МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний університет «Одеська політехніка»

Шпинковський О.А.

Шпинковська М.І.

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни «Лінійна алгебра»
для студентів ІШІР, що навчаються за спеціальністю 123 Комп’ютерна інженерія
для студентів ІЕКСУ, що навчаються за спеціальністю 143 Атомна енергетика

Семестровий модуль 1

Одеса 2022

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний університет «Одеська політехніка»

Шпинковський О.А.

Шпинковська М.І.

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни «Лінійна алгебра»
для студентів ІШІР, що навчаються за спеціальністю 123 Комп’ютерна інженерія
для студентів ІЕКСУ, що навчаються за спеціальністю 143 Атомна енергетика

Семестровий модуль 1

**Затверджено**

на засіданні кафедри вищої математики та моделювання систем.

Протокол № 3 від 20.10.2021

Одеса 2022

Конспект лекцій з дисципліни «Лінійна алгебра» для студентів ІШІР, що навчаються за спеціальністю 123 «Комп’ютерна інженерія» та для студентів ІЕКСУ, що навчаються за спеціальністю 143 «Атомна енергетика» Семестровий модуль1. /Уклад.: О.А. Шпинковський, М.І. Шпинковська. – Одеса: НУОП, 2022. – 26с.

Укладачі: О.А. Шпинковський, доцент, к.т.н.

 М.І. Шпинковська, доцент, к.т.н.

**Зміст**

 1 [Визначники. Формули Крамера 4](#_Toc270925827)

 2 [Матриці. Дії на матрицями. Обернена матриця 8](#_Toc270925828)

 3 [Ранг матриці та його знаходження 11](#_Toc270925829)

 4 [Розв’язання систем лінійних алгебраїчних роівнянь 14](#_Toc270925830)

 5 [Вектори . Лінійна залежність векторів. Розвиненя вектора за базисом 21](#_Toc270925827)

 6 [Відповіді та вказівки 23](#_Toc270925828)

 7 [Література](#_Toc270925827) 26

**1**. ВИЗНАЧНИКИ. ФОРМУЛИ КРАМЕРА

 Розглянемо задачу розв’язання неоднорідної системи двох лінійних алгебраїчних рівнянь, тобто,

![](data:application/x-msmetafile;base64...)

Тут ![](data:application/x-msmetafile;base64...) є невідомимим; індекси ![](data:application/x-msmetafile;base64...) у коефіцієнтів ![](data:application/x-msmetafile;base64...) вказують на номер рядка, де знаходиться відповідний коефіцієнт, та стовпці. Коефіцієнти ![](data:application/x-msmetafile;base64...) в загальному випадку – ненульові; їх індекси вказують відповідно на номер рядка системи.

 Розв’язуючи цю систему методом виключення невідомих, отримаємо в загальному випадку розв’язок:

![](data:application/x-msmetafile;base64...) (1.1)

За умови ![](data:application/x-msmetafile;base64...) розв’язок системи буде єдиним. Формули (1,1) отримання єдиного розв’язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь називаються формулами Крамера. В цих формулах двічі зустрічається один і той же вираз: ![](data:application/x-msmetafile;base64...), який доцільно замінити, як це прийнято в математиці, одним символом з указанням способу отримання його значення.

Означення. Визначником другого порядку називається число

![](data:application/x-msmetafile;base64...).

Вираз позначається символом:

![](data:application/x-msmetafile;base64...).

Тут елементи ![](data:application/x-msmetafile;base64...) утворюють перший рядок, елементи ![](data:application/x-msmetafile;base64...) - другий рядок; елементи ![](data:application/x-msmetafile;base64...) - перший стовпець, ![](data:application/x-msmetafile;base64...) - другий стовпець; ![](data:application/x-msmetafile;base64...) - головну діагональ, ![](data:application/x-msmetafile;base64...) - побічну діагональ.

Спосіб отримання із символа визначника виразу ![](data:application/x-msmetafile;base64...) такий: потрібно знайти добуток елементів, що знаходяться на головній діагоналі та відняти від нього добуток елементів, що знаходяться на побічній діагоналі.

 Повертаючись до формул Крамера зауважимо, що

![](data:application/x-msmetafile;base64...),

![](data:application/x-msmetafile;base64...).

 Отже, для знаходження розв’язків системи лінійних алгебраїчних рівнянь за умови ненульового визначника системи можна скористатись формулами Крамера:

![](data:application/x-msmetafile;base64...)

де ![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

 Таким же чином можна розв’язувати і системи третього, та вище третього порядків. Зокрема, система третього порядку

![](data:application/x-msmetafile;base64...)

За формулами Крамера розв’язується так:

![](data:application/x-msmetafile;base64...)

де ![](data:application/x-msmetafile;base64...),

![](data:application/x-msmetafile;base64...),

![](data:application/x-msmetafile;base64...),

![](data:application/x-msmetafile;base64...) (1.2).

 Зауваження. Формула (1.2) називається розвиненням визначника третього порядку за елементами першого рядка. При цьому визначники

![](data:application/x-msmetafile;base64...)

Називаються мінорами, додатковими до елементів ![](data:application/x-msmetafile;base64...) відповідно. Позначаються вони відповідно ![](data:application/x-msmetafile;base64...). Вираз ![](data:application/x-msmetafile;base64...) називається алгебраїчним доповненням елемента ![](data:application/x-msmetafile;base64...) і позначається ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

 Отже, ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

 Зауваження . Будь-який визначник можна обчислити, розвиваючи його за елементами будь-якого рядка, або стовпця. Але об’єм обчислень буде зростати із зростанням розміру визначника. В цьому випадку доцільно спочатку спрощувати визначник, використовуючи його властивості.

Властивості визначників

1) Визначник не зміниться, якщо будь-який рядок замінити на стовпець з відповідним номером.

2) Якщо у визначнику поміняти місцями будь-які два рядка (або стовпця), то визначник змінить знак.

3) Якщо визначник має два пропорційних рядка (або стовпця), то він дорівнює нулю.

4) Якщо всі елементи будь-якого рядка (або стовпця) помножити на одне й те ж число, то й визначник буде помноженим на це ж число.

5) Якщо всі елементи будь-якого рядка (або стовпця) дорівнюють нулю, то визначник дорівнює нулю.

6) Визначник не зміниться, якщо до всіх елементів одного рядка (або стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (або стовпця), помножені на одне й те ж число.

Приклад 1.1. Обчислити визначник

![](data:application/x-msmetafile;base64...).

Розв’язання. Спростимо цей визначник, перетворюючи на нуль всі елементи, за виключенням одного елемента, якого-небудь рядка, або стовпця. Це дозволить звести обчислення визначника четвертого порядку до обчислення визначника третього порядку.

Перетворимо на нуль елементи першого стовпця. Для цього помножимо на -1 всі елементи першого рядка та додамо поелементно оримані результати до відповідних елементів другого, третього та четвертого рядків:

![](data:application/x-msmetafile;base64...).

 Якщо тепер розвинути отриманий визначник за елементами першого стовпця, то будемо мати визначник третього порядку:

![](data:application/x-msmetafile;base64...).

 Якщо розвивати отриманий визначник третього порядку за елементами першого стовпця, то будемо мати:

![](data:application/x-msmetafile;base64...) .

 Зауваження. Рядок (стовпець), за допомогою якого змінюються елементи інших рядків (стовпців) називається ведучим.

В задачах 1.2 – 1.19 обчислити визначники:

1.2. ![](data:application/x-msmetafile;base64...) 1.3.![](data:application/x-msmetafile;base64...) 1.4. ![](data:application/x-msmetafile;base64...)

1.5. ![](data:application/x-msmetafile;base64...) 1.6. ![](data:application/x-msmetafile;base64...) 1.7. ![](data:application/x-msmetafile;base64...)

1.8. ![](data:application/x-msmetafile;base64...) 1.9. ![](data:application/x-msmetafile;base64...) 1.10. ![](data:application/x-msmetafile;base64...)

1.11. ![](data:application/x-msmetafile;base64...) 1.12.![](data:application/x-msmetafile;base64...) 1.13. ![](data:application/x-msmetafile;base64...)

1.14. ![](data:application/x-msmetafile;base64...) 1.15. ![](data:application/x-msmetafile;base64...) 1.16. ![](data:application/x-msmetafile;base64...)

1.17. ![](data:application/x-msmetafile;base64...) 1.18. ![](data:application/x-msmetafile;base64...) 1.19. ![](data:application/x-msmetafile;base64...)

1.20. Обчислити мінори ![](data:application/x-msmetafile;base64...),![](data:application/x-msmetafile;base64...),![](data:application/x-msmetafile;base64...) та алгебраїчні доповнення![](data:application/x-msmetafile;base64...),![](data:application/x-msmetafile;base64...),![](data:application/x-msmetafile;base64...) елементів визначника

![](data:application/x-msmetafile;base64...)

В задачах 1.21 – 1.27 розв’язати системи за формулами Крамера.

1.21. ![](data:application/x-msmetafile;base64...)

Розв’язання. Якщо визначник системи з *n* невідомими відмінний від нуля, то система має єдиний розв’язок. Його можна знайти у відповідності з формулами Крамера:

![](data:application/x-msmetafile;base64...);

![](data:application/x-msmetafile;base64...); ![](data:application/x-msmetafile;base64...); ![](data:application/x-msmetafile;base64...);

![](data:application/x-msmetafile;base64...); ![](data:application/x-msmetafile;base64...); ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

Відповідь. Система має єдиний розв’язок: (1; 2; -1).

1.22. ![](data:application/x-msmetafile;base64...) , 1.25. ![](data:application/x-msmetafile;base64...),

1.23. ![](data:application/x-msmetafile;base64...) , 1.26. ![](data:application/x-msmetafile;base64...),

1.24. ![](data:application/x-msmetafile;base64...) , 1.27. ![](data:application/x-msmetafile;base64...) ,

2. МАТРИЦІ. ДІЇ НАД МАТРИЦЯМИ. ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ.

Означення. Матрицею називається прямокутна таблиця чисел. Позначають матриці зазвичай великими літерами. Якщо матриця має m рядків та n стовбців, то кажуть, що матриця має розміри ![](data:application/x-msmetafile;base64...). Це позначають таким чином: ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

Означення. Матриці однакових розмірів називаються рівними, якщо рівні їх відповідні елементи.

Означення. Скласти дві матриці однакових розмірів означає скласти попарно їх відповідні елементи.

Означення. Помножити матрицю на число означає помножити на це число кожний елемент матиці.

Означення. Добутком матриці ![](data:application/x-msmetafile;base64...) на матрицю ![](data:application/x-msmetafile;base64...) називається така матриця ![](data:application/x-msmetafile;base64...), кожний елемент якої ![](data:application/x-msmetafile;base64...) дорівнює сумі добутків елементів i-того рядка матриці ![](data:application/x-msmetafile;base64...)на відповідні елементи j-того стовпця матриці ![](data:application/x-msmetafile;base64...). Матрицю ![](data:application/x-msmetafile;base64...) можно тільки тоді помножити на матрицю ![](data:application/x-msmetafile;base64...), коли число стовпців матриці ![](data:application/x-msmetafile;base64...) співпадає з числом рядків матриці ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

Зауваження. Добутком матриці ![](data:application/x-msmetafile;base64...) розміром ![](data:application/x-msmetafile;base64...) на матрицю ![](data:application/x-msmetafile;base64...) розміром ![](data:application/x-msmetafile;base64...) є матриця ![](data:application/x-msmetafile;base64...) розміром ![](data:application/x-msmetafile;base64...). На відміну від добутку чисел добуток матриць не комутативний.

Означення. Квадратна матриця ![](data:application/x-msmetafile;base64...) називається оберненою до матриці ![](data:application/x-msmetafile;base64...), якщо ![](data:application/x-msmetafile;base64...), де ![](data:application/x-msmetafile;base64...) одинична матриця того ж порядку що і ![](data:application/x-msmetafile;base64...). Обернена матриця існує тільки для невиродженої (![](data:application/x-msmetafile;base64...)) квадратної матриці. Кожний елемент матриці ![](data:application/x-msmetafile;base64...) можна знаходити за формулою:

![](data:application/x-msmetafile;base64...),

Де ![](data:application/x-msmetafile;base64...) - алгебраїчне доповнення елемента ![](data:application/x-msmetafile;base64...) визначника ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

2.1. Для матриць

 ![](data:application/x-msmetafile;base64...). ![](data:application/x-msmetafile;base64...) знайти матриці ![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

2.2. Для матриць

 ![](data:application/x-msmetafile;base64...) ![](data:application/x-msmetafile;base64...) знайти матриці ![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

2.3. Для матриць

 ![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...) знайти матриці ![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

2.4. Для матриць

 ![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...) знайти матриці ![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...), якщо вони існують.

Розв’язання. Число стовпців матриці ![](data:application/x-msmetafile;base64...) співпадає з числом рядків матриці ![](data:application/x-msmetafile;base64...), тому добуток ![](data:application/x-msmetafile;base64...) існує. Аналогічно існують матриці ![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...). Добуток ![](data:application/x-msmetafile;base64...) не існує, оскільки матриця ![](data:application/x-msmetafile;base64...) (перший множник) має один стовпець а матриця ![](data:application/x-msmetafile;base64...) (другий множник) два рядки.

Знайдемо, наприклад, матрицю ![](data:application/x-msmetafile;base64...). Добутком матриці розмірів ![](data:application/x-msmetafile;base64...)на матрицю розмірів ![](data:application/x-msmetafile;base64...) є матриця розмірів ![](data:application/x-msmetafile;base64...):

![](data:application/x-msmetafile;base64...),

![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...),

 ![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...)

2.5. Для матриць

![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...) Знайти матриці ![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...),![](data:application/x-msmetafile;base64...).

2.6. Для матриць

![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...) Знайти матриці ![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...),![](data:application/x-msmetafile;base64...).

2.7. Для матриць

![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...) Знайти матриці ![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...),![](data:application/x-msmetafile;base64...), якщо вони існують.

2.8. Для матриць

![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...)

Знайти матриці ![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...),![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...), якщо вони існують.

2.9. Для матриць

![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...)

Знайти матриці ![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

2.10. Для матриць

![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...)

Знайти матриці ![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...), якщо вони існують.

2.11. Чи справедливі наступні твердження для квадратних матриць одного порядку:

*a*) ![](data:application/x-msmetafile;base64...), *b*) ![](data:application/x-msmetafile;base64...),

*c*) ![](data:application/x-msmetafile;base64...), *d*) ![](data:application/x-msmetafile;base64...),

*e*) ![](data:application/x-msmetafile;base64...), *f*) ![](data:application/x-msmetafile;base64...)?

В прикладах 2.12 – 2.20 знайти матриці, обернені до заданих.

2.12.

![](data:application/x-msmetafile;base64...).

Розв’язання. Обчислюємо ![](data:application/x-msmetafile;base64...). Оскільки ![](data:application/x-msmetafile;base64...), то матриця ![](data:application/x-msmetafile;base64...) існує. Кожний елемент оберненої матриці знаходимо за формулоїю ![](data:application/x-msmetafile;base64...), де ![](data:application/x-msmetafile;base64...) -алгебраїчне доповнення елемента ![](data:application/x-msmetafile;base64...) визначника ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

![](data:application/x-msmetafile;base64...); ![](data:application/x-msmetafile;base64...);

![](data:application/x-msmetafile;base64...); ![](data:application/x-msmetafile;base64...);

![](data:application/x-msmetafile;base64...).

Перевірка:

![](data:application/x-msmetafile;base64...).

![](data:application/x-msmetafile;base64...).

2.13. ![](data:application/x-msmetafile;base64...). 2.17. ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

2.14. ![](data:application/x-msmetafile;base64...). 2.18. ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

2.15. ![](data:application/x-msmetafile;base64...). 2.19. ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

2.16. ![](data:application/x-msmetafile;base64...). 2.20. ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

В прикладах 2.21 – 2.27 розв’язати системи рівнянь з допомогою оберненої матриці.

2.21. ![](data:application/x-msmetafile;base64...)

Розв’язання. Систему рівнянь подамо у вигляді матричного рівняння ![](data:application/x-msmetafile;base64...), де ![](data:application/x-msmetafile;base64...) - матриця коефіцієнтів системи, ![](data:application/x-msmetafile;base64...) - матриця вільних членів, ![](data:application/x-msmetafile;base64...) - матриця невідомих. Якщо ![](data:application/x-msmetafile;base64...), то ![](data:application/x-msmetafile;base64...). Знайдемо спочатку матрицю ![](data:application/x-msmetafile;base64...)(див. № 2.13):

![](data:application/x-msmetafile;base64...),![](data:application/x-msmetafile;base64...) ![](data:application/x-msmetafile;base64...)

![](data:application/x-msmetafile;base64...).

Тоді

![](data:application/x-msmetafile;base64...).

Отже, ![](data:application/x-msmetafile;base64...) - розв’язок системи рівнянь. Розв’язок єдиний.

2.22. ![](data:application/x-msmetafile;base64...), 2.25. ![](data:application/x-msmetafile;base64...)

2.23. ![](data:application/x-msmetafile;base64...), 2.26. ![](data:application/x-msmetafile;base64...)

2.24. ![](data:application/x-msmetafile;base64...), 2.27. ![](data:application/x-msmetafile;base64...)

2.28. Знайти ![](data:application/x-msmetafile;base64...) для матриці ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

2.29. Знайти ![](data:application/x-msmetafile;base64...) для матриці ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

2.30. Розв’язати матричне рівняння ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

2.31. Розв’язати матричне рівняння ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

2.32. Розв’язати матричне рівняння ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

3. РАНГ МАТРИЦІ ТА ЙОГО ЗНАХОДЖЕННЯ

Означення. Рангом матриці називається порядок найбільшого, відмінного від нуля мінора цієї матриці.

Позначення рангу матриці: ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

Зауваження. Ранг нульової матриці дорівнює нулю.

Ранг одиничної матриці дорівнює її порядку, тобто числу одиничок на головній діагоналі.

Елементарні перетворення матриці не змінюють її ранг.

Максимальне число лінійно незалежних рядків (стовпців) матриці дорівнює рангу матриці.

3.1. Вкажіть ранги наступних матриць:

a) ![](data:application/x-msmetafile;base64...); b) ![](data:application/x-msmetafile;base64...); c) ![](data:application/x-msmetafile;base64...); k) ![](data:application/x-msmetafile;base64...);

d) ![](data:application/x-msmetafile;base64...); e) ![](data:application/x-msmetafile;base64...); f) ![](data:application/x-msmetafile;base64...); g) ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

В прикладах 3.2 – 3.8 знайти ранг матриці методом елементарних перетворень.

3.2. ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

Розв’язання. За допомогою елементарних перетворень зведемо матрицю до діагонального вигляду. Для цього вибираємо ненульовий діагональний елемент ![](data:application/x-msmetafile;base64...). За допомогою елементарних перетворень всі елементи першого стовпця, окрім діагонального, перетворюємо на нулі. Для цього помножимо перший рядок на (-2) та додамо до другого, а до третього рядка просто додамо перший. Внаслідок цього отримаємо:

![](data:application/x-msmetafile;base64...)![](data:application/x-msmetafile;base64...).

Оскільки в першому стовпці тільки елемент ![](data:application/x-msmetafile;base64...) відмінний від нуля, то всі елементи першого рядка, окрім ![](data:application/x-msmetafile;base64...), перетворюємо в нулі. Отже,

![](data:application/x-msmetafile;base64...)![](data:application/x-msmetafile;base64...).

З другим рядком отриманої матриці діємо таким же чином: діагональний елемент залишається незмінним, а інші елементи другого рядка перетворюємо на нулі. В другому стовпці ненульовим елементом, окрім діагонального, є лише число 7. Помножимо другий рядок на число 7 та додамо отриманий рядок поелементно до третього. Внаслідок цього маємо:

![](data:application/x-msmetafile;base64...)![](data:application/x-msmetafile;base64...)

В другому рядку усі елементи, окрім діагонального, обертаємо в нулі. Отже,

![](data:application/x-msmetafile;base64...)![](data:application/x-msmetafile;base64...).

 Оскільки третій та четвертий стовпці пропорційні, то в обчисленні рангу матриці приймає участь лише один стовпець. Отже, один із стовпців, третій, або четвертий можна викреслити. Викреслимо четвертий стовпець. Другий стовпець ділимо на -1, третій – на -61. Таким чином,

![](data:application/x-msmetafile;base64...).

Зауваження. Знаходити ранг матриці за допомогою ементарних перетворень можна, застосовуючи також так званий симплекс-алгоритм. А саме, при переході до наступної матриці з одним і тим же рангом вибирається послідовно діагональний элемент, відмінний від нуля. Він називається ведучим; рядок та стовпець, в якому він стоїть, - також ведучими.

В наступній таблиці ведучий елемент замінюємо одиницею, усі інші елементи ведучого рядка та ведучого стовпця – нулями. Елементи матриці, що залишились, знаходимо за «правилом прямокутника».\*

![](data:application/x-msmetafile;base64...)

![](data:application/x-msmetafile;base64...)

3.3. ![](data:application/x-msmetafile;base64...). 3.4. ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

3.5. ![](data:application/x-msmetafile;base64...). 3.6. ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

\*Нехай ![](data:application/x-msmetafile;base64...) - ведучий елемент, рядок ![](data:application/x-msmetafile;base64...) - ведучий, стовпець ![](data:application/x-msmetafile;base64...) - ведучий. Елемент ![](data:application/x-msmetafile;base64...), що підлягає перетворенню, обчислюємо за формулою: ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

![](data:application/x-msmetafile;base64...)

![](data:application/x-msmetafile;base64...)

Обчислення за цією формулою можна виконувати за мнемонічним «правилом прямокутника». А саме, для елемента ![](data:application/x-msmetafile;base64...) будуємо прямокутник з вершинами ![](data:application/x-msmetafile;base64...) і елементами, що знаходяться в ведучих рядку та стовпці. Елемент ![](data:application/x-msmetafile;base64...), що підлягає перетворенню, дорівнює добутку елементів-вершин діагоналі прямокутника, що містить ведучий елемент, мінус добуток елементів-вершин іншої діагоналі.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

3.7. ![](data:application/x-msmetafile;base64...). 3.8. ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

3.9. За яких значень ![](data:application/x-msmetafile;base64...) ранг матриці ![](data:application/x-msmetafile;base64...) дорівнює двом?

3.10. За яких значень ![](data:application/x-msmetafile;base64...) ранг матриці ![](data:application/x-msmetafile;base64...) дорівнює трьом?

3.11. За яких значень ![](data:application/x-msmetafile;base64...) ранг матриці ![](data:application/x-msmetafile;base64...) дорівнює одиниці?

3.12. Скільки мінорів другого порядку містить матриця розмірів ![](data:application/x-msmetafile;base64...)?

3.13. Скільки мінорів третього порядку містить матриця розмірів ![](data:application/x-msmetafile;base64...)?

3.14. Вкажіть максимальне число лінійно незалежних рядків матриці

![](data:application/x-msmetafile;base64...).

3.15. Вкажіть максимальне число лінійно незалежних стовпців матриці

![](data:application/x-msmetafile;base64...).

3.16. Вкажіть максимальне число лінійно незалежних стовпців матриці

![](data:application/x-msmetafile;base64...).

3.17. Чи буде третій стовпець матриці ![](data:application/x-msmetafile;base64...)

лінійною комбінацією перших двох стовпців?

3.18. Чи буде третій рядок матриці ![](data:application/x-msmetafile;base64...) лінійною комбінацією перших двох її рядків?

3.19. Чи зміниться ранг матриці ![](data:application/x-msmetafile;base64...), якщо у неї викреслити третій рядок?

3.20. За яких значень ![](data:application/x-msmetafile;base64...) у матриці ![](data:application/x-msmetafile;base64...) усі три рядки будуть лінійно незалежними?

4. РОЗВ’ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Система лінійних алгебраїчних рівнянь

![](data:application/x-msmetafile;base64...)

має хоча б один розв’язок (сумісна) тоді і тільки тоді, коли ранг матриці її коефіцієнтів

![](data:application/x-msmetafile;base64...)

співпадає з рангом розширеної матриці коефіцієнтів (матриця коефіцієнтів, до якої додано ще й стовпець правих частин системи)

![](data:application/x-msmetafile;base64...).

При цьому, якщо у сумісної системи ранг матриці коефіцієнтів співпадає з числом невідомих (*n*), то система має тільки один розв’язок (система визначена), якщо ж у сумісної системи ранг матриці коефіцієнтів менше числа невідомих, то система має безліч розв’язків.

Зауваження . Якщо усі праві частини системи дорівнюють нулю, то система називається однорідною, в іншому випадку – неоднорідною.

При розв’язанні системи рівнянь можна застосовувати правило Крамера, обернену матрицю, послідовне вилучення невідомих (алгоритм Гаусса, або Жордана-Гаусса). Послідовне вилучення невідомих зручно проводити за допомогою спеціальних симплексних таблиць і перетворень.

В прикладах 4.1 – 4.9 з’ясувати, чи сумісні системи рівнянь, та скільки розв’язків мають системи?

4.1. ![](data:application/x-msmetafile;base64...)

 Розв’язання. Знаходимо відразу ранг розширеної матриці коефіцієнтів системи

![](data:application/x-msmetafile;base64...)

Третій рядок пропорційний другому, тому третій рядок можна викреслити. Таким чином,

![](data:application/x-msmetafile;base64...).

Система сумісна, оскільки наявність стовпця правих частин не вплинула на ранг матриці. А оскільки число невідомих більше, ніж ранг матриці коефіцієнтів, то система рівнянь має безліч розв’язків.

4.2. ![](data:application/x-msmetafile;base64...) , 4.3. ![](data:application/x-msmetafile;base64...)

4.4. ![](data:application/x-msmetafile;base64...) , 4.5. ![](data:application/x-msmetafile;base64...) ,

4.6. ![](data:application/x-msmetafile;base64...) 4.7. ![](data:application/x-msmetafile;base64...)

4.8. ![](data:application/x-msmetafile;base64...) 4.9. ![](data:application/x-msmetafile;base64...)

4.10. За яких значень ![](data:application/x-msmetafile;base64...) система рівнянь ![](data:application/x-msmetafile;base64...) сумісна?

4.11. За яких значень ![](data:application/x-msmetafile;base64...) система рівнянь ![](data:application/x-msmetafile;base64...) несумісна?

4.12. За яких значень ![](data:application/x-msmetafile;base64...) система рівнянь ![](data:application/x-msmetafile;base64...) має безліч розв’язків?

4.13. За яких значень ![](data:application/x-msmetafile;base64...) система рівнянь ![](data:application/x-msmetafile;base64...) має тільки один розв’язок?

В прикладах 4.14 – 4.21 розв’язати системи лінійних рівнянь за формулами Крамера.

4.14. ![](data:application/x-msmetafile;base64...)

Розв’язання. Перевіримо, чи сумісна система.

![](data:application/x-msmetafile;base64...) ![](data:application/x-msmetafile;base64...) ![](data:application/x-msmetafile;base64...),

Отже, система сумісна.

Вибираємо в матриці ![](data:application/x-msmetafile;base64...) мінор третього порядку ![](data:application/x-msmetafile;base64...), відмінний від нуля (як видно із обчислення рангу, відмінний від нуля мінор матриці знаходиться на перетині 1,2,3 рядків матриці та 1,2,3 стовпців матриці).

![](data:application/x-msmetafile;base64...).

Оскільки коефіцієнти біля невідомого ![](data:application/x-msmetafile;base64...) не входять до вибраного мінора, то невідоме ![](data:application/x-msmetafile;base64...) переносимо до правих частин рівнянь, называємо його довільним, та позначаємо ![](data:application/x-msmetafile;base64...). Отримуємо систему трьох рівнянь з трьома невідомими ![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...) і довільним невідомим ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

![](data:application/x-msmetafile;base64...)

Отриману систему розв’язуємо за формулами Крамера.

![](data:application/x-msmetafile;base64...);

![](data:application/x-msmetafile;base64...);

![](data:application/x-msmetafile;base64...);

![](data:application/x-msmetafile;base64...);

![](data:application/x-msmetafile;base64...).

![](data:application/x-msmetafile;base64...),

![](data:application/x-msmetafile;base64...).

Загальний розв’язок системи має вигляд:

![](data:application/x-msmetafile;base64...); ![](data:application/x-msmetafile;base64...); ![](data:application/x-msmetafile;base64...)

Зауваження. Отриманий розв’язок можна також записати у вигляді

 ![](data:application/x-msmetafile;base64...) ![](data:application/x-msmetafile;base64...)

Тут матриця ![](data:application/x-msmetafile;base64...) називається частинним розв’язком неоднорідної системи, а матриця ![](data:application/x-msmetafile;base64...) - фундаментальним розв’язком однорідної системи.

 Слід зауважити також, що підставляючи в початкову систему замість відповідних невідомих значення частинного розв’язку, отримаємо числову тотожність:

![](data:application/x-msmetafile;base64...),

![](data:application/x-msmetafile;base64...),

![](data:application/x-msmetafile;base64...).

А відповідні значення фундаментального розв’язку є розв’язками однорідної системи:

![](data:application/x-msmetafile;base64...)

4.15. ![](data:application/x-msmetafile;base64...) 4.17. ![](data:application/x-msmetafile;base64...) ,

4.16. ![](data:application/x-msmetafile;base64...) 4.18. ![](data:application/x-msmetafile;base64...)

4.19. ![](data:application/x-msmetafile;base64...) , 4.20. ![](data:application/x-msmetafile;base64...)

4.21. ![](data:application/x-msmetafile;base64...)

В прикладах 4.22 – 4.30 розв’язати системи рівнянь методом часткового виключення невідомих (алгоритм Гауса).

4.22. ![](data:application/x-msmetafile;base64...)

Розв’язання. За допомогою елементарних перетворень зведемо систему рівнянь до трикутного вигляду. Якщо упродовж розв’язання зустрінеться рівняння вигляду ![](data:application/x-msmetafile;base64...), де ![](data:application/x-msmetafile;base64...), то система несумісна. В усіх інших випадках система сумісна.

Перетворення зручно проводити у вигляді спеціальних симплексних таблиць над матрицями коефіцієнтів системи рівнянь.

Початковій системі рівнянь відповідає таблиця

![](data:application/x-msmetafile;base64...) (1)

Вибираємо послідовно діагональний елемент, відмінний від нуля. Назвем його ведучим, а рядок та стовпець, на перетині яких він знаходиться, ведучими. Для переходу до наступної таблиці

1)ведучий рядок переписуємо без зміни,

2)у ведучому стовпці всі елементи, окрім ведучого, замінюємо нулями,

3)усі інші елементи таблиці знаходимо за «правилом прямокутника».

![](data:application/x-msmetafile;base64...) (2)

 Оскільки другий та третій рядки пропорційні – вилучаємо один з них. Нехай це буде третій рядок. Внаслідок цього, таблиця коефіцієнтів набирає вигляду:

![](data:application/x-msmetafile;base64...) (3)

Виділена верхня трикутна таблиця.

Таблиці (3) відповідає наступна система лінійних рівнянь, рівносильна початковій.

![](data:application/x-msmetafile;base64...)

В цій системі змінні ![](data:application/x-msmetafile;base64...) та ![](data:application/x-msmetafile;base64...) є базисними невідомими, а змінні ![](data:application/x-msmetafile;base64...) та ![](data:application/x-msmetafile;base64...) - довільними невідомими. Із другого рівняння виразимо базисну невідому через довільні невідомі:![](data:application/x-msmetafile;base64...)

![](data:application/x-msmetafile;base64...).

Знайдений для ![](data:application/x-msmetafile;base64...) вираз підставимо в перше рівняння системи (3) і отримаємо ще одну базисну невідому:

![](data:application/x-msmetafile;base64...)

Остаточно маємо:

![](data:application/x-msmetafile;base64...),

![](data:application/x-msmetafile;base64...),

або

![](data:application/x-msmetafile;base64...) .

Тут ![](data:application/x-msmetafile;base64...) . Це загальний розв’язок, що складається із частинного розв’язку

![](data:application/x-msmetafile;base64...),

та фундаментальної системи розв’язків:

![](data:application/x-msmetafile;base64...).

 Зауваження. Кількість базисних невідомих відповідає рангу матриці; кількість довільних невідомих дорівнює різниці між загальною кількістю невідомих та рангом матриці. Базисні невідомі називаються базисом системи рівнянь, а довільні невідомі називаються базисом системи розв’язків. Отже, фундаментальна система розв’язків складає базис системи розв’язків.

4.23. ![](data:application/x-msmetafile;base64...) 4.27. ![](data:application/x-msmetafile;base64...)

4.24. ![](data:application/x-msmetafile;base64...) 4.28. ![](data:application/x-msmetafile;base64...)

4.25. ![](data:application/x-msmetafile;base64...) 4.29. ![](data:application/x-msmetafile;base64...)

4.26. ![](data:application/x-msmetafile;base64...) 4.30. ![](data:application/x-msmetafile;base64...)

В прикладах 4.31 – 4.124 знайти хоча б один невід’ємний розв’язок системи лінійних рівнянь.

4.31. ![](data:application/x-msmetafile;base64...)

 Розв’язання. Спочатку зауважимо, що такі задачі виникають і можуть бути обгрунтовано розв’язаними для систем з невід’ємними правими частинами. Знаходимо невід’ємний базисний розв’язок, тобто розв’язок, у якого базис системи рівнянь невід’ємний, а базис системи розв’язків - нульовий. Застосовуємо метод виключення невідомих (алгоритм Жордана-Гаусса) у вигляді симплексних перетворень.

При цьому для обраної змінної ![](data:application/x-msmetafile;base64...) ведучий рядок обирається таким чином, щоб для нього відношення вільного члена (правої частини рівняння) до коефіцієнта при ![](data:application/x-msmetafile;base64...), якщо цей коефіцієнт додатний, було мінімальним. Для контролю обчислень в систему вводиться стовпець ![](data:application/x-msmetafile;base64...) (стовпець відношень правої частини до коефіцієнта при ![](data:application/x-msmetafile;base64...)).

 Табл.1.

![](data:application/x-msmetafile;base64...)

В таблиці 1 обираємо невідоме ![](data:application/x-msmetafile;base64...), тобто перший стовпець є ведучим. Обираємо в ньому додатні числа і в кожному рядку для них обчислюємо відношення елемента в стовпці ![](data:application/x-msmetafile;base64...) до відповідного коефіцієнта в першому стовпці. Отримаємо числа ![](data:application/x-msmetafile;base64...); серед них вибираємо найменше. Воно визначає ведучий рядок. Складаємо таблицю 2.

 Табл. 2.

![](data:application/x-msmetafile;base64...)

В таблиці 2 вибираємо наступне невідоме ![](data:application/x-msmetafile;base64...) і будуємо таблицю 3

 Табл.3.

![](data:application/x-msmetafile;base64...)

Перший рядок поділимо на спільний множник 2.

 Табл.4.

![](data:application/x-msmetafile;base64...)

Вибираємо невідоме ![](data:application/x-msmetafile;base64...) і переходимо до наступної таблиці 5.

 Табл.5.

![](data:application/x-msmetafile;base64...)

Таблиці 5 відповідає система рівнянь

![](data:application/x-msmetafile;base64...)

Покладаючи ![](data:application/x-msmetafile;base64...), отримаємо: ![](data:application/x-msmetafile;base64...),![](data:application/x-msmetafile;base64...),![](data:application/x-msmetafile;base64...).

Ми знайшли невід’ємний розв’язок (1; 3; 2; 0).

Зауваження. Нехай система лінійних рівнянь сумісна. Якщо під час розв’язання зустрінеться рівняння вигляду ![](data:application/x-msmetafile;base64...) ![](data:application/x-msmetafile;base64...), де всі ![](data:application/x-msmetafile;base64...) то система не має невід’эмних розв’язків.

4.32. ![](data:application/x-msmetafile;base64...) 4.36. ![](data:application/x-msmetafile;base64...)

4.33. ![](data:application/x-msmetafile;base64...) 4.37. ![](data:application/x-msmetafile;base64...)

4.34. ![](data:application/x-msmetafile;base64...) 4.38. ![](data:application/x-msmetafile;base64...)

4.35. ![](data:application/x-msmetafile;base64...) 4.39. ![](data:application/x-msmetafile;base64...)

5. ВЕКТОРИ. ЛІНІЙНА ЗАЛЕЖНІСТЬ ВЕКТОРІВ. РОЗВИНЕННЯ ВЕКТОРА ЗА БАЗИСОМ

В прикладах 5.1 – 5.9 перевірити, чи лінійно залежні вектори.

5.1. ![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

Розв’язання. Максимальне число лінійно незалежних векторів системи дорівнює рангу матриці, стовпцями (рядками) якої є вектори системи.

![](data:application/x-msmetafile;base64...), Отже, вектори лінійно незалежні.

 5.2. ![](data:application/x-msmetafile;base64...), 5.3. ![](data:application/x-msmetafile;base64...),

 ![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...),

 ![](data:application/x-msmetafile;base64...). ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

 5.4. ![](data:application/x-msmetafile;base64...), 5.5. ![](data:application/x-msmetafile;base64...),

 ![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...),

 ![](data:application/x-msmetafile;base64...). ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

 5.6. ![](data:application/x-msmetafile;base64...), 5.7. ![](data:application/x-msmetafile;base64...),

 ![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...),

 ![](data:application/x-msmetafile;base64...). ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

 5.8. ![](data:application/x-msmetafile;base64...), 5.9. ![](data:application/x-msmetafile;base64...),

 ![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...),

 ![](data:application/x-msmetafile;base64...). ![](data:application/x-msmetafile;base64...),

 ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

5.10. За яких значень ![](data:application/x-msmetafile;base64...) система векторів ![](data:application/x-msmetafile;base64...) ![](data:application/x-msmetafile;base64...) лінійно незалежна?

5.11. За яких значень ![](data:application/x-msmetafile;base64...) система векторів ![](data:application/x-msmetafile;base64...) ![](data:application/x-msmetafile;base64...) лінійно залежна?

5.12. За яких значень ![](data:application/x-msmetafile;base64...) система векторів ![](data:application/x-msmetafile;base64...) ![](data:application/x-msmetafile;base64...) лінійно залежна?

В прикладах 5.13 – 5.18 знайти хоча б один базис системи векторів.

5.13. ![](data:application/x-msmetafile;base64...);![](data:application/x-msmetafile;base64...);![](data:application/x-msmetafile;base64...).

Розв’язання. Знайдемо ранг системи векторів. Ранг системи векторів дорівнює рангу матриці, стовпцями якої є вектори системи

![](data:application/x-msmetafile;base64...).

Отже, базис системи векторів містить 2 вектора. Більш того, із обчислення рангу системи векторів видно, що лінійно незалежними є вектори ![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...), тобто вони утворюють базис системи векторів.

 Слід зауважити, що із пропорційності другого та третього стовпців матриці витікає, що базисними можуть бути також вектори ![](data:application/x-msmetafile;base64...); ![](data:application/x-msmetafile;base64...). Вектори ![](data:application/x-msmetafile;base64...); ![](data:application/x-msmetafile;base64...) -лінійно залежні, отже, вони не складають базис системи векторів.

5.14. ![](data:application/x-msmetafile;base64...), 5.15. ![](data:application/x-msmetafile;base64...),

 ![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...),

 ![](data:application/x-msmetafile;base64...). ![](data:application/x-msmetafile;base64...),

 ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

5.16. ![](data:application/x-msmetafile;base64...), 5.17. ![](data:application/x-msmetafile;base64...),

 ![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...),

 ![](data:application/x-msmetafile;base64...). ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

5.18. ![](data:application/x-msmetafile;base64...),

 ![](data:application/x-msmetafile;base64...),

 ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

В прикладах 5.19 – 5.24 перевірити, чи складають вектори базис відповідного простору.

5.19. ![](data:application/x-msmetafile;base64...), 5.20. ![](data:application/x-msmetafile;base64...),

 ![](data:application/x-msmetafile;base64...) ![](data:application/x-msmetafile;base64...),

 ![](data:application/x-msmetafile;base64...),

 ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

5.21. ![](data:application/x-msmetafile;base64...), 5.22. ![](data:application/x-msmetafile;base64...),

 ![](data:application/x-msmetafile;base64...). ![](data:application/x-msmetafile;base64...),

 ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

5.23. ![](data:application/x-msmetafile;base64...), 5.24. ![](data:application/x-msmetafile;base64...),

 ![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

 ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

5.25. Знайти розвинення вектора ![](data:application/x-msmetafile;base64...) за векторами базиса простору ![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

Розв’язання.

![](data:application/x-msmetafile;base64...) ![](data:application/x-msmetafile;base64...)

Отже, ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

5.26. Знайти розвинення вектора ![](data:application/x-msmetafile;base64...) за векторами базиса ![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

5.27. Знайти розвинення вектора ![](data:application/x-msmetafile;base64...) за векторами базиса ![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

5.28. Знайти координати вектора ![](data:application/x-msmetafile;base64...) в базисах простору
*a*) ![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...);

*b*) ![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

6. ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ

1.2. -11. 1.3. 42. 1.4. 0. 1.5. 15. 1.6. -20. 1.7. 40. 1.8. -11.

1.9. -15. 1.10. 30. 1.11. 6. 1.12. ![](data:application/x-msmetafile;base64...). 1.13. -8. 1.14. -114.

1.15. -298. 1.16. -95. 1.17. 0. 1.18. 920. 1.19. -72.

1.20. ![](data:application/x-msmetafile;base64...) ![](data:application/x-msmetafile;base64...) ![](data:application/x-msmetafile;base64...)![](data:application/x-msmetafile;base64...)![](data:application/x-msmetafile;base64...)![](data:application/x-msmetafile;base64...)

1.22. ![](data:application/x-msmetafile;base64...). 1.23. ![](data:application/x-msmetafile;base64...). 1.24. ![](data:application/x-msmetafile;base64...). 1.25. ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

1.26. ![](data:application/x-msmetafile;base64...). 1.27. ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

2.1. ![](data:application/x-msmetafile;base64...); ![](data:application/x-msmetafile;base64...); ![](data:application/x-msmetafile;base64...); ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

2.2. ![](data:application/x-msmetafile;base64...); ![](data:application/x-msmetafile;base64...); ![](data:application/x-msmetafile;base64...); ![](data:application/x-msmetafile;base64...);

2.3. ![](data:application/x-msmetafile;base64...); ![](data:application/x-msmetafile;base64...); ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

2.5. ![](data:application/x-msmetafile;base64...); ![](data:application/x-msmetafile;base64...); ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

2.6. ![](data:application/x-msmetafile;base64...); ![](data:application/x-msmetafile;base64...); ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

2.7. ![](data:application/x-msmetafile;base64...); ![](data:application/x-msmetafile;base64...)- не існує; ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

2.8. ![](data:application/x-msmetafile;base64...); ![](data:application/x-msmetafile;base64...)- не існує; ![](data:application/x-msmetafile;base64...); ![](data:application/x-msmetafile;base64...)- не існує.

2.9. ![](data:application/x-msmetafile;base64...); ![](data:application/x-msmetafile;base64...); ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

2.10. ![](data:application/x-msmetafile;base64...); ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

2.11. Справедливі твердження ![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...), ![](data:application/x-msmetafile;base64...). Твердження с) справедливе тільки для діагональних матриць, або в часткових випадках.

2.13. ![](data:application/x-msmetafile;base64...). 2.14. ![](data:application/x-msmetafile;base64...). 2.15. ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

2.16. ![](data:application/x-msmetafile;base64...). 2.17. ![](data:application/x-msmetafile;base64...). 2.18. ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

2.19. ![](data:application/x-msmetafile;base64...). 2.20. ![](data:application/x-msmetafile;base64...). 2.22. ![](data:application/x-msmetafile;base64...). 2.23. ![](data:application/x-msmetafile;base64...). 2.24. ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

2.25. ![](data:application/x-msmetafile;base64...). 2.26. ![](data:application/x-msmetafile;base64...). 2.27. ![](data:application/x-msmetafile;base64...). 2.28. ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

2.29. ![](data:application/x-msmetafile;base64...). 2.30. ![](data:application/x-msmetafile;base64...). 2.31. Розв’язків немає. 2.32. ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

3.1. а)2 , б)3, с)1, д)0, е)3, f)3, g)1. 3.3. 3. 3.4. 3. 3.5. 3. 3.6. 2.

 3.7. 3. 3.8. 2. 3.9. ![](data:application/x-msmetafile;base64...). 3.10. ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

3.11. Ні за одного значення ![](data:application/x-msmetafile;base64...) ранг матриці ![](data:application/x-msmetafile;base64...) не дорівнює одиниці.

3.12. 30. 3.13. 10. 3.14. 2. 3.15. 3. 3.16. 3.

3.17. Є, да. 3.18. Є. 3.19. Не зміниться. 3.20. ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

4.2. Сумісна. Один розв’язок. 4.3. Несумісна. 4.4. Сумісна.

4.5. Несумісна. 4.6. Несумісна.

4.7. Сумісна. Нескінченно багато розв’язків.

4.8. Сумісна. Нескінченно багато розв’язків.

4.9. Сумісна. Нескінченно багато розв’язків.

4.10. За будь-якого дійсного ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

4.11. ![](data:application/x-msmetafile;base64...). 4.12. ![](data:application/x-msmetafile;base64...). 4.13. ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

4.15. ![](data:application/x-msmetafile;base64...); ![](data:application/x-msmetafile;base64...); ![](data:application/x-msmetafile;base64...) 4.16. Система сумісна ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

4.17. ![](data:application/x-msmetafile;base64...); ![](data:application/x-msmetafile;base64...); ![](data:application/x-msmetafile;base64...). 4.18. [![](data:application/x-msmetafile;base64...); ![](data:application/x-msmetafile;base64...); ![](data:application/x-msmetafile;base64...)] не то.

4.19. Система сумісна ![](data:application/x-msmetafile;base64...)..

4.20. ![](data:application/x-msmetafile;base64...); ![](data:application/x-msmetafile;base64...); ![](data:application/x-msmetafile;base64...) ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

4.21. ![](data:application/x-msmetafile;base64...); ![](data:application/x-msmetafile;base64...); ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

4.23. ![](data:application/x-msmetafile;base64...); ![](data:application/x-msmetafile;base64...); ![](data:application/x-msmetafile;base64...) ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

4.24. ![](data:application/x-msmetafile;base64...); ![](data:application/x-msmetafile;base64...); ![](data:application/x-msmetafile;base64...) ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

4.25. ![](data:application/x-msmetafile;base64...); ![](data:application/x-msmetafile;base64...); ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

4.26. ![](data:application/x-msmetafile;base64...); ![](data:application/x-msmetafile;base64...); ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

4.27. ![](data:application/x-msmetafile;base64...); ![](data:application/x-msmetafile;base64...); ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

4.28. ![](data:application/x-msmetafile;base64...); ![](data:application/x-msmetafile;base64...); ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

4.29. Система несумісна. 4.30. Система несумісна.

4.32. Система несумісна. 4.33. ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

4.34. ![](data:application/x-msmetafile;base64...). 4.35. ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

4.36. ![](data:application/x-msmetafile;base64...). 4.37. ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

4.38. ![](data:application/x-msmetafile;base64...). 4.39. ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

5.2. Лінійно залежні. 5.3. Лінійно не залежні.

5.4. Лінійно залежні. 5.5. Лінійно залежні.

5.6. Лінійно залежні. 5.7. Лінійно залежні.

5.8. Лінійно залежні. 5.9. Лінійно не залежні.

5.10. ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

5.11. За будь-яких значень![](data:application/x-msmetafile;base64...) вектори лінійно залежні.

5.12. ![](data:application/x-msmetafile;base64...). 5.14. ![](data:application/x-msmetafile;base64...). 5.15. . ![](data:application/x-msmetafile;base64...)

5.16. ![](data:application/x-msmetafile;base64...). 5.17. ![](data:application/x-msmetafile;base64...) . 5.18. ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

5.19. Складають. 5.20. Складають .

5.21. Складають. 5.22. Складають.

5.23. Складають. 5.24. Складають.

5.26. ![](data:application/x-msmetafile;base64...). 5.27. ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

5.28. а) ![](data:application/x-msmetafile;base64...)в) ![](data:application/x-msmetafile;base64...).

Як визначається розмір лінійного простору системи лінійних алгебраїчних рівнянь та її розв’язків?

Дати означення визначенності та сумісності системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Размерность линейного пространства.

Надеюсь, ты помнишь, что такое размерность линейного пространства? Можешь заодно вспомнить, что дробной размерности там вообще не предусмотрено.

**Література**

1. Воробьева Г. Н., Данилова А. Н. - Практикум по вычислительной математике: Учеб пособие для техникумов. – М.: Высш школа, 1990. – 208 с.

2. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И. Вычислительные методы. Т.1. — М.: Наука, 1976.

3. Андриевский Б., Фрадков А. Элементы математического моделирования в программных средах MatLab 5 і SciLab. — СПб.: Наука, 2001. — 286 с.

4. Алексеев Е. Р., Чеснокова О. В. SciLab — теория и практика на русском языке — 2007. — Режим доступа: http://www.scilab.land.ru

5. Павлова М. И. Руководство по работе с пакетом SciLab / М. И. Павлова. — Режим доступа: http://www.csa.ru/~zebra/my\_scilab/