УДК 004.021; 519.1; 612.08; 681.5

Юлія РОГОВИК [1]**,** студет,
Наталія МАНІЧЕВА [1]**,** к.т.н., доцент
Леся ХАРИТОНОВА [2]**,** к.ф.-м.н., доцент
[1] Національний університет «Одеська політехніка», м. Одеса, Україна, e-mail: rogovik16@ukr.net, vmanichev@ukr.net
[2] Національний транспортний університет, м. Київ, Україна, email: kharytonova-lv@ukr.net

ДОСЛІДЖЕННЯ ОСОБЛИВОСТЕЙ ЗАСТОСУВАННЯ ПОГЛИНАЮЧИХ ЛАНЦЮГІВ МАРКОВА ПІД ЧАС ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ У ПРОЦЕСІ ЛІКУВАЛЬНО-ДІАГНОСТИЧНИХ ЗАХОДІВ

Анотація. У роботі був розлянуті основні поняття теорії випадкових процесів, а також описані види та перераховані властивості процесів Маркова. Наведений приклад застосування поглинаючих ланцюгів Маркова під час прийняття рішень у клінічній практиці.

Ключові слова: ланцюг Маркова, процес Маркова, випадковий процес, система, імовірність.

Теорія випадкових процесів – це галузь теорії ймовірностей, у межах якої досліджується явище випадкового процесу, його властивості та перспективи застосування. Користуються при цьому побудовою стохастичних систем, які характеризуються, щонайперше, властивістю випадково еволюціонувати з часом. На даний момент ними користуються фахівці у найрізноманітніших галузях людської діяльності, котрі потребують моделювання реальних подій, що носять випадковий характер.

Вагомий внесок у теорію випадкових процесів зробив видатний математик Марков А.А. Він став першовідкривачем класу стохастичних процесів, що нині носять його ім’я – ланцюги Маркова.

Ланцюг Маркова є послідовністю випадкових величин, які характеризуються наступною властивістю: «майбутнє не залежить від минулого при відомому теперішньому» [1, с. 8] і є різновидом Марковського процесу.

Дана властивість виражена в тому, що для кожного моменту часу t_0 мовірність майбутнього довільного стану системи ($t > t_0$) залежить лише від її стану у даний момент ($t = t_0$) й не залежить від того, коли і як система перейшла в цей стан.

Для ілюстрації вчений навів простий приклад: розподіл голосних і приголосних букв у художньому творі «Євгеній Онєгін». Так як існує велика ймовірність, що за приголосною літерою послідує голосна, і навпаки, то у першому наближенні допустимо вважати, що ймовірність появи голосної залежить лише від літери, що передує їй.

Якщо розглядати текст підручника з фізики, то з більшою імовірністю можна сказати, що після слова «сила» послідує «тяжіння», аніж «переконання», отже послідовність слів також є ланцюгом Маркова. На цьому ж принципі побудована система автоматичних підказок T9 у сучасних смартфонах.

Для того, щоб розглянути тему ланцюгів Маркова глибше, необхідно означити деякі основні поняття, які використовує теорія випадкових процесів:

– подія – це кожен результат, що має місце бути унаслідок проведення деякого експерименту (особливістю її є те, що за одних і тих самих експериментальних умов при багаторазовому повторенні отримані результати можуть різнитись [2, с. 8]);

– якщо за дотримання певних умов подія має стовідсоткову імовірність, то таку подію називають достовірною (подія є неможливою, якщо вона ніколи не відбудеться у даних умовах; випадкова, відповідно, може відбутись, а може й не відбутись при у разі заданих умов (першу та другу події іноді розглядають як окремі приклади випадкових подій);

– події є рівно можливими, якщо умови їхнього виникнення однакові і відсутні причини для припущення, що якась з них має більше шансів відбутися унаслідок експерименту;

– дві події є сумісними, якщо виникнення однієї з них не виключає виникнення іншої (група подій є групою сумісних подій, якщо події, що входять в цю групу, є попарно сумісними);

– дві події будуть несумісними, у випадку якщо виникнення однієї з них виключає виникнення іншої. Групу подій називають групою несумісних подій, якщо події, що входять в цю групу, попарно несумісні;

– сукупність усіх можливих результатів експерименту називають простором елементарних подій $\Omega = \{\omega\}$ де ω взаємовиключні елементарні результати (будь-яка сукупність ω подією; простір Ω акож є подією, а, точніше, достовірною подією, адже один з його результатів обов'язково відбудеться; простір елементарних подій може бути скінченним, нескінченним, дискретним та неперервним);

– розглянемо числову множину *T*, а її елементи позначимо через *t* (вважатимемо їх моментами часу; функція *X*(*t*), де $t \in T$ значення якої при будь-якому $t = t_0$ удуть випадковою величиною $Xt_0\,(\ldots)$ має назву випадкового процесу [3, с. 439]);

– випадкова величина $X(t_0)$ є перерізом випадкового процесу;

– якщо розглядати ряд перерізів у точках $t_1, t_2, \ldots, t_n$ отримаєм *n*-вимірний випадковий вектор;

– випадковий процес можна позначити як функцію двох змінних, часу та елементарної події: $X(t, \omega)$ $\omega \in \Omega, t \in T$ (при фіксованому $\omega = \omega_0$ $X(t, \omega_0)$ тає реалізацією (траєкторією) випадкового процесу – невипадковою функцією *x*(*t*), на яку перетворюється *X*(*t*) унаслідок експерименту).

Нехай задано деяку фізичну систему *S*, стан якої змінюється випадково з часом.

Випадковий процес характеризується дискретним станом, якщо імовірні стани системи $S_1, S_2, \ldots, \mathrm{S}_n$ йдуть один за одним, а процес полягає у миттєвій (стрибком) зміні системи одного стану на інший.

Якщо переходи системи з одного стану до іншого можливі лише у передбачувані фіксовані моменти часу (кроки, етапи), в інтервалах між якими система зберігає свій стан, то випадковий процес має назву процесу з дискретним часом [4, с. 153].

Якщо стрибки зі стану до стану можливі у наперед невідомі моменти, тоді процес характеризується неперервним часом.

Припустим, через *k* кроків система перейде у стан $S_i\; i = \overline{1, n}$ (позначимо цю подію як $S_i^{(k)}$; при довільному *k* отримаєм послідовність подій $S_1^{(k)}, S_2^{(k)}, \ldots, S_n^{(k)}$; найважливішою характеристикою її є імовірність).

Імовірність події можна позначити як $q_n(k) = P(S(k) = S_n^{(k)})$. Очевидно, що сума усіх імовірностей становитиме одиницю. Сукупність $q_1, \ldots, q_n$ осить назву ймовірностей станів системи.

Процес, що протікає в даній системі *S*, називається марковським процесом (або ж ланцюгом, якщо задовольняє основні вимоги) з дискретними станами і дискретним часом.

На практиці частіше стрибки системи із стану в стан відбуваються непередбачувано. У такому разі розглядають випадковий процес з дискретними станами і неперервним часом.

Властивості ланцюга Маркова залежать від станів, з яких він складається.

За визначенням, система може досягнути стану *j* із стану *i* у разі, якщо існує таке число етапів *k*, що $p_{ij}^{(k)} > 0$ що означає імовірний перехід ланцюга за *k* кроків із *i* в *j*. Навіть у випадку *i* =*j*.

Множина станів $C \subset E$ має назву поглинаючої (замкненої) у тому випадку, якщо кожен стан, що не входить до С, є недосяжним з жодного стану, який належить *C*.

Якщо один стан утворює замкнену множину, то його називають поглинаючим.

Якщо ж ланцюг не містить замкнених множин станів, відмінних від E, то його називають незвідним.

Стан і називається зворотним, якщо імовірність повернення для нього дорівнює одиниці, й незворотним, якщо ймовірність менша.

Ланцюг Маркова називають поглинаючим, якщо він містить лише поглинаючі та незворотні стани.

Перехід системи, що характеризується поглинаючим ланцюгом, здійснюється із незворотних станів, в яких вона перебуває випадковий час, у поглинаючі.

У скінченному Марковському ланцюгу ймовірність перебування системи у множині незворотних станів протягом усього часу дорівнює нулю.

Для опису застосування ланцюгів Маркова у медицині, необхідно розкрити поняття моделі Маркова.

Отже, модель Маркова відображає стохастичні процеси, що переходять із одного стану в інший.

Засобами вирішення проблем, змодельованих за допомогою моделей, є лінійна алгебра, когортне моделювання, моделювання Монте-Карло, динамічне програмування та навчання з підкріпленням.

Якщо взяти за проблему динаміку станів пацієнта, то проблемою прийняття рішення постане ризик, що існує протягом неперервного часу, коли момент виникнення події є важливим, і подія може траплятись не один раз. Марковська модель представляє дані умови як послідовність скінченної кількості станів пацієнта: досліджуваний перебуває в одному із дискретних станів здоров'я; усі події є стрибками з одного стану в інший. Модель можна репрезентувати як деревоподібну схему клінічних подій, які можливо адекватно оцінити за допомогою моделювання Монте-Карло. У схемі трапляються так звані «вузли», які виникають при поєднанні конкретних характеристик пацієнта та подій на аналізованому відрізку часу. Результатом стане прогноз динаміки станів пацієнта при виборі певної стратегії лікування.

Наразі розроблене програмне забезпечення, яке полегшує працю лікарів та підвищує ефективність сучасних методик лікування [5, 322].

Повертаючись до поглинаючих станів, повторимось, що для того, щоб процес Маркова завершився, необхідна наявність хоча б одного стану, з якого пацієнт не може вийти. Таким станом є смерть.

Тимчасові стани виникають унаслідок подій, які тягнуть за собою тимчасові наслідки. Пацієнт перебуває у такому стані не більше одного циклу, опісля він повинен перейти до наступного. Такі стани називаються також тунельними, адже перехід можливий лише у фіксовіній послідовності.

Для прикладу можна привести вибір між хірургічним втручанням і медикаментозною терапією. Шляхом порівняльної оцінки ймовірності виживання пацієнта після кожної маніпуляції, яка б слідувала за обраним сценарієм лікування, і здійснюється прийняття рішення, від якого залежить життя і здоров'я пацієнта.

Література

1. Погоруй А.О. Вступ до теорії випадкових процесів: навчальний посібник / А.О. Погоруй, О.А. Чемерис – Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2020. – 70 с.

2. Тюрин О.В. Теорія ймовірностей і математична статистика: навч. посіб. / О.В. Тюрин, О.Ю. Ахмеров. – Одеса: Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова, 2018. – 170 с.: іл., табл. ISBN 978-617-689-287-8

3. Бобик О. І., Берегова Г. І., Копитко Б. І. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч. підручник. 2006. – 440 с.

4. Панченко Н.Г., Резуненко М.Є. Елементи дослідження операцій в управлінні процесами перевезень: Підручник. – Харків: УкрДУЗТ, 2015. – Ч. 2. – 314 с., рис. 85, табл. 82. ISBN 978-617-654-028-1

5. Sonnenberg FA, Beck JR. Markov models in medical decision making: a practical guide. Med Decis Making. 1993 Oct-Dec;13(4):322–38. doi: 10.1177/0272989X9301300409. PMID: 8246705.