо нові координати

$$\begin{cases} x' = x - 1, \\ y' = y - 2. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = U^T \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y') \\ \frac{1}{\sqrt{5}}(-x' + 2y') \end{pmatrix}. \quad (14.2.3)$$

В канонічній системі координат O_1X'', O_1Y'' сумісна щільність має вигляд:

$$f_{\bar{X}}(x'', y'') = \frac{6}{(\sqrt{2\pi})^2} e^{-\frac{(4x''^2 + 9y''^2)}{2}} \quad (14.2.4)$$

Вводимо новий масштаб по осях координат:

$$x''' = 2x'', y''' = 3y''.$$

Позначимо $x = x'''$, $y = y'''$ і отримаємо вираз для щільності кругового нормального закону на площині

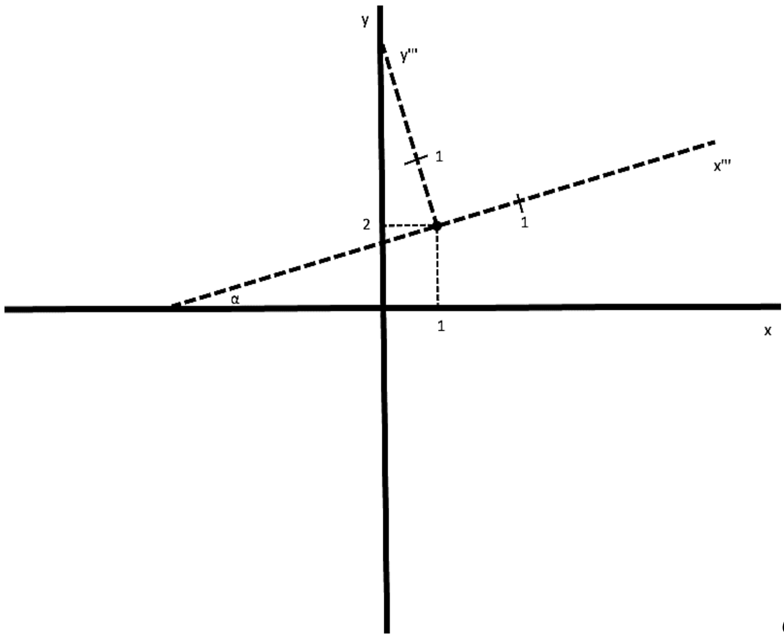
$$f_{\bar{X}}(x,y) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}, x, y \epsilon R \qquad (14.2.5)$$

г) Знайдемо осі розсіювання. Вони проходять через т. $O_1(1,2)$ паралельно векторам E_1=($\frac{2}{\sqrt{5}}$; $-\frac{1}{\sqrt{5}}$), E_2=($\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\frac{2}{\sqrt{5}}$).

Отже,

O_1X'': $\frac{x-1}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{y-2}{-\frac{1}{\sqrt{5}}} \Rightarrow 1 - x = 2y - 4 \Rightarrow x + 2y - 5 = 0.$

O_1Y'': $\frac{x-1}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{y-2}{\frac{2}{\sqrt{5}}} \Rightarrow 2x - 2 = y - 2 \Rightarrow 2x - y = 0.$



$$cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Рис. 14.2.1

д)

$$P\left(X \in \left(\frac{1}{3};1\right)\right) = \left| \begin{array}{c} P\big(X \in (a;b)\big) = \Phi_0\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) \\ \Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ m = 1, \sigma_x = \frac{\sqrt{2}}{3} \end{array} \right| =$$

$$= \Phi_0\left(\frac{1-1}{\frac{\sqrt{2}}{3}}\right) - \Phi_0\left(\frac{\frac{1}{3}-1}{\frac{\sqrt{2}}{3}}\right) = \Phi_0(0) - \Phi_0\left(-\sqrt{2}\right) = \Phi_0\left(\sqrt{2}\right) \approx$$

$\approx \Phi_0(1{,}4) = 0{,}41.$

e) $P((X,Y)\in D)$, D: $5x^2+4xy+8y^2-18x-36y+41=0$.

Зведемо рівняння області D до канонічного вигляду.

$$\begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' + 2 \end{cases}$$

підставимо в рівняння області D.

D:

$5(x'+1)^2 + 4(x'+1)(y'+2) + 8(y'+2)^2 - 18(x'+1) - 36(y'+2) + 41 = 0,$

$5x'^2 + 10x' + 5 + 4x'y' + 8x' + 4y' + 8 + 8y'^2 + 32y' + 32 - 18x' -$
$-18 - 36y' - 72 + 41 = 0,$

$5x'^2 + 4x'y' + 8y'^2 = 4$ -рівняння кривої, яка обмежує область D, в системі координат $O_1x'y'$.

Матриця квадратичної форми співпадає з $\tilde{\Sigma}$. Тому рівняння даної кривої в канонічній системі координат має вигляд

$$4x''^2 + 9y''^2 = 4,$$

$$x''^2 + \frac{y''^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = 1.$$

Покладемо $\begin{cases} x''' = x'', \\ y''' = \frac{3}{2}y''. \end{cases}$ Остаточно отримаємо рівняння границі області D в канонічній системі координат $x'''^2 + y'''^2 = 1$.

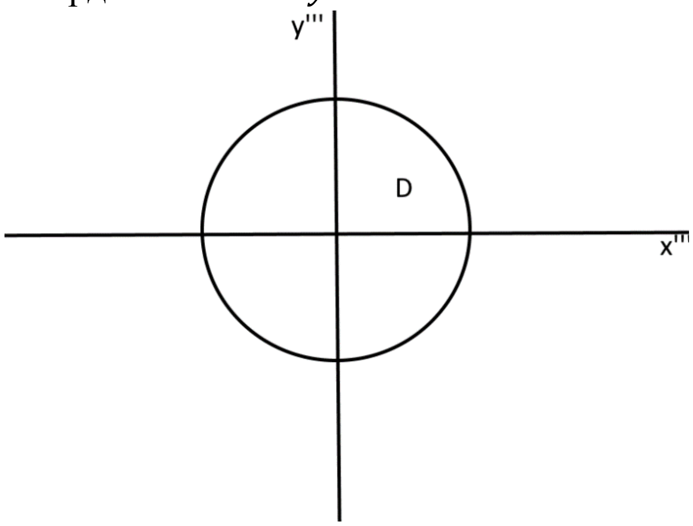


Рис. 14.2.2

Позначимо $x''' = x, y''' = y$.

$P((X,Y)\in D)= \iint_D f_{\bar{X}}(x,y)dxdy = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2}\iint_D e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dxdy =$

$$= \begin{vmatrix} x = r\cos\varphi & & 0 \le r \le 1 \\ y = r\sin\varphi & D: & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ x^2+y^2=r^2 & & dxdy = rdrd\varphi \end{vmatrix} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 re^{-\frac{1}{2}r^2}dr =$$

$= -\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi\, e^{-\frac{1}{2}r^2}|_0^1 = -e^{-\frac{1}{2}} + 1 = 1-e^{-\frac{1}{2}}$.

Контрольні запитання

1. Сумісна щільність розподілу для двох нормально розподілених незалежних випадкових величин.
2. Сумісна щільність розподілу двовимірного нормального закону (загальний випадок).
3. Центр розсіювання та матриця коваріацій двовимірного нормального вектору. Чому дорівнює коефіцієнт кореляції двовимірного нормального вектора?
4. Сумісна щільність n-вимірного нормального вектора.
5. Вектор середніх та матриця коваріацій n-вимірного нормального вектора. Чому дорівнює коефіцієнт кореляції координат n-вимірного випадкового вектора, розподіленого за нормальним законом?
6. Який нормальний закон називають стандартним?
7. Що називають еліпсами розсіювання двовимірного нормального закону? Як знайти центр та осі симетрії еліпсів розсіювання?
8. Властивості багатовимірного нормального розподілу.

РОЗДІЛ 15

Умовні характеристики випадкових величин

Одним з основних понять теорії ймовірностей є поняття умовної ймовірності $P(A|B)$. Аналогом поняття умовної ймовірності для двох випадкових величин X і Y є умовний закон розподілу однієї з них, припустимо X, за умови, що Y приймає певне значення.

15.1 Умовні розподіли

Нехай $\overline{X} = (X,Y)$ – двовимірна дискретна випадкова величина, яка задана таблицею

$X\backslash Y$	y_1	y_2	$\dots$	y_m	p_x
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1m}	p_{x_1}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2m}	p_{x_2}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\dots$	p_{nm}	p_{x_m}
p_y	p_{y_1}	p_{y_2}	$\dots$	p_{y_m}	1

(15.1.1)

$p_{ij} = P\big(X = x_i, Y = y_j\big), i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m};$

$\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = p_{x_i},\ i = \overline{1,n}; \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = p_{y_j}, j = \overline{1,m}.$

Означення. Для двовимірної дискретної випадкової величини (X, Y) ***умовною ймовірністю*** π_{ij} $(i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m})$ того, що випадкова величина X прийме значення $x_i (X = x_i)$ за умови $Y = y_j$, називається умовна ймовірність події $X = x_i$, якщо відбулася подія $(Y = y_j)$, тобто:

$$\pi_{ij} = P\big(X = x_i \big| Y = y_j\big) = \frac{P(X = x_i; Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{P_{ij}}{P_{Y_j}}$$

$$\pi_{ij} = \frac{P_{ij}}{P_{Y_j}}, i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m} \qquad (15.1.2)$$

Таким чином, набір ймовірностей π_{ij} характеризує умовний розподіл дискретної величини X за умови $Y = y_j$.

$$P_{ij} = \pi_{ij} P_{Y_j} \qquad (15.1.3)$$

Умовний розподіл випадкової величини X за умови $Y = y_j$ $(j = \overline{1,m})$ задається таблицею

	Y				
X	y_1	y_2	$\dots$	y_m	p_x
x_1	π_{11}	π_{12}	$\dots$	π_{1m}	p_{x_1}
x_2	π_{21}	π_{22}	$\dots$	π_{2m}	p_{x_2}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_n	π_{n1}	π_{n2}	$\dots$	π_{nm}	p_{x_n}
p_y	p_{y_1}	p_{y_2}	$\dots$	p_{y_m}	1

Аналогічно визначають умовну ймовірність π_{ij}^* того, що випадкова величина Y набуде значення y_j за умови, що $X = x_i, i = \overline{1,n}$.

$$\pi_{ij}^* = P\big(Y = y_j \big| X = x_i\big) = \frac{P(X = x_i; Y = y_j)}{P(X = x_i)} = \frac{P_{ij}}{P_{X_i}}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}$$

Приклад 1. Нехай (X, Y) – число успіхів в двох випробуваннях за схемою Бернуллі. X – число успіхів в першому випробуванні з ймовірністю p, Y – число успіхів в другому випробувані з ймовірністю p.

Сумісний закон розподілу (X, Y) задано таблицею:

X	Y		
	0	1	P_x
0	q^2	pq	q
1	pq	p^2	p
P_Y	q	p	1

Умовний закон розподілу (X, Y) задано таблицею:

X	Y		
	0	1	P_x
0	q	q	q
1	p	p	p
P_Y	q	p	1

$$\pi_{ij} = \frac{P_{ij}}{P_{Y_j}}, \pi_{11} = \frac{P_{11}}{P_{Y_1}} = \frac{q^2}{q} = q, \pi_{21} = \frac{P_{21}}{P_{Y_1}} = \frac{pq}{q} = p,$$

$$\pi_{12} = \frac{P_{12}}{P_{Y_2}} = \frac{pq}{p} = q, \pi_{22} = \frac{P_{22}}{P_{Y_2}} = \frac{p^2}{p} = p.$$

Приклад 2. Нехай X –кількість очок на верхній грані ігрової кості, Y – кількість очок на нижній грані.

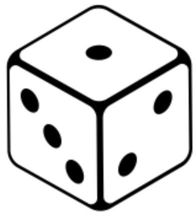
Сумісний закон розподілу (X, Y) задано таблицею:

X	Y						
	1	2	3	4	5	6	P_X
1	0	0	0	0	0	$1/6$	$1/6$
2	0	0	0	0	$1/6$	0	$1/6$
3	0	0	0	$1/6$	0	0	$1/6$
4	0	0	$1/6$	0	0	0	$1/6$
5	0	$1/6$	0	0	0	0	$1/6$
6	$1/6$	0	0	0	0	0	$1/6$
P_Y	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	1

$1 \leftrightarrow 6$

$2 \leftrightarrow 5$

$3 \leftrightarrow 4$



Умовний закон розподілу (X, Y) задано таблицею:

X	Y						
	1	2	3	4	5	6	P_X
1	0	0	0	0	0	1	$1/6$
2	0	0	0	0	1	0	$1/6$
3	0	0	0	1	0	0	$1/6$
4	0	0	1	0	0	0	$1/6$
5	0	1	0	0	0	0	$1/6$
6	1	0	0	0	0	0	$1/6$
P_Y	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	1

$$\pi_{ij} = P(X = x_i | Y = y_j)$$

$$\pi_{ij} = \frac{P_{ij}}{P_{Y_j}}$$

$$i, j = \overline{1,6}$$

15.2 Умовна функція розподілу ймовірностей і умовна щільність розподілу ймовірностей

$$F_X(X = x|Y = y) = \frac{P(X<x;Y=y)}{P(Y=y)} \quad (15.2.1)$$

Для неперервних випадкових величин $P(Y = y) = 0$. Тому подію $(Y = y)$ замінимо подією $(y \leq Y < y + \Delta y)$, де $\Delta y \to 0$.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\overline{X}}(x,y)dy, \;\; f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\overline{X}}(x,y)dx \quad (15.2.2)$$

(15.2.2) – маргінальні щільності розподілу компонент X і Y.

Визначимо умовну ймовірність події $(X < x)$ за умови $(y \leq Y < y + \Delta y)$:

$$P(X < x|y \leq \mathrm{Y} < y + \Delta y) = \frac{P(X < x, y \leq \mathrm{Y} < y + \Delta y)}{P(y \leq \mathrm{Y} < y + \Delta y)} = \frac{F_{\overline{X}}(x, y + \Delta y) - F_{\overline{X}}(x,y)}{F_Y(y + \Delta y) - F_Y(y)}$$

$$= \frac{\int_y^{y+\Delta y} dv \int_{-\infty}^{x} f_{\overline{X}}(u,v)du}{\int_y^{y+\Delta y} f_Y(v)dv} = \frac{\Delta y \int_{-\infty}^{x} f_{\overline{X}}(u,y)du}{\Delta y f_Y(y)} = \frac{\int_{-\infty}^{x} f_{\overline{X}}(u,y)du}{f_Y(y)}$$

Спрямовуючи $\Delta y \to 0$, отримаємо

$$P(X < x|Y = y) = \frac{\int_{-\infty}^{x} f_{\overline{X}}(u,y)du}{f_Y(y)} \quad (15.2.3)$$

$$F_X(x|Y = y) = \frac{\int_{-\infty}^{x} f_{\overline{X}}(x,y)dx}{f_Y(y)}$$

(15.2.3) – умовна функція розподілу $F_X(x|Y = y)$.

$$f_X(x|Y = y) = \frac{f_{\overline{X}}(x,y)}{f_Y(y)} \quad (15.2.4)$$

(15.2.4) – умовна щільність розподілу X, коли $Y= y$.

Висновки:

Умовною щільністю розподілу випадкової величини X за умови $Y= y$ називається

$$f_X(x|y) = \frac{f_{\overline{X}}(x,y)}{f_Y(y)} \quad (15.2.5)$$

Умовною щільністю розподілу випадкової величини Y за умови $X= x$ називається

$$f_X(y|x) = \frac{f_{\overline{X}}(x,y)}{f_X(x)} \quad (15.2.6)$$

$$F_X(x|Y = y) = \frac{\int_{-\infty}^{x} f_{\overline{X}}(x,y)dx}{f_Y(y)} \quad (15.2.7)$$

$$F_Y(y|X=x)=\frac{\int_{-\infty}^{y} f_{\overline{X}}(x,y)dy}{f_X(x)} \tag{15.2.8}$$

(15.2.7) – умовна функція розподілу *X*, коли $Y=y$;
(15.2.8) – умовна функція розподілу *Y*, коли $X=x$.

Приклад 3. Нехай двовимірний випадковий вектор $\overline{X}=(X,Y)$ має нормальний розподіл з вектором середніх значень (m_1, m_2) і матрицею коваріацій

$$\Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix},\ \sigma_1,\sigma_2>0,-1\le\rho\le 1$$

Потрібно знайти умовну щільність розподілу *X* за умови *Y=y*.

Розв'язання. Сумісна щільність двовимірного нормального закону має вигляд:

$$f_{\overline{X}}(x,y)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right\}} \tag{15.2.9}$$

Одновимірна (маргінальна) щільність нормального закону компоненти *Y* задається формулою:

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-m_2)^2}{2\sigma_2^2}} \tag{15.2.10}$$

Знайдемо умовну щільність *X* за умови *Y=y:*

$$f_X(x|y)=\frac{f_{\overline{X}}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right)+\frac{(y-m_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}-\frac{(1-\rho^2)(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{\rho^2(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\left[x-m_1-\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-m_2)\right]^2\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\left[x-\left(m_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-m_2)\right)\right]^2\right\}$$

Остаточно отримаємо:

$$f_X(x|y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\left[x-\left(m_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-m_2)\right)\right]^2\right\} \tag{15.2.11}$$

Таким чином, умовний розподіл *X* за умови *Y=y* також є нормальним розподілом із середнім значенням $m_{x|y}$

$$m_{x|y}=m_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-m_2) \tag{15.2.12}$$

і середнім квадратичним відхиленням $\sigma_{x|y}$

$$\sigma_{x|y} = \sigma_1\sqrt{1-\rho^2} \tag{15.2.13}$$

Аналогічно

$$f_Y(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\left[y-(m_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-m_1))\right]^2} \tag{15.2.14}$$

$$m_{y|x} = m_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-m_1) \tag{15.2.15}$$

$$\sigma_{y|x} = \sigma_2\sqrt{1-\rho^2} \tag{15.2.16}$$

(15.2.14) – умовний нормальний розподіл із середнім (15.2.15) і середнім квадратичним відхиленням (15.2.16).

Для того, щоб надати наглядну інтерпретацію отриманого результату, розглянемо приклад.

Приклад 4. Нехай (X, Y) – зріст і вага жителя країни Нормалія, m = (172 см, 74 кг) – центр розсіювання, $\Sigma = \begin{pmatrix} 45 & 28 \\ 28 & 40 \end{pmatrix}$ – матриця коваріацій. Нехай вага випадкової людини дорівнює y. Тоді її зріст буде мати нормальний розподіл із середнім значенням (в см)

$$m_{X|Y} = 172 + \frac{0.66\sqrt{45}}{\sqrt{40}}(y-74) \approx 120 + 0.70y$$

і середнім квадратичним відхиленням

$$\sigma_{X|Y} = \sqrt{45}\sqrt{1-0.66^2} \approx 5.0.$$

Таким чином,

$$f_X(x|y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 5} e^{-\frac{1}{2\cdot 25}\left[x-\left(172+0.66\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{40}}(y-74)\right)\right]^2}$$

$$f_X(x|y) = \frac{1}{\sqrt{50\pi}} e^{\frac{-(x-120-0,7y)^2}{50}}$$

$$m_{X|Y} = 120 + 0,7y, \quad \sigma_{X|Y} = 5,0$$

Так, вазі 70 кг відповідає середнє значення зросту 169 см, вазі 75 кг – 173 см і так далі. Отже, залежність зросту від ваги в середньому – лінійна, середньоквадратичне відхилення зросту є сталим, тобто не залежить від y.

$$f_Y(y|x) = \frac{1}{\sqrt{46\pi}} e^{-\frac{(y+33-0.62x)^2}{46}}, \quad m_{y|x} = 0,62x - 33, \quad \sigma_{y|x} = 4,8$$

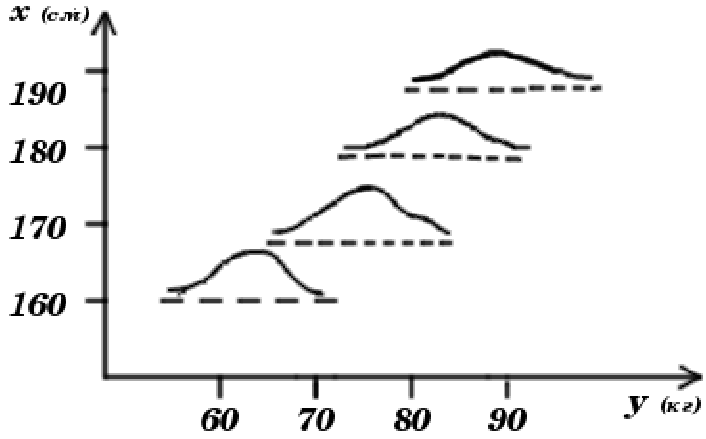


Рис.15.2.1 – Умовна щільність зросту як функція ваги

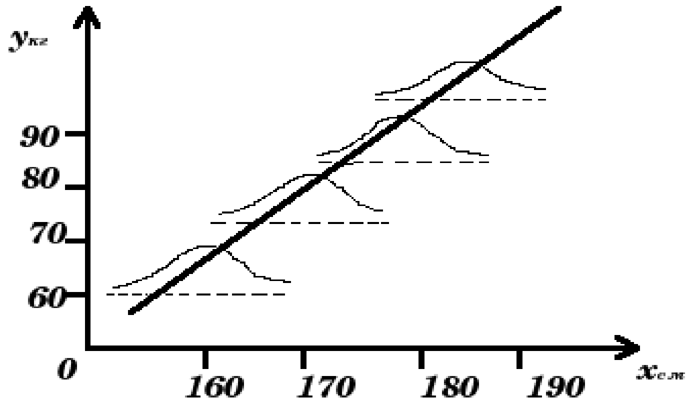


Рис.15.2.2 – Умовна щільність ваги як функція зросту

Приклад 5. Нехай випадкові величини *X* і *Y* представляють координати точки падіння частинки, яка випадковим чином кинута в коло радіуса R з центром в т.$O(0;0)$.

$$f_{\bar{X}}(x,y) = \begin{cases} 0, & x^2+y^2 > R^2 \\ \frac{1}{\pi R^2}, & x^2+y^2 \le R^2 \end{cases} -$$

щільність рівномірного закону в області D: $x^2+y^2 \le R^2$. Знайти умовну щільність $f_X(x|y)$.

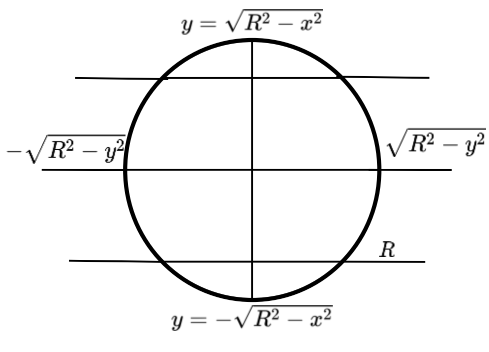


Рис. 15.2.3. Область D.

Розв'язання.

$$f_X(x|y) = \frac{f_{\overline{X}}(x,y)}{f_Y(y)}$$

Знайдемо одновимірну щільність $f_Y(y)$:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\overline{X}}(x,y)dx = \frac{1}{\pi R^2}\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} dx =$$

$$= \frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{\pi R^2}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \notin [-R;R] \\ \dfrac{2\sqrt{R^2-y^2}}{\pi R^2}, & y \in [-R;R] \end{cases}$$

Перевіримо умову нормування:

$$\int_{-R}^{R} f_Y(y)dy = \frac{2}{\pi R^2}\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-y^2}dy = \left| \begin{matrix} y = Rsint & \sqrt{R^2-y^2} = Rcost \\ dy = Rcostdt & -\dfrac{\pi}{2} \le t \le \dfrac{\pi}{2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{2R^2}{\pi R^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos^2tdt = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+cos2t)dt = \frac{2}{\pi}(t + \frac{sin2t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = 1$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \notin [-R;R] \\ \frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{\pi R^2}, & y \in [-R;R] \end{cases}$$ – одновимірна щільність по *y*.

$$f_X(x \mid y) = \begin{cases} 0, & |x| > \sqrt{R^2-y^2} \\ \frac{1}{2\sqrt{R^2-y^2}} & |x| \leqslant \sqrt{R^2-y^2} \end{cases}$$ – умовна щільність $f_X(x \mid y)$

Таким чином, випадкова величина *X* за умови *Y*=*y* рівномірно розподілена на відрізку $[-\sqrt{R^2-y^2}; \sqrt{R^2-y^2}]$.

15.3 Критерій незалежності випадкових величин

Випадкові величини *X* і *Y* є незалежними тоді і тільки тоді, коли умовний розподіл (функція розподілу або щільність розподілу) випадкової величини *X* за умови *Y*=*y* співпадає з безумовним розподілом (функцією розподілу або щільністю розподілу) випадкової величини *X*, тобто

$$f_X(x|y) = f_X(x) \tag{15.3.1}$$

або

$$F_X(x|y) = F_X(x) \tag{15.3.2}$$

Для дискретних випадкових величин умова незалежності:

$$\pi_{ij} = P\left(X = x_i \middle| Y = y_j\right) = P_{X_i} = P(X = x_i) \qquad (15.3.3)$$

Зауваження. В прикладі 1 (X і Y - кількість успіхів в першому і другому випробуваннях за схемою Бернуллі) X і Y незалежні, так як

$$\pi_{ij} = P_{x_i} \forall i = \overline{1,2}$$

$$\pi_{11} = q \quad P_{X_1} = q$$

$$\pi_{21} = p \quad P_{X_2} = p$$

$$\pi_{12} = q \quad P_{Y_1} = q$$

$$\pi_{22} = p \quad P_{Y_2} = p$$

В прикладі 2 X і Y залежні ($\pi_{11} = 0,\ P_{X_1} = \frac{1}{6}$). В прикладі 3 X і Y залежні.

15.4 Розв'язання задач

Задача 1. Координати випадкової точки на площині (X, Y) розподілені за нормальним законом із центром розсіювання $(m_1, m_2) = (0; 1)$ і середніми квадратичними відхиленнями $\sigma_X = 1, \sigma_Y = 2$. Обчислити ймовірність потрапляння випадкової точки в прямокутник з вершинами $(-1; 1), (2; 1), (2; 3)$ і $(-1; 3)$.

Розв'язання.

1) Знайдемо $f_{\overline{X}}(x, y) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^2 \sigma_X \sigma_Y} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_X^2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_Y^2}\right]}$

$$f_{\overline{X}}(x, y) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^2 1 \cdot 2} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{1} + \frac{(y-1)^2}{4}\right]},\ (x, y) \in R^2$$

$$f_{\overline{X}}(x, y) = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{1}{2}\left[x^2 + \frac{(y-1)^2}{4}\right]}, (x, y) \in R^2$$

2)

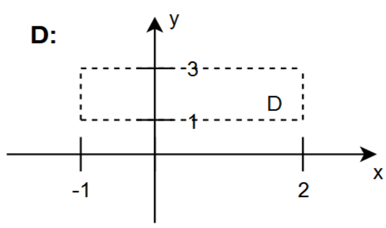


Рис. 15.4.1

$$P\big((X, Y) \in D\big) = \iint_D \left(f_{\overline{X}}(x, y) dxdy\right) = \frac{1}{4\pi} \iint_D \left(e^{-\frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{(y-1)^2}{4}\right)} dxdy\right) =$$

$= \frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{2} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx \int_{1}^{3} e^{-\frac{(y-1)^2}{8}}dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 1}\int_{-1}^{2} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 2}\int_{1}^{3} e^{-\frac{1}{2}\frac{(y-1)^2}{2^2}}dy =$

$= \left(\Phi\left(\frac{2}{1}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{1}\right)\right)\cdot\left(\Phi\left(\frac{3-1}{2}\right) - \Phi\left(\frac{1-1}{2}\right)\right) = \left(\Phi(2) - \left(1 - \Phi(1)\right)\right)\cdot$

$\cdot\left(\Phi(1) - \Phi(0)\right)$, де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$.

Знайдемо значення функції Гауса за таблицею значень функції нормального стандартного розподілу:

$$\Phi(0) = 0{,}5;\ \Phi(1) = 0{,}84;\ \Phi(2) = 0{,}98.$$

$$P\big((X,Y) \in D\big) = (0{,}98 - 1 + 0{,}84)(0{,}84 - 0{,}5) = 0{,}85 \cdot 0{,}34 = 0{,}289.$$

Нагадаємо, що $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{a}^{b} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$.

Задача 2. Координати випадкової точки (X,Y) розподілені за круговим нормальним законом: $\rho = 0,\ \sigma_X = \sigma_Y = 1,\ m_X = m_Y = 0$. Обчислити

1) $P(Y > x)$;
2) $P(|Y| > x)$;
3) $P(Y < 3x)$;
4) $P(|X| < 1)$.

Розв'язання. Сумісна щільність кругового нормального закону має вигляд

$$f_{\overline{X}}(x,y) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}.$$

1) $P(Y > X) = P\big((X,Y) \in D_1\big)$, де

$$D_1: \begin{cases} x \epsilon (-\infty; +\infty) \\ y \in (x; +\infty) \end{cases}$$

$$P(Y > X) = \iint_{D_1} f_{\overline{X}}(x,y)dxdy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{x}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dxdy =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx \int_{x}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy = \left| \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy = 1 - \Phi(x) \end{array} \right| =$$

$= 1 - \Phi(x)$, де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$.

2)

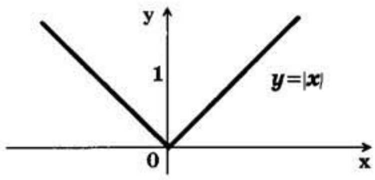


Рис. 15.4.2

$$P(|Y|>X)=P\big((X,Y)\in D_2\big)=\iint\limits_{D_2} f_{\overline{X}}(x,y)dxdy=\left|D_2\colon \begin{matrix}-\infty<x<+\infty\\ -x<y<x\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-x}^{x}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dxdy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-x}^{x}e^{-\frac{y^2}{2}}dy=$$

$=\Phi(x)-\Phi(-x)=\Phi(x)-\big(1-\Phi(x)\big)=2\Phi(x)-1$, де $\Phi(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$

3) Самостійно.

4) $P(|X|<1)=\int_{-1}^{1}f_X(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx=\Phi(1)-\Phi(-1)=$

$=2\Phi(1)-1=2\cdot 0{,}84-1=0{,}68.$

Задача 3. З урни, що містить 6 білих і 4 чорних кульки, навмання дістають 2 кульки без повернення. Випадкові величини:
X –кількість білих кульок у вибірці,
Y – кількість чорних кульок у вибірці.
Описати закон розподілу випадкового вектора (X, Y) і обчислити ρ_{XY}.
Розв'язання.

$P(X=0;Y=0\,)=0$

$P(X=0;Y=1\,)=0$

$P(X=0;Y=2\,)=\frac{C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{\frac{4!}{2!2!}}{\frac{10!}{2!8!}}=\frac{3\cdot 4}{9\cdot 10}=\frac{2}{15}$

$P(X=1;Y=0\,)=0$

$P(X=1;Y=1\,)=\frac{C_6^1\cdot C_4^1}{C_{10}^2}=\frac{6\cdot 4}{\frac{10!}{2!8!}}=\frac{6\cdot 4}{9\cdot 10}=\frac{8}{15}$

$P(X=1;Y=2\,)=0$

$P(X=2;Y=0\,)=\frac{C_6^2}{C_{10}^2}=\frac{\frac{6!}{2!4!}}{\frac{10!}{2!8!}}=\frac{5\cdot 6}{9\cdot 10}=\frac{1}{3}$

$P(X=2;Y=1\,)=0$

$P(X=2;Y=2\,)=0$

Сумісний закон розподілу випадкового вектора (X,Y):

X	Y			
	0	1	2	P_Y
0	0	0	2/15	2/15
1	0	8/15	0	8/15
2	1/3	0	0	1/3
P_X	1/3	8/15	2/15	1

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DXDY}}$$

$$Cov(X,\,Y) = M(XY) - MXMY$$

$$MX = 0 \cdot \frac{2}{15} + 1 \cdot \frac{8}{15} + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{18}{15} = \frac{6}{5}$$

$$MY = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{8}{15} + 2 \cdot \frac{2}{15} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

XY	0	1	2	4	
$P(XY)$	$\frac{1}{3} + \frac{2}{15} = \frac{7}{15}$	$\frac{8}{15}$	0	0	1

$$M(XY) = 0 \cdot \frac{7}{15} + 1 \cdot \frac{8}{15} + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = \frac{8}{15}$$

$$Cov(X,\,Y) = \frac{8}{15} - \frac{6}{15} \cdot \frac{4}{5} = \frac{40-7}{75} = -\frac{32}{75}$$

$$DX = M\left[X^2\right] - (MX)^2$$

$$M\left[X^2\right] = 0 \cdot \frac{2}{15} + 1 \cdot \frac{8}{15} + 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{15} + \frac{4}{3} = \frac{8+20}{15} = \frac{28}{15}$$

$$DX = \frac{28}{15} - \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{140-108}{75} = \frac{32}{75}$$

Аналогічно

$$M\left[Y^2\right] = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{8}{15} + 4 \cdot \frac{2}{15} = \frac{16}{15}$$

$$DY = \frac{16}{15} - \frac{16}{25} = \frac{16(5-3)}{75} = \frac{32}{75}$$

$$\rho(X,\,Y) = -\frac{\frac{62}{75}}{\frac{32}{75}} = -1$$

Випадкові величини X і Y залежні і при цьому Y є лінійною функцією від X.

Контрольні запитання

1. Що називається умовним розподілом випадкової величини X за умови $Y = y$?
2. Як задати умовний розподіл дискретної випадкової величини X за умови $Y = y$? Чому дорівнює умовна ймовірність π_{ij}?
3. Умовна функція та умовна щільність розподілу ймовірностей.
4. Умовна щільність розподілу ймовірностей випадкового вектора $\bar{X} = (X, Y)$, розподіленого за нормальним законом.
5. Критерій незалежності випадкових величин.

РОЗДІЛ 16

Числові характеристики умовних розподілів

Розглянемо двовимірну випадкову величину (X, Y). Можемо визначити розподіл X за умови $Y = y$. Оскільки умовний розподіл має всі властивості безумовного розподілу, то для нього можна визначити математичне сподівання, дисперсію та інші числові характеристики, які природньо називати умовними.

16.1 Умовне математичне сподівання

Нехай (X, Y) – дискретна випадкова величина.

Означення. Для дискретної двовимірної випадкової (X, Y) значенням $M\big(X|Y = y_j\big)$ умовного математичного сподівання дискретної випадкової величини X за умови $Y = y_j$ називається число

$$\mathrm{M}(X|y_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, \pi_{ij}, \tag{16.1.1}$$

де $$\pi_{ij} = \frac{P(X=x_i|Y=y_j)}{P(Y=y_j)} = \frac{P_{ij}}{P_{y_j}}, \; i = \overline{1, n}, \;\; j = \overline{1, m}.$$

Умовне математичне сподівання – середнє значення випадкової величини X за умови Y=y_j.

Аналогічно, умовне математичне сподівання Y за умови $X = x_i$

$$M(Y|x_i) = \sum_{j=1}^{m} y_j\, \pi_{ij}^{*} \tag{16.1.2}$$

Означення. Умовним математичним сподіванням $M(X|Y)$ дискретної випадкової величини X відносно дискретної випадкової величини Y називають функцію

$$M(X|Y) = g(Y) \tag{16.1.3}$$

від випадкової величини Y, де область визначення функції $g(y)$ співпадає з множиною значень $y_1, y_2, \dots, y_m$ випадкової величини Y і кожному значенню y_j аргумента y поставлено у відповідність число

$$g(y_j) = M(X|y_j)$$

Зауваження. Умовне математичне сподівання випадкової величини $M(X|Y)$ є функцією від випадкової величини Y і також є випадковою величиною.

Приклад 1. Нехай X і Y числа успіхів в першому і другому випробуваннях за схемою Бернуллі з ймовірністю успіху p. Знайдемо $M(X|Y)$.

$X \backslash Y$	0	1	P_X
0	q^2	pq	q
1	pq	p^2	p
P_Y	q	p	1

Табл. 16.1.1 Сумісний розподіл (X, Y)

$X \backslash Y$	0	1	P_X
0	q	q	q
1	p	p	p
P_Y	q	p	1

Табл. 16.1.2 Умовний розподіл $X|Y$

$M(X|y_1 = 0) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p,\ M(X|y_2 = 0) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p \Rightarrow$
$M(X|Y) = p.$

Приклад 2. X – число очок, які випали на верхній грані ігрової кості, Y – число очок на нижній грані.

$X \backslash Y$	1	2	3	4	5	6	P_X
1	0	0	0	0	0	1	$1/6$
2	0	0	0	0	1	0	$1/6$
3	0	0	0	1	0	0	$1/6$
4	0	0	1	0	0	0	$1/6$
5	0	1	0	0	0	0	$1/6$
6	1	0	0	0	0	0	$1/6$
P_Y	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	1

Табл. 16.1.3 Сумісний розподіл (X, Y)

$M(X|Y = 1) = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 6 \cdot 1 = 6;$

$M(X|Y = 2) = 5;$ $M(X|Y = 3) = 4;$ $M(X|Y = 4) = 3;$

$M(X|Y = 5) = 2;$ $M(X|Y = 6) = 1;$ $M(X|Y) = 7 - Y.$

Означення. Для неперервної випадкової двовимірної величини (X, Y) значенням $M(X|y)$ умовного математичного сподівання X за умови $Y=y$ називається число

$$M(X|y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x|y)dx, \qquad (16.1.4)$$

де
$$f_X(x|y) = \frac{f_{\bar{X}}(x,y)}{f_Y(y)} \qquad (16.1.5)$$

Означення. Для неперервної випадкової двовимірної величини (X, Y) умовним математичним сподіванням $M(X|Y)$ випадкової величини X відносно Y називають функцію

$$g(Y) = M(X|Y)$$

від випадкової величини Y, яка приймає значення $g(y) = M(X|y)$ при $Y = y$.

Функція $g(y)$ характеризує залежність поведінки «в середньому» випадкової величини X від значень випадкової величини Y.

Означення. Функцію $g(y)$ називають функцією регресії або просто регресією випадкової величини X на випадкову величину Y, а її графік – лінією регресії випадкової величини X на Y.

Аналогічно, $M(Y|X) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y|x)dy$ – умовне математичне сподівання Y за умови $X = x$.

$h(x) = M(Y|X)$ – регресія Y на X.

Лінія регресії зображує залежність «в середньому» величини Y від значення випадкової величини X.

Теорема. Умовне математичне сподівання $M(X|Y)$має наступні властивості:

1. $M(C|Y) = C$.
2. $M(aX + b|Y) = aM(X|Y) + b$.
3. $M(X_1 + X_2|Y) = M(X_1|Y) + M(X_2|Y)$.
4. Нехай випадкові величини X_1і X_2 є незалежними за умови $Y=y$. Тоді

$M(X_1X_2|Y) = M(X_1|Y)M(X_2|Y)$.

5. $M\big(M(X|Y)\big) = MX$.
6. Нехай $u(X)$ і $v(Y)$ – функції від випадкових величин X і Y. Тоді

$M(u(X)v(Y)|Y) = v(Y)M(u(X)|Y)$.

7. Якщо X і Y – незалежні випадкові величини, то $M(X|Y) = MX$.

Приклад 3. Нехай (X, Y) – двовимірна випадкова величина, яка має нормальний розподіл. В лекції 14 ми показали, що умовне математичне сподівання для нормального закону має вигляд:

$$M(X|Y=y)=m_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-m_2) \qquad (16.1.6)$$

$$g(y)=M(X|Y)=m_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-m_2) \qquad (16.1.7)$$

Лінія регресії є прямою лінією.

$$M(Y|X=x)=m_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_2}(x-m_1) \qquad (16.1.8)$$

$$h(x)=M(Y|X)=m_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_2}(x-m_1) \qquad (16.1.9)$$

У задачі про зріст та вагу жителя Нормалії:
$g(y)=120+0{,}7y$ – регресія зросту нормальця на його вагу;
$h(x)=0{,}62x-33$ – регресія ваги нормальця на його зріст.

16.2 Умовні дисперсії

Означення. Умовною дисперсією $D(X|Y)$ випадкової величини *X* відносно величини *Y* називають випадкову величину

$$D(X|Y)=M([X-M(X|Y)]^2|Y) \qquad (16.2.1)$$

Для двовимірної дискретної випадкової величини (*X*, *Y*) значення

$$D(X|y_j)=M\left(\left[X-M(X|y_j)\right]^2|y_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-M\left(X\middle|y_j\right)\right)^2\pi_{ij} \qquad (16.2.2)$$

А для двовимірної неперервної величини (*X*, *Y*)

$$D(X|y)=M([X-M(X|y)]^2|y)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-M(X|y)\right)^2 f_X(x|y)dx \qquad (16.2.3)$$

Умовна дисперсія випадкової величини *X*, також як і умовне математичне сподівання *X*, залежить від того, яке значення прийняла випадкова величина *Y*. Тому умовна дисперсія *D*(*X*|*Y*) є функцією випадкової величини *Y*. Її область визначення співпадає з множиною значень *Y*.

Умовне середньоквадратичне відхилення *X* на *Y*

$$\sigma_{x|y}=\sqrt{D(X|Y)} \qquad (16.2.4)$$

Теорема. Умовна дисперсія має властивості:
1. $D(C|Y)=0$.
2. $D(aX+b|Y)=a^2D(X|Y)$.
3. $D(X|Y)=M(X^2|Y)-\left(M(X|Y)\right)^2$.
4. Нехай випадкові величини X_1 і X_2 незалежні за умови, що випадкова величина *Y* прийняла будь-яке конкретне значення. Тоді

$D(X_1+X_2|Y)=D(X_1|Y)+D(X_2|Y)$.

5. Нехай $u(X)$ і $v(Y)$ – функції від випадкових величин *X* і *Y*. Тоді

$D(u(X)v(Y)|Y) = v^2(Y)D(u(X)|Y)$.

6. Якщо X і Y – незалежні випадкові величини, то $DX = D(X|Y)$.

7. $DX = M\big(D(X|Y)\big) + M[(M(X|Y) - MX)^2]$.

Приклад 4. Нехай (X, Y) – двовимірна випадкова величина, яка розподілена за нормальним законом. В лекції 14 ми показали, що

$$D(X|Y) = \sigma_1^2(1-\rho^2), \quad D(Y|X) = \sigma_2^2(1-\rho^2) \tag{16.2.5}$$

Таким чином, значення умовних дисперсій $D(X|Y)$ і $D(Y|X)$ для нормального закону не залежать від x і y, і є сталими.

При $\rho = \pm 1$ умовна дисперсія $D(X|Y) = D(Y|X) = 0$.

При фіксованій дисперсії $DX = \sigma_1^2$ умовна дисперсія $D(X|Y)$ тим менша, чим більше абсолютне значення коефіцієнта кореляції ρ.

При $\rho = \pm 1$ $D(X|Y) = 0$. Відомо, що коли $\rho = \pm 1$, тоді $X = aY + b \implies$

$D(X|Y) = D(aY + b|Y) = a^2 D(Y|Y) = a^2 Y^2 D(1|Y)$=0.

Приклад 5. (X, Y) розподілена за нормальним законом з параметрами (m_1, m_2), σ_1^2, σ_2^2, ρ .Знайти DX.

Розв'язання. $DX = M\big(D(X|Y)\big) + M[(M(X|Y) - MX)^2]$

$$D(X|Y) = \sigma_1^2(1-\rho^2)$$

$$M(X|Y) = m_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y - m_2)$$

$$DX = M\big(\sigma_1^2(1-\rho^2)\big) + M\left[\left(m_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-m_2) - m_1\right)^2\right] = \sigma_1^2(1-\rho^2) +$$

$$+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}M(y-m_2)^2 = \sigma_1^2(1-\rho^2) + \rho^2\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\sigma_2^2 = \sigma_1^2 - \sigma_1^2\rho^2 + \rho^2\sigma_1^2 = \sigma_1^2,$$

що і потрібно було довести.

Приклад 6. Розглянемо двовимірний випадковий вектор (X, Y), де X – випадкова величина, рівномірно розподілена на [-1;1], $Y = X^2$. Знайдемо умовні дисперсії $D(X|Y)$, $D(Y|X)$ та з їх допомогою обчислимо DX, DY.

Розв'язання. $X \sim R$[-1;1] $\Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} 0, x \,\overline{\in}\, [-1;1] \\ \frac{1}{2}, x \in [-1;1] \end{cases}$

$$M(Y|X) = M(X^2|X) = \left| \begin{matrix} M(u(X)v(Y)|X) = u(X)M(v(Y)|X) \\ M(C|X) = C \end{matrix} \right| = X^2 M(1|X) = X^2$$

$$D(Y|X) = D(X^2|X) = \left| \begin{matrix} D(u(X)v(Y)|X) = u^2(X)D(v(Y)|X) \\ D(C|X) = 0 \end{matrix} \right| = X^2 D(1|X) = 0$$

$DY = M\big(D(Y|X)\big) + M(M(Y|X) - MY)^2$ (властивість 7)

$MY = MX^2 = \int_{-1}^{1} x^2 f_X(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{x^3}{3} \mid \begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix} = \frac{1}{3}$

$DY = M(0) + M\left(X^2 - \frac{1}{3}\right)^2 = 0 + \int_{-1}^{1}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 f_X(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx =$

$= \int_0^1\left(x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}\right)dx = \left(\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{9} + \frac{x}{9}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{45}$

Таким чином, $M(Y|X) = X^2$, $D(Y|X) = 0$, $DY = \frac{4}{45}$.

Обчислимо $D(X|Y)$ і DX.

Y прийняла конкретне значення $y \in [0;1]$ (так як $x \in [-1;1]$, то випадкова величина X може прийняти тільки одне з двох значень $x_1 = -\sqrt{y}$ і $x_2 = \sqrt{y}$. Оскільки X розподілена рівномірно на [-1;1], то обидва значення x_1 і x_2 рівноймовірні.

$M(X|y) = -\sqrt{y}\cdot\frac{1}{2} + \sqrt{y}\cdot\frac{1}{2} = 0$

$D(X|y) = \left(-\sqrt{y}\right)^2\cdot\frac{1}{2} + \left(\sqrt{y}\right)^2\cdot\frac{1}{2} = y$

$MX = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x\mathrm{d}x = 0$

$DX = M\big(D(X|Y)\big) + M[(M(X|Y) - MX)^2]$

$DX = M(Y) + M[(0-0)^2] = \frac{1}{3}$

Перевірка: $DX = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

16.3 Кореляційні відношення

Означення. ***Кореляційними відношеннями*** випадкових величин X і Y називають числа $\eta_{y|x}$ и $\eta_{x|y}$:

$$\eta_{x|y} = \sqrt{1 - \frac{1}{DX}M(D(X|Y))} \qquad (16.3.1)$$

$$\eta_{y|x} = \sqrt{1 - \frac{1}{DY}M(D(Y|X))} \qquad (16.3.2)$$

$$\eta_{x|y} = \sqrt{1 - \frac{1}{DX}\sum_{j=1}^{m} D(X|y_i)P_{Y_j}} \qquad (16.3.3)$$

$$\eta_{x|y} = \sqrt{1 - \frac{1}{DX}\int_{-\infty}^{\infty} D(X|y)f_Y(y)dy} \qquad (16.3.4)$$

(16.3.3) і (16.3.4) – кореляційні відношення $\eta_{x|y}$ для дискретних і неперервних випадкових величин.

В загальному випадку $\eta_{x|y} \neq \eta_{y|x}$. $\eta_{x|y}$ і $\eta_{y|x}$ використовують для характеристики нелінійного зв’язку випадкових величин X і Y.

Властивості $\eta_{x|y}$:

1. $\eta_{x|y} = \sqrt{\frac{1}{DX} M\ (M(X|Y) - MX)^2}$.
2. $0 \leq \eta_{x|y} \leq 1$.
3. $\eta_{x|y} = 1 \iff X$ – функція від Y (не обов’язково лінійна).
4. $\eta_{x|y} = 0 \Leftrightarrow M(X|Y) = C = MX$, тобто лінія регресії X на Y є горизонтальна пряма.
5. $|\rho| \leq \eta_{x|y}$.
6. $|\rho| = \eta_{x|y}|\rho| \Leftrightarrow$ лінія регрессії X на Y є пряма.

Приклад 7. Обчислити кореляційні відношення $\eta_{x|y}$ і $\eta_{y|x}$ для випадкового вектора (X, Y), розподіленого за нормальним законом.

Розв’язання.

$$\eta_{x|y} = \sqrt{1 - \frac{1}{DX} M(D(X|Y))}\ ;$$

$$DX = \sigma_1^2; \qquad D(X|Y) = (1 - \rho^2)\ \sigma_1^2;$$

$$\eta_{x|y} = \sqrt{1 - \frac{1}{\sigma_1^2} M((\ 1 - \rho^2\ )\ \sigma_1^2\ )} = \sqrt{1 - \frac{1}{\sigma_1^2}\ (\ 1 - \rho^2\ )\ \sigma_1^2} = \sqrt{1 -\ 1 + \rho^2} = |\rho|.$$

(лінія регресії – пряма лінія)

$$\eta_{y|x} = \sqrt{1 - \frac{1}{\sigma_2^2} M((\ 1 - \rho^2\ )\ \sigma_2^2\ )} = |\rho|.$$

Для нормального закону на площині $\eta_{x|y} = \eta_{y|x} = |\rho|$.

Приклад 8. Знайдемо кореляційні відношення $\eta_{x|y}$ і $\eta_{y|x}$ для випадкового вектора (X, Y) з прикладу 6, де $X \sim R$[-1;1], а $Y = X^2$.

Розв’язання.

$$\eta_{x|y} = \sqrt{1 - \frac{1}{DX} M(D(X|Y))} = \left| DX = \frac{1}{3}, D(X|Y) = Y, MY = \frac{1}{3} \right| = \sqrt{1 - 3 \cdot \frac{1}{3}} = 0$$

$$\eta_{y|x} = \sqrt{1 - \frac{1}{DY} M(D(Y|X))} = \left| DY = \frac{4}{45}, D(Y|X) = 0\ \right| = \sqrt{1 - \frac{1}{\frac{4}{45}} M(0)} = 1$$

$\eta_{x|y} = 0$, що відповідає властивості 4. $M(X|Y) = 0 = MX$.

$\eta_{y|x} = 1$, що відповідає властивості 3, так як $Y = X^2$.

16.4 Розв’язання задач

Задача 1. Розподіл (*X*, *Y*) задано таблицею:

X	*Y*		
	0,2	0,5	0,8
0,04	0,15	0,3	0,35
0,08	0,05	0,12	0,03

1). Знайдемо маргінальні закони розподілу компонент *X* і *Y*.

Сумісний закон розподілу (X,Y):

X	*Y*			P_X
	0,2	0,5	0,8	
0,04	0,15	0,3	0,35	0,8
0,08	0,05	0,12	0,03	0,2
P_Y	0,2	0,42	0,38	1

Маргінальний закон розподілу *X*:

X	0,04	0,08
P_X	0,8	0,2

Маргінальний закон розподілу *Y*:

Y	0,2	0,5	0,8
P_Y	0,2	0,42	0,38

2). Знайдемо умовні розподіли (*X*|*Y*) і (*Y*|*X*).

$\pi_{ij} = \frac{P_{ij}}{P_{Y_j}}, i = 1,2,\ j = 1,2,3.$

$\pi_{11} = \frac{0,15}{0,2} = 0,75;$ $\pi_{12} = \frac{0,3}{0,42} = 0,714;$ $\pi_{13} = \frac{0,35}{0,38} = 0,921;$

$\pi_{11} = \frac{0,05}{0,2} = 0,25;$ $\pi_{22} = \frac{0,12}{0,42} = 0,286;$ $\pi_{23} = \frac{0,03}{0,38} = 0,079.$

Умовний закон розподілу *X* за умови *Y*=*y*:

X	*Y*			P_X
	0,2	0,5	0,8	
0,04	0,15	0,3	0,35	0,8
0,08	0,05	0,12	0,03	0,2
P_Y	0,2	0,42	0,38	1

Аналогічно $\pi_{11}^{*} = P(Y = 0{,}2|X = 0{,}04) = \frac{0{,}15}{0{,}8} = 0{,}1875$

$\pi_{21}^{*} = P(Y = 0{,}5|X = 0{,}04) = \frac{0{,}3}{0{,}8} = 0{,}375$

$\pi_{31}^{*} = P(Y = 0{,}8|X = 0{,}04) = \frac{0{,}35}{0{,}8} = 0{,}4575$

$\pi_{12}^{*} = P(Y = 0{,}2|X = 0{,}08) = \frac{0{,}05}{0{,}2} = 0{,}25$

$\pi_{22}^{*} = P(Y = 0{,}5|X = 0{,}08) = \frac{0{,}12}{0{,}2} = 0{,}6$

$\pi_{12}^{*} = P(Y = 0{,}8|X = 0{,}08) = \frac{0{,}03}{0{,}2} = 0{,}15$

Умовний закон розподілу *Y* за умови *X*=*x*:

X / *Y*	0,04	0,08	P_Y
0.2	0,1875	0,25	0,2
0.5	0,3750	0,6	0,42
0.8	0,4375	0,15	0,38
P_X	0,8	0,2	1

3). Знайдемо $M(X|Y)$ і $M(Y|X)$.

$M(X|y_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i \pi_{ij}, \; M(Y|x_i) = \sum_{j=1}^{m} y_j \, \pi_{ij}^{*}$

$M(X|0{,}2) = 0{,}04 \cdot 0{,}75 + 0{,}08 \cdot 0{,}25 = 0{,}05$

$M(X|0{,}5) = 0{,}04 \cdot 0{,}714 + 0{,}08 \cdot 0{,}286 = 0{,}05144$

$M(X|0{,}8) = 0{,}04 \cdot 0{,}921 + 0{,}08 \cdot 0{,}079 = 0{,}04316$

$M(Y|0{,}4) = 0{,}2 \cdot 0{,}1875 + 0{,}5 \cdot 0{,}375 + 0{,}8 \cdot 0{,}4375 = 0{,}575$

$M(Y|0{,}08) = 0{,}2 \cdot 0{,}25 + 0{,}5 \cdot 0{,}6 + 0{,}8 \cdot 0{,}15 = 0{,}47$

Таким чином, умовне математичне сподівання $M(X|Y)$ є функцією $g(y)$ від випадкової величини *Y*, причому область визначення функції $g(y)$ складається із трьох точок: 0,2; 0,5; 0,8.

$g(0{,}2) = 0{,}05;$ $\qquad g(0{,}5) = 0{,}05144;$ $\qquad g(0{,}8) = 0{,}04316.$

Аналогічно, умовне математичне сподівання $M(Y|X)$ є функцією $h(x)$ від випадкової величини *X*, причому область визначення функції $h(x)$ складається з двох точок: 0,04 и 0,08.

$h(0{,}04) = 0{,}575;$ $\qquad h(0{,}08) = 0{,}47.$

4). Знайдемо $D(X|Y)$, $D(Y|X)$.

$D(X|y) = M(X^2|y) - \left(M(X|y)\right)^2 = \sum_i x_i^2 \pi_{ij} - \left(M(X|y)\right)^2$

$D(X|0,2) = (0,04)^2 \cdot 0,75 + 0,08^2 \cdot 0,25 - (0,05)^2 = 0,0003$

$D(X|0,5) = (0,04)^2 \cdot 0,714 + 0,08^2 \cdot 0,286 - (0,05144)^2 = 0,00033$

$D(X|0,8) = (0,04)^2 \cdot 0,921 + 0,08^2 \cdot 0,079 - (0,04316)^2 = 0,00012$

$D(Y|x) = M(Y^2|x) - \left(M(Y|x)\right)^2 = \sum_i y_i^2 \pi^*{}_{ij} - \left(M(Y|x)\right)^2$

$D(Y|0,04) = (0,2)^2 \cdot 0,1875 + (0,5)^2 \cdot 0,375 + (0,8)^2 \cdot 0,4375 - (0,575)^2 = 0,051$

$D(Y|0,08) = (0,2)^2 \cdot 0,25 + (0,5)^2 \cdot 0,6 + (0,8)^2 \cdot 0,15 - (0,47)^2 = 0,035$

Умовна дисперсія $D(X|Y)$ є функцією від випадкової величини Y з областю визначення, яка складається з точок: 0,2; 0,5; 0,8.

$D(X|0,2) = 0,0003$; $D(X|0,5) = 0,00033$, $D(X|0,8) = 0,00012$.

Умовна дисперсія $D(Y|X)$ є функцією від випадкової величини X з областю визначення: 0,04; 0,08.

$D(Y|0,04) = 0,051$; $D(Y|0,08) = 0,035$.

5). Знайдемо кореляційні відношення $\eta_{y|x}, \eta_{x|y}$.

$\eta_{x|y} = \sqrt{1 - \frac{M(D(X|Y))}{DX}}$ $\eta_{y|x} = \sqrt{1 - \frac{M(D(Y|X))}{DY}}$

$MX = \sum_{i=1}^n x_i \, p_i = = 0,04 \cdot 0,8 + 0,08 \cdot 0,2 = 0,048$

$DX = M(X^2) - (MX)^2 = 0,04^2 \cdot 0,08 + 0,08^2 \cdot 0,2 - 0.048^2 = 0,000256$

$MY = \sum_{j=1}^m y_j \, p_j = 0,2 \cdot 0,2 + 0,5 \cdot 0,42 + 0,8 \cdot 0,38 = 0,554$

$DY = M(Y^2) - (MY)^2 = 0,2^2 \cdot 0,2 + 0,5^2 \cdot 0,42 + 0,8^2 \cdot 0,38 - 0,554^2 = 0,04928$

$M\left(D(X|Y)\right) = \sum_{j=1}^m D(X|y_j) \, P_{Y_j} = 0,0003 \cdot 0,2 + 0,00033 \cdot 0,42 + 0,00012 \cdot 0,38 = 0,000243$

$M\left(D(Y|X)\right) = \sum_{i=1}^n D(Y|x_i) \, P_{X_i} = 0,051 \cdot 0,8 + 0,035 \cdot 0,2 = 0,0475$

$\eta_{x|y} = \sqrt{1 - \frac{M(D(X|Y))}{DX}} = \sqrt{1 - \frac{0,000243}{0,000256}} \approx 0,225$

$\eta_{y|x} = \sqrt{1 - \frac{M(D(Y|X)}{DY}} = \sqrt{1 - \frac{0,0475}{0,04928}} \approx 0,191$

Задача 2. Випадковий вектор $\bar{X} = (X, Y)$ розподілений рівномірно в трикутнику з вершинами в точках (0;0); (0;2); (1;0).

1). Знайдемо сумісну щільність розподілу:

$$\mathrm{f}_{\bar{X}}(x,y) = \begin{cases} 0, (x,y) \notin D \\ \frac{1}{S_D}, (x,y) \in D \end{cases} \qquad \mathrm{f}_{\bar{X}}(x,y) = \begin{cases} 0, (x,y) \notin D \\ 1, (x,y) \in D \end{cases}$$

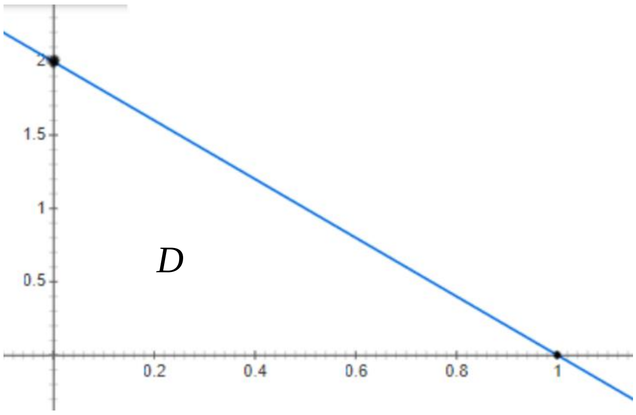


Рис. 16.4.1

2). Знайдемо маргінальні щільності

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\bar{X}}(x,y)dy = |D: 0 \le y < 2(1-x)| = \int_0^{2(x-1)} dy = y|_0^{2(1-x)} = 2-2x$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, x \notin [0,1] \\ 2-2x, x \in [0,1] \end{cases}$$

Перевіримо умову нормування:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 2\int_0^1 (1-x)\mathrm{d}x = 2\left(x - \frac{x^2}{2}\right)|_0^1 = 2\left(1-\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\bar{X}}(x,y)dx = \left|D: 0 \le x < 1-\frac{y}{2}\right| = \int_0^{1-y/2} dx = x|_0^{1-y/2} = 1-y/2$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, y \notin [0,2] \\ 1-y/2, y \in [0,2] \end{cases}$$

Перевіримо умову нормування:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)dy = \int_0^1 (1-y/2)dy = 2\left(y - \frac{y^2}{4}\right)|_0^2 = 2-1 = 1$$

3). Знайдемо умовні щільності:

$$f_X(X|Y) = \frac{f_{\bar{X}}(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} 0, y \notin [0,2\,] \text{ або } x \notin [0,;1-y/2] \\ \frac{2}{2-y}, y \in [0,2] \text{ і } x \in [0;\ 1-y/2] \end{cases}$$

$$f_X(Y|X) = \frac{f_{\bar{X}}(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} 0, x \in [0;\ 1\,] \text{ або } y \notin [0; 2-2x] \\ \frac{1}{2(1-x)}, x \in [0;\ 1] \text{ і } y \in [0; 2-2x] \end{cases}$$

4). Знайдемо умовні математичні сподівання та функції регресії.

$$M(X|Y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x|y)dx = \int_0^{1-\frac{y}{2}} x\left(\frac{2}{2-y}\right)dx = \left(\frac{2}{2-y}\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{1-\frac{y}{2}} = \frac{1}{2-y}\left(1-\frac{1}{2-y}\right) =$$

$$= \frac{1}{2-y}\frac{(2-y)^2}{4} = \frac{2-y}{4}$$

$M(X|Y) = g(y) = \frac{1}{4}(2-y)$ – регресія X на Y.

$$M(Y|X) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y|x)dy = \int_0^{2-2x} y\frac{1}{2(1-x)}dy = \frac{1}{2(1-x)}\int_0^{2-2x} ydy =$$

$$= \frac{1}{2(1-x)}\frac{y^2}{2}\Big|_0^{2-2x} = = \frac{1}{4(1-x)}4(1-x)^2 = 1-x$$

$M(Y|X) = h(x) = 1-x$ – регресія Y на X.

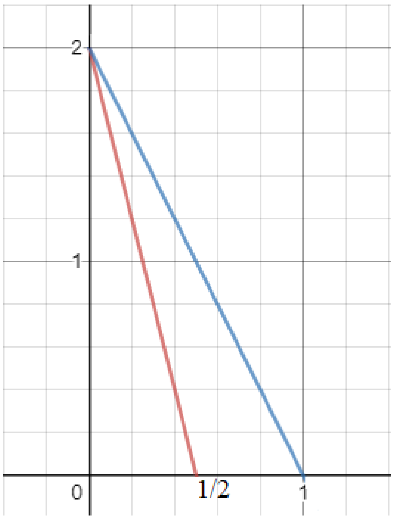


Рис.16.4.2 Регресія X на Y

$x=g(y)$

$x=\frac{2-y}{4}$ або y=2-4x

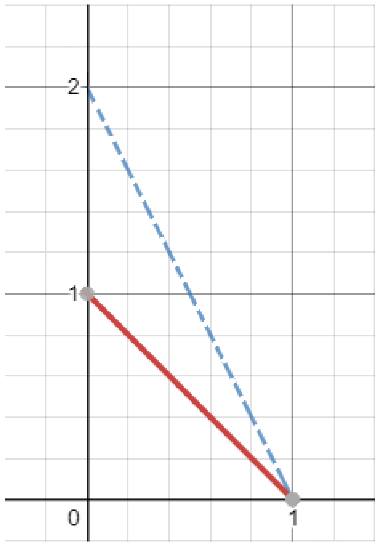


Рис. 16.4.3 Регресія Y на X

$y = h(x)$

$y = 1\text{-}x$

5). Знайдемо умовні дисперсії:

$$D(X|y) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(x - M(X|y)\right)^2 f_X(x|y)dx = \int_0^{1-\frac{y}{2}}\left(x - \frac{2-y}{4}\right)^2 \cdot \frac{2}{2-y}dx =$$

$$= \int_0^{1-\frac{y}{2}}\left(x^2 - \frac{1}{2}x(2-y) + \frac{(2-y)^2}{16}x\right)\Big|_0^{1-\frac{y}{2}}\frac{2}{2-y} = \frac{2}{2-y}\left(\frac{\frac{2-y}{2}}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{2-y}\right)^2 +$$

$$+\frac{1}{8}(2-y)\frac{2-y}{2} = \frac{(2-y)^2}{12} - \frac{1}{8}(2-y)^2 + \frac{1}{16}(2-y)^2 = \frac{1}{48}(2-y)^2(4-6+3) =$$

$$= \frac{1}{48}(2-y)^2, y \in [0;2];$$

$$D(X|y) = \frac{(2-y)^2}{48}, y \in [0;2].$$

$$D(Y|x)=\int_{-\infty}^{\infty}\big(y-M(Y|x)\big)^2 f_Y(y|x)dy=\int_0^{2-2x}\big(y-(1-x)\big)^2\ \frac{1}{2(1-x)}dx=$$

$$=\frac{1}{2(1-x)}\left(\frac{y^3}{3}\right)-2(1-x)\frac{y^2}{2}+(1-x)^2y|_0^{2(1-x)}=\frac{1}{2(1-x)}(\frac{8(1-x)^3}{3}-$$

$$-(1-x)4(1-x)^2)+2(1-x)^3)=(1-x)^2(\frac{4}{3}-2+1)=\frac{1}{3}(1-x)^2,x\in[0;1];$$

$$D(Y|x)=\frac{1}{3}(1-x)^2,x\in[0;1]$$

6). Знайдемо кореляційні відношення

$$\eta_{x|y}=\sqrt{1-\frac{M(D(X|Y))}{DX}},\qquad\qquad \eta_{y|x}=\sqrt{1-\frac{M(D(Y|X)}{DY}}.$$

$$M\big(D(X|y)\big)=\int_{-\infty}^{\infty}D(X|y)\,f_Y(y)dy=\frac{1}{48}\int_0^2(2-y)^2\big(1-{}^{y}\!/_{2}\big)dy=$$

$$=\frac{1}{96}\int_0^2(2-y)^3dy=\begin{vmatrix}t=2-y\\dt=-dy\end{vmatrix}=-\frac{1}{96}\int_0^2t^3dt=\frac{1}{96}\frac{t^4}{4}|_0^2=\frac{1}{96}\frac{16}{4}=\frac{1}{24};$$

$$M\big(D(Y|x)\big)\int_{-\infty}^{\infty}D(Y|X)\,f_X(x)dx=\frac{1}{3}\int_0^1(1-x)^2(2-2x)dx=$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^1(1-x)^3dx=\frac{2}{3}\frac{(1-x)^4}{-4}|_0^1=\frac{1}{6}.$$

$$DX=M(X^2)-(MX)^2,\quad DY=M(Y^2)-(MY)^2$$

$$MX=\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)dx=\int_0^1 2x(1-x)dx=2\int_0^1(x-x^2)dx=2\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)|_0^1=$$

$$=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3};$$

$$M(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f_X(x)dx=2\int_0^1x^2(1-x)dx=2\int_0^1(x^2-x^3)dx=$$

$$=2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{6};$$

$$DX=\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{18}.$$

$$MY=\int_{-\infty}^{\infty}yf_Y(y)dy=\frac{1}{2}\int_0^2y(2-y)dy=\frac{1}{2}\int_0^2(2y-y^2)dy=\frac{1}{2}\left(y^2-\frac{y^3}{3}\right)|_0^2=$$

$$=\frac{1}{2}(4-\frac{8}{3})=\frac{2}{3};$$

$$M(Y^2)=\int_{-\infty}^{\infty}y^2f_Y(y)dy=\frac{1}{2}\int_0^2y^2(2-y)dy=\frac{1}{2}(\frac{2}{3}y^3-\frac{y^4}{4})|_0^2=\frac{1}{2}\left(\frac{16}{3}-\frac{16}{4}\right)=\frac{2}{3}$$

$$DY=\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{9}.$$

$$\eta_{X|Y}=\sqrt{1-\frac{{}^{1}\!/_{24}}{{}^{1}\!/_{18}}}=\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2};\qquad\qquad \eta_{Y|X}=\sqrt{1-\frac{{}^{1}\!/_{6}}{{}^{2}\!/_{9}}}=\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}.$$

Так як лінія регресії X на Y – пряма, то $|\rho|=\eta_{X|Y}$.

Так як з ростом X випадкова величина Y в середньому спадає, то $\rho = -\frac{1}{2}$.

Контрольні запитання

1. Умовне математичне сподівання дискретного двовимірного вектора $\bar{X} = (X, Y)$.
2. Умовне математичне сподівання неперервного двовимірного вектора $\bar{X} = (X, Y)$.
3. Функція регресії і лінія регресії. Що характеризує функція регресії?
4. Властивості умовного математичного сподівання.
5. Функція регресії двовимірного випадкового вектора $\bar{X} = (X, Y)$, розподіленого за нормальним законом.
6. Умовна дисперсія дискретного та неперервного випадкового вектора $\bar{X} = (X, Y)$. Що вона характеризує?
7. Властивості умовної дисперсії.
8. Умовна дисперсія двовимірного випадкового вектора $\bar{X} = (X, Y)$, розподіленого за нормальним законом.
9. Кореляційні відношення $\eta_{X|Y}$, $\eta_{Y|X}$. Формули для дискретних та неперервних випадкових векторів. Що вони характеризують?
10. Властивості кореляційних відношень.
11. Кореляційні відношення і коефіцієнт кореляції двовимірного випадкового вектора, розподіленого за нормальним законом.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Двовимірний випадковий вектор $\bar{X}$=(X, Y) заданий таблицею

	Y		
X	0,10	0,15	0,20
0,3	0,25	0,15	0,32
0,6	0,10	0,05	0,13

Знайти:
1) Умовні розподіли $X|Y$ і $Y|X$;
2) Залежні чи незалежні компоненти X і Y?
3) $M(X|y)$, $M(Y|x)$, $g(y), h(x)$;
4) $D(X|y)$, $D(Y|x)$;
5) $\eta_{X|Y}, \eta_{Y|X}$.

2. Неперервний двовимірний випадковий вектор $\bar{X} = (X, Y\ )$ має щільність розподілу

$$f_{\bar{X}}(x, y) = \begin{cases} cy, (x, y) \in D \\ 0, (x, y) \notin D \end{cases},$$

де D – область, обмежена лініями: $y = x^2, y = 1$.

Знайти:
1) Сталу C;
2) $f_X(X|Y)$, $f_Y(Y|X)$;
3) Залежні чи незалежні компоненти X і Y?
4) $M(X|y)$, $M(Y|x)$, $g(y), h(x)$;
5) $D(X|y)$, $D(Y|x)$;
6) $\eta_{X|Y}, \eta_{Y|X}, \rho$.

РОЗДІЛ 17

Функції від випадкових величин

На практиці часто зустрічаються випадки, коли розглядається числова функція Y як функція однієї X бо декількох $X_1, \dots, X_n$ числових величин, тобто $Y = Y(X)$ або $Y = Y(X_1, \dots, X_n)$. Якщо X або $X_1, \dots, X_n$ є випадковими величинами, то і Y буде випадковою величиною.

17.1 Функції від одновимірної випадкової величини

Розглянемо випадкову величину $X = X\,(\omega)$, яка задана на ймовірнісному просторі Ω.

Нехай $Y = Y(X)$ – функція від випадкової величини X.

Означення. Випадкову величину Y, яка кожній елементарній події ω ставить у відповідність число

$$Y(\omega) = Y\big(X(\omega)\big) \tag{17.1.1}$$

називають ***скалярною функцією*** $Y(X)$ від скалярної випадкової величини X.

Зауваження. Функція $Y = Y(X)$ від дискретної випадкової величини X також є дискретною випадковою величиною.

Якщо X задається рядом розподілу

(17.1.2)

X	X_1	X_2	X_n
P	p_1	p_2	p_n

то ряд розподілу випадкової величини Y має вигляд

(17.1.3)

Y	$Y(X_1)$	$Y(X_2)$	…	$Y(X_n)$
P	p_1	p_2		p_n

Якщо у верхньому рядку (17.1.3) з’являються однакові значення $Y(X_i)$ відповідні стовпчики потрібно об’єднати в один, приписавши йому сумарну ймовірність.

Приклад 1. Розглянемо гру «Спортлото 6 із 49». Поставивши на деякі номери, ми отримаємо випадкову величину X – число вгаданих номерів.

$$P(X=k)=C_6^k\frac{C_{43}^{6-k}}{C_{49}^6},k=0,1,\dots,6$$

Ряд розподілу випадкової величини *X* має вигляд:

X	0	1	2	3	4	5	6
P	0,4360	0,4130	0,1324	0,0176	0,00097	$1{,}8\cdot10^{-5}$	$7\cdot10^{-8}$

Розглянемо ідеалізований варіант гри, при якому, не вгадавши жодного чи вгадавши один або два номери, ми програємо (з урахуванням платні за білет) 0,3 грн; вгадавши три номери, отримаємо виграш 2,7 грн, вгадавши чотири номери – 54,7 грн; п’ять номерів – 699,7 грн.; шість номерів – 9999,7грн.

Виграш *Y* залежить від числа вгаданих номерів, тобто $Y=Y(X)$.

Y(0)= *Y*(1)= *Y*(2)= - 0,3;

Y(3)= 2,7; *Y*(4)=54,7; *Y*(5)=699,7; *Y*(6)=9999,7.

Ряд розподілу *Y* отримаємо з ряду розподілу *X*, замінивши у верхньому рядку числа $X_k=k$ на Y_k:

Y	-0,3	-0,3	-0,3	2,7	54,7	699,7	9999,7
P	0,4360	0,4130	0,1324	0,0176	0,00097	$1{,}8\cdot10^{-5}$	$7\cdot10^{-8}$

Отримаємо:

Y	-0,3	2,7	54,7	699,7	9999,7
P	0,9814	0,0176	0,00097	$1{,}8\cdot10^{-5}$	$7\cdot10^{-8}$

Реально в грі «Спортлото» Y (виграш) залежить від кількості гравців, які роблять ставку на ту чи іншу комбінацію. Не можна змінити ймовірність вгадування певної кількості номерів, але збільшити виграш можна, зробивши ставку на «непопулярні» комбінації, які хоч і з'являються з однаковою частотою, але приносять більший виграш.

Функція $Y=Y(X)$ від неперервної випадкової величини X може бути як неперервною, так і дискретною (якщо множина значень $Y(X)$ є скінченною або зліченою).

Розглянемо $Y=Y(X)$ неперервну функцію від неперервної випадкової величини *X*.

$$F_Y(y)=P(Y<y)=P\big(Y\big(X(\omega)\big)<y\big)=\sum_k P(X(\omega_k)\epsilon\Delta_k) \qquad (17.1.4)$$

Знаючи щільність розподілу $f_X(x)$ випадкової величини *X*, маємо:

$$P(X(\omega_k)\epsilon\,\Delta_k)=\int_{\Delta_k}f_X(x)dx \qquad (17.1.5)$$

$$F_Y(y)=\sum_k\int_{\Delta_k}f_X(x)dx=\int_{\Delta}f_X(x)dx,\ \Delta=\bigcup_k\Delta k \qquad (17.1.6)$$

Остаточно можна записати

$$F_Y(y) = \int_{Y(x)<y} f_X(x)dx \qquad (17.1.7)$$

Функція розподілу Y виражається через щільність ймовірності X.

Приклад 2. Випадкова величина X має стандартний нормальний розподіл. Знайдемо розподіл випадкової величини $Y = X^2$.

$$F_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x^2<y} e^{-\frac{x^2}{2}}dx \qquad (17.1.8)$$

Так як $y \geq 0$, то $F_Y(y) = 0$ при $y < 0$.

$F_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} e^{\frac{-x^2}{2}}dx$ або $F_Y(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\,, y \geq 0.$

Нехай $z = x^2$, $dz = 2xdx$, $dx = \frac{dz}{2\sqrt{z}}$.

$$F_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^y \frac{1}{\sqrt{z}} e^{-\frac{z}{2}}dz \qquad (17.1.9)$$

Отже, $F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(y)dy$, де

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, y \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}},\ y > 0 \end{cases} \qquad (17.1.10)$$

Враховуючи, що $\sqrt{\pi} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, де $\Gamma(x)$ – Гамма-функція Ейлера, то щільність $f_Y(y)$ (17.1.10) співпадає із щільністю гамма-розподілу з параметром $\lambda = \frac{1}{2}$ і $\gamma = \frac{1}{2}$.

Щільність (17.1.10) називають також щільністю χ^2 розподілу з одним ступенем вільності. Таким чином χ^2 - розподіл з одним ступенем вільності є розподілом квадрату випадкової величини, яка має стандартний нормальний розподіл.

В загальному випадку, в математичній статистиці використовують χ^2 - розподіл з n ступенями вільності, який є розподілом суми квадратів n незалежних випадкових величин, кожна з яких розподілена за нормальним стандартним законом, тобто якщо $X_i \sim N(0,1)$, то $\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 = Y$, $Y \sim \chi^2(n)$.

17.2 Функція і щільність ймовірності від монотонної функції

Нехай $Y = Y(X)$ – монотонна (спадна чи зростаюча). Тоді $X = Y^{-1}(y)$ або $X = \psi(y)$ – також монотонна функція.

$$F_Y(y) = P(Y(x) < y) = P\big(X < \psi(y)\big) = F_X\big(\psi(y)\big), \qquad (17.2.1)$$

якщо $Y = Y(X)$ – зростаюча функція.

$$F_Y(y) = P(Y(x) < y) = P\big(X \geq \psi(y)\big) = 1 - F_X\big(\psi(y)\big), \qquad (17.2.2)$$

якщо $Y = Y(X)$ – спадна функція.

Таким чином,
для зростаючої функції $Y(X)$: $F_Y(y) = F_X\big(\psi(y)\big)$, (17.2.3)
для спадної функції $Y(X)$: $F_Y(y) = 1 - F_X\big(\psi(y)\big)$,
де $x = \psi(y)$ – функція, обернена до $y = y(x)$.

Приклад 1. Нехай випадкова величина *X* має неперервну та зростаючу функцію розподілу $F_X(x)$. Розглянемо випадкову величину $Y = F(X)$.

$$y = F(x) \ \in [0,1]$$

$$x = F^{-1}(y) = \psi(y)$$

$$F(x) = F\big(\psi(y)\big) = y$$

У відповідності з (17.2.3), $F_Y(y) = F_X\big(\psi(y)\big) = \ F_X\big(F_X^{-1}(y)\big) = y$. Тобто

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ y, & 0 \leq y \leq 1 \\ 1, & y > 1 \end{cases}$$

Таким чином, якщо *Y* – випадкова величина, розподілена за рівномірним законом в [0,1] (*Y*~*R*[0,1]), то $X = F^{-1}(Y)$ – випадкова величина, яка має функцію розподілу $F_X(x)$.

Отриманий результат широко застосовують при моделюванні випадкових величин із заданою функцією розподілу $F_X(x)$. Якщо потрібно змоделювати таку випадкову величину, достатньо мати датчик випадкових чисел *Y*, розподілених рівномірно на [0,1] і кожне число перетворити за формулою $X = F^{-1}(Y)$.

Приклад 2. Потрібно змоделювати реалізацію випадкової величини X з експоненціальною функцією розподілу $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, x \geq 0$ при відомому параметрі $\lambda(\lambda > 0)$. Враховуючи, що

$$F_X^{-1}(y) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - y)$$

реалізацію *X* можна отримати за формулою $x = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - y)$, де y – число з рівномірним в інтервалі [0,1] законом розподілу.

17.3 Щільність розподілу *Y*=*Y*(*X*) (у випадку монотонної функції)

З урахуванням (17.2.3), у випадку зростаючої функції $Y = Y(X)$:

$$\mathrm{f}_Y(y) = F_Y'(y) = \big(F_X\,(x)\big)'|_{x=\psi(y)} \cdot \psi'(y) = f_X(\psi(y))\psi'(y) \qquad (17.3.1)$$

у випадку спадної функції $Y = Y(X)$:

$$f_Y(y) = F_Y{}'(y) = -\left(F_X\,(x)\right)'|_{x=\psi(y)} \cdot \psi'(y) = -f_X(\psi(y))\psi'(y) \tag{17.3.2}$$

Таким чином, випадку монотонної функції $Y = Y(X)$:

$$f_Y(y) = f_X\big(\psi(y)\big)|\psi'(y)| \tag{17.3.3}$$

Формула (17.3.3) виражає щільність розподілу випадкової величини $Y = Y(X)$ через щільність розподілу $f_X(x)$.

Приклад 1. Нехай $Y = aX + b \quad (a \neq 0)$, $X{\sim}N(m_x, \sigma_x)$. Знайти щільність $f_Y(y)$.

$$Y^{-1}(y) = \frac{1}{a}(y - b)$$

$$(Y^{-1}(y))' = \frac{1}{a}$$

Згідно (17.3.3), $$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{y-b}{a} - m_x\right)^2}{\sigma_x{}^2}\right)$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi a\sigma_x)^2}} exp\left(-\frac{(y-(am_x+b))^2}{2(a\sigma_x)^2}\right) \tag{17.3.4}$$

Тобто щільність ймовірності $Y = Y(X)$ – також щільність нормального закону з параметрами $m_y = am_x + b,\ \sigma_y = |a|\sigma_x$.

Зауваження. За допомогою лінійного перетворення $Y = \frac{X - m_x}{\sigma_x}$ з випадкової величини *X*, розподіленої за нормальним законом з параметрами $m_x,\ \sigma_x$, отримаємо випадкову величину $Y{\sim}N(0{,}1)$.

Та навпаки, за допомогою лінійного перетворення $X = \sigma_x Y + m_x$ з випадкової величини $Y{\sim}N(0{,}1)$, отримаємо випадкову величину $X{\sim}N(m_x, \sigma_x)$.

17.4. Функція та щільність розподілу ймовірностей для неперервної кусково-монотонної функції $Y = Y(X)$

Нехай $Y(X)$ є неперервною кусково-монотонною функцією, яка має n інтервалів монотонності (рис.17.4.1).

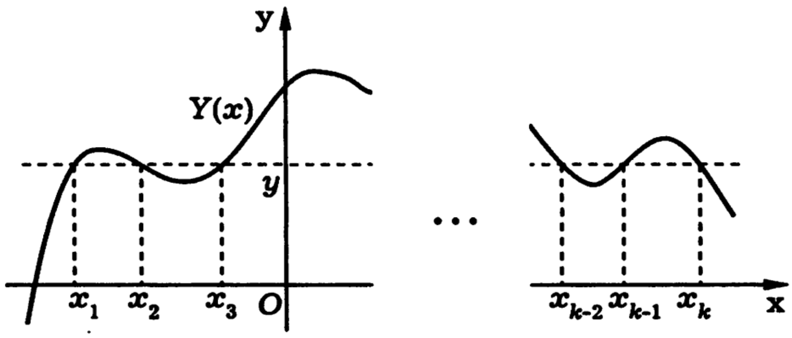


Рис.17.4.1

$\forall y$ всі розв'язки рівняння $Y(x) = y$ позначимо $x_1 = x_1(y), \dots, x_k = x_k(y)$ (їх не більше n).

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(X < x_1) + P(x_2 \le X < x_3) + \dots +$$

$$+P(x_{k-2} \le X < x_{k-1}) + \, +P(X > x_k) = F_X(x_1) + F_X(x_3) - F_X(x_2) + \dots +$$

$$+F_X(x_{k-1}) - F_X(x_{k-2}) + 1 - F_X(x_k) \qquad (17.4.1)$$

або

$$F_Y(y) = F_X\big(\Psi_1(y)\big) + F_X\big(\Psi_3(y)\big) - F_X\big(\Psi_2(y)\big) + \dots + F_X\big(\Psi_{k-1}(y)\big) -$$

$$-F_X\big(\Psi_{k-2}(y)\big) + 1 - F_X(\Psi_k(y)) \qquad (17.4.2)$$

Диференціюємо (17.4.2) по *y*, отримаємо щільність Y через щільність *X*:

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{k} f_X\big(\psi_i(y)\big)|\psi_i'(y)| \qquad (17.4.3)$$

Приклад 1. *X*~*N*(0,1), $Y = X^2$. Знайти $f_Y(y)$.

Так як $y \ge 0$, то $F_Y(y) = 0, y < 0$

$x = \pm\sqrt{y}$, тобто $x_1 = \psi_1(y) = -\sqrt{y}$, $x_2 = \psi_2(y) = \sqrt{y}$, $|\psi_i'(y)| = \frac{1}{2\sqrt{y}}$, *i*=1,2.

Згідно (17.4.3),

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-\sqrt{y}\,)2}{2}} \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sqrt{y}\,)2}{2}} \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, \ y \le 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} \, e^{-\frac{y}{2}}, \ \ y > 0 \end{cases}$$

17.5. Розв'язання задач

Задача 1. Дискретна випадкова величина *X* має ряд розподілу, заданий таблицею

X	-2	-1	0	1	2	$\sum$
P	0,2	0,1	0,1	0,2	0,4	1

Знайти ряд розподілу випадкової величини $Y = 2X^2 + 1$.

Розв'язання.

Y	9	3	1	3	9	$\sum$
P	0,2	0,1	0,1	0,2	0,4	1

Y	1	3	9	$\sum$
P	0,1	0,3	0,6	1

Задача 2. Випадкова величина $X \sim E$ (λ=1), $Y = (X-2)^2$. Знайти $F_Y(y)$.

Розв'язання.

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda\, e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}, \text{ тобто } f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Так як $Y = (x-2)^2 \geq 0$, то $F_Y(y) = 0, y < 0$.

$F_Y(y) = \int_{Y(x)<y} f_X(x)dx\,,\ y \geq 0$

Розглянемо $y = (x-2)^2$

$x = \psi_1(y) = 2 - \sqrt{y}$

$x = \psi_2(y) = 2 + \sqrt{y}$

Область, де $Y(x) < y$, лежить нижче прямої $y = 4$ між кривими $x = 2 - \sqrt{y}$, $x = 2 + \sqrt{y}$

$$F_Y(y) = \int_{2-\sqrt{y}}^{2+\sqrt{y}} e^{-x}\, dx = -e^{-x} \Big|_{2-\sqrt{y}}^{2+\sqrt{y}} = -\, e^{-(2+\sqrt{y})} + e^{-(2-\sqrt{y})},\ \ y \leq 4$$

$$F_Y(y) = \int_{0}^{2+\sqrt{y}} e^{-x}\, dx = -e^{-x} \Big|_{0}^{2+\sqrt{y}} = 1 - e^{-(2+\sqrt{y})},\ \ y > 4$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ e^{-2+\sqrt{y}} - e^{-2-\sqrt{y}}, & 0 < y \leq 4 \\ 1 - e^{-2-\sqrt{y}}, & y > 4 \end{cases}$$

$F_Y(-\infty) = 0, F_Y(+\infty) = 1$

$F_Y(-0) = 0, F_Y(+0) = e^{-2} - e^{-2} = 0$

$F_Y(4+0) = 1 - e^{-4}, F_Y(4-0) = e^{-2+2} - e^{-2-2} = 1 - e^{-4}$

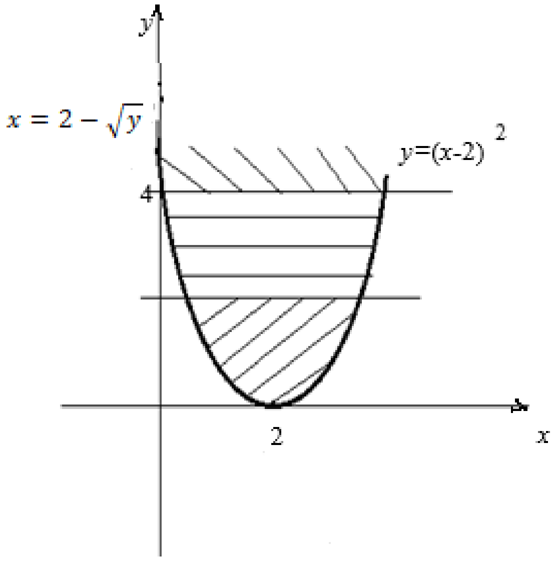


Рис.17.5.1

Задача 3.

а) Випадкова величина $X \sim R(0,\pi)$. $Y = cosx$. Знайти $f_Y(y)$.

Розв'язання. Функція $y = cosx, x \in (0,\pi)$ строго спадна (рис. 17.5.2) Обернена $x = arccos\, y, \quad y \in (-1,1)$.

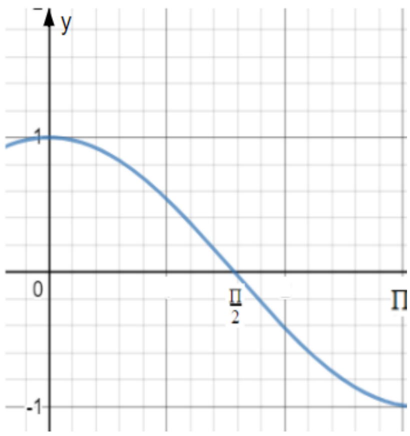


Рис. 17.5.2

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, x \notin (0,\pi) \\ \frac{1}{\pi}, x \in (0,\pi) \end{cases}$$

$f_Y(y) = f_X(\psi(y))|\psi'(y)|$ – щільність для строго монотонної функції *Y*.

$$\psi'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, y \in (-1;1)$$

Остаточно $f_Y(y) = \begin{cases} 0, y \; \overline{\in} \; (-1;1) \\ \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}, y \in (-1;1) \end{cases}$.

Перевіримо умову нормування:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\,dy = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{4}\arcsin(y)\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 1.$$

б) $X \sim R\,(0, 2\pi)$, $Y = \cos x$. Знайти $f_Y(y)$.

Розв'язання.

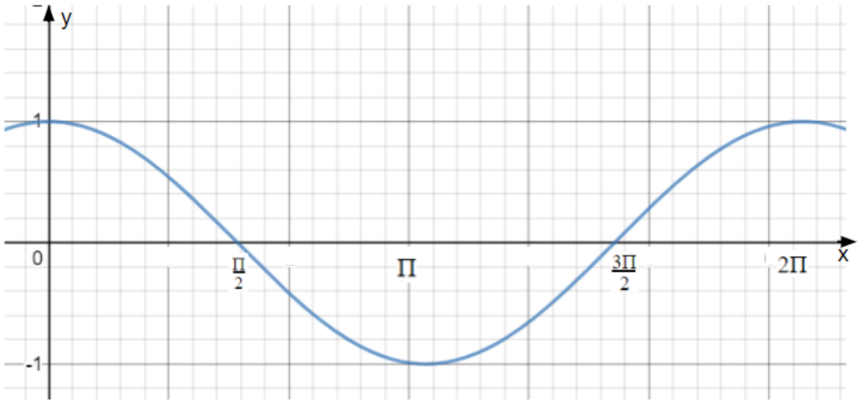


Рис.17.5.3

y на проміжку $(0,\pi)$ спадає, на проміжку $(\pi, 2\pi)$ зростає.

$$x = \underbrace{\psi_1(y)}_{x \in (0,\pi)} = \arccos y, \qquad x = \underbrace{\psi_2(y)}_{x \in (\pi,\ 2\pi)} = 2\pi - \arccos y$$

$$f_Y(y) = f_X(\psi_1(y))\,|\psi_1{}'(y)| + f_X(\psi_2(y))\,|\psi_2{}'(y)|$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, x \,\overline{\in}\, (0;\ 2\pi) \\ \dfrac{1}{2\pi}, x \in (0; 2\pi) \end{cases}$$

$$\psi_1{}'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, y \in (-1;1)$$

$$\psi_2{}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, y \in (-1;1)$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}, y \in (-1;1)$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, y \,\overline{\in}\, (-1;1) \\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}, y \in (-1;1) \end{cases}$$

17.6 Скалярні функції від випадкового векторного аргументу

Нехай $\bar{X} = (X_1, X_2)$ – двовимірний випадковий вектор, який задано на ймовірнісному просторі Ω. $Y = Y(X_1, X_2)$ – випадкова функція від випадкового вектора $\bar{X} = (X_1, X_2)$. Зрозуміло, що функція $Y(X_1, X_2)$ від двовимірної дискретної випадкової величини також є дискретною випадковою величиною, яка приймає значення $y(x_1,\ x_2)$ з ймовірністю $p_{ij}\ =\ p\ (X_1 =\ x_{1i};\ X_2 =\ x_{2j})$.

Приклад 1. Y – випадкова величина, що дорівнює сумарному числу успіхів в двох випробуваннях за схемою Бернуллі. X_i – число успіхів в i-му випробуванні, $i = 1{,}2$.

$Y(X_1, X_2) =\ X_1 +\ \ X_2$

X_1	0	1
P	q	p

X_2	0	1
P	q	p

$Y =\ X_1 +\ \ X_2$

Y	0	1	2	
P_Y	q^2	$2pq$	p^2	1

У випадку, коли (X_1, X_2) – неперервна випадкова величина з щільністю розподілу $f_{\bar{X}}(x_1, x_2)$, функцію розподілу випадкового вектора $Y = Y(X_1\ , X_2)$ логічно знайти за формулою

$$F_Y(y) =\ \iint_{Y(x_1\ ,\ x_2) < y} f_{\bar{X}}\ (x_1\ , x_2) dx_1 dx_2 \qquad (17.6.1)$$

Інтегрування проводиться в області, де $Y(x_1\ ,\ x_2)\ <\ y$

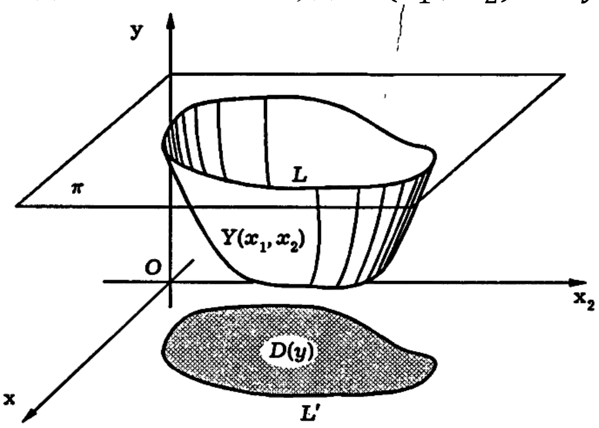


Рис. 17.6.1

Нехай $y\ =\ y(x_1,\ x_2)$ – поверхня (рис.17.6.1) (має вигляд чаші). Проведемо площину π , яка проходить через точку $(0, 0, y)$ перпендикулярно осі $0y$. Позначимо через L лінію перетину площини π і поверхні $y\ =\ y(x_1,\ x_2)$, L' – її проекція на площину $x_1 O x_2$. $D(y)$ – та частина площини, попадання в яку $(x_1,\ x_2)$ веде до реалізації події $(Y\ <\ y)$.

$$D(y) =\ \{(x_1,\ x_2) : Y(x_1,\ x_2) < y\ \} \qquad (17.6.2)$$

Події $(Y\ <\ y)$ і $\big((x_1,\ x_2) \in D\big)$ співпадають.

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P((x_1,\ x_2) \in D) =\ \iint_D\ f_{\bar{X}}\ (x_1\ , x_2) dx_1 dx_2 \qquad (17.6.3)$$

Приклад 2. Нехай $(X_1,\ X_2)$ – двовимірний випадковий вектор, який має стандартний нормальний розподіл, тобто

$$f_{\bar{X}}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)}.$$

Нехай $Y = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$. Знайти $F_Y(y)$.

Розв'язання.

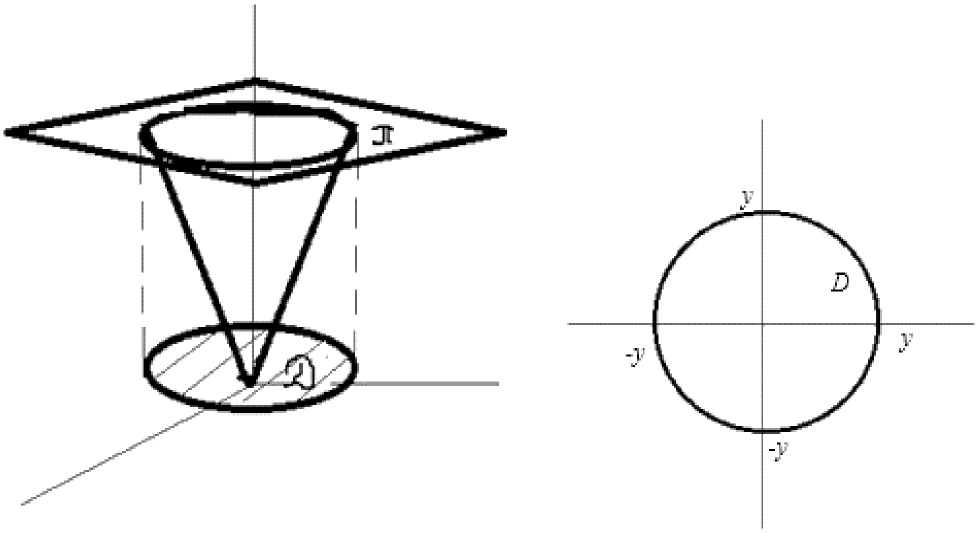


Рис.17.6.2

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ \iint\limits_{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} < y} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)} dx_1 dx_2, & y > 0 \end{cases}$$

Знайдемо

$$\iint\limits_{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} < y} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)} dx_1 dx_2 =$$

$= |\ x_1 = r\cos\varphi;\ \ x_2 = r\sin\varphi;\ \ r^2 = x_1^2 + x_2^2;\ \ dx_1 dx_2 = r dr d\varphi;$

$D\colon 0 \le r \le y;\ 0 \le \varphi \le 2\pi\ | = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int_0^y e^{-\frac{1}{2}r^2} r dr = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \cdot \left(-e^{-\frac{1}{2}r^2}\right)\Big|_0^y =$

$= 1 - e^{-\frac{1}{2}y^2}, \qquad y > 0$

$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ 1 - e^{-\frac{1}{2}y^2}, & y > 0 \end{cases}$ – відомий розподіл Релея (17.6.4)

Зауваження. Якщо $\bar{X} = (X_1, X_2) \sim N$ (стандартному закону), а $Y = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$, то випадкова величина Y має розподіл Релея.

17.7. Формула згортки

Важливу роль в теорії ймовірностей відіграє випадок, коли X_1 і X_2 незалежні випадкові величини, тобто $f_{\bar{X}}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)$, а $Y = X_1 + X_2$.

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y-x_1} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)\, dx_1 dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(x_1) dx_1 \underbrace{\int_{-\infty}^{y-x_1} f_{X_2}(x_2)\, dx_2}_{F_{X_2}(y-x_1)} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F_{X_2}(y - x_1) f_{X_1}(x_1) dx_1 \qquad (17.7.1)$$

Диференціюємо під знаком інтеграла та отримаємо:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_2}(y - x_1) f_{X_1}(x_1) dx_1 \qquad (17.7.2)$$

Говорять, що щільність розподілу $f_Y(y)$ випадкової величини Y є згорткою (композицією) щільностей розподілу $f_{X_1}(x_1)$, $f_{X_2}(x_2)$ доданків X_1 і X_2, а закон розподілу суми двох незалежних випадкових величин є згорткою законів розподілу доданків.

$$f_Y = f_{X_1} * f_{X_2} \qquad (17.7.3)$$

Згортка добре відома з теорії перетворень Фур'є.

Приклад 1. Нехай X_1 і X_2 – незалежні випадкові величини, які розподілені за нормальним законом із середніми m_1 і m_2 і середніми квадратичними відхиленнями σ_1 i σ_2. Знайдемо щільність розподілу $Y = X_1 + X_2$.

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{m_1, \sigma_1}(y - x)\ \varphi_{m_2, \sigma_2}(x) dx$, де

$$\varphi_{m_1,\sigma_1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1} e^{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}}, \qquad \varphi_{m_2,\sigma_2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2} e^{-\frac{(x-m_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{m_1,\sigma_1}(y - x)\ \varphi_{m_2,\sigma_2}(x) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1} \exp\left(-\frac{(y-x-m_1)^2}{2{\sigma_1}^2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2} \exp\left(-\frac{(x-m_2)^2}{2{\sigma_2}^2}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi\,\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{(y - m_1 - m_2)^2}{2({\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2)}\right) \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{{\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2}{{\sigma_1}^2\,{\sigma_2}^2}\left(x - \right.\right.$$

$$\left.\left.- \frac{{\sigma_1}^2\, m_2 - {\sigma_2}^2\, m_1 + {\sigma_2}^2 y}{{\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2}\right)^2\right) dx.$$

Введемо заміну: $z = \frac{\sqrt{{\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2}}{{\sigma_1}^2\,{\sigma_2}^2}\left(x - \frac{{\sigma_1}^2\, m_2 - {\sigma_2}^2\, m_1 + {\sigma_2}^2 y}{{\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2}\right)$.

Отримаємо:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\,({\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2)}} \exp\left(-\frac{(y - m_1 - m_2)^2}{2({\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2)}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz),$$

$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\,({\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2)}} \exp\left(-\frac{(y - m_1 - m_2)^2}{2({\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2)}\right)$ – композиція згортки.

Таким чином, $Y = X_1 + X_2$ також розподілена за нормальним законом з параметрами $m_1 + m_2, \sqrt{\sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2}$.

Контрольні запитання

1. Функція від одновимірної випадкової величини. Означення.
2. Ряд розподілу функції від одновимірної випадкової величини.
3. Функція розподілу ймовірностей від неперервної випадкової величини.
4. Щільність розподілу монотонної функції від неперервної випадкової величини.
5. Щільність розподілу кусково-монотонної функції від неперервної випадкової величини.
6. Щільність розподілу лінійної функції від неперервної випадкової величини.
7. Функція розподілу скалярної функції від випадкового вектора.
8. Що називають згорткою (композицією) щільностей розподілу випадкових величин?
9. Який розподіл має випадковий вектор, отриманий із нормально розподіленого випадкового вектора при лінійному перетворенні?

Задачі для самостійного розв'язання

1) Дискретна випадкова величина X задана таблицею

X	-0,5	0	0,5	1	1,5
P	0,1	0,4	0,1	0,3	0,1

Знайти ряд розподілу Y, якщо:
а) $Y = 10X - 1$; б) $Y = -X^2$; в) $Y = 2^X$.

2) Випадкова величина X розподілена рівномірно в інтервалі (0, 3). Знайти функцію розподілу $F_Y(y)$, якщо $Y = X^2 + 1$.

3) Випадкова величина X має експоненціальний розподіл з параметром λ. Знайти $F_Y(y)$, якщо:
а) $Y = e^{-X}$; б) $Y = X^3$; в) $Y = \frac{1}{X^2}$; г) $Y = \sqrt{X}$.

4) Двовимірна випадкова величина $\bar{X} = (X_1, X_2)$ розподілена рівномірно в прямокутнику з вершинами A_1 (0;0), A_2 (0;2), A_3 (3;2), A_4 (3;0). Знайти $F_Y(y)$, якщо $Y = X_1 + X_2$.

5) Незалежні випадкові величини X_1 і X_2 мають рівномірний розподіл на відрізках [0;1] і [0;2]. Скориставшись формулою згортки, знайти $f_Y(y)$, якщо $Y = X_1 + X_2$.

Таблиця 1. Значення функції $P(m;\lambda) = \frac{\lambda}{m!} e^{-\lambda}$

m	λ									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,90484	81873	74082	67032	60653	54881	49659	44933	40657	36788
1	09048	16375	22225	26813	30327	32929	34761	35946	36591	36788
2	00452	01637	03334	05363	07582	09879	12166	14379	16466	18394
3	00015	00109	00333	00715	01264	01976	02839	03834	04940	06131
4		00005	00025	00072	00158	00296	00497	00767	01111	01533
5			00002	00006	00016	00036	00070	00123	00200	00307
6					00001	00004	00008	00016	00030	00051
7							00001	00002	00004	00007
8										00001

m	λ									
	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0
0	0,22313	13534	08208	04979	03020	01832	01111	00674	00409	00248
1	33470	27067	20521	14936	10569	07326	04999	03369	02248	01487
2	25102	27067	25652	22404	18496	14653	11248	08422	06181	04462
3	12551	18045	21376	22404	21579	19537	16872	14037	11332	08924
4	04707	09022	13360	16803	18881	19537	18981	17547	15582	13385
5	01412	03609	06680	10082	13217	15629	17083	17547	17140	16062
6	00353	01203	02783	05041	07710	10420	12812	14622	15712	16062
7	00076	00344	00994	02160	03855	05954	08236	10444	12345	13768
8	00014	00086	00311	00810	01687	02977	04633	06528	08487	10326
9	00002	00019	00086	00270	00656	01323	02316	03627	05187	06884
10		00004	00022	00081	00230	00529	01042	01813	02853	04130
11		00001	00005	00022	00073	00192	00426	00824	01426	02253
12			00001	00006	00021	00064	00160	00343	00654	01126
13				00001	00006	00020	00055	00132	00277	00520
14					00001	00006	00018	00047	00109	00223
15						00002	00005	00016	00040	00089
16							00002	00005	00014	00033
17								00001	00004	00012
18									00001	00004
19										00001

Таблиця 2. Значення функції $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,39894	39892	39886	39876	39862	39844	39822	39797	39767	39733
0,1	39695	39654	39608	39559	39505	39448	39387	39322	39253	39181
0,2	39104	39024	38940	38853	38762	38667	38568	38466	38361	38251
0,3	38139	38023	37903	37780	37654	37524	37391	37255	37115	36973
0,4	36827	36678	36526	36371	36213	36053	35889	35723	35553	35381
0,5	35207	35029	34849	34667	34482	34294	34105	33912	33718	33521
0,6	33322	33121	32918	32713	32506	32297	32086	31874	31659	31443
0,7	31225	31006	30785	30563	30339	30114	29887	29659	29431	29200
0,8	28969	28737	28504	28269	28034	27798	27562	27324	27086	26848
0,9	26609	26369	26129	25888	25647	25406	25164	24923	24681	24439
1,0	24197	23955	23713	23471	23230	22988	22747	22506	22265	22025
1,1	21785	21546	21307	21069	20831	20594	20357	20121	19886	19652
1,2	19419	19186	18954	18724	18494	18265	18037	17810	17585	17360
1,3	17137	16915	16694	16474	16256	16038	15822	15608	15395	15183
1,4	14973	14764	14556	14350	14146	13943	13742	13542	13344	13147
1,5	12952	12758	12566	12376	12188	12001	11816	11632	11450	11270
1,6	11092	10915	10741	10567	10396	10226	10059	09893	09728	09566
1,7	09405	09246	09089	08933	08780	08628	08478	08329	08183	08038
1,8	07895	07754	07614	07477	07341	07206	07074	06943	06814	06687
1,9	06562	06438	06316	06195	06077	05959	05844	05730	05618	05508
2,0	05399	05292	05186	05082	04980	04879	04780	04682	04586	04491
2,1	04398	04307	04217	04128	04041	03955	03871	03788	03706	03626
2,2	03547	03470	03394	03319	03246	03174	03103	03034	02965	02898
2,3	02833	02768	02705	02643	02582	02522	02463	02406	02349	02294
2,4	02239	02186	02134	02083	02033	01984	01936	01888	01842	01797
2,5	01753	01709	01667	01625	01585	01545	01506	01468	01431	01394
2,6	01358	01323	01289	01256	01223	01191	01160	01130	01100	01071
2,7	01042	01014	00987	00961	00935	00909	00885	00861	00837	00814
2,8	00792	00770	00748	00727	00707	00687	00668	00649	00631	00613
2,9	00595	00578	00562	00545	00530	00514	00499	00485	00470	00457

x	Десятые доли x				
	0	2	4	6	8
3,0	0,00443	00238	00123	00061	00029
4,0	00013	00006	00002	00001	

Таблиця 3. Значення інтегралу Лапласа $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

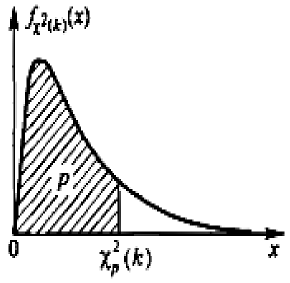
x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41308	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861

x	Десятые доли x				
	0	2	4	6	8
3,0	0,49865	49931	49966	49984	49993
4,0	49997	49999			

Таблиця 4. Квантілі u_p нормального стандартного розподілу N(0;1)

p	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999	0,9995
u_p	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

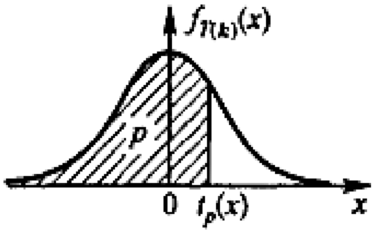
Таблиця 5. Квантілі χ-квадрат розподілу $\chi_p^2(k)$



k	p														
	0.005	0.10	0.025	0.05	0.10	0.20	0.30	0.70	0.80	0.90	0.95	0.975	0.990	0.995	0.999
1	$0.0^4 393$	$0.0^3 157$	$0.0^3 982$	$0.0^2 393$	0.0158	0.0642	0.148	0.07	1.64	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	10.8
2	0.0108	0.201	0.0506	0.103	0.211	0.446	0.713	2.41	3.22	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6	13.8
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.584	1.00	1.42	3.67	4.64	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8	16.3
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	1.65	2.19	4.88	5.99	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9	18.5
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	2.34	3.00	6.06	7.29	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7	20.5
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	3.07	3.83	7.23	8.56	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5	22.5
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	3.82	4.67	8.38	9.80	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3	24.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	4.59	5.53	9.52	11.0	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0	26.1
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.38	6.39	10.7	12.2	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6	27.9
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.18	7.27	11.8	13.4	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2	29.6
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	6.99	8.15	12.9	14.6	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8	31.3
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	7.81	9.03	14.0	15.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3	32.9
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	8.63	9.93	15.1	17.0	19.08	22.4	24.7	27.7	29.8	34.5
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	9.47	10.8	16.2	18.2	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3	36.1
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	10.3	11.7	17.3	19.3	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8	37.7

k	p														
	0.005	0.10	0.025	0.05	0.10	0.20	0.30	0.70	0.80	0.90	0.95	0.975	0.990	0.995	0.999
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.2	12.6	18.4	20.5	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3	39.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.0	13.5	19.5	21.6	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7	40.8
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	12.9	14.4	20.6	22.8	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2	42.3
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	13.7	15.4	21.7	23.9	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6	43.8
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	14.6	16.3	22.8	25.0	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0	45.3
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	15.4	17.2	23.9	26.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4	46.8
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	16.3	18.1	24.9	27.3	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8	48.3
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	17.2	19.0	26.0	28.4	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2	49.7
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	18.1	19.9	27.1	29.6	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6	51.2
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	18.9	20.9	28.2	30.7	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9	52.6
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	19.8	21.8	29.2	31.8	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3	54.1
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	20.7	22.7	30.3	32.9	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6	55.5
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	21.6	23.6	31.4	34.0	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0	56.9
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	22.5	24.6	32.5	35.1	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3	58.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	23.4	25.5	33.5	36.3	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7	59.7
35	17.2	18.5	20.6	22.5	24.8	27.8	30.2	38.9	41.8	46.1	49.8	53.2	57.3	60.3	66.6
40	20.7	22.2	24.4	26.5	29.1	32.3	34.9	44.2	47.3	51.8	55.8	59.3	63.7	66.8	73.4
45	24.3	25.9	28.4	30.6	33.4	36.9	39.6	49.5	52.7	57.5	61.7	65.4	70.0	73.2	80.1
50	28.0	29.7	32.4	34.8	37.7	41.4	44.3	54.7	58.2	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5	86.7
75	47.2	49.5	52.9	56.1	59.8	64.5	68.1	80.9	85.1	91.1	96.2	100.8	106.4	110.3	118.6
100	67.3	70.1	74.2	77.9	82.4	87.9	92.1	106.9	111.7	118.5	124.3	129.6	135.6	140.2	149.4

Таблиця 6. Квантилі розподілу Стьюдента



k	p						
	0,750	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995	0,999
1	1,000	3,078	6,314	12,706	31.821	63,657	318
2	0,816	1,886	2.920	4,303	6,965	9,925	22.3
3	0,765	1,638	2.353	3.182	4,541	5.841	10,2
4	0,741	1,533	2,132	2.776	3,747	4,604	7,173
5	0,727	1.476	2,015	2.571	3.365	4.032	5.893
6	0.718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3.355	4.501
9	0,703	1.373	1,833	2.262	2.821	3,250	4,297
10	0,700	1,372	1,812	2.228	2,764	3,169	4.144
11	0,697	1,363	1.796	2,201	2.718	3,106	4,025
12	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930
13	0,694	1.350	1.771	2,160	2,650	3.012	3,852
14	0,692	1,345	1,761	2.145	2,624	2,977	3.787
15	0,691	1,341	1,753	2.131	2,602	2.947	3,733
16	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686
17	0,689	1.333	1,740	2,110	2,567	2.898	3,646
18	0.688	1,330	1.734	2,101	2.552	2.878	3,610
19	0,688	1,328	1,729	2,093	2.539	2.861	3.579
20	0,687	1.325	1,725	2,086	2,528	2,845	3.552
21	0.686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3.527
22	0,686	1,321	1.717	2.074	2,508	2,819	3,505
23	0,685	1,319	1,714	2.069	2.500	2,807	3,485
24	0.685	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467
25	0.684	1,316	1,708	2,060	2,485	2.787	3,450
26	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435
27	0,684	1,314	1.703	2,052	2,473	2.771	3,421
28	0,683	1,313	1,701	2,048	2,467	2.763	3.408
29	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3.396
30	0,683	1,310	1,697	2.042	2.457	2,750	3,385
40	0,681	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307
60	0.679	1,296	1.671	2,000	2,390	2,660	3,232
120	0,677	1,289	1,658	1.980	2.358	2.617	3,160
∞	0.674	1,282	1,645	1.960	2,326	2.576	3,090

Таблиця 7. Квантилі розподілу Фішера

k_2	k_1 = 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120
	$p = 0,9$																	
1	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86	60.19	60.71	61.22	61.74	62.00	62.26	62.53	62.79	63.06
2	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48
3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.20	5.18	5.18	5.17	5.16	5.15	5.14
4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.79	3.78
5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.14	3.12
6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.90	2.87	2.84	2.82	2.80	2.78	2.76	2.74
7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70	2.67	2.63	2.59	2.58	2.56	2.54	2.51	2.49
8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.34	2.32
9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.38	2.34	2.30	2.28	2.25	2.23	2.21	2.18
10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.28	2.24	2.20	2.18	2.16	2.13	2.11	2.08
11	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.03	2.00
12	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19	2.15	2.10	2.06	2.04	2.01	1.99	1.96	1.93
13	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16	2.14	2.10	2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.90	1.88
14	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.10	2.05	2.01	1.96	1.94	1.91	1.89	1.86	1.83
15	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06	2.02	1.97	1.92	1.90	1.87	1.85	1.82	1.79
16	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03	1.99	1.94	1.89	1.87	1.84	1.81	1.78	1.75
17	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03	2.00	1.96	1.91	1.86	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72
18	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	1.98	1.93	1.89	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69
19	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96	1.91	1.86	1.81	1.79	1.76	1.73	1.70	1.67
20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94	1.89	1.84	1.79	1.77	1.74	1.71	1.68	1.64
21	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95	1.92	1.87	1.83	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66	1.62
22	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90	1.86	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.64	1.60
23	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92	1.89	1.84	1.81	1.74	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59
24	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.61	1.57
25	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89	1.87	1.82	1.77	1.72	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56
26	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86	1.81	1.76	1.71	1.68	1.65	1.61	1.58	1.54
27	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.87	1.85	1.80	1.75	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57	1.53
28	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52
29	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86	1.83	1.78	1.73	1.68	1.65	1.62	1.58	1.55	1.51
30	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82	1.77	1.72	1.67	1.64	1.61	1.57	1.54	1.50
40	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76	1.71	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.47	1.42
60	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.66	1.60	1.54	1.51	1.48	1.44	1.40	1.35
120	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68	1.65	1.60	1.55	1.48	1.45	1.41	1.37	1.32	1.36
∞	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63	1.60	1.55	1.49	1.42	1.38	1.34	1.30	1.24	1.17

Продовження таблиці 7

k_2	k_1																	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120
	$p = 0,95$																	
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	243.9	245.9	248.0	249.1	250.1	251.1	252.2	253.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	3.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	3.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22

Продовження таблиці 7

k_2	k_1 = 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120
									$p = 0,975$									
1	647.8	799.5	864.6	899.6	921.8	917.1	948.2	956.7	963.3	968.6	976.7	984.9	993.1	997.2	1001	1006	1010	1014
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.41	39.43	39.45	39.46	39.46	39.47	39.48	39.49
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.34	14.25	14.17	14.12	14.08	14.04	13.99	13.95
4	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.75	8.66	8.56	8.51	8.46	8.41	8.36	8.31
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	4.37	5.27	5.17	5.12	5.07	5.01	4.96	4.90
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.67	4.57	4.47	4.42	4.36	4.31	4.25	4.20
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.20	4.10	4.00	3.95	3.89	3.84	3.78	3.73
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.87	3.77	3.67	3.61	3.56	3.51	3.45	3.39
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.26	3.20	3.14
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.43	3.33	3.23	3.17	3.12	3.06	3.00	2.94
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.28	3.18	3.07	3.02	2.96	2.91	2.85	2.79
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25	3.15	3.05	2.95	2.89	2.84	2.78	2.72	2.66
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15	3.05	2.95	2.84	2.79	2.73	2.67	2.61	2.55
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	2.96	2.86	2.76	2.70	2.64	2.59	2.52	2.46
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.89	2.79	2.68	2.63	2.57	2.51	2.45	2.38
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.82	2.72	2.62	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87	2.77	2.67	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.26
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.72	2.62	2.51	2.45	2.39	2.33	2.27	2.20
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.68	2.57	2.46	2.41	2.35	2.29	2.22	2.16
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73	2.64	2.53	2.42	2.37	2.31	2.25	2.18	2.11
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70	2.60	2.50	2.39	2.33	2.27	2.21	2.14	2.08
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67	2.57	2.47	2.36	2.30	2.24	2.18	2.11	2.04
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.54	2.44	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2.01
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.51	2.41	2.30	2.24	2.18	2.12	2.05	1.98
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59	2.49	2.39	2.28	2.22	2.16	2.09	2.03	1.95
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57	2.47	2.36	2.25	2.19	2.13	2.07	2.00	1.93
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55	2.45	2.34	2.23	2.17	2.11	2.05	1.98	1.91
29	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53	2.43	2.32	2.21	2.15	2.09	2.03	1.96	1.89
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.41	2.31	2.20	2.14	2.07	2.01	1.94	1.87
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.29	2.18	2.07	2.01	1.94	1.88	1.80	1.72
60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.17	2.06	1.94	1.88	1.82	1.74	1.67	1.58
120	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16	2.05	1.94	1.82	1.76	1.69	1.61	1.53	1.43
∞	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05	1.94	1.83	1.71	1.64	1.57	1.48	1.39	1.27

Продовження таблиці 7.

k_2	k_1 = 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120
									$p = 0,99$									
1	4052	4999.5	5403	5625	5764	5859	5928	5982	6022	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99,33	99.36	99.37	99.39	89.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48	99.49
3	34.12	30.82	29,46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35	27,23	27.05	26.87	26.69	26.60	26.50	26.41	26.32	26.22
4	21,20	18.00	16.69	15.98	15,52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14,37	14.20	14.02	13.93	13.84	13.75	13.65	13.56
5	16,26	13.27	12,06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11
6	13.75	10.92	9,78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97
7	12.25	9.55	8,45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6,31	6.16	6.07	5.99	5.91	5,82	5.74
8	11.26	8,65	7.59	7,01	6.63	6,37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5,36	5.28	5.20	5.12	5,03	4.95
9	10.56	8.02	6,99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4,73	4.65	4.57	4.48	4.40
10	10.04	7,56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4,41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4,25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	2.69
12	9.33	6.93	5,95	5.41	5.06	4.82	4.64	4,50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45
13	9,07	6.70	5,74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3,59	3.51	3.43	3.34	3.25
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4,20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84
17	8.40	6,11	5.18	4.67	4.34	4,10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75
18	8,29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3,00	2.92	2.84	2.75	2.66
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58
20	8,10	5.85	4.94	4,43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2,55	2.46
22	7.95	5,72	4,82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3,71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2,70	2.62	2.54	2.45	2.15
24	7,82	5,61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31
25	7.77	5.57	4.68	4,18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3,13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27
26	7,72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23
27	7,68	5.49	4,60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2,78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2,87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.33	2.23	2.14
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2,70	2,55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11
40	7,31	5.18	4.31	3,83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73
120	6,85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2,18	2.04	1.88	1,79	1.70	1.59	1.47	1.32

Продовження таблиці 7.

k_2	k_1 = 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120
									$p = 0,995$									
1	16211	20000	21615	22500	23056	23437	23715	23925	24091	24224	24426	24630	24836	24940	25044	25148	25253	25359
2	198,5	199,0	199,2	199,2	199,3	199,3	199,4	199,4	199,4	199.40	199,4	199,4	199,4	199,5	199,5	199,5	199,5	199,5
3	55,55	49,80	47,47	46,19	45,39	44,84	44,43	44,13	43,88	43,69	43,39	43,08	42,78	42,62	42,47	42,31	42,15	41,99
4	31,33	26,28	24,26	23,15	22,46	21,97	21,62	21,35	21,14	20,97	20,70	20,44	20,17	20,03	19,89	19,75	19,61	19,47
5	22,78	18,31	16,53	15,56	14,94	14,51	14,20	13,96	13,77	13,62	13,38	13,15	12,90	12,78	12,66	12,53	12,40	12,27
6	18,64	14,54	12,92	12,03	11,46	11,07	10,79	10,57	10,39	10,25	10,03	9,81	9,59	9,47	9,36	9,24	9,12	9,00
7	16,24	12,40	10,88	10,05	9,52	9,16	8,89	8,68	8,51	8,38	8,18	7,97	7,75	7,65	7,53	7,42	7,31	7,19
8	14,69	11,04	9,60	8,81	8,30	7,95	7,69	7,50	7,34	7,21	7,01	6,81	6,61	6,50	6,40	6,29	6,18	6,06
9	13,61	10,11	8,72	7,96	7,47	7,13	6,88	6,69	6,54	6,42	6,23	6,03	5,83	5,73	5,62	5,52	5,41	5,30
10	12,83	9,43	8,08	7,34	6,87	6,54	6,30	6,12	5,97	5,85	5,66	5,47	5,27	5,17	5,07	4,97	4,86	4,75
11	12,23	8,91	7,60	6,88	6,42	6,10	5,86	5,68	5,54	5,42	5,24	5,05	4,86	4,76	4,65	4,55	4,44	4,34
12	11,75	8,51	7,23	6,52	6,07	5,76	5,52	5,35	5,20	5,09	4,91	4,72	4,53	4,43	4,33	4,23	4,12	4,01
13	11,37	8,19	6,93	6,23	5,79	5,48	5,25	5,08	4,94	4,82	4,64	4,46	4,27	4,17	4,07	3,97	3,87	3,76
14	11,06	7,92	6,68	6,00	5,56	5,26	5,03	4,86	4,72	4,60	4,43	4,25	4,06	3,96	3,86	3,76	3,66	3,55
15	10,80	7,70	6,48	5,80	5,37	5,07	4,85	4,67	4,54	4,42	4,25	4,07	3,88	3,79	3,69	3,58	3,48	3,37
16	10,58	7,51	6,30	5,64	5,21	4,91	4,69	4,52	4,38	4,27	4,10	3,92	3,73	3,64	3,54	3,44	3,33	3,22
17	10,38	7,35	6,16	5,50	5,07	4,78	4,56	4,39	4,25	4,14	3,97	3,79	3,61	3,51	3,41	3,31	3,21	3,10
18	10,22	7,21	6,03	5,37	4,96	4,66	4,44	4,28	4,14	4,03	3,86	3,68	3,50	3,40	3,30	3,20	3,10	2,99
19	10,07	7,09	5,92	5,27	4,85	4,56	4,34	4,18	4,04	3,93	3,76	3,59	3,40	3,31	3,21	3,11	3,00	2,89
20	9,94	6,99	5,82	5,17	4,76	4,47	4,26	4,09	3,96	3,85	3,68	3,50	3,32	3,22	3,12	3,02	2,92	2,81
21	9,83	6,89	5,73	5,09	4,68	4,39	4,18	4,01	3,88	3,77	3,60	3,43	3,24	3,15	3,05	2,95	2,84	2,73
22	9,73	6,81	5,65	5,02	4,61	4,32	4,11	3,94	3,81	3,70	3,54	3,36	3,18	3,08	2,98	2,88	2,77	2,66
23	9,63	6,73	5,58	4,95	4,54	4,26	4,05	3,88	3,75	3,64	3,47	3,30	3,12	3,02	2,92	2,82	2,71	2,60
24	9,55	6,66	5,52	4,89	4,49	4,20	3,99	3,83	3,69	3,59	3,42	3,25	3,06	2,97	2,87	2,77	2,66	2,55
25	9,48	6,60	5,46	4,84	4,43	4,15	3,94	3,78	3,64	3,54	3,37	3,20	3,01	2,92	2,82	2,72	2,61	2,50
26	9,41	6,54	5,41	4,79	4,38	4,10	3,89	3,73	3,60	3,49	3,33	3,15	2,97	2,87	2,77	2,67	2,56	2,45
27	9,34	6,49	5,36	4,74	4,34	4,06	3,85	3,69	3,56	3,45	3,28	3,11	2,93	2,83	2,73	2,63	2,52	2,41
28	9,28	6,44	5,32	4,70	4,30	4,02	3,81	3,65	3,52	3,41	3,25	3,07	2,89	2,79	2,69	2,59	2,48	2,37
29	9,23	6,40	5,28	4,66	4,26	3,98	3,77	3,61	3,48	3,38	3,21	3,04	2,86	2,76	2,66	2,56	2,45	2,33
30	9,18	6,35	5,24	4,62	4,23	3,95	3,74	3,58	3,45	3,34	3,18	3,01	2,82	2,73	2,63	2,52	2,42	2,30
40	8,83	6,07	4,98	4,37	3,99	3,71	3,51	3,35	3,22	3,12	2,95	2,78	2,60	2,50	2,40	2,30	2,18	2,06
60	8,49	5,79	4,73	4,14	3,76	3,49	3,29	3,13	3,01	2,90	2,74	2,57	2,39	2,29	2,19	2,08	1,96	1,83
120	8,18	5,54	4,50	3,92	3,55	3,28	3,09	2,93	2,81	2,71	2,54	2,37	2,19	2,09	1,98	1,87	1,75	1,61
∞	7,88	5,30	4,28	3,72	3,35	3,09	2,90	2,74	2,62	2,52	2,36	2,19	2,00	1,90	1,79	1,67	1,53	1,36

Продовження таблиці 7.

k_2	k_1 = 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120
	$p = 0,999$																	
1	4053+	5000+	5404+	5625+	5764+	5859+	5929+	25981+	6023+	6056+	6107+	6158+	6209+	6235+	6261+	6287+	6313+	6340+
2	998,5	999.0	999.2	999,2	999.3	999,3	999,4	999.4	999.4	999.40	999.4	999.4	999.4	999.5	999.5	999.5	999.5	999.5
3	167,0	148.5	141.1	137.1	134.6	132.8	131.6	130.6	129.9	129.2	128.3	127.4	126.4	125.9	125.4	125.0	124.5	124,0
4	74,14	61.25	56,18	53.44	51.71	50.53	49.66	49.00	48.47	48.05	47,41	46.76	46.10	45.77	45.43	45.09	44.75	44.40
5	47.18	37.12	33.20	31,09	29.75	28,84	28.16	27.64	27,24	26.92	26.42	25.91	25,39	25.14	24,87	24.60	24.33	24.06
6	35,51	27,00	23.20	21,92	20.81	20.03	19.46	19.03	18.69	18.41	17.99	17.56	17.12	16,89	16.67	16.44	16.21	15.99
7	29.25	21.69	18.77	17.19	16.21	15.52	15.02	14.63	14.33	14.08	13.71	13,32	12.93	12.73	12.53	12.33	12,12	11,91
8	25.42	18,49	15.83	14.39	13.49	12.86	12.40	12,04	11,77	11.54	11.19	10.84	10.48	10.30	10.11	9.92	9.73	9.53
9	22.86	16.29	13.90	12.56	11.71	11.13	10.70	10.37	10.11	9,89	9.57	9.24	8.90	8.72	8.55	8.37	8.10	8.00
10	21,04	14.91	12,55	11.28	10.48	9,92	9.52	9.20	8.96	8,75	8.45	8.13	7.80	7.64	7.47	7.30	7.12	6.94
11	19,69	13.81	11.56	10.35	9.58	9.05	8.66	8.35	8,12	7.92	7,61	7.32	7.01	6.85	6.68	6.52	6.35	6.17
12	18.64	12.97	10.80	9.63	8.89	8.38	8.00	7,71	7.48	7.29	7.00	6.71	6.40	6.25	6.09	5.93	5.76	5.59
13	17.81	12.31	10.21	9,07	8.35	7.86	7.49	7.21	6,98	6.80	6,52	6.23	5.93	5,78	5.63	5.47	5.30	5.14
14	17,14	11.78	9.73	8.62	7.92	7.43	7.08	6.80	6,58	6.40	6,13	5.85	5.56	5.41	5.25	5.10	4.94	4.77
15	16,50	11,34	9.34	8.25	7.57	7,09	6.74	6,47	6.26	6.08	5.81	5.34	5.25	5.10	4.95	4.80	4.64	4.47
16	16,12	10.97	9.00	7.94	7.27	6,81	6.46	6.19	5,98	5,81	5.55	5.27	4.99	4.85	4.70	4.54	4.39	4.21
17	15,72	10,66	8.73	7.68	7,02	6.56	6.22	5.96	5.75	5.58	5,32	5,05	4.78	4.63	4.48	4.33	4.18	4.02
18	15.38	10.39	8.49	7.46	6.81	6.35	6.02	5.76	5.56	5.39	5.13	4,87	4.59	4,45	4.30	4,15	4.00	3,84
19	15,08	10,16	8,28	7.26	6.62	6.18	5.85	5.59	5,39	5.22	4.97	4.70	4.43	4.29	4,14	3.99	3.84	3,68
20	14.82	9.95	8,10	7.10	6,46	6.02	5.69	5.44	5.24	5.08	4.82	4.56	4,29	4.15	4.00	3.86	3.70	3,54
21	14,59	9,77	7.94	6.95	6.32	5.88	5.56	5.31	5.11	4.95	4,70	4.44	4.17	4.03	3.88	3.74	3,58	3.42
22	14,38	9.61	7.80	6.81	6.19	5.76	5.44	5.19	4.99	4.83	4.58	4.33	4.06	3.92	3.78	3.63	3.48	3.32
23	14.19	9.47	7.67	6.69	6,08	5.65	5.33	5.09	4.99	4,71	4,48	4.23	3.96	3.82	3.68	3.53	3.38	3.22
24	14.03	9,34	7,55	6.59	5.98	5.55	5.23	4.99	4.80	4.64	4,39	4.14	3.87	3.74	3.59	3.45	3.29	3.14
25	13.88	9,22	7.45	6.40	5.88	5.46	5.15	4.91	4.71	4.56	4,31	4.06	3.79	3.66	3.52	3.37	3.22	3.06
26	13,74	9,12	7.36	6,41	5.80	5,38	5.07	4.83	4.64	4.48	4.24	3.99	3.72	3.59	3.44	3.30	3.15	2,99
27	13.61	9.02	7.27	6.33	5.73	5.31	5.00	4.76	4,57	4.41	4.17	3.92	3.66	3.52	3.38	3.23	3.08	2.92
28	13.50	8.93	7,19	6.25	5,66	5.24	4.93	4.60	4,50	4.35	4.11	3.86	3,60	3,46	3.32	3.18	3.02	2,86
29	13,39	8.85	7,12	6.19	5.59	5.18	4.87	4,64	4,45	4.29	4,05	3,80	3,54	3.41	3.27	3,12	2.97	2,81
30	13,29	8.77	7,05	6.12	5.53	5,12	4.82	4,58	,39	4.24	4.00	3,75	3,49	3.36	3.22	3.07	2.92	2,76
40	12.61	8.25	6.60	5.70	5.13	4.73	4.44	4.21	4.02	3.87	3,64	3,40	3,15	3.01	2.87	2.73	2,57	2.41
60	11.97	7.76	6.17	5.31	4.76	4.37	4.09	3.87	3.69	2.54	3.31	3,08	2,83	2.69	2.55	2.41	2.25	2.08
120	11.38	7.32	5.79	4.95	4.42	4.04	3.77	3.55	3,38	3.24	3.02	2.78	2.53	2.40	2.26	2.11	1.95	1,76
∞	10.83	6.91	5,42	4.62	4.10	3.74	3.47	3.27	3,10	2.96	2.74	2.51	2.27	2.13	1.99	1.84	1.66	1,45

Таблиця 8. Рівномірно розподілені випадкові числа.

10	09	73	25	33	76	52	01	35	86	34	67	35	48	76
37	54	20	48	05	64	89	47	42	96	24	80	52	40	37
08	42	26	89	53	19	64	50	93	03	23	20	90	25	60
99	01	90	25	29	09	37	67	07	15	38	31	13	11	65
12	80	79	99	70	80	15	73	61	47	64	03	23	66	53
80	95	90	91	17	39	29	27	49	45	66	06	57	47	17
20	63	61	04	02	00	82	29	16	65	31	06	01	08	05
15	95	33	47	64	35	08	03	36	06	85	26	97	76	02
88	67	67	43	97	04	43	62	76	59	63	57	33	21	35
98	95	11	68	77	12	17	17	68	33	73	79	64	57	53
34	07	27	68	50	36	69	73	61	70	65	81	33	98	85
45	57	18	24	06	35	30	34	26	14	86	79	90	74	39
02	05	16	56	92	68	66	57	48	18	73	05	38	52	47
05	32	54	70	48	90	55	35	75	48	28	46	82	87	09
03	52	96	47	78	35	80	83	42	82	60	93	52	03	44
11	19	92	91	70	98	52	01	77	67	14	90	56	86	07
23	40	30	97	32	11	80	50	54	31	39	80	82	77	32
18	62	38	85	79	83	45	29	96	34	06	28	89	80	83
83	49	12	56	24	88	68	54	02	00	86	50	75	84	01
35	27	38	84	35	99	59	46	73	48	87	51	76	49	69
22	10	94	05	58	60	97	09	34	33	50	50	07	39	98
0	72	56	82	48	29	40	52	42	01	52	77	56	78	51
13	74	67	00	78	18	47	54	06	10	68	71	17	78	17
36	76	66	79	51	90	36	47	64	93	29	60	91	10	62
91	82	60	89	28	93	78	56	13	68	23	47	83	41	13
65	48	11	76	74	17	46	85	09	50	58	04	77	69	74
80	12	43	56	35	17	72	70	80	15	45	31	82	23	74
74	35	09	98	17	77	40	27	72	14	43	23	60	02	10
69	91	62	68	03	66	25	22	91	48	36	93	68	72	03
09	89	32	05	05	14	22	56	85	14	46	42	75	67	88
73	03	95	71	86	40	21	81	65	44	91	49	91	45	23
21	11	57	82	53	14	38	55	37	63	80	33	69	45	98
45	52	16	42	37	96	28	60	26	55	44	10	48	19	49
76	62	11	39	90	94	40	05	64	18	12	55	07	37	42
96	29	77	88	22	54	38	21	45	98	63	60	64	93	29
68	47	92	76	86	46	16	28	35	54	94	75	08	99	23
26	94	03	68	58	70	29	73	41	35	53	14	03	33	40
85	15	74	79	54	32	97	92	65	75	57	60	04	08	81
11	10	00	20	40	12	86	07	46	97	96	64	48	94	39
16	50	53	44	84	40	21	95	25	63	43	65	17	70	82

Рекомендована література

1.Вентцель Е.С. Теория вероятностей: Учеб.-М.:Наука, 1969.

2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика.-М.: Высш.шк., 2003.

3. Зарубин В.С. Теория вероятностей: Учеб. для вузов.-М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2006.

4. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций/ под ред. А.А.Свешникова.-М.: Наука, 1979.

5. Навчальний посібник «Теорія ймовірностей та елементи математичної статистики»/ під ред. Л.І.Плотнікової.-«Астропринт» Одеса, 2004.

Зміст