МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

КАФЕДРА ПРОГРАМНИХ І КОМП’ЮТЕРНО-ІНТЕГРОВАНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Методичні вказівки з дисципліни

Динаміка складних систем

(Лабораторний практикум)

Для студентів інституту штучного інтелекту та робототехніки

Перший (бакалаврський) рівень вищої освіти

Спеціальність: 151 – Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології

Освітньо-професійна програма: Комп'ютерні технології автоматизації.

Одеса 2022

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

КАФЕДРА ПРОГРАМНИХ І КОМП’ЮТЕРНО-ІНТЕГРОВАНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Методичні вказівки з дисципліни

Динаміка складних систем

(Лабораторний практикум)

Для студентів інституту штучного інтелекту та робототехніки

Перший (бакалаврський) рівень вищої освіти

Спеціальність: 151 – Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології

Освітньо-професійна програма: Комп'ютерні технології автоматизації.

Затверджено на засіданні

кафедри програмних і комп’ютерно-інтегрованих технологій

Протокол № 7 від 26.01.2022 р.

Одеса 2022

Брунеткін, О.І. Методичні вказівки з дисципліни Динаміка складних систем. (Лабораторний практикум): для студ. напряму 151 «Автоматизацiя та комп’ютерно-iнтегрованi технологiї» денної та заочної форм навчань./ Уклад. О.І Брунеткін.; НУ «Одес. Політехніка». – Одеса, 2022. – с.68.

**Оглавление**

[**До лекції 4. Інерційна ланка першого порядку** 7](#_Toc113794183)

[**Щодо кривої розгону в довільній точці** 7](#_Toc113794184)

[**Побудова за експериментальними даними аналітичної залежності для відображення кривої розгону** 8](#_Toc113794185)

[**Принцип побудови** 8](#_Toc113794186)

[**Метод визначення коефіцієнтів апроксимуючих виразів** 11](#_Toc113794187)

[**Приклад апроксимації кривої розгону** 12](#_Toc113794188)

[**Завдання** 15](#_Toc113794189)

[**До лекції 6. Математичний маятник** 18](#_Toc113794190)

[**1. Коріння характеристичного рівняння комплексне.** 20](#_Toc113794191)

[**1.1. Опір довкілля відсутня** (p=0)**.** 21](#_Toc113794192)

[**1.2. Коливальний рух маятника в середовищі з опором** 23](#_Toc113794193)

[**2. Коріння характеристичного рівняння дійсне та рівне** 25](#_Toc113794194)

[**3. Коріння характеристичного рівняння дійсне та різноманітне** 27](#_Toc113794195)

[**4. Порівняння результатів розрахунків** 28](#_Toc113794196)

[**До лекції 8. Редукція структурних схем.** 30](#_Toc113794197)

[**Приклад 1** 30](#_Toc113794198)

[**Приклад 2** 31](#_Toc113794199)

[**ЗАВДАННЯ** 33](#_Toc113794200)

[***Розділ А*** 33](#_Toc113794201)

[***Розділ Б*** 37](#_Toc113794202)

[***Розділ В*** 39](#_Toc113794203)

[**Завдання для домашніх завдань** 40](#_Toc113794204)

[**Завдання для контрольних та самостійних робіт** 42](#_Toc113794205)

[**До лекції 10. Лінеарізація** 46](#_Toc113794206)

[**К лекции 12. Заполнение сверху цилиндрической горизонтально расположенной емкости** 49](#_Toc113794207)

[**Задачи** 53](#_Toc113794208)

[**К лекции 13. Заполнение емкости при подаче жидкости снизу** 54](#_Toc113794209)

[**Аналитическое решение** 54](#_Toc113794210)

[**Численное решение** 57](#_Toc113794211)

[**Линеаризация** 59](#_Toc113794212)

[**Задачи** 61](#_Toc113794213)

[**К лекции 13. Заполнение жидкостью замкнутой емкости** 62](#_Toc113794214)

[**Численное решение** 63](#_Toc113794215)

[**Линеаризация** 64](#_Toc113794216)

[**Задачи** 68](#_Toc113794217)

Метою дисципліни є формування у фахівців загальнокультурних, професійних компетенцій, що сприяють розвитку його соціальної мобільності, стійкості на ринку праці в галузі захисту в НС, здатності будувати власне, системне бачення світу, терпиме до інших уявлень про світобудову та сумісне з ними, але має переваги при вирішенні проблем безпеки людини в техносфері, виховання у тих, хто навчається, соціальної відповідальності за результати своєї професійної діяльності.

# **До лекції 4. Інерційна ланка першого порядку**

## **Щодо кривої розгону в довільній точці**

Розглянемо графік кривої розгону (рис.4.1), що відображає реакцію інерційної ланки першого порядку на одиничний ступінчастий вплив. У лекції 4 було показано, що якщо провести дотичну до кривої розгону на початку координат, то на асимптоті *k* вона відсіче відрізок, що дорівнює постійній часу *T*. Проведемо дотичну до цієї кривої в довільній точці, наприклад, при *t*=0.75*T*. Необхідно визначити, чому дорівнює довжина відрізка NM, що відсікається цієї дотичної на асимптоті *k*.

|  |
| --- |
|  |
| Мал. 4.1 |

Тангенс кута нахилу **α** щодо графіку функції в деякій точці дорівнює значенню похідної від функції в цій точці. Рівняння функції має вигляд:

 (4.1)

а похідна від неї:

 (4.2)

Похідна у точці *t*=0.75*T* має значення:

 (4.3)

З іншого боку, з (рис.4.1) випливає:

 (4.4)

З (рис.4.1) слід, що *MB*=*k*. Величина *DB* дорівнює значенню функції в точці торкання і визначається співвідношенням:

 (4.5)

Таким чином:

 (4.6)

Підставляючи (4.6) у (4.4):

 (4.7)

Прирівнюючи (4.3) і (4.7) можна дійти невтішного висновку:

 (4.8)

Натомість, *CD*=*NM*. Отже, дотична до будь-якої точки кривої розгону відсікає на асимптоті *k* відрізок, рівний *T*. А випадок, розглянутий у лекції 4 про дотичну до кривої розгону на початку координат, є окремим випадком по відношенню до розглянутого.

## **Побудова за експериментальними даними аналітичної залежності для відображення кривої розгону**

У лекції 4 зазначено, як можна побудувати аналітичну залежність для кривої розгону за експериментальними даними. Для цього пропонувалося приблизно («на вічко») визначити величини коефіцієнта посилення *k* та постійної часу *T*. Але в деяких випадках потрібно це зробити найкращим чином, з максимально можливою точністю.

Поняття «найкращим чином» різними людьми можна розуміти по-різному. У технічних науках щодо параметрів апроксимуючих кривих цей принцип також може бути реалізований по-різному. Одним із найчастіше використовуваних є метод найменших квадратів (МНК). Цей метод вивчається у курсі математики, викладений у багатьох літературних джерелах, різних сайтах. Він широко використовується у наукових колах. Але в інженерній практиці, незважаючи на всю його корисність, зустрічається не так часто, як того заслуговує. Це може бути обумовлено зайвою математичною формалізацією викладу методу, тоді як інженеру важливіша практична сторона реалізації. Інженеру важливо також розуміти утилітарний зміст цього методу. Розглянемо ще раз принцип побудови цього методу та його практичну реалізацію, що «найкращим» чином відображає набір експериментальних даних.

### **Принцип побудови**

Розглянемо набір даних (загалом), отриманих експериментальним шляхом. У цьому наборі залежні величини є експериментальними і заміряні при відповідних значеннях аргументів xi (табл. 4.1).

Таблиця 4.1

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | *x1* | *x2* | *x3* | *…* | *xi* | *…* | *xn* |
|  |  |  |  | *…* |  | *…* |  |

Нехай їх значення такі, що мають вигляд при відображенні на графіку, наведеному (рис.4.2).

|  |
| --- |
|  |
| Мал. 4.2 |

Експериментальні дані завжди вимірюються з деякою похибкою. Причини похибки можуть бути різними і не розглядаються (причини похибок вимірювання вивчаються у спеціальному курсі, наприклад «Метрологія»). Важливо розуміти, що зображені експериментальні точки **розташовуються близько** до графіку функції процесу, що вивчається, **але не збігаються з ним**. Досвід інженера повинен дозволити побачити, припустити за значеннями, розташування експериментальних точок на графіку, функцією якого виду може бути описаний досліджуваний процес. У цьому випадку можна припустити, що процес, що вивчається, є лінійним і його відображенням на графіку є пряма лінія (рис. 4.3).

|  |
| --- |
|  |
| Мал. 4.3 |

Як видно з (рис. 4.3), графіків, що проходять поблизу експериментальних точок може бути кілька, теоретично навіть безліч.

|  |
| --- |
|  |
| Мал. 4.4 |

Наступним кроком є вибір способу, який дозволить визначити найкращий варіант. Розглянемо експериментальні точки і з можливих графіків лінійної функції – графік прямий лінії (рис.4.4). «Один із можливих» – це означає визначити, вибрати коефіцієнти «*a*» та «*b*» рівняння прямої. Визначимо для всіх точок відхилення (різницю) між експериментальним значенням і значенням лінійної функції при тому самому значенні аргументу:

 (4.9)

Підсумуємо всі відхилення:

 (4.10)

Як найкраще можна вважати варіант, при якому буде мінімізовано значення всіх величин Δ*y*i і, в результаті, їх сума Δ*Y*→min. Але при аналізованому підході існує небезпека отримати помилкові значення коефіцієнтів «*a*» і «*b*» рівняння прямої, що оптимально описує експериментальні дані. Справа в тому, що відхилення Δ*y*i можуть мати різні знаки, як це відбувається, наприклад, для Δ*y*1 та Δ*y*n (рис. 4.4). В цьому випадку при їх додаванні може бути отримана мала величина Δ*Y* їх суми при значних абсолютних значеннях Δ*y*i. Не відповідає обраному в аналізованому методі ознаки оптимальності. Для компенсації цього недоліку складають величини не самих відхилень Δ*y*i, а їх квадрати

 (4.11)

Квадрати величин завжди позитивні. У результаті мінімум Δ*Y* гарантує і мінімум комплексу величин (Δ*y*i)2, отже, абсолютних значень Δ*y*i. Тому отримав свою назву «метод найменших квадратів».

### **Метод визначення коефіцієнтів апроксимуючих виразів**

З курсу математики відомо, що екстремум, а отже, і мінімум функції може бути знайдений шляхом прирівнювання її похідної 0. У виразі (4.11) як невідомі виступають дві величини «*a*» і «*b*». Похідну  необхідно шукати за цими величинами. Т.к. маємо дві невідомі величини, те й рівнянь їх визначення також має бути два.

Перше рівняння запишемо шляхом прирівнювання 0 похідної  по «*a*»:



 (4.12)

Друге рівняння запишемо шляхом прирівнювання 0 похідної  по «b»:



 (4.13)

Рівняння (4.12) і (4.13) представляють систему двох лінійних рівнянь із двома невідомими «*a*» та «*b*»:

 (4.14)

У цих рівняннях коефіцієнти за невідомих є сумами відомих елементів  і . Рішенням системи рівнянь виду (4.14) визначаються параметри функції (в даному випадку лінійної) якнайкраще (з мінімально можливими відхиленнями) апроксимує задані експериментальні дані.

Ще раз відзначимо всі кроки (алгоритм) методу найменших квадратів:

1. заповнюємо таблицю (виду табл. 4.1) наявними експериментальними даними;
2. дані (табл.4.1) наносимо на графік виду (рис. 4.2);
3. вибирається вид функції, яка, на думку дослідника, якнайкраще може апроксимувати наявні експериментальні дані;
4. будується рівняння виду (4.11), що записує в загальному вигляді суму квадратів відхилень;
5. залежно від кількості параметрів, що визначають вид обраної апроксимуючої функції, записується необхідна кількість рівнянь виду (4.12), 4(13), ….;
6. Вирішення системи, складеної з цих рівнянь визначає параметри обраної апроксимуючої функції.

### **Приклад апроксимації кривої розгону**

Наслідуючи алгоритм методу найменших квадратів і використовуючи зроблені вище перетворення як приклад, визначимо апроксимаційний вираз для кривої розгону.

1. Заповнимо таблицю експериментальними даними (табл. 4.2):

Таблиця 4.2

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *t* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|  | 0.000 | 0.544 | 0.989 | 1.354 | 1.652 | 1.896 | 2.096 | 2.260 | 2.394 | 2.504 | 2.594 | 2.668 | 2.728 | 2.777 | 2.818 | 2.851 | 2.878 | 2.900 | 2.918 | 2.933 | 2.945 |

1. Дані (табл. 4.2) наносимо на графік (рис. 4.5):

|  |
| --- |
|  |
| Мал. 4.5 |

1. Графік (рис.4.5) відповідає характеру реакції інерційної ланки першого порядку на одиничний ступінчастий вплив. Як апроксимуючу виберемо функцію виду:

 (4.15)

1. У табл. (4.2) записано 20 експериментальних точок. Записуємо у загальному вигляді суму квадратів відхилень (подібно до 4.11) для 20 точок:

 (4.16)

1. Вираз (4.15) визначають два параметри: "*k*" - коефіцієнт посилення; "*T*" – постійна часу. Отже, і рівнянь їх визначення має бути два. Вони будуть отримані шляхом диференціювання (4.16) окремо «*k*» і «*T*» і прирівнювання їх 0.

Продиференціюємо (4.16) «*k*»:



 (4.17)

Продиференціюємо (4.16) по «*T*»:



 (4.18)

Рівняння (4.17) і (4.18) утворюють систему двох рівнянь визначення двох невідомих «*k*» і «*T*». На відміну від рівнянь системи (4.14), вони нелінійні. Для їх вирішення необхідні спеціальні методи, що вивчаються у курсі вищої математики чи курсі чисельних методів. Запишемо цю систему у вигляді:

 (4.19)

Використовуємо наступний, може дещо громіздкий, але простий у реалізації алгоритм:

1. З графіка (рис. 4.5) можна дійти невтішного висновку, що у 95% процес стабілізації реакції об'єкта на ступінчасте вплив завершиться період між 15 і 20 секундами. Приймемо t95% = 18 секунд. За визначенням це станеться на момент часу *t*=3*T*. Звідси випливає, що T~6 секунд;
2. Використовуючи це значення *T* як поточне наближення, з першого рівняння (4.19) визначаємо поточне наближення *k*;
3. Використовуючи поточні наближення для *T* і *k* вирішується друге рівняння (4.19). Якщо значення *T* і *k* істинні, обчислення другого рівняння з (4.19) повинні дати значення, що дорівнює 0. Назвемо це значення нев'язкою. **Обчислення припиняються.** Якщо нев'язка відмінна від 0, в залежності від її знака змінюємо значення T на невелику величину. Переходимо до пункту 2.

Обчислення описаного алгоритму дали значення k=3, T=5.

### **Завдання**

У (табл. 4.3) наведені «експериментальні» дані для різних варіантів кривої розгону. Визначити коефіцієнт посилення та постійну часу процесу.

Таблиця 4.3

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | ***xвых*** | | | | | | | | | |
| ***t*** | Варіант №1 | Варіант №2 | Варіант №3 | Варіант №4 | Варіант №5 | Варіант №6 | Варіант №7 | Варіант №8 | Варіант №9 | Варіант №10 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.5 | 0.823 | 0.684 | 0.571 | 0.478 | 0.588 | 0.473 | 0.381 | 0.304 | 0.666 | 0.565 |
| 1 | 1.548 | 1.295 | 1.088 | 0.914 | 1.106 | 0.897 | 0.725 | 0.582 | 1.269 | 1.081 |
| 1.5 | 2.189 | 1.843 | 1.555 | 1.313 | 1.564 | 1.276 | 1.037 | 0.835 | 1.814 | 1.552 |
| 2 | 2.754 | 2.332 | 1.978 | 1.677 | 1.967 | 1.615 | 1.319 | 1.067 | 2.308 | 1.982 |
| 2.5 | 3.253 | 2.771 | 2.361 | 2.009 | 2.324 | 1.918 | 1.574 | 1.278 | 2.754 | 2.374 |
| 3 | 3.693 | 3.163 | 2.707 | 2.312 | 2.638 | 2.190 | 1.805 | 1.471 | 3.158 | 2.733 |
| 3.5 | 4.082 | 3.514 | 3.020 | 2.589 | 2.916 | 2.433 | 2.014 | 1.648 | 3.524 | 3.060 |
| 4 | 4.425 | 3.828 | 3.304 | 2.842 | 3.161 | 2.650 | 2.203 | 1.809 | 3.855 | 3.359 |
| 4.5 | 4.727 | 4.109 | 3.561 | 3.073 | 3.377 | 2.845 | 2.374 | 1.956 | 4.154 | 3.632 |
| 5 | 4.994 | 4.360 | 3.793 | 3.284 | 3.567 | 3.019 | 2.528 | 2.090 | 4.425 | 3.881 |
| 5.5 | 5.230 | 4.585 | 4.003 | 3.477 | 3.736 | 3.174 | 2.669 | 2.212 | 4.670 | 4.109 |
| 6 | 5.438 | 4.787 | 4.193 | 3.652 | 3.884 | 3.314 | 2.795 | 2.324 | 4.892 | 4.317 |
| 6.5 | 5.622 | 4.967 | 4.365 | 3.813 | 4.015 | 3.439 | 2.910 | 2.426 | 5.092 | 4.506 |
| 7 | 5.784 | 5.128 | 4.520 | 3.960 | 4.131 | 3.550 | 3.014 | 2.520 | 5.274 | 4.680 |
| 7.5 | 5.927 | 5.272 | 4.661 | 4.093 | 4.233 | 3.650 | 3.107 | 2.605 | 5.438 | 4.838 |
| 8 | 6.053 | 5.401 | 4.789 | 4.216 | 4.323 | 3.739 | 3.192 | 2.683 | 5.587 | 4.982 |
| 8.5 | 6.164 | 5.517 | 4.904 | 4.327 | 4.403 | 3.819 | 3.269 | 2.754 | 5.721 | 5.114 |
| 9 | 6.262 | 5.620 | 5.008 | 4.429 | 4.473 | 3.891 | 3.339 | 2.819 | 5.843 | 5.235 |
| 9.5 | 6.349 | 5.713 | 5.103 | 4.522 | 4.535 | 3.955 | 3.402 | 2.878 | 5.953 | 5.345 |
| 10 | 6.425 | 5.796 | 5.188 | 4.607 | 4.590 | 4.012 | 3.459 | 2.932 | 6.053 | 5.445 |
| 10.5 | 6.493 | 5.870 | 5.265 | 4.685 | 4.638 | 4.064 | 3.510 | 2.981 | 6.143 | 5.537 |
| 11 | 6.553 | 5.936 | 5.335 | 4.756 | 4.680 | 4.110 | 3.557 | 3.026 | 6.224 | 5.620 |
| 11.5 | 6.605 | 5.995 | 5.398 | 4.820 | 4.718 | 4.151 | 3.599 | 3.067 | 6.298 | 5.697 |
| 12 | 6.651 | 6.048 | 5.456 | 4.879 | 4.751 | 4.187 | 3.637 | 3.105 | 6.365 | 5.767 |
| 12.5 | 6.692 | 6.096 | 5.507 | 4.933 | 4.780 | 4.220 | 3.672 | 3.139 | 6.425 | 5.830 |
| 13 | 6.729 | 6.138 | 5.554 | 4.983 | 4.806 | 4.250 | 3.703 | 3.171 | 6.480 | 5.888 |
| 13.5 | 6.760 | 6.176 | 5.597 | 5.028 | 4.829 | 4.276 | 3.731 | 3.199 | 6.530 | 5.942 |
| 14 | 6.789 | 6.210 | 5.635 | 5.069 | 4.849 | 4.300 | 3.757 | 3.225 | 6.574 | 5.990 |
| 14.5 | 6.813 | 6.241 | 5.670 | 5.106 | 4.867 | 4.321 | 3.780 | 3.249 | 6.615 | 6.034 |
| 15 | 6.835 | 6.268 | 5.701 | 5.140 | 4.882 | 4.339 | 3.801 | 3.271 | 6.651 | 6.075 |
| 15.5 | 6.855 | 6.293 | 5.730 | 5.172 | 4.896 | 4.356 | 3.820 | 3.291 | 6.685 | 6.112 |
| 16 | 6.872 | 6.314 | 5.755 | 5.200 | 4.908 | 4.371 | 3.837 | 3.309 | 6.715 | 6.146 |
| 16.5 | 6.887 | 6.334 | 5.779 | 5.226 | 4.919 | 4.385 | 3.852 | 3.326 | 6.742 | 6.176 |
| 17 | 6.900 | 6.351 | 5.800 | 5.250 | 4.929 | 4.397 | 3.867 | 3.341 | 6.766 | 6.205 |
| 17.5 | 6.912 | 6.367 | 5.819 | 5.272 | 4.937 | 4.408 | 3.879 | 3.355 | 6.789 | 6.230 |
| 18 | 6.922 | 6.381 | 5.836 | 5.292 | 4.944 | 4.418 | 3.891 | 3.367 | 6.809 | 6.254 |
| 18.5 | 6.931 | 6.393 | 5.852 | 5.310 | 4.951 | 4.426 | 3.901 | 3.379 | 6.827 | 6.275 |
| 19 | 6.939 | 6.405 | 5.866 | 5.326 | 4.957 | 4.434 | 3.911 | 3.389 | 6.843 | 6.295 |
| 19.5 | 6.947 | 6.415 | 5.879 | 5.341 | 4.962 | 4.441 | 3.919 | 3.399 | 6.858 | 6.312 |
| 20 | 6.953 | 6.424 | 5.890 | 5.355 | 4.966 | 4.447 | 3.927 | 3.408 | 6.872 | 6.329 |
| 20.5 | 6.958 | 6.432 | 5.901 | 5.368 | 4.970 | 4.453 | 3.934 | 3.416 | 6.884 | 6.344 |
| 21 | 6.963 | 6.439 | 5.910 | 5.379 | 4.974 | 4.458 | 3.940 | 3.423 | 6.895 | 6.357 |
| 21.5 | 6.968 | 6.445 | 5.919 | 5.390 | 4.977 | 4.462 | 3.946 | 3.430 | 6.905 | 6.370 |
| 22 | 6.971 | 6.451 | 5.926 | 5.399 | 4.980 | 4.466 | 3.951 | 3.436 | 6.914 | 6.381 |
| 22.5 | 6.975 | 6.456 | 5.933 | 5.408 | 4.982 | 4.470 | 3.956 | 3.441 | 6.922 | 6.391 |
| 23 | 6.978 | 6.461 | 5.940 | 5.416 | 4.984 | 4.473 | 3.960 | 3.447 | 6.930 | 6.401 |
| 23.5 | 6.980 | 6.465 | 5.945 | 5.423 | 4.986 | 4.476 | 3.964 | 3.451 | 6.936 | 6.409 |
| 24 | 6.983 | 6.469 | 5.951 | 5.430 | 4.988 | 4.478 | 3.967 | 3.455 | 6.942 | 6.417 |
| 24.5 | 6.985 | 6.472 | 5.955 | 5.436 | 4.989 | 4.481 | 3.970 | 3.459 | 6.948 | 6.424 |
| 25 | 6.986 | 6.475 | 5.960 | 5.442 | 4.990 | 4.483 | 3.973 | 3.463 | 6.953 | 6.431 |
| 25.5 | 6.988 | 6.478 | 5.963 | 5.447 | 4.991 | 4.484 | 3.976 | 3.466 | 6.957 | 6.437 |
| 26 | 6.989 | 6.480 | 5.967 | 5.451 | 4.992 | 4.486 | 3.978 | 3.469 | 6.961 | 6.442 |
| 26.5 | 6.991 | 6.482 | 5.970 | 5.456 | 4.993 | 4.488 | 3.980 | 3.472 | 6.965 | 6.447 |
| 27 | 6.992 | 6.484 | 5.973 | 5.459 | 4.994 | 4.489 | 3.982 | 3.474 | 6.968 | 6.452 |
| 27.5 | 6.993 | 6.486 | 5.975 | 5.463 | 4.995 | 4.490 | 3.984 | 3.476 | 6.971 | 6.456 |
| 28 | 6.994 | 6.487 | 5.978 | 5.466 | 4.995 | 4.491 | 3.985 | 3.478 | 6.974 | 6.460 |
| 28.5 | 6.994 | 6.488 | 5.980 | 5.469 | 4.996 | 4.492 | 3.987 | 3.480 | 6.977 | 6.463 |
| 29 | 6.995 | 6.490 | 5.982 | 5.472 | 4.996 | 4.493 | 3.988 | 3.482 | 6.979 | 6.467 |
| 29.5 | 6.996 | 6.491 | 5.984 | 5.474 | 4.997 | 4.494 | 3.989 | 3.484 | 6.981 | 6.470 |
| 30 | 6.996 | 6.492 | 5.985 | 5.476 | 4.997 | 4.494 | 3.990 | 3.485 | 6.983 | 6.472 |

# **До лекції 6. Математичний маятник**

Розглянемо математичний маятник (рис. 6.1) із конкретними характеристиками. Припустимо:

* l=2 м – довжина нитки підвісу;
* m=1 кг – маса підвішеного вантажу;
* γ0=10о – початковий (максимальний) кут відхилення

|  |
| --- |
|  |
| Мал. 6.1. Математичний маятник |

Відповідно до виразів (6.16) та (6.17) (СРС, матеріали до лекції 6), рівняння, що описує рух математичного маятника за наявності опору навколишнього середовища має вигляд:

 (6.1)

Воно є нелінійним (через останнього члена) диференціальним рівнянням.

Визначимо величину максимального кута відхилення **у радіанах**. Скористаємося пропорцією:

 (6.2)

Синус цього ж кута дорівнює:

 (6.3)

Порівняння значення кута в радіанах (6.2) із значенням синуса цього кута (6.3)

 (6.4)

показує їхню відмінність менш як на 1%. Внаслідок цього в рамках забезпечення точності інженерних розрахунків у рівнянні (6.1) в останньому члені *sin*(*γ*) може бути замінений на γ і рівняння набуде вигляду:

 (6.5)

Відомо (шкільний курс геометрії), що довжина дуги *x* кола (рис. 6.1) дорівнює добутку радіуса *l* кола на кут γ (у радіанах) при вершині сектора, що спирається на цю дугу:

 (6.6)

Підставивши (6.6) (6.5) і розділивши всі члени рівняння на величину маси *m*, отримаємо:

 (6.7)

Введемо позначення:

 (6.8)

За їх урахуванням (6.7) запишеться у вигляді:

 (6.9)

Це звичайне, лінійне, однорідне (без правої частини) диференціальне рівняння другого порядку. Його вид ідентичний до рівняння (6.20) (СРС, матеріали до лекції 6). Отже, та його рішення збігаються.

Рівняння (6.9) другого порядку. Отже, після його інтегрування (рішення) з'являться дві постійні інтегрування: *C*1 і *C*2. Для їх визначення необхідні дві початкові умови – значення, які відповідатимуть рішенню в початковий момент часу.

Маятник рухається шляхом його відхилення в початковий момент часу на деякий кут γ0. Потім вона відпускається. Отже, у початковий момент часу маятник знаходиться на певній відстані *x*0 від положення рівноваги (рис. 6.1). Це і перша початкова умова. З (6.6) з урахуванням вихідних даних (початок розділу) та значення початкового кута відхилення в радіанах (6.2) випливає:

 (6.10)

і перша початкова умова набуде вигляду:

 (6.11)

При початковому відхиленні маятника на кут γ0 в момент початку його вільного руху швидкість маятника дорівнює 0:

 (6.12)

Це і є другою початковою умовою.

Вид розв'язання рівняння (6.9) залежить від виду коренів характеристичного рівняння (6.24, СРС, матеріали до лекції 6). Дотримуватимемося того самого порядку їх розгляду, як і в (СРС, матеріали до лекції 6).

## **1. Коріння характеристичного рівняння комплексне.**

Коріння характеристичного рівняння мають вигляд:

 (6.13)

Коефіцієнт *p* характеризує величину опору навколишнього середовища руху маятника. Коефіцієнт *q* характеризує величину сили, що відновлює (рухаюча сила маятника). Коріння характеристичного рівняння буде комплексним при дискримінанті менше 0:

 (6.14)

З фізичної точки зору це відповідає або відсутності сил опору навколишнього середовища руху маятника (*p* = 0), або їх малу величину. Відповідно до цього отримаємо або незагасаючі коливання ідеального математичного маятника, або спостерігатимемо хоч і загасаючі, але коливальні рухи маятника.

З математичної точки зору відповідно (6.21, СРС, матеріали до лекції 6) рішення рівняння (6.9) шукається у вигляді:

 (6.15)

Наявність комплексного коріння (6.13) і, відповідно, комплексних чисел у показнику експоненти дозволяє її записати у формі Ейлера (6.28, СРС, матеріали до лекції 6):

** (6.16)

де:

** (6.17)

Наявність тригонометричних функцій в описі рішення (6.16) забезпечує математичний опис коливального процесу.

*Проведений аналіз (6.13) - (6.17) показує, що інженер ще на етапі до отримання рішення може зробити висновок про його характер. Рішення лише додатково дозволяє визначити значення його параметрів. З результатів аналізу можна дійти невтішного висновку і межі існування коливального руху маятника. Так рівність 0 або позитивне значення дискримінанта коренів характеристичного рівняння (6.13) наказує дійсний характер цього коріння. Як наслідок у рішенні (6.15) будуть відсутні тригонометричні функції, що використовуються для опису коливального характеру руху маятника. Таким чином, рівність 0 дискримінанта (6.13) є межею існування коливань маятника:*

 (6.18)

*Звідси з урахуванням (6.14) випливає:*

 (6.19)

Розглянемо такі варіанти:

**1.1. Опір довкілля відсутня** (p=0)**.**

В цьому випадку з (6.17) випливає:

 (6.20)

З урахуванням (6.20) із (6.16) випливає:

 (6.21)

Використовуючи першу початкову умову (6.11) із (6.21) запишемо:

 (6.22)

(6.22) визначена перша стала інтегрування. Для визначення другої постійної інтегрування знайдемо похідну від (6.16) (6.30, СРС, матеріали до лекції 6):

 (6.23)

і використовуючи другу початкову умову (6.12), а також значення першої постійної інтегрування (6.22), запишемо:

 (6.24)

Знайдені значення постійних інтегрування *C*1 і *C*2 дозволяють записати загальне рішення (6.16) для окремого випадку у вигляді:

 (6.25)

Величина  (6.25) є круговою частотою і позначається як ω. З огляду на це (6.25) записується у вигляді:

 (6.26)

а вихідне диференціальне рівняння (6.9) може бути записане у вигляді:

 (6.27)

У свою чергу, використовуючи вихідні дані, (6.8) випливає:

 (6.28)

і (6.26) остаточно набуде вигляду:

 (6.29)

**1.2. Коливальний рух маятника в середовищі з опором** **.**

Виберемо значення коефіцієнта *p*, яке відповідає умові (6.19) наявності коливань маятника. З урахуванням (6.28), отримаємо:

 (6.30)

Приймемо:

 (6.31)

Повторимо перетворення (6.21) – (6.24) при цьому випадку з урахуванням (6.28). З (6.17) випливає:

** (6.32)

Підставляючи ці значення рішення (6.16), отримаємо:

** (6.33)

Для визначення *C*1 та *C*2 скористаємося початковими умовами (6.11) та (6.12). З (6.11) випливає:

** (6.34)

Далі з (6.12) та (6.23) випливають:

 (6.35)

З урахуванням (6.34) із (6.35) отримаємо:

 (6.36)

Використовуючи обчислені (6.34), (6.35) значення *C*1 і *C*2 з (6.33) маємо:

 (6.37)

Вважаючи

 (6.38)

та повторивши перетворення (6.32) – (6.37) отримано ще один вираз для опису руху маятника для коефіцієнта опору (6.38):

 (6.39)

Порівняємо характер коливального руху маятника за відсутності та наявності опору різної величини. Для цього побудуємо їх графіки на підставі рівнянь (6.29), (6.37) та (6.39) (рис. 6.2):

|  |
| --- |
|  |
| Мал. 6.2 |

* як і слід очікувати відсутність опору навколишнього середовища (*p*=0) веде до виникнення невгамовних коливань;
* навіть невелика величина *p*=0.5 коефіцієнта опору середовища веде до помітного згасання коливань (кордон між коливальним процесом та його відсутністю  (6.19), і при  (6.8) слідує );
* незначне збільшення коефіцієнта опору навколишнього середовища () веде до дуже швидкого загасання коливань.

|  |
| --- |
|  |
| *МАЛ. 6.3* |

*Останній пункт порівняння ілюструє (пояснює) цікавий реальний випадок із будівельної практики. Монтувався каркас приставних ліфтових шахт 6-поверхової будівлі (з зовнішнього боку будівлі). Кожен каркас складається з 4-х кутових стійок завдовжки ~20 м. Усього було 4 шахти. Разом 16 стійок. Фірма, яка повинна була монтувати ліфти, зажадала від монтажників металоконструкцій (що монтували ліфтові шахти) довести вертикальність кожної стійки у двох вертикальних взаємно перпендикулярних площинах (допустимість відхилення від вертикалі не більше 2-5 см по всій довжині стійки). Разом 32 виміри. Завдання було вирішено за допомогою заздалегідь встановлених біля кожної стійки схилів на всю її довжину. Виска (нитка з вантажем на кінці) фактично являє собою маятник. За такої довжини нитки підвісу коливання маятника повільно згасають. Крім того, виміри проводилися до встановлення конструкцій, що захищають, і будь-який, навіть слабкий, порив вітру розгойдував би схилі, не дозволяючи виконати виміри. Проблема була усунена збільшенням опору навколишнього середовища руху вантажів схилів шляхом поміщення кожного з них у відро з водою (рис. 6.3).*

*Робота інженера полягає в поєднанні вміння виконувати нехай і наближені розрахунки, наприклад, виду (6.39), вміння розуміти їх практичну цінність та вміння реалізовувати отримані результати розрахунків на практиці якомога простіше, наприклад як на (рис.6.3).*

## **2. Коріння характеристичного рівняння дійсне та рівне**

Така ситуація виникає за рівності нулю дискримінанта розв'язання характеристичного рівняння:

 (6.40)

У цьому випадку рішення рівняння (6.9) має вигляд (матеріали СРС, 6.40):

 (6.41)

З іншого боку, з (6.40) випливає:

 (6.42)

З урахуванням (6.8) та вихідних даних (6.42) слід:

 (6.43)

Далі з (6.40):

 (6.44)

та рішення (6.41) набуде вигляду:

 (6.45)

Знайдемо постійні інтегрування *C*1 і *C*2, виконавши перетворення, аналогічні (6.21) – (6.24). З першої початкової умови (6.11) та рішення (6.45) випливає:

 (6,46)

Для використання другої початкової умови (6.12) знайдемо похідну від (6.45):

 (6.47)

та далі з урахуванням (6.12):

 (6.48)

Використовуємо (6.46) і зрештою отримаємо:

 (6.49)

Використовуючи результати (6.46) та (6.49) рішення (6.45) запишемо у вигляді:

 (6.50)

## **3. Коріння характеристичного рівняння дійсне та різноманітне**

Така ситуація виникає при значенні дискримінанта розв'язання характеристичного рівняння більше 0

 (6.51)

З огляду на (6.43) виберемо, наприклад, *p*=6. З (6.8):

 (6.52)

Використовуючи ці дані, отримаємо значення коренів (6.51):

 (6.53)

У даному випадку дійсних різних коренів характеристичного рівняння рішення вихідного диференціального рівняння (6.9) записується у вигляді (матеріали СРС, 6.43):

 (6.54)

Знайдемо постійні інтегрування *C*1 і *C*2, виконавши перетворення, аналогічні (6.21) – (6.24). З першої початкової умови (6.11) та рішення (6.54) випливає:

 (6.55)

Для використання другої початкової умови (6.12) знайдемо похідну від (6.54):

 (6.56)

та далі з урахуванням (6.12):

 (6.57)

Рівняння (6.55) і (6.57) представляють систему двох лінійних рівнянь алгебри з двома невідомими. У цьому випадку її рішення може бути виконано наступним чином. З (6.57):

 (6.58)

Результат (6.58) підставляємо в (6.55):

 (6.59)

Підставляючи (6.59) (6.58) визначимо значення *C*1:

 (6.60)

Використовуючи результати (6.59) та (6.60) рішення (6.54) запишемо у вигляді:

 (6.61)

## **4. Порівняння результатів розрахунків**

Порівняємо характер руху маятника за відсутності та наявності опору різної величини. Для цього збудуємо їх графіки (рис.6.3) на підставі рівнянь:

* (6.29) за відсутності опору навколишнього середовища (*p*=0). Дискримінант рішення вихідного рівняння менше 0. Коріння характеристичного рівняння різні комплексні;
* (6.37) за наявності невеликого опору навколишнього середовища (*p*=0.5). Дискримінант рішення вихідного рівняння менше 0. Коріння характеристичного рівняння різні комплексні;
* (6.50) за наявності граничного значення опору навколишнього середовища (*p*~4,43). Дискримінант рішення вихідного рівняння дорівнює 0. Коріння характеристичного рівняння дійсне, однакове;
* (6.61) за наявності опору навколишнього середовища більшого, ніж граничне (*p*=6). Дискримінант рішення вихідного рівняння більше 0. Коріння характеристичного рівняння дійсне, різне.

|  |
| --- |
|  |
| Мал. 6.3 |

Графіки на (рис.6.3) свідчать про можливість різного характеру руху маятника залежно від різної величини параметрів рівняння (6.9). У реальній ситуації маятник може досягти положення рівноваги, здійснюючи затухаючі коливання (опір середовища завжди є) або перейти в положення рівноваги плавно, без коливань. Рівняння (6.9) є моделлю для опису руху такої системи як маятник. Але за допомогою такої моделі можуть бути описані зміни будь-яких величин та інших процесів (лекція 6). Отже, результати, отримані вище для дослідження руху маятника, можуть бути застосовані і для дослідження інших систем. Важливо, щоб зміна досліджуваної величини описувалася аналогічним рівнянням (6.9). У цьому полягає одна із сторін ефективності використання моделей – можливість узагальнення результатів, можливість використання одержаних результатів однією моделі для опису характеру зміни досліджуваних величин різних фізичних об'єктів.

Отримані результати ведуть ще одного висновку, важливого при їх практичному застосуванні. Наявність кордону між наявністю та відсутністю коливань (рівність нулю дискримінанта розв'язання характеристичного рівняння) дозволяє визначити характер зміни досліджуваних величин, не виконуючи рішення. Досить визначити лише знак згаданого дискримінанта. Як наслідок, можна керувати характером зміни досліджуваної величини в бажаному напрямку, змінюючи величину параметрів рівняння (6.9) (*p* і *q*) змінюючи знак дискримінанта.

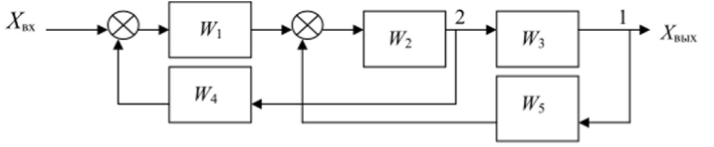
У вмінні використовувати узагальнюючі висновки, які з приватних досліджень (математичних, експериментальних) полягають знання, досвід грамотного інженера.

# **До лекції 8. Редукція структурних схем.**

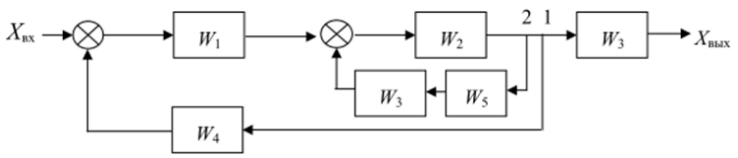
## **Приклад 1**

Перетворення структурної схеми системи з перехресним зворотним зв'язком.

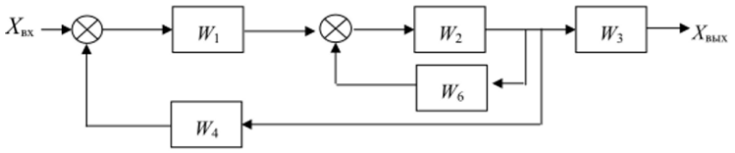
* **Вихідна схема**



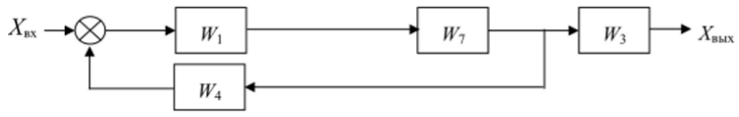
* **Для звільнення від перехресного зв'язку точка знімання дії 1 переноситься в точку 2 з додаванням у ланцюг зворотного зв'язку ланки W5 з функцією передачі W3;**



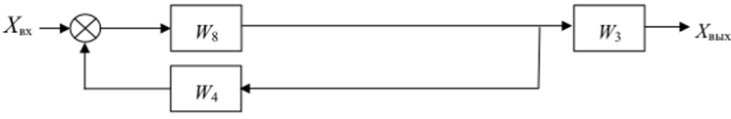
* **Передатна функція ланки W6 (послідовне з'єднання ланок з передатними функціями W3 і W5);**



* **Передаточна функція ланки W7 (охоплення ланки з функцією передачі W2 зворотним зв'язком з функцією передачі W6);**



* **Передатна функція ланки W8 (послідовне з'єднання ланок з передатними функціями W1 та W7);**



* **Передаточна функція ланки W9 (охоплення ланки з функцією передачі W8 зворотним зв'язком з функцією передачі W4);**



* **Передатна функція ланки W10 системи (послідовне з'єднання ланок з передатними функціями W9 і W3).**



## **Приклад 2**

**На цій структурній схемі зображено багатоконтурну замкнуту автоматичну систему з перехресними зв'язками. Для визначення передавальної функції необхідно перетворити структурну схему, використовуючи правила перетворення схем:**



**Позбавляємося перехресних зв'язків, помінявши місцями суматори та вузли:**



**Склавши два сигнали, що йдуть у суматор 4, та два сигнали, що йдуть у суматор 5, отримуємо наступну структурну схему**

Паралельне з'єднання ланок з передатними функціями w(p)=4/p та w(p)=3 дає нам ланку з передатною функцією w(p)=4/p+3.

Паралельне з'єднання ланок з передатними функціями w(p)=0,1p та w(p)=0,2 дає нам ланку з передатною функцією w(p)=0,1p+0,2.



**Паралельне з'єднання ланок у суматор 3 дорівнюватиме w(p)=4+4/p**



**Замінюємо зустрічно-паралельне з'єднання із суматором 1 передавальною функцією**



**і послідовне з'єднання з ланкою з передавальною функцією (4/p+4) їх загальною функцією передавання**



**в результаті отримаємо:**



**Остаточно передавальну функцію для зустрічно-паралельного з'єднання запишемо у вигляді:**



**в остаточному варіанті:**



**Ця передатна функція відповідає аперіодичному ланці з параметрами *k*=5, *Т*=3с.**

## **ЗАВДАННЯ**

### ***Розділ А***

**Завдання А1.**

Перенести вузол А зі входу ланки W2(p) з його вихід. Отримати передатну функцію замкнутої системи



**Завдання А2.**

Перенести точку програми впливу f(t) на вхід ланки з передатною функцією W2(p).



**Завдання А3.**

Перенести точку застосування обурення f(t) зі входу ланки з функцією передатки W2(p) на його вихід.



**Завдання А4.**

Спростити схему та визначити передатну функцію замкнутої системи по відношенню до задає



і обурюючий



впливів.



**Завдання А5.**

Спростити схему та визначити передатну функцію по відношенню до задає



і обурюючий



впливів.



**Завдання А6.**

Спростити схему та визначити передатну функцію по відношенню до задає і обурювального впливу.



**Завдання А7.**

Спростити структурну схему, отримати передатну функцію замкнутої системи:





**Завдання А8.**

Спростити структурну схему, отримати передатну функцію замкнутої системи:





**Завдання А9.**

Спростити структурну схему, отримати передатну функцію замкнутої системи:



**Завдання А10.**

Спростити структурну схему, отримати передатну функцію замкнутої системи:



**Завдання А11.**

Спростити структурну схему, отримати передатну функцію замкнутої системи:



### ***Розділ Б***

Розділ містить “нормальні за складністю” завдання. Завдання цікаві тим, що з перетворенні структурних схем використовується декомпозиція будь-якого структурного елемента, та був здійснюється агрегування за стандартними правилами.

**Завдання Б1.**

Визначити передатну функцію замкнутої системи по відношенню до задає *f*(*t*) і обурює *g*(*t*) впливів, попередньо спростивши схему.



**Завдання Б2.**

Перетворити цю структурну схему в типову одноконтурну із зворотним зв'язком.



Варіант 1. Визначити передатну функцію замкнутої системи



Варіант 2. Визначити передатну функцію замкнутої системи



**Завдання Б3.**

Перетворити цю структурну схему в типову одноконтурну із зворотним зв'язком.



Варіант 1. Визначити передатну функцію замкнутої системи



Варіант 2. Визначити передатну функцію замкнутої системи



**Завдання Б4.**

Перетворити цю структурну схему на типову одноконтурну



Варіант 1. Визначити передатну функцію замкнутої системи



Варіант 2. Визначити передатну функцію замкнутої системи



**Завдання Б5.**

Визначити передатну функцію замкнутої системи:





**Завдання Б6.**

Перетворити структурну схему в типову одноконтурну із зворотним зв'язком. Визначити передатну функцію замкнутої системи.



### ***Розділ В***

Розділ містить завдання підвищеної складності.

**Завдання В1.**

Перетворити структурну схему та визначити передатну функцію замкнутої системи:





**Завдання В2.**

Визначити передатну функцію системи:



Варіант 1.



Варіант 2.



### **Завдання для домашніх завдань**

У кожній задачі необхідно провести структурні перетворення та визначити передатну функцію замкнутої системи за координатами, вказаними на малюнку.

**Завдання Д1.**



**Завдання Д2.**



**Завдання Д3.**



**Завдання Д4.**



**Завдання Д5.**



**Завдання Д6.**



**Завдання Д7.**



### **Завдання для контрольних та самостійних робіт**

**Завдання К1.**



**Завдання К2.**



**Завдання К4.**



**Завдання К5.**



**Завдання К6.**



**Завдання К7.**



**Завдання К8.**



**Завдання К9.**



**Завдання К10.**



**Завдання К11.**



**Завдання К12.**



**Завдання К13.**



# **До лекції 10. Лінеарізація**

В лекції 10 при оцінці різних методів лінеаризації використовувалося рішення задачі Галілео Галілея *(італ. Galileo Galilei; 15 лютого 1564, Піза - 8 січня 1642, Арчертрі. Італійський фізик, механік, астроном, філософ, математик, що справив значний вплив)* за визначенням періоду коливань математичного маятника. Не маючи можливості використовувати апарат диференціального обчислення (на той момент він ще не був створений) рішення, нехай і наближене, було отримано з використанням простих алгебраїчних і геометричних перетворень. Це може бути добрим прикладом використання «інженерного» підходу до вирішення завдання.

В основі рішення Галілея лежить властивість руху матеріальної точки за відсутності сил опору вздовж деяких елементів кола. Час руху матеріальної точки вздовж вертикально розташованого діаметра (вільне падіння тіла) і вздовж будь-якої (довільної) хорди, проведеної з вершини цього діаметра, однакові. Доведемо це.

Розглянемо коло довільного радіусу *r* (рис. 10.1). Проведемо вертикально розташований діаметр *AB*. З його вершини проведемо довільну хорду *AC*. Кінець *C* хорди з'єднаємо з центром *O* кола. Також із кінця *C* хорди опустимо перпендикуляр *CD* на вертикально розташований діаметр *AB*.

Розглянемо Δ(*COA*). Він рівнобедрений. Його бічні сторони *CO* та *OA* є радіусами кола і рівні, відповідно, *r*. Позначимо кут вершини цього трикутника як 2α. Довжина хорди *AC* визначається із співвідношення (шкільний курс геометрії):

 (10.1)

а ∠*OAC*=∠*OCA* при основі *AC* цього трикутника:

 (10.2)

Розглянемо прямокутний Δ (*CDA*). З урахуванням (10.2) величина ∠*DCA* визначається із співвідношення:

 (10.3)

Розглянемо рух матеріальної точки масою m по похилій прямій – хорді *AC* – за відсутності сил опору під дією сили тяжіння (*mg*) – (рис. 10.2) (шкільний курс фізики, механіка). Розкладемо силу *mg* на дві взаємно перпендикулярні складові: (*mk*) вздовж *AC* – рушійна сила; (*ml*) – перпендикулярно *AC* – тиск на опору. Сила (*ml*) – скомпенсована силою реакції опори *N* –. Рух відбувається лише під дією сили (*mk*).

Δ (*mke*) - Прямокутний. ∠*DCA*=∠*mek*=α – як кути із взаємно перпендикулярними сторонами (шкільний курс геометрії). В цьому випадку величина сили (*mk*) = *mg* *sin*(α). Відповідно до другого закону Ньютона:

 (10.4)

Відповідно до рівняння кінематики (шкільний курс фізики)

 (10.5)

координата тіла щодо початку відліку через деякий час t може бути визначена за:

* відомому початковому зміщенні тіла щодо початку відліку *x*0;
* при відомій початковій швидкості руху *V*0;
* при відомому прискоренні руху *a*.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| Мал. 10.1. | Мал. 10.2 |

Зв'яжемо координату *x*, вздовж якої рухається тіло (матеріальна точка) із похилою (хордою) *AC*. Початок координат зв'яжемо з точкою *A* (рис. 10.2). Розглядаємо рух тіла із точки *A*, тобто. з початку координат. У цьому випадку (10.5) *x*0=0 і перший доданок дорівнює 0. Рух тіла починається зі стану спокою. У цьому випадку (10.5) *V*0=0 і другий доданок дорівнює 0. Залишається тільки третій доданок. Пологі координату тіла в кінці переміщення (у точці *C*) рівної довжині *AC* з (10.5) з урахуванням (10.1) і (10.4) отримаємо:

 (10.6)

або після скорочення sin(α):

 (10.7)

Вираз (10.7) показує, що час рух уздовж будь-якої хорди, проведеної з точки *A*, не залежить від довжини хорди, а визначається лише радіусом кола та прискоренням вільного падіння.

Виконаємо подібні розрахунки з використанням (10.5) та для руху тіла вздовж вертикального діаметру *AB* довжиною 2*r* з початком також у точці *A* та з прискоренням вільного падіння

 (10.8)

В цьому випадку:

 (10.9)

або зрештою:

 (10.10)

Порівняння (10.7) і (10.10) підтверджує вірність припущення про рівність часу руху тіла вздовж хорди довільної довжини (рис. 10.1) та рівність його часу вільного падіння вздовж вертикального діаметра цього ж кола.

Слід зазначити, що діаметр можна розглядати як граничний випадок хорди цього кола. Це також можна розглядати як підтвердження вірності порівняння результатів (10.7) та (10.10).

# **До лекції 12. Заповнення зверху циліндричної горизонтально розташованої ємності**

У лекції 12 розглянуто процес заповнення циліндричною рідиною горизонтально розташованої ємності. Особливістю є нерівномірна зміна висоти заповнення (глибини) навіть при подачі рідини з постійною швидкістю у трубопроводі (постійній витраті). Для визначення висоти заповнення h в залежності від часу t отримано вираз, що зв'язує ці величини:

 (12.1)

У лекції зазначено неможливість отримання аналітичної залежності *h*=*f*(*t*) через нелінійність (12.1). Побудуємо зворотну залежність *t*=*f*(*h*).

Розглянемо величини, що входять до (12.1):

* R – радіус ємності (для даного випадку постійна величина);
* *l* - Довжина утворює ємності (для випадку, що розглядається, постійна величина);
* *V*0 - початковий об'єм рідини, що вже знаходиться в ємності перед початком її заповнення;
* *S*Тр – площа перерізу трубопроводу, яким надходить рідина в ємність;
* *r* – швидкість течії рідини у трубопроводі.

Вираз у круглих дужках *Q* = (*S*Тр·*r*) є об'ємною витратою рідини в одиницю часу. Величина цього виразу може бути визначена шляхом завдання значень елементів, що входять до нього (*S*Тр і *r*) або відразу задана значенням (для розглянутого випадку постійна величина).

Виразимо з (12.1) величину *t*:

 (12.2)

|  |
| --- |
|  |
| Мал.12.1 |

Задаючи для кожного конкретного випадку значення характеристик об'єкта (*R*, *l*, *V*0 і ) і варіюючи (змінюючи) в деяких межах величину заповнення *h*, знайдемо моменти часу *t*, в які досягається це заповнення. Результати подаються як таблиці.

Грамотний інженер не відразу розпочинатиме розрахунки. Він повинен пам'ятати висловлювання Гекслі про математику як про жорна, здатні «перемолоти» будь-що. Висловлювання, що використовуються, можуть містити помилки. Використання таких виразів дозволить отримати числовий результат. Але він не буде правильним. Перед початком роботи завжди слід прагнути оцінювати коректність виразів, що використовуються.

Розглянемо випадок порожньої ємності на початок подачі рідини. І тому покладемо *V*0=0. В цьому випадку при коректності виразу (12.2) при заповненні *h* = 0 повинні отримати відповідний момент часу *t*0 = 0. Підставимо *V*0=0 і *h*=0 (12.2):

 (12.3)

Враховуючи що:

 (12.4)

з (12.3) отримаємо:

 (12.5)

Таким чином, умова *t*0=0 при *V*0=0 та *h*=0 виконується.

Розглянемо ще один крайній випадок - повне заповнення ємності за початкової умови *V*0=0. Повний обсяг ємності *πR*2·l. При постійній витраті ємність буде заповнена за час *t*пл:

 (12.6)

Визначимо, що покаже вираз (12.2) при *h*=2*R*, що відповідає повному заповненню ємності:

 (12.7)

Рівність (12.6) та (12.7) показує коректність обчислень за допомогою (12.2) та для цього крайнього випадку.

Є ще один варіант заповнення ємності, що дозволяє оцінити коректність виразу (12.2). Відповідно до (12.6) половина ємності буде заповнена за час:

 (12.8)

Через симетрію ємності при її заповненні на половину буде *h*=*R*. Використовуємо ці дані (12.2):

 (12.9)

Враховуючи що:

 (12.10)

з (12.9) отримаємо:

 (12.11)

І в цьому випадку порівнюючи (12.8) та (12.11) бачимо їх збіг. Таким чином перевірено коректність виразу (12.2) і можна приступати до обчислень за його допомогою.

Наприклад покладемо ***R*=1.5 м**, ***l*=10 м** і ***V*0=0** – ємність порожня. Задамо витрату рідини у вигляді  **= 600 л/хв** = 10 л/сек = 0,01 м3/с. Перший спосіб завдання зручний з побутової точки зору. Але для розрахунків величина витрати має бути виражена в одиницях, що відповідають системі СІ. Відповідно (рис. 12.1) глибина заповнення ємності може змінюватися в межах *h*∈[**0…2*R***], з урахуванням вихідних даних *h*∈[**0…3 м**]. Цей інтервал можна розбити на необхідну кількість частин. Для прикладу розділимо цей інтервал на 20 частин. Отримаємо крок зміни глибини заповнення Δ*h*=0.15 м. Вважаючи глибину початкового заповнення рівною *h*0=0, кожна наступна величина визначається із співвідношення:

 (12.12)

Слід звернути увагу на межі зміни індексу «*i»* (12.12). Вони забезпечують заявлені 20 частин розбиття.

Враховуючи задані значення *R*, *l*, *V*0 та (12.12) вираз (12.2) запишемо у вигляді:

 (12.13)

Час відповідно до системи СІ визначається за секунди. Результати розрахунку на підставі (12.13) представлені у табл. 12.1. Значення часу t округлені до цілих. Слід звернути увагу: весь інтервал можливої ​​глибини заповнення ємності розбитий на 20 частин, точок розрахунку 21.

Таблиця 12.1.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **№** | ***h, м*** | ***t, с*** | **№** | ***h, м*** | ***t, с*** | **№** | ***h, м*** | ***t, с*** |
| **1** | 0 | 0 | **8** | 1.05 | 2205 | **15** | 2.1 | 5285 |
| **2** | 0.15 | 132 | **9** | 1.2 | 2640 | **16** | 2.25 | 5687 |
| **3** | 0.3 | 368 | **10** | 1.35 | 3085 | **17** | 2.4 | 6062 |
| **4** | 0.45 | 665 | **11** | 1.5 | 3534 | **18** | 2.55 | 6404 |
| **5** | 0.6 | 1006 | **12** | 1.65 | 3984 | **19** | 2.7 | 6701 |
| **6** | 0.75 | 1382 | **13** | 1.8 | 4428 | **20** | 2.85 | 6936 |
| **7** | 0.9 | 1784 | **14** | 1.95 | 4864 | **21** | 3.0 | 7069 |

Отримані результати можуть бути використані по-різному:

* **Безпосередньо.** Вибираючи потрібну глибину заповнення *h*i можна визначити до якого моменту часу *t*i вона буде досягнута. Або навпаки, вибираючи момент часу можна визначити, яка глибина заповнення буде досягнута до цього моменту. Якщо необхідні значення глибини заповнення або часу в таблиці відсутні, то може бути зроблений розрахунок та заповнена таблиця при розбитті всього інтервалу глибини заповнення на більше частин, ніж використано в таблиці. Крім того, може використовуватися лінійна інтерполяція з використанням тих значень таблиці, між якими розташоване необхідне значення.
* **Графічне відображення результатів розрахунків.** Отримані результати розрахунку можуть бути відображені у графічному вигляді *t*=*f*(*h*) (рис. 12.2). Задаючи необхідне значення *h* або *t*, можна визначити відповідне йому друге значення.

|  |
| --- |
|  |
| Мал. 12.2 |

* **Апроксимація табличних даних** кривою будь-якого виду або поліномом будь-якої міри. Як аргумент може бути обрана будь-яка зі змінних *h* або *t*.

## **Завдання**

Використовуючи вихідні дані (табл.12.2) розрахувати подібно (табл. 12.1) моменти часу, до яких буде досягнуто певного ступеня заповнення циліндричної горизонтально розташованої ємності. За підсумками отриманих даних побудувати криву заповнення (рис.12.2). Визначити час, до якого буде заповнено 75% обсягу ємності.

Таблиця 12.2

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Варіант №1 | Варіант №2 | Варіант №3 | Варіант №4 | Варіант №5 | Варіант №6 | Варіант №7 | Варіант №8 | Варіант №9 | Варіант №10 |
| *R, м* | 1 | 1.2 | 1.4 | 1.6 | 1.8 | 2.0 | 2.2 | 2.4 | 2.6 | 2.8 |
| *l, м* | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 | 8 | 8 | 9 | 9 | 10 |
| *V*0, *м3* | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| *SТ*р, *м2* | 0.002 | 0.002 | 0.002 | 0.002 | 0.002 | 0.003 | 0.003 | 0.003 | 0.004 | 0.004 |
| *r*, *м*/*с* | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |

# **До лекції 13. Заповнення ємності при подачі рідини знизу**

|  |
| --- |
|  |
| Мал. 13.1 |

У лекції 13 розглянуто випадок заповнення ємності при подачі рідини в простір нижче за її рівень ємності (рис.13.1). Використані позначення описані у лекції. У загальному випадку ємність може мати форму призми, в окремому випадку - прямий призми. Насправді частіше зустрічається вертикально розташована циліндрична ємність. Така форма є узагальненням поняття "пряма призма".

***Призма*** *(лат. Prisma від давньогрецького πρίσμα «щось відпиляне») — багатогранник, дві грані якого є конгруентними (рівними) багатокутниками, що лежать у паралельних площинах, а решта граней — паралелограмами, що мають спільні сторони з цими багатокутниками. Ці паралелограми називаються* ***бічними гранями*** *призми, а два багатокутники, що залишилися, називаються її* ***основами****. Багатокутник, що лежить в основі, визначає назву призми: трикутник - трикутна призма, чотирикутник - чотирикутна; п'ятикутник - п'ятикутна (пентапрізма) і т.д. Призма є окремим випадком циліндра, в загальному сенсі (некругового).* ***Пряма призма*** *- це призма, у якої бічні ребра перпендикулярні площині основи, звідки випливає, що всі бічні грані прямокутники.*

Було побудовано математичну модель у вигляді диференціального рівняння (лекція 13, рівняння 6.52 – 6.54), що описує процес заповнення такої ємності:

 (13.1)

де

 (13.2)

Це нелінійне диференціальне рівняння. У багатьох випадках такі рівняння не мають безпосередньо аналітичного рішення та можуть бути вирішені лише за допомогою чисельних методів або шляхом аналітичного розв'язання лінеаризованих рівнянь. У цьому випадку ситуація інша. В силу простоти рівняння, в силу його спеціального виду (з змінними, що розділяються) воно має аналітичне рішення виду:

 (13.3)

Таким чином, маємо можливість отримати рішення трьома способами та порівняти їх.

## **Аналітичне рішення**

Визначимо постійну інтегрування *C*1 (13.3). Скористаємося початковими умовами. Т.к. рівняння (13.3) описує процес заповнення будь-якої миті часу, воно має бути справедливим й у початковий момент *t*=0. У цьому ємність ще порожня, рівень заповнення *h*(*t*=0)=0. Підставимо ці значення (13.3):

 (13.4)

З погляду математика обидва значення *C*1 забезпечують рішення (13.3). Але з погляду інженера можливе лише одне рішення. Яке? Інженер має визначити.

Розглянемо (13.3). З (13.4) випливає, що

 (13.5)

за будь-якого з двох можливих значень *C*1. Отже, останні два члени в дужках (13.3) звертаються в 0. Для обчислень залишається вираз:

 (13.6)

Перший доданок у дужках завжди позитивний. У другому доданку величина *K*1 – позитивна, т.к. всі величини її визначальні позитивні. Час *t* також величина позитивна. Якщо і *C*1 взяти позитивну величину +2, то другий доданок буде завжди позитивним і весь вираз у дужках буде позитивним. Але перед виразом у правій частині (13.6) стоїть знак “–“ і величина *h*(*t*) буде негативною. З погляду математика ця величина може набувати будь-яких значень, а з погляду інженера глибина заповнення має бути позитивною. Отже, в інженерних розрахунках для величини *C*1 має бути прийняте значення –2..

Задамо значення величин для визначення *K*1 та *K*2 (13.2):

 (13.7)

Значення величин, наведені у другому рядку, обговоримо пізніше.

З (13.2) з урахуванням (13.7) отримаємо:

 (13.8)

Враховуючи (13.8) та аналіз на вибір величини *C*1, з (13.4) маємо:



і, відповідно, (13.6):

 (13.9)

Результати розрахунку за формулою (13.9) наведено на (рис. 13.2) у вигляді графіка суцільною лінією.

Проаналізуємо отримані результати. З графіка видно, що зі збільшенням глибини заповнення швидкість її зміни зменшується і приблизно при *h*~13 м взагалі припиняється. **Чому так відбувається?** У лекції було показано, що величина витрати рідини через трубу, що подає, визначається різницею тисків *P*1–*P*2. Розмір *P*1 забезпечується зовнішніми умовами, наприклад наявністю насоса. В даному випадку вона задана (13.7)  Величина тиску *P*2 визначається гідростатичним тиском стовпа рідини та з урахуванням значень (13.7):

 (13.10)

|  |
| --- |
|  |
| Мал. 13.2 |

Зі збільшенням глибини заповнення збільшується *P*2, зменшується (при *P*1=const) різниця тисків *P*1–*P*2. Внаслідок цього зменшуються витрата води, що надходить, і швидкість збільшення глибини заповнення. Це свідчать результати розрахунку (рис.13.2). З (13.10) слід, що висота стовпа води *h*~10 м. (точніше *h*=10.2 м) дно створює тиск (1 бар), а при h~13 м. – . Таким чином, при *h*~13 м. величини тиску *P*2 і *P*1 вирівнюються, їх різниця *P*1-*P*2=0, надходження води та збільшення глибини заповнення припиняються. Це показує розрахунок, результати якого відображені на (рис.13.2).

Мала величина тиску *P*1 (13.7) обрана в навчальних (демонстраційних) цілях. Так було зручніше показати ефект зменшення швидкості заповнення зі збільшенням глибини заповнення при подачі рідини знизу. Для порівняння графік (рис.13.2), відображений штрихпунктирною лінією, показує динаміку заповнення при тих же параметрах системи, але за відсутності впливу глибини заповнення. Так відбувайся, наприклад, при подачі рідини зверху.

На практиці існують насоси з таким малим напором подачі, але великою витратою рідини. Такі насоси називаються витратними. Для зменшення впливу розглянутого ефекту грамотний інженер вибере напірні насоси. Вони потужніші, але й дорожчі. Вони можуть створювати тиск подачі P1 великих величин. Наприклад розглянемо варіант при:

 (13.11)

за інших постійних властивостей. Результати розрахунку відображені (рис.13.2) за допомогою графіка, відображеного точками. З нього випливає, що вже за такої величини *P*1 глибини до 16 метрів (до яких зроблено розрахунок) практично не позначаються на швидкість збільшення глибини заповнення.

## **Чисельне рішення**

У чисельних методах вирішення диференціальних рівнянь інтервал дослідження (аргумент, в даному випадку час *t*), представляється не у вигляді безперервної величини, а набором точок *t*i, розташованих на деякій відстані Δ*t* один від одного. Рішення (значення функції, у разі глибина заповнення *h*i) визначається цих точках. Диференціали у вихідному рівнянні різними способами замінюються на вирази алгебри у вигляді різниць відповідних величин.

Застосовний для вирішення (13.1) метод Ейлера. Він найпростіший. Детальний розгляд побудови чисельних методів розрахунків виходить за межі даного курсу. Познайомимося лише із загальним принципом. Це потрібно пояснення особливостей результатів чисельних розрахунків.

|  |
| --- |
|  |
| Мал. 13.3 |

Розглянемо довільну функцію *h*(*t*). У довільній точці M із координатами [*t*0, *h*(*t*0)] проведемо дотичну NK до графіка цієї функції (рис. 13.3). Кут нахилу дотичної (кут між дотичною та горизонтальною віссю) дорівнює φ. Похідна від функції *h*(*t*) у точці M дорівнює тангенсу кута нахилу φ дотичної в цій точці (геометричний зміст похідної):

 (13.12)

Збільшимо абсцис (аргумент) на Δ*t* до величини *t*0+Δ*t*. Значення функції (точка P) у цьому аргументі дорівнюватиме *h*a. Дотична NK перетне вертикальну пряму CP у точці L. Ордината цієї точки дорівнює *h*ч при тому ж значенні аргументу *t*0+ Δ*t*. Величини *h*a і *h*ч різняться. Але за зменшення величини кроку Δ*t* зміни аргументу значення *h*a і *h*ч зближуються. Наближене чисельне рішення будується на наближеній рівності значень *h*a і *h*ч при малому Δ*t*.

Запишемо, спираючись на (рис. 13.3):

 (13.13)

З іншого боку, з (13.12) та (13.1) випливають:

 (13.14)

Прирівнюючи (13.13) та (13.14), отримаємо:

 (13.15)

Останній вираз є рівнянням методу Ейлера чисельного розв'язання рівняння (13.1).

Розрахунок здійснюється за алгоритмом:

1. Вибирається початкова точка розрахунку із відомими параметрами. Наприклад, у початковий час (при *t*0=0) ємність порожня [*h*(*t*0)=0] чи має деяке початкове заповнення [*h*(*t*0)=*h*0];
2. Вибирається крок зміни аргументу (Δ*t*);
3. За допомогою виразу (13.15) визначається величина заповнення *h*1 у момент часу *t*1=*t*0+Δ*t*;
4. Обчислене значення *h*1 приймається як початковий для наступного кроку розрахунку;
5. Вибирається новий розмір зміни Δ*t* аргументу або зберігається величина з попереднього кроку розрахунку;
6. Повернення до пункту 3.

|  |
| --- |
|  |
| Мал. 13.4 |

Результати розрахунків наведено на (рис.13.4). Для порівняння чисельний розрахунок виконаний при нульовому початковому заповненні як і у разі аналітичного виразу (13.6). Як початкові прийняті значення *t*0=0, *h*(*t*0)=0. Величини параметрів *K*1 та *K*2 відповідають (13.8). Крок зміни аргументу (Δ*t*) протягом усього розрахунку залишається незмінним. Для виявлення впливу на точність розрахунків кроку зміни аргументу (Δ*t*) виконано два розрахунки:

* при Δ*t*=1000;
* при Δ*t*=4000 с.

На (рис. 13.4) суцільною (на кольоровому малюнку чорною) лінією відображено результати аналітичного розрахунку. Практично збігаються з ними результати, що відображаються штриховою (червоною) лінією. Ці результати отримані при чисельному розрахунку Δ*t* =1000 с. Штрихпунктирною лінією відображені результати чисельних розрахунків при Δ*t*=4000 с. Усі розрахунки велися до *t*=24000 с. Візуальне порівняння показує, що в даному випадку навіть при великому кроці (Δ*t* = 4000 с.) І всього 7 розрахункових вузлах наближені чисельні результати розрахунків незначно відрізняються від точних аналітичних. Зменшення кроку розрахунку та збільшення розрахункових вузлів веде практично до їхнього збігу.

Найчастіше чисельне рішення диференціальних рівнянь складніше описаного вище. Але основні засади ті самі.

## **Лінеарізація**

Найчастіше застосовується метод лінеаризації, заснований на розкладанні нелінійних елементів у ряд Тейлора біля деякої точки «*a*» (значення аргументу *t*=*a*) та збереження його елементів зі ступенем аргументу не вище за першу. Нагадаємо форму ряду Тейлора:

 (13.16)

і, відповідно, залишаємо перші два члени:

 (13.17)

Якщо розкладання ведеться навколо (прив'язано до) точки *a* = 0, отримуємо ряд Маклорена:

 (13.18)

Тут *f*(*t*) – нелінійна частина виразу, що перетворюється.

У рівнянні (13.1) нелінійною частиною є вираз:

 (13.19)

Лінеаризуємо його відповідно до (13.17). Знайдемо похідну для (13.19):



Враховуючи що:



і підставляючи (13.20) замість  вираз (13.1), отримаємо:

 (13.20)

З (13.17) з урахуванням (13.20) маємо:

 (13.21)

З урахуванням (13.21) вихідне диференціальне рівняння (13.1) запишеться у вигляді:

 (13.22)

При вирішенні завдання заповнення ємності величина заповнення відома лише початковий момент. Навколо цієї точки може бути виконана лінеаризація і записано лінеаризоване рівняння (13.22). Для порівняння з результатами аналітичного рішення вважатимемо у початковий момент ємність порожньою:

 (13.23)

З урахуванням (13.23) із (13.22) отримаємо лінеаризоване диференціальне рівняння:

 (13.24)

Це просте диференціальне рівняння з змінними, що розділяються. Його рішення має вигляд:

 (13.25)

Після інтегрування:

 (13.26)

Розглянемо лінеаризоване біля точки «0» (13.24) та вихідне (13.1) диференціальні рівняння. Порівняємо їх рішення (13.26) та (13.9). Вони збігаються. Це рідкісний випадок. Зазвичай рішення, якщо вони є різні. Рішення лінеаризованого рівняння близьке до вирішення вихідного нелінійного рівняння лише близько точки лінеаризації на певному інтервалі зміни аргументу. Рівняння (13.1) стало зручним прикладом для демонстрації трьох способів розв'язання (аналітичного, чисельного, за допомогою лінеаризації вихідного рівняння) та порівняння їх результатів.

## **Завдання**

Використовуючи вихідні дані (табл.13.1) виконати розрахунок та побудувати графіки, що ілюструють заповнення ємності водою (). Місткість може мати початкове заповнення, що визначається початковою глибиною заповнення *h*0. Дослідження виконати за допомогою аналітичного та чисельного методів, а також за допомогою лінеаризації вихідного диференціального рівняння.

Таблиця 13.1

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Вариант №1 | Вариант №2 | Вариант №3 | Вариант №4 | Вариант №5 | Вариант №6 | Вариант №7 | Вариант №8 | Вариант №9 | Вариант №10 |
| *μ* | 0.7 | 0.6 | 0.8 | 0.65 | 0.75 | 0.7 | 0.6 | 0.8 | 0.65 | 0.75 |
| *h0, м* | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 |
|  | 1·10-4 | 1.1·10-4 | 1.2·10-4 | 1.3·10-4 | 1.4·10-4 | 1.5·10-4 | 1.6·10-4 | 1.7·10-4 | 1.8·10-4 | 1.9·10-4 |
| *P1, Па* | 1.3·105 | 1.4·105 | 1.5·105 | 1.6·105 | 1.7·105 | 1.3·105 | 1.4·105 | 1.5·105 | 1.6·105 | 1.7·105 |

# **До лекції 13. Заповнення рідиною замкнутої ємності**

|  |
| --- |
|  |
| Мал.13.5 |

У лекції 13 розглянуто випадок заповнення **закритої** ємності. При цьому не враховувалося впливу стовпа рідини, але враховувалося зменшення обсягу газу (повітря) і, відповідно, збільшення тиску в ньому в міру збільшення заповнення. Температура газу прийнята незмінною (ізотермічний процес). Газ ідеальний. Форма ємності відповідає умовам (рис. 13.1) та схематично зображена на (рис. 13.5). Також, як і у разі заповнення ємності знизу, величина тиску *P*2 стане рівною величині *P*1 та заповнення припиниться. Особливість процесу, що розглядається, є припинення заповнення для будь-якої ємності і для насоса будь-якої потужності.

З урахуванням зазначених умов отримано нелінійне диференціальне рівняння (лекція 13 (6.63)), що описує процес заповнення:

 (13.27)

Тут, як і у разі заповнення ємності знизу (13.7):

 (13.28)

*h0 -* Початкова глибина заповнення ємності перед подачею рідини;

*h0=*0 при порожній ємності перед початком заповнення;

Як приклад покладемо для розрахунків:

 (13.29)

Тут *P*0 – початковий (перед початком заповнення ємності) тиск у газовому обсязі. Прийнято приблизно рівним атмосферному тиску; *P*1 - тиск на вході в патрубок, що подає; *l* – висота ємності.

Рівняння (13.27) немає аналітичного рішення в елементарних функціях (у разі його вдалося знайти). Залишається лише два з розглянутих раніше методи вирішення: чисельний та шляхом лінеаризації.

## **Чисельне рішення**

За аналогією з (13.15) дискретний аналог для чисельного рішення методом Ейлера диференціального рівняння (13.27) має вигляд:

 (13.30)

З урахуванням (13.28) та (13.29) маємо:

 (13.31)

|  |
| --- |
|  |
| Мал.13.6 |

На (рис. 13.6) наведено результати чисельного розрахунку за двох різних кроків зміни аргументу. Графік, зображений суцільною лінією, відповідає Δ*t*=1 c. Графік, зображений штриховою лінією (на кольоровому малюнку – червоним), відповідає Δ*t*=20 c. Близькі значення результатів розрахунків свідчить про можливість отримання прийнятного результату та на грубій розрахунковій сітці (при великому Δ*t*). Слід мати на увазі, що це справедливо тільки для гладких функцій (які не мають різких змін). У багатьох реальних випадках може знадобитися дрібний, або навіть дуже дрібний крок розрахунку. Щоразу це визначається з досвіду шляхом декількох варіантів розрахунків з різними кроками.

## **Лінеарізація**

Виконаємо лінеаризацію вихідного нелінійного диференціального рівняння (13.27) відповідно до процедури, викладеної раніше.

Вихідне рівняння:

 (13.32)

Виділимо нелінійну частину вихідного рівняння:

 (13.33)

Знайдемо похідну від цього виразу:

 (13.34)

Враховуючи що:



підставимо в (13.34) вираз (13.32):

 (13.35)

Лінеаризацію виразу (13.33) виконаємо для довільної точки *t*=*a* відповідно до (13.17):

 (13.36)

З (13.36) з урахуванням (13.33) та (13.35) отримаємо:

 (13.37)

З урахуванням (13.37) вихідне диференціальне рівняння (13.32) запишеться у лінеаризованому вигляді:

 (13.38)

Вираз (13.38) є загальним видом лінеаризації вихідного рівняння (13.32) навколо лінеаризації точки *t*=*a*.

Також, як і у разі рівняння (13.24), рівняння (13.38) є простим диференціальним рівнянням з змінними, що розділяються. Його рішення має вигляд:

 (13.39)

Після інтегрування:

 (13.40)

Тут *C* – стала інтегрування. Це загальний вид вирішення вихідного нелінійного диференціального рівняння (13.32) після його лінеаризації у точці «*a*».

Для визначення значення постійної інтегрування «C» та реалізації рішення (13.40) необхідно знати величину шуканої функції (в даному випадку величину заповнення ємності) при актуальному значенні аргументу (в даному випадку в даний момент часу). Як правило, ця величина відома тільки при початковому значенні аргументу (в даному випадку в початковий момент часу). Розглянемо випадок порожньої ємності у початковий час (*a*=0). Іншими словами виконаємо лінеаризацію у початковий момент часу і при цьому:

 (13.41)

За наявності чисельного рішення можуть бути використані його результати для отримання аналітичного рішення лінеаризованого рівняння довільного аргументу. Для прикладу та порівняння з випадком (13.41) розглянемо, наприклад, випадок при *a* = 110 с. Тобто отримаємо аналітичне рішення, що описує процес заповнення ємності близько моменту часу 110 секунд. З чисельного рішення (13.30) випливає:

 (13.42)

на 110 секунді процесу величина глибини заповнення ємності становить 1.24 метри.

Для випадку (13.41) з (13.40) маємо:

 (13.43)

З урахуванням (13.41) та (13.43) з (13.40) випливають:

 (13.44)

та з урахуванням (13.29) та (13,31) в остаточному вигляді отримаємо:

 (13.45)

Виконаємо такі перетворення для випадку (13.42). З урахуванням (13.29) та (13,31) обчислимо коефіцієнти для (13.40):

 (13.46)

З урахуванням цих значень та (13.42) з (13.40) отримаємо:

 (13.47)

Використовуючи значення (13.46) та (13.47) з (13.40) в остаточному вигляді отримаємо:

 (13.48)

|  |
| --- |
|  |
| Мал. 13.7 |

Зіставимо результати розрахунку за формулами (13.45) та (13.48). На (рис.13.7) результати чисельного розрахунку (вважатимемо його базовим) відображені у вигляді графіка суцільною лінією, а результати розрахунку за (13.45) – штриховою (на кольоровому малюнку – червоною) лінією. З малюнка видно, що графіки збігаються за *t*=0. У міру збільшення *t* розбіжність між графіками збільшується, але на деякій відстані від *t* = 0 воно мало.

На (рис.13.8) наведено результати розрахунку за формулою (13.48), отриманої на основі лінеаризації вихідного рівняння (13.32) у точці *t*=110 секунд. На цьому малюнку, як і в попередньому випадку, результати чисельного розрахунку відображені у вигляді графіка суцільною лінією, а результати розрахунку (13.48) – штрих-пунктирною (на кольоровому малюнку – синьою) лінією. З малюнка видно, що графіки збігаються у точці лінеаризації, при *t*=110 секунд. На деякій відстані від цієї точки як при *t*>110 с., так і при *t*<110 с. графіки близькі. Але в міру віддалення точки лінеаризації розбіжність збільшується.

|  |
| --- |
|  |
| Мал.13.8 |

Наведені результати дозволяють зробити такі висновки:

* чисельні методи при досить малих кроках розрахунку дозволяють отримати прийнятні результати у всьому діапазоні зміни аргументу, але в окремих точках – розрахункових вузлах – подібно до того, як це відбувається в експерименті. Тому результати чисельних розрахунків часто називають чисельним експериментом;
* при необхідності мати для розрахунків аналітичний вираз, він може бути отриманий для деякого діапазону зміни аргументу шляхом лінеаризації в потрібній точці нелінійних елементів вихідного рівняння. Точне значення досягається лише у точці лінеаризації. Невеликі відхилення від справжнього значення забезпечуються у певному діапазоні зміни аргументу. Діапазон зміни аргументу, в якому відхилення значень лінеаризованої функції від значень, наприклад чисельних розрахунків або експериментальних даних, у кожному випадку визначається індивідуально.

## **Завдання**

Використовуючи вихідні дані (табл.13.2) виконати розрахунок та побудувати графіки, що ілюструють заповнення ємності водою (). Місткість може мати початкове заповнення, що визначається початковою глибиною заповнення *h*0. Висота ємності *l*=2 м. *P*0=1·105 Па – початковий (перед початком заповнення ємності) тиск у газовому обсязі. Дослідження виконати з допомогою чисельного методу, і навіть з допомогою лінеаризації вихідного диференціального рівняння.

Таблиця 13.2

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Варіант №1 | Варіант №2 | Варіант №3 | Варіант №4 | Варіант №5 | Варіант №6 | Варіант №7 | Варіант №8 | Варіант №9 | Варіант №10 |
| *μ* | 0.7 | 0.6 | 0.8 | 0.65 | 0.75 | 0.7 | 0.6 | 0.8 | 0.65 | 0.75 |
| *h0, м* | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 |
|  | 1·10-4 | 1.1·10-4 | 1.2·10-4 | 1.3·10-4 | 1.4·10-4 | 1.5·10-4 | 1.6·10-4 | 1.7·10-4 | 1.8·10-4 | 1.9·10-4 |
| *P1, Па* | 3·105 | 3.5·105 | 4·105 | 4.5·105 | 5·105 | 3·105 | 3.5·105 | 4·105 | 4.5·105 | 5·105 |