Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

«ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА»

Навчальний посібник
для здобувачів вищої освіти за спеціальністю 122 – Комп'ютерні науки

Одеса – 2023

Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

«ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА»

Навчальний посібник
для здобувачів вищої освіти за спеціальністю 122 – Комп’ютерні науки

Затверджено на засіданні
кафедри інформаційних технологій
проектування та дизайну
Протокол № 8 від 13.04.2023 року

Одеса – 2023

Навчальний посібник з дисципліни «Дискретна математика» для здобувачів спеціальності 122 – Комп’ютерні науки / Укл.: Л.В. Бовнегра, В.В. Грібова, К.Г. Кіркопуло. Одеса: Нац. ун-т «Одеська політехніка», 2023. – 120 с.

Укладачі:
Л.В. Бовнегра, к.т.н., приват-професор
В.В. Грібова, к.ф-м.н., доцент
К.Г. Кіркопуло, PhD, доцент

ЗМІСТ

ВСТУП

Обмін інформацією в системах комп'ютерної обробки здійснюється за допомогою сигналів, носіями яких можуть бути будь-які фізичні величини, такі як струм, напруга й т. і. Розрізняють такі види сигналів: аналогові (неперервні) сигнали й дискретні сигнали. Усередині заданого діапазону в довільний момент часу вони набувають будь-яких значень і змінюються згідно з тим чи іншим правилом, тобто є неперервними функціями часу.

Параметри такого сигналу можуть змінюватися стрибкоподібно і набувати лише певних значень у дискретні моменти часу. Це призводить до того, що перешкодам при невеликому їх рівні досить важко спотворити сигнал, оскільки він змінюється лише тоді, коли їх рівень досягне певної межі. Крім того, дискретні сигнали простіше зберігаються й обробляються, і тому сьогодні вони мають більш широке практичне застосування, ніж неперервні.

Існують два види дискретних сигналів:

1. Дискретні сигнали, отримані способом дискретизації неперервних сигналів.

2. Дискретні сигнали, подані у вигляді кодових комбінацій - слів.

Останні є найбільш універсальними й поширеними. Вони широко застосовуються для обробки інформації в практичній і теоретичній діяльності людини. Це спричинило появу дискретної математики, основною особливістю якої є відсутність у її задачах граничного переходу і неперервності, притаманних класичній математиці.

Означення 1. Дискретна математика це наука про способи побудови та ефективної обробки слів - послідовностей літер $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \dots, \mathrm{a}_\mathrm{n}$, породжуваних відповідно до заданих правил деяким алфавітом В = $b_1, b_2, \dots, b_n$, $\mathrm{a}_\mathrm{i} \in B$. Самі слова у свою чергу кодують об'єкти навколишнього світу.

Оскільки більшість дискретних пристроїв здійснює переробку інформації, що подається у вигляді слів, то дискретна математика знаходить широке застосування при їх побудові. Використання слів для кодування інформації не накладає обмежень на сферу застосування дискретних пристроїв, оскільки неперервна інформація може бути з будь-якою точністю апроксимована дискретними сигналами.

Найчастіше використовуються дискретні пристрої, в яких сигнали мають два різних рівня. Це пов'язане з простотою фізичної реалізації таких пристроїв, міркуваннями щодо їх надійності й простоти виконання логічних і арифметичних операцій. Одному з рівнів при цьому присвоюється знак 0, а другому - 1, і, таким чином, пристрій здійснює обробку двійкової інформації - слів у алфавіті $B = \{0,1\}$. Завдяки зазначеним перевагам дискретні пристрої з двійковою інформацією сьогодні займають домінуюче положення в галузі передачі та обробки інформації. Судячи з усього, в перспективі роль цих пристроїв буде тільки зростати.

Електронні обчислювальні машини (ЕОМ) були спочатку аналоговими. Сьогодні цифрові ЕОМ практично витіснили аналогові. Те ж саме відбувається з приймачами, телевізорами та іншими інформаційними пристроями. Протягом найближчих років цифрова електроніка займатиме монопольне положення на ринку електронних систем і пристроїв.

Проте цифрова техніка витіснити аналогову не спроможна в принципі, оскільки фізичні об'єкти, від яких цифрові ЕОМ отримують інформацію, а також об'єкти керування звичайно мають аналогову природу. Тому на вході й виході цифрових ЕОМ потрібні аналогові, цифро-аналогові і аналого-цифрові пристрої. Крім того, часто в найвідповідальніших місцях цифрових схем використовуються аналогові елементи.

Аналогова електроніка має також неперевершену швидкодію, що обмежується тільки швидкістю фізичних процесів, і, як наслідок, її значення зовсім не зменшується, незважаючи на те, що питома вага аналогової електроніки спадає. Тому "неперервна" математика в освіті фахівця з електроніки та автоматики не втрачає свого значення, хоча роль дискретної математики при цьому постійно зростає.

Дискретна математика, крім її застосування для побудови універсальних електронних цифрових пристроїв та систем, також широко використовується для створення та експлуатації комплексних автоматизованих систем обробки інформації, пакетів прикладних програм, банків даних, мікропроцесорних систем спеціального призначення, мереж передачі даних. Тому в наш час методи й засоби дискретної математики розвиваються досить інтенсивно.

Дискретна математика охоплює теорію множин і алгебраїчних систем, математичну логіку, теорію графів, теорію автоматів і формальних граматик, теорію алгоритмів, а також теорію кодування, теорію чисел, комбінаторні обчислення, рішення дискретних екстремальних задач. Серед перелічених розділів дискретної математики особливо вирізняються дискретні задачі на побудову, перебір та нумерацію дискретних об'єктів. Багато інших задач або зводяться до них, або містять їх в явному чи неявному вигляді. До появи обчислювальної техніки ці задачі не мали особливого практичного значення, оскільки для розв'язань задач малої розмірності відшукувались алгоритми, які не потребували великої кількості обчислень, а для розв'язань задач великої розмірності, що потребували значно більшої кількості обчислень, не було технічних засобів їх реалізації.

Особливі труднощі для розв'язування багатьох дискретних задач спричинені відсутністю основоположних теорем, з котрих випливали б методи й алгоритми їх розв'язання. Їх розроблення є однією з центральних проблем теорії дискретної математики.

На сьогодні у сфері розв'язання дискретних задач сформульовані лише загальні принципи, що об'єднують дискретні алгоритми в окрему галузь знань. Це методи універсального розв'язування задач, пошуків з поверненням. Але безпосереднє застосування цих методів, як правило, веде до алгоритмів, робота з якими потребує багато часу. Тому на практиці широке застосування знаходять евристичні прийоми розв'язання дискретних задач. Їх недолік – вузька сфера застосування, що призводить до необхідності пошуків розв'язків дискретної задачі для кожного конкретного випадку. Однак навіть ці розв'язання мають велику цінність, оскільки дозволяють у разі їх використання підвищити ефективність цифрових систем і пристроїв.

Особливе значення в практичній електроніці мають методи логічного синтезу й комбінаторики, на які звертається особлива увага. Основу цих методів становить теорія множин, елементарні розділи якої є теоретичною базою даного посібника.

Викладений в посібнику матеріал так чи інакше раніше використовувався як вступні лекції в спеціальних технічних курсах, тому ця книга є не тільки підручником з дискретної математики, а й допоміжним посібником при викладенні спеціальних дисциплін.

ЧАСТИНА 1. МНОЖИНИ

РОЗДІЛ 1. ТЕОРІЯ МНОЖИН. ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ

Під множиною зазвичай розуміють об'єднання в одне ціле об’єктів, що добре розрізняються нашою думкою або інтуїцією.

Об'єкти, що утворюють множину, будемо називати елементами множини. Елементи звичайно позначаються малими літерами латинського алфавіту, а множини великими. Якщо m елемент, який належить множині M, то використовується запис $m \in M$, у протилежному випадку $m \notin M$. Читається так: m належить (не належить) M.

Множина, яка містить скінченне число елементів, називається скінченною, а множина, що містить нескінченне число елементів, – нескінченною.

Множина може задаватися різними способами: перерахуванням елементів для скінченної множини або зазначенням їх властивостей. У разі перерахування використовуються фігурні дужки { }. Наприклад, множину *M* цифр десяткового алфавіту можна задати у вигляді

M = {0, 1,..., 9}.

Цю ж саму множину можна задати й інакше, як *M* = $\{\, i | i - \text{ціле}, 0 \leq i \leq 9 \,\}$, де справа від вертикальної риски зазначається властивість елементів цієї множини.

Якщо ж множина *M* є множиною, наприклад, парних чисел, то вона записується як

M= $\{m | m - \textit{парне число}\}$.

Іноді нескінченні множини задаються простим перерахуванням кількох перших елементів, і тоді характеристична властивість є заданою в неявному вигляді. Наприклад, множину парних чисел можна задати у вигляді *A* = {2, 4, 6, 8,. . .}.

Для того, щоб позначити множину всіх предметів, що є елементами множини *A* і мають властивість *P,* замість (x | x ∈ A і P(x)} часто пишуть {x ∈ A | P(x)}.

Наприклад, $\{x \in R | 0 \leq x \leq 1\}$ означає множину всіх дійсних чисел між 0 та 1 включно, а $x \in Q^{+} | x^2 < 2$ - множину всіх додатних раціональних чисел, квадрати яких менші за число 2.

Множина *M’* називається підмножиною множини *M* тоді й лише тоді, коли будь-який елемент множини *M’* належить до множини *M*. Якщо при цьому припускається, що множини *M’* і *M* можуть збігатися, тобто *M’* може дорівнювати *M*, то тоді пишуть, що $M' \subseteq M$, де ⊆ - знак включення підмножини.

Множина *A*, що строго включена до *B*, позначається як $A \subset B$ Це означає, що *B* містить і інші елементи, крім елементів *A* і це особливо підкреслюється.

Дві множини рівні в тому і лише в тому разі, коли вони складаються з одних і тих самих елементів. Тому будь яка множина *X* = *X*.

Рівність двох множин X і Y позначається через *X* = Y, а нерівність множин *X* і *Y* - через

X ≠ Y. Для будь-яких рівних множин X, Y і X, Y, Z виконуються умови:

1.Якщо X = Y, то Y = X;

2. Якщо X = Y, Y = Z, то X = Z.

Порядок елементів у множині не є суттєвим. Множини {3, 4, 5, 6} і {4, 5, 6, 3} являють собою одну й ту саму множину.

Множини не містять однакових елементів. Так, множина простих дільників числа 60 дорівнює {2, 3, 5}, а не {2, 2, 3, 5}.

Слід розрізняти об'єкт і множину, єдиним елементом якої є цей об'єкт. Так множина $\{1, 2\}$ становить об'єкт, який є елементом множини $\{\{1, 2\}\}$. Множини $\{\{1, 2\}\}$ і $\{1, 2\}$ не рівні, оскільки перша – одноелементна множина, що має єдиний елемент $\{1, 2\}$, а друга має два елементи 1 і 2.

Якщо множина не містить жодного елемента, то вона називається порожньою і позначається $\emptyset$. Інколи її називають ще пустою множиною. Наприклад, множина трикутників з двома прямими кутами є порожньою. Також множина простих чисел, які діляться на число чотири, є порожньою. Але множина $\{\emptyset\}$ не є порожньою, тобто $\emptyset \neq \{\emptyset\}$; ця множина є одноелементною. Її єдиним елементом є порожня множина.

Теорема 1. Порожня множина є підмножиною будь-якої іншої множини.

Доведення. Щоб встановити це, потрібно довести, що в тому випадку, коли A є довільною множиною, кожний елемент множини $\emptyset$ є елементом множини A. Оскільки $\emptyset$ не мас елементів, то ця умова виконана.

Інше доведення. Припустимо, що $\emptyset \subseteq$ A - хибне твердження. Це може бути лише в тому разі, якщо існує деякий елемент множини $\emptyset$, що не є елементом множини A. Але це неможливо, оскільки $\emptyset$ не має елементів. Отже, умова $\emptyset \subseteq$ A не є хибною, тобто $\emptyset \subseteq$ A .

Теорему доведено.

Порожня множина відіграє значну роль в науці. Кількість елементів у порожній множині дорівнює нулю. А нуль має особливе значення в математиці і техніці. Без нього, наприклад, не можна побудувати позиційні системи числення, а без них – сучасну обчислювальну техніку. Тому до порожньої множини слід ставитися як до базової множини.

З теореми 1 випливає, що кожна множина $A \neq \emptyset$ має, принаймні, дві підмножини: А і $\emptyset$.

Оскільки будь-яка множина є своєю підмножиною $A \subseteq A$, то і $\emptyset \subseteq \emptyset$.

Кожний елемент а множини А визначає деяку її підмножину. Це означає, що якщо $a \in A$, то і $\{a\} \subseteq A$. Поєднання двох будь-яких випадково взятих елементів множини А також створює її підмножину. Таких підмножин може бути декілька, і їх кількість визначається числом різних поєднань чи комбінацій з двох елементів, узятих із множини А. Тобто, якщо число елементів множини А дорівнює трьом, хай це будуть елементи 1, 2, 3, то можливі такі поєднання двох елементів із трьох: 1,2; 1,3; 2, 3.

Також будь-які три елементи множини А створюють її підмножину. Кількість таких трьохелементних підмножин визначається числом різних комбінацій трьох елементів з числа елементів n множини А. Далі, якщо n більше від трьох, можна визначити число комбінацій чотирьох, п'яти і більшого числа елементів множини А з n. У загальному випадку число комбінацій і елементів з п позначається символом C_n^i , $i = 0,1, \dots, n$. Ці комбінації називаються ще сполученнями. Тобто сполучення - це будь-яка і-елементна підмножина n-елементної множини.

Усі підмножини множини А, які складаються з n елементів, створюють множину, що називається множиною-степенем, або булеаном множини А і позначається Р(А) або В(А). Якщо, наприклад, А = {1, 2, 3}, то множина-степінь

$$P(A)= \{\{1, 2, 3\},\{1, 2\},\{1, 3\},\{2, 3\},\{1\},\{2\},\{3\},\{\emptyset\}\}.$$

Теорема 2. Множина-степінь Р(А) множини $A = \{a_1\ , a_2, \dots, a_n\}$ має 2^n різних підмножин.

Доведення. Перший елемент, який вибирається, може входити, а може і не входити в підмножину, що будується. Тобто для цього елемента є дві альтернативи – увійти або не ввійти в підмножину. Для другого елемента залишаються ті ж самі дві альтернативи, і це буде властиве всім елементам до останнього із загального їх числа n. Якщо перемножити тепер дві перші альтернативи на дві другі, і так n раз, то отримаємо потрібний результат – 2^n.

Теорему доведено.

При цьому в одному випадку жоден елемент множини А не зможе ввійти в підмножину, яку будують, а в іншому зможуть увійти всі. У першому з цих випадків маємо справу з порожньою чи пустою множиною, а в другому – з множиною А.

Наслідок. Число підмножин множини А, що містять і = 0, 1, ..., n елементів, визначається відповідно числом сполучень 0, 1, ..., n елементів з n. Тому загальне число підмножин дорівнюватиме сумі чисел цих сполучень, тобто 2^n: $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$

Множина-степінь має прикладне значення в інформатиці й цифровій техніці. Наприклад, з її допомогою можна побудувати всі n- розрядні двійкові числа або всі рівноважні коди довжини n. Цим частково пояснюється та увага, яка приділяється даній множині, в підручниках і посібниках з дискретної математики.

Розглянемо відповідно до викладеного матеріалу приклади.

Приклад 1. Довести, що множина А всіх додатних парних цілих чисел дорівнює множині В усіх додатних цілих чисел, що подаються як сума двох додатних непарних цілих чисел.

Розв язання. Припустимо, що $x \in A$, і доведемо, що $x \in B$. Якщо $x \in A$, то $x = 2m$, або $x = (2m - 1) + 1$. Це означає, що $x \in B$. Припустимо тепер, що $x \in B$, і виведемо звідси, що $x \in A$. Якщо $x \in B$, то $x = (2p-1) + (2q-1)$, звідки $x = 2(p + q - 1)$, з чого випливає, що $x \in A$.

Таким чином, ми довели, що множини A і B складаються з одних і тих самих елементів, отже доведення отримане.

Приклад 2. Чи є множини {2, 4, 6}, {2, 6, 4} рівними?

Розв'язання. Оскільки множини {2, 4, 6} і {2, 6, 4} складаються з одних і тих самих елементів, то вони будуть рівними.

Приклад 3. Чи є множини {{1, 2}, {2, 3}},{1, 2, 3} і {1, 2, {3}} рівними?

Розв'язання. Ні, не будуть, оскільки елементами першої множини будуть елементи {1, 2} і {2, 3}, другої - 1, 2, 3 і третьої - 1, 2,{3}.

Приклад 4. Чи є множини {{1, 2}} і {1, 2} рівними?

Розв'язання. Ні, не є рівними, оскільки перша – одноелементна множина, що має своїм єдиним елементом {1, 2}, а друга має своїми елементами 1 і 2.

Приклад 5. Чи правильно, що $\{1, 2\} \in \{\{1, 2, 3\}, \{1,3\}, \{1,2\}\}$?

Розв'язання. Ні, не правильно, оскільки в правій множині відсутній елемент {1,2}.

ЗАВДАННЯ

1. Які з наведених нижче тверджень правильні, а які ні:

а) якщо $A \neq B$ і $B \neq C$, то $A \neq C$;

б) якщо $A \subset B$ і $B \subseteq C$, то невірно, що $C \subseteq A$;

в) якщо $A \subseteq B$ і $B \subset C$, то $A \subseteq C$?

2. Перелічити всі елементи множини A = {{1,2},{3},1}.

3. Довести істинність кожного з тверджень для довільних множин A, B і C:

а) якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$;

б) якщо $A \subseteq B$ і $B \subset C$, то $A \subset C$;

в) якщо $A \subset B$ і $B \subset C$, то $A \subset C$.

4. Які з наведених нижче співвідношень хибні і чому:

а) $x \in \{2, a, x\}$;

б) 3 є {1, {2, 3},4};

в) $\{x,y\} \in \{a, \{x,y\}, b\}$?

5. Чи рівні між собою множини:

а) A ={2, 5,4}   B ={5, 4, 2};

б) A={1,2, 3}   B ={1, 2, 4};

в) A ={2, 4, 5}   B ={2, 4, 3};

г) A= {1,(2,5}, 6}   B ={1, {5, 2};

д) A={1,(2,5}, 6}   B= {1, 2, 5, 6}?

6. Як співвідносяться між собою такі множини: A = {1, 3}; B – множина непарних додатних чисел; C – множина розв'язків рівняння x^2 - 4x + 3 = 0?

7. Для множини перших 20 натуральних чисел запишіть такі її підмножини: A – парних

чисел; B – непарних чисел; C – квадратів чисел; D – простих чисел. В яких відношеннях перебувають ці підмножини?

РОЗДІЛ 2. ОПЕРАЦІЇ НАД МНОЖИНАМИ

1. Об'єднання і переріз множин

Розглянуті нижче операції над множинами необхідні для подальшого викладу матеріалу і мають велике значення для розв'язання багатьох задач дискретної математики, особливо тих, що пов'язані із синтезом дискретних автоматів.

Об'єднанням множин A і B називається множина, що складається з усіх тих і лише тих елементів, які належать хоча б одній з множин A або B. Позначається $A \cup B = \{x | x \in A$ або $x \in B\}$ (називається сумою або об'єднанням).

Таким чином, за наведеним означенням $x \in A \cup B$ тоді і лише тоді, коли x є елементом хоча б однієї з множин A або B. Наприклад, $\{1, 2, 3\} \cup \{1, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

Об'єднання множини A з порожньою множиною буде давати ту ж саму множину A: $A \cup \emptyset = A$.

Аналогічно визначається об'єднання довільної (у тому числі й нескінченної) системи множин. Якщо система містить невелику кількість множин, то їх об'єднання описується явно, наприклад: $A \cup B \cup C \cup D$.

У випадку, якщо всі множини пронумеровані індексами й належать до системи множин $S = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$, то їх відображають в вигляді $\bigcup_{i=1}^{k} A_i$, або $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, де S – нескінченна система, і її множини пронумеровані підряд натуральними числами.

Для об'єднаная множин справедливі комутативний і асоціативний закони:

1. **Комутативний закон**

   $A \cup B = B \cup A$.

2. **Асоціативний закон**

   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Справедливість цих законів випливає з того, що ліва і права частини наведених рівностей складаються з одних і тих самих елементів, а порядок їх об'єднання для множин не має значення.

Розглянуті вище закони справедливі також і для об'єднання множин з порожньою множиною. Це випливає з того, що порожня множина, хоча вона і не містить у своєму складі елементів, але є взагалі такою ж самою, як і всі інші.

Перетином (добутком, перерізом) множин A і B називається множина, що складається з усіх тих і тільки тих елементів, які належать як до множини A, так і до множини B. Позначається $A \cap B$. До цієї множини належать лише спільні елементи множин A і B.

Формальне означення

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ і } x \in B\}$$

Наприклад, $\{1, 2, 3\} \cap \{1, 3, 4\} = \{1, 3\}$.

Для перетину і об'єднання множин властиві такі включення:

$$\emptyset \subseteq A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B,$$

$$\emptyset \subseteq A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B.$$

Вважається, що дві множини A і B не перетинаються, якщо $A \cap B = \emptyset$, і перетинаються, якщо $A \cap B \neq \emptyset$.

Перетин множин має комутативну

$$A \cap B = B \cap A$$

і асоціативну властивість

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C.$$

Для порожньої множини має місце також співвідношення $A \cap \emptyset = \emptyset$, яке твердить, що перетин будь-якої множини з порожньою множиною дає таку ж саму порожню множину.

2. Різниця множини

Різниця множин A і B позначається як A\B, або A – B, що відповідає умові $\{a | a \in A \text{ і } a \notin B\}$, яка визначає ті елементи множини А, що не є елементами множини В. Саму операцію знаходження різниці двох множин називають відніманням множин.

Нехай A = {1, 3, 4, 5}, а B = {1,2, 3}. Тоді отримана при відніманні множини В від А різниця A – B = {4, 5}.

Множина $A + B = (A - B) \cup (B - A)$ називається симетричною різницею.

Якщо A = {1, 3, 4, 5}, а B = {1, 2, 3}, то симетрична різниця A+B = {2, 4, 5}

Теорема 1. $A \backslash B = A \cap \bar{B}$.

Доведення. Оскільки

$$A \backslash B = \{x | x \in A \; i \; x \notin B\} = \{x | x \in A \; i \; x \in \bar{B}\}, \text{ то } A \backslash B = A \cap \bar{B}.$$

Теорему доведено.

3. Універсальна множина

Множина I (позначається також U), для якої решта всіх інших множин є підмножинами, називається універсальною множиною, а також повною, або одиничною. Іноді вона ще напивається універсумом.

Універсальна множина є поняттям відносним. Наприклад, в арифметиці універсальною множиною вважається множина раціональних чисел, а її підмножиною буде множина цілих чисел. У той же самий час множина натуральних чисел є підмножиною цілих чисел.

Для універсальної множини виконуються рівності

$$A \cap I = A, A \cup I = I.$$

4. Абсолютне доповнення множин

Множина $\overline{A}$, що визначається за співвідношенням $\overline{A} = 1 \backslash A$, називається абсолютним доповненням, або просто доповненням множини А до універсальної множини І. Із приведеної рівності видно, що не тільки $\overline{A}$ є доповненням до І, але й А є доповненням до 1, тобто завжди $A \cup \overline{A} = 1$. Далі $\overline{\overline{A}} = 1 \backslash \overline{A} = 1 - \overline{A} = 1 - (1 - A) = A$.

Із цього випливає, що $A = \overline{\overline{A}}$. Також очевидно, що А і $\overline{A}$ не мають спільних елементів. Тому $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

5. Розбиття множин

Будь-яка сукупність n множин: $A_1, A_2, \dots, A_n$, що розглядається, називається системою множин.

Система множин S називається розбиттям множин M, якщо вона задовольняє таким умовам:

1. Будь-яка множина А системи S є підмножиною множини М : $A \subseteq M$.

2. Будь-які дві множини А і В з S не перетинаються: $A \cap B = \emptyset$.

3. Об'єднання всіх без винятку множин системи S утворює множину М

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = M, A_i \in S$$

Розбиття множин широко використовується як у математичних теоріях, так і на практиці, особливо в задачах з кодування інформації. Тому спеціаліст у галузі інформатики й цифрової схемотехніки досить часто буде зустрічатися з такими задачами.

Вправи

1. Довести, що для будь-яких множин А і В справедливо

$$A \cap B \subseteq A \cup B.$$

2. Показати, що для будь-якої множини А справедливі співвідношення

$$A \cap \overline{A} = \emptyset; \; A \cup \emptyset = A.$$

3. Нехай А – довільна множина. Що являють собою наступні множини

$$A \cap \overline{\emptyset}, \quad A \cup \emptyset, \quad A - \emptyset, \quad A - A, \quad \emptyset - A?$$

4. Показати, що із співвідношень $A \cap B = C$ випливає, що

$$C \subseteq A \; і \; C \subseteq B.$$

5. Довести, що множина

$$(M - N) \cap (N - M) = \emptyset.$$

6. Довести, що

а) А – (А – В) = В – (В – А);

б) (А – В) – С = (А – С) – (В – С).

7. В якому співвідношенні знаходяться множини А і В, якщо

$$A - B = B - A = \emptyset?$$

8. Довести, що для довільних множин $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ($n \geq 2$)

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n = (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_3) \cup \ldots$$
$$\cup (A_{n-1} - A_n) \cup (A_n - A_1) \cup (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n).$$

9. Довести, що

а) $A \cup (B - A) = A \cup B$;

б) $A \cap (B - A) = \emptyset$;

в) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$

г) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

д) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

е) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$

РОЗДІЛ 3. ДІАГРАМИ ЕЙЛЕРА

Для наочного зображення операцій над множинами досить часто використовують діаграми (круги) Ейлера. Універсальна множина U зображається у вигляді точок деякого прямокутника, а її підмножина - як круг усередині прямокутника (рис. 1). Доповнення $\overline{A}$ множини A до U зображається тією частиною прямокутника, яка лежить поза кругом, що зображає A. Якщо на діаграмі Ейлера зобразити кругами множини A і B, що є підмножинами U, то множини $A \cap B$ і $A \cup B$ будуть зображені заштрихованими областями на рис. 2 і 3 відповідно.

Множини для різниць $A - B$ і $B - A$, а також симетричної різниці $A + B$ показані заштрихованими ділянками на рис. 4, 5, 6 відповідно.

Слід зазначити, що, крім кругів чи діаграм Ейлера, на практиці досить часто використовуються і діаграми Вена. Вони відрізняються від кругів Ейлера тим, що в них застосовуються довільні криві, тобто діаграми Вена є узагальненням кругів Ейлера. Вони почали застосовуватися на практиці більш як на сто років пізніше, ніж круги Ейлера. Досить часто діаграми Вена називають також діаграмами Ейлера і зворотно – круги Ейлера називають діаграмами Вена, хоча це і не зовсім правильно. Часто круги Ейлера називають також діаграмами Ейлера–Вена. Надалі ми будемо наводити тільки круги (діаграми) Ейлера і так їх будемо називати.

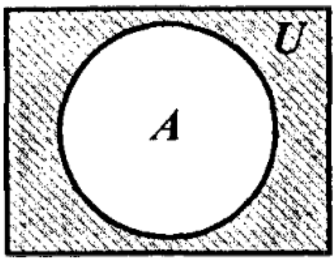


Рис. 1. Діаграма Ейлера для множини A (заштриховано $\overline{A}$)

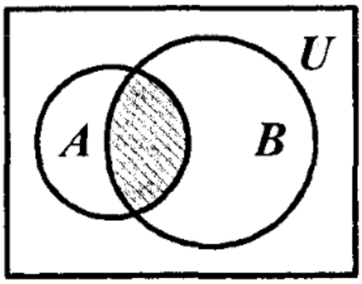


Рис. 2. Діаграма Ейлера для двох множин A і B, які перетинаються (заштриховано $A \cap B$)

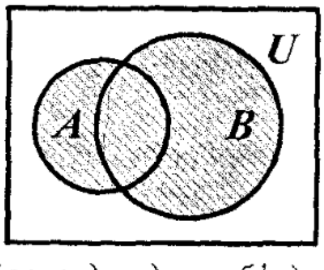


Рис.3. Діаграма Ейлера для двох об'єднаних множин $A \cup B$ (заштриховано $A \cup B$)

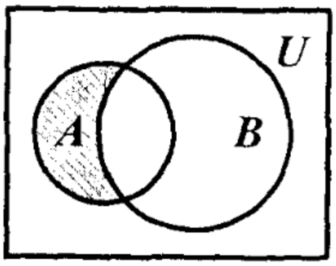


Рис. 4. Діаграма Ейлера для різниці двох множин A – B (заштриховано A – B)

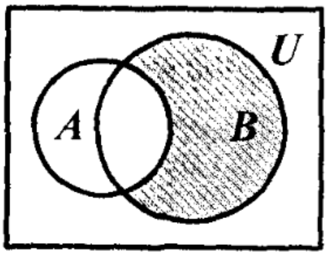


Рис.5. Діаграма Ейлера для різниці двох множин B – A (заштриховано B – A)

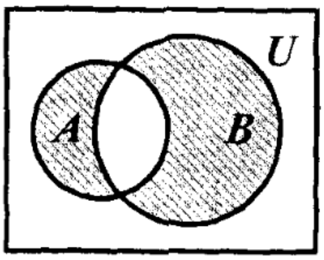


Рис. 6. Симетрична різниця двох множин A + B (заштриховано A + B)

Приклад 1. Чи існують підмножини A, B і C універсальної множини U, для яких одночасно мали б місце такі співвідношення:

$$C \neq \emptyset, \qquad A \cap B \neq \emptyset, \qquad A \cap C = \emptyset, \qquad A \cap B - C = \emptyset?$$

Розв'язання. З другої умови випливає, що A і B перетинаються, з чого стає зрозумілим, що обидві множини не пусті. Четверта умова стверджує, що $A \cap B \subseteq C$. З цього видно, що перша умова зайва. З одного боку, $A \cap B$ належить C, а з іншого - $A \cap C$ є пустою множиною. Це суперечність. Отже, множин, що задовольняють усім наведеним умовам, не існує. Тому неможливо побудувати відповідну діаграму Ейлера.

Приклад 2. Нехай F, G, L – такі підмножини множини U, що $F \subseteq G$, $G \cap L \subseteq F$, $L \cap F = \emptyset$. Чи існують множини F, G, L, які задовольняли б зазначеній сукупності умов?

Розв язання. Оскільки $L \cap F = \emptyset$ і $G \cap L \subseteq F$, то $G \cap L = \emptyset$.
З іншого боку, якщо $F \subseteq G$ і $G \cap L = \emptyset$, то виконуються всі умови задачі, і відповідно існують множини F, G, L, які їм задовольняють (див. рис. 7).

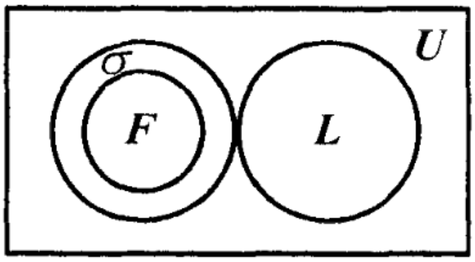


Рис. 7. Діаграми Ейлера для трьох множин F, G, L приклада 2

Розглянуті задачі - це задачі, в яких доводиться існування чи відсутність множин із заданими умовами. Ці задачі можуть бути дуже складними і для свого розв'язання потребувати значних зусиль.

ЗАВДАННЯ

1. Побудувати діаграму Ейлера, що відповідає симетричній різниці $A + \overline{B} = (A - \overline{B}) \cup (\overline{B} - A)$ множин A і B.
2. За допомогою діаграми Ейлера довести, що якщо $A \cap B = \overline{C}$ і $A \cup C \subseteq B$, то $A \cap C = \emptyset$.
3. Записати за допомогою операцій над множинами вирази для множин, що відповідають заштрихованим ділянкам діаграм Ейлера 1, 2, 3 на рис. 8, 9, 10

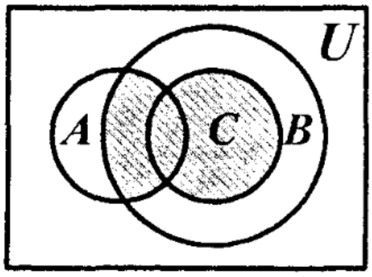


Рис.8. Діаграма Ейлера 1

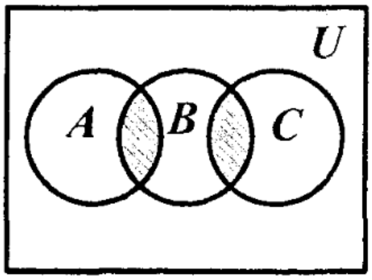


Рис 9. Діаграма Ейлера 2

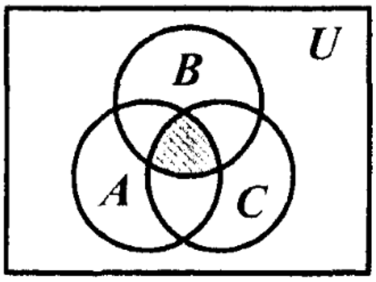


Рис. 10. Діаграма Ейлера 3

4. Довести за допомогою кругів Ейлера тотожність

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

5. Довести за допомогою кругів Ейлера тотожність

$$(A \cap B \cap C) \cup (\bar{A} \cap C) \cup (\bar{B} \cap C) = C.$$

6. За допомогою кругів Ейлера показати, що:
   а) $A \cap B \subseteq A \cup B$;
   б) $A + \bar{A} = \emptyset$
   в) Якщо $A \cap B = C,$ то $C \subset A$ $і$ $C \subset B$;
   г) $(\overline{M - N}) \cap (\overline{N - M}) = U$.

РОЗДІЛ 4. АЛГЕБРА МНОЖИН

1. Загальні положення

Алгебра множин створюється з допомогою операцій між підмножинами універсальної множини як сукупність рівностей – тотожностей.

Наприклад, для будь-яких підмножин (множин) A, B і A, B, C універсальної множини U дійсними є рівності:

1. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;
2. $A \cup B = B \cup A$;
3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
4. $A \cup \emptyset = A$;
5. $A \cup \bar{A} = U$; $\bar{A} = U - A$.

1\`. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

2\`. $A \cap B = B \cap A$;

3\`. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

4\`. $A \cap U = A$;

5\`. $A \cap \bar{A} = \emptyset$.

Кожну з наведених рівностей можна довести, показавши, що будь-який елемент множини, що стоїть з одного боку від знака рівності, належить до множини, яка стоїть з іншого боку від цього знака рівності.

Доведемо рівність 3. Доведення складається з двох частин:

1\`. Нехай $x \in A \cup (B \cap C)$. Тоді $x \in A$, або $x \in B \cap C$. Якщо $x \in A$, то $x \in A \cup B$ і $x \in A \cup C$, і, таким чином, x є елементом перетину цих множин: $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Якщо $x \in B \cap C$, то $x \in B$ $і$ $x \in C$. Отже, $x \in A \cup B$ $і$ $x \in A \cup C$. У цьому випадку x також є елементом перетину $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.

2`. Розглянемо вираз: $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$.

Нехай $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Тоді $x \in A \cup B$ $і$ $x \in A \cup C$. Отже, або $x \in A$, або $x \in B$ і $x \in C$, з цього випливає, що $x \in A \cup (B \cap C)$.

Тобто x належить як до першої частини рівності 3, так і до другої, що й доводить її. Доведення решти рівностей провести самостійно за аналогією.

У загальному вигляді рівність 3, а також 3' можна подати в такий спосіб:

$$A \cup (B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n) = (A \cup B_1) \cap (A \cup B_2) \cap \ldots \cap (A \cup B_n)$$

$$A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_n)$$

Рівності 1 и 1` називаються асоціативними законами для об'єднання і перетину, а рівності 2 і 2' - комутативними законами для цих операцій. Рівності 3 і 3' - це дистрибутивні закони для цих операцій.

Для довільних підмножин А і В універсальної множини U, крім вищезазначених рівностей, справедливі також рівності:

1. Якщо $A \cup B = A$, то $B = \emptyset$.
2. $\overline{\emptyset} = U$.
3. $A \cup A = A$.
4. $A \cup \bar{A} = U$.
5. $A \cup U = U$.
6. $A \cup (A \cap B) = A$.
7. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.
8. Якщо $A \cup B = U$ $і$ $A \cap B = \emptyset$, то $B = \bar{A}$.

1`. Якщо $A \cap B = A$, то $B = U$.

2`. $\overline{U} = \emptyset$.

3`. $A \cap A = A$.

4`. $A \cap \bar{A} = \emptyset$.

5`. $A \cap \emptyset = \emptyset$

6`. $A \cap (A \cup B) = A$.

7`. $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

8`. Якщо $A \cap B = \emptyset$ $і$ $A \cup B = U$, то $B = \bar{A}$.

Доведення цих рівностей провести самостійно.

Деякі з рівностей відомі під спеціальними назвами. Так 3 і 3' - це закони ідемпотентості, 6 і 6' - закони поглинання; 7 і 7'- закони де Моргана.

Наведені вище в цьому розділі рівності дозволяють спрощувати різні більш складні вирази алгебри множин.

Приклад 1. $\overline{A \cap \bar{B}} \cup B = \bar{A} \cup B \cup B = \bar{A} \cup B$.

Приклад 2.

$$(A \cap B \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) \cup \bar{B} \cup \bar{C} = [(A \cup \bar{A}) \cap B \cap C] \cup \bar{B} \cup \bar{C} = (U \cap B \cap C) \cup \overline{B \cap C} =$$
$$= (B \cap C) \cup (\overline{B \cap C}) = U$$

Приклад 3.

$$(A \cap B \cap C \cap \bar{X}) \cup (\bar{A} \cap C) \cup (\bar{B} \cap C) \cup (C \cap X) = (A \cap B \cap C \cap \bar{X}) \cup [(\bar{A} \cup \bar{B} \cup X) \cap C]$$
$$= \left[A \cap B \cap \bar{X} \cup \overline{A \cap B \cap \bar{X}}\right] \cap C = U \cap C = C.$$

Приклад 4. Довести, що $A \cup A = A$:

$$A \cup A = (A \cup A) \cap U = (A \cup A) \cap (A \cup \bar{A}) = A \cup (A \cap \bar{A}) = A \cup \emptyset = A.$$

2. Принцип двоїстості для алгебри множин

Рівність алгебри множин, отримана з іншої рівності через заміну всіх входжень $\cup$ на $\cap$, $\cap$ на $\cup$, $\emptyset$ на U і U на $\emptyset$, називається двоїстою (дуальною) відносно вихідної рівності.

Для будь-якого істинного твердження, що формулюється з допомогою знаків операцій $\cup$ та $\cap$, $\emptyset$ та U, двоїсте відносно нього речення також є істинним. Це речення виражає принцип двоїстості алгебри множин.

З цього принципу випливає, що якщо є деяке твердження з знаками операцій $\cup$, $\cap$ та U, $\emptyset$, то відповідне йому твердження зі штрихом на підставі двоїстості випливає з цього ж самого твердження. Це означає, що нема потреби доводити, наприклад, рівності 1'– 8', якщо доведені рівності 1 – 8.

3. Узагальнення операцій над множинами

1. Об'єднання n множин

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{j=1}^{n} A_j, \text{ також } \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j, \text{при } \ n = \infty$$

2. Перетин множин

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{j=1}^{n} A_j \text{ також } \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \text{ при } n = \infty$$

3. Формула де Моргана

$$\overline{\bigcup_{j=1}^{n} A_j} = \bigcap_{j=1}^{n} \bar{A}_j \, ; \ \overline{\bigcap_{j=1}^{n} A_j} = \bigcup_{j=1}^{n} \bar{A}_j.$$

Вправи

1. Довести рівність

$$(A \cap B \cap X) \cup (A \cap B \cap C \cap X \cap Y) \cup (A \cap X \cap \bar{A}) = A \cap B \cap X.$$

2. Довести, що для довільних множин A, B, C, D і X

а) $\overline{(\bar{A} \cap X) \cup (\bar{B} \cap X)} = (A \cup \bar{X}) \cap (B \cup \bar{X})$;

б) $(A \cap X) \cup (B \cap \bar{X}) \cup (C \cap X) \cup (D \cap \bar{X}) = [(A \cup C) \cap X] \cup [(B \cup D) \cap \bar{X})] = [(A \cap C) \cap X] \cup [(B \cap D) \cap \bar{X}$;

в) $[(A \cap X) \cup (B \cap \bar{X})] \cap [(C \cap X) \cup (D \cap \bar{X})] = [(A \cap C) \cap X] \cup [(B \cap D) \cap \bar{X}]$.

3. Показати справедливість рівностей

а) $\overline{\bar{A} \cap \bar{B}} \cup B = A \cup B$;

б) $(A \cap B \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) = B \cap C$.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ ДО ЧАСТИНИ 1

1. Що таке множина? З яких елементів і підмножин вона складається?
2. Дайте Означення скінченній і нескінченній множинам.
3. Як задаються множини?
4. Що таке рівність множин?
5. Охарактеризуйте поняття та властивості порожньої множини.
6. Що таке булеан множини і які його властивості?
7. Охарактеризуйте об'єднання множин і його властивості.
8. Що таке перетин множин і які його властивості?
9. Що таке різниця множин і які її властивості?
10. Дайте Означення симетричній різниці.
11. Охарактеризуйте універсальну множину.
12. Дайте Означення абсолютного доповнення множин.
13. Що таке розбиття множин?
14. Дайте Означення діаграми Ейлера.
15. Охарактеризуйте діаграми Ейлера для об'єднання множин.
16. Охарактеризуйте діаграми Ейлера для перетину множин.
17. Охарактеризуйте діаграми Ейлера для симетричної різниці множин.
18. У чому полягають асоціативні закони об'єднання й перетину?
19. У чому полягають комутативні закони об'єднання й перетину?
20. У чому полягають дистрибутивні закони об'єднання й перетину?
21. У чому полягають закони ідемпотентості?
22. У чому полягають закони поглинання?
23. У чому полягають закони де Моргана?
24. Що таке алгебра множин? Які основні її тотожності?
25. У чому полягає принцип двоїстості для алгебри множин?

ЧАСТИНА 2. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МНОЖИН

РОЗДІЛ 5. ПАРАДОКС РАССЕЛА.

Означення 1. Функцією *f* визначеною на множині А, що приймає значення в множині В називається правило (закон), який ставить у відповідність кожному елементу а **ϵ** А однозначно визначений елемент f(а) ϵ В; досить часто в цій ситуації говорять, що **задано відображення** з множини А в множину В і позначають це таким чином $f\ : A\ \rightarrow B$.

При цьому елемент $b = f(a)$ називається **образом** елемента a, а сам елемент a називається **прообразом** елемента b.

Для довільної підмножини $K \subseteq A$ образ множини K <u>*визначається наступним чином*</u>

$$f(K) = \{f(k) \in B | k \in K\} = \{b \in \ B| \text{ існує } a\ \in K\colon f(a) = b\}$$

Множина A називається **областю Означення** функції *f*, а множина $Imf\ =\ f\ (A)$ **областю**

значень функції.

Множина $f^{-1}(b) = \{a \in A | f(a) = b\}$ називається **повним прообразом** елемента $b \in B$.

Повним прообразом множини $K \subseteq A$ називається множина

$$f^{-1}(M) = \{a \in A | f(a) \in M\}$$

Означення 2. Функція (відображення) $f : A \to B$ називається відображенням **в** або **ін'єкцією**, якщо кожен елемент множини B має не більше одного прообраза, тобто для довільного $b \in B$ *або*

$f^{-1}(b) = \varnothing$ *або* $f^{-1}(b)$ є одноелементна множина.

Можна сказати, що $f : A \to B$ називається **ін'єкцією**, якщо $\forall x_1, x_2 \in A$ таких, що $x_1 \neq x_2$, $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Функція (відображення) $f : A \to B$ називається відображенням **на** або **сюр'єкцією**, якщо її область значень збігається з множиною B, тобто $Imf = \boldsymbol{B}$.

Іншими словами (відображення) $f : A \to B$ називається **сюр'єкцією** якщо для довільного елемента $y \in$ B існує $x \in$ A такий, що $f(x) = y$.

Функція (відображення) $f : A \to B$ називається взаємнооднозначним відображенням або бієкцією, якщо f є відображенням в та відображенням на одночасно, тобто є і ін'єкцією і сюр'єкцією.

Одним з найпростіших способів Означення множини є Означення її характеристичної функції.

Означення 3. Характеристичною або індикаторною функцією множини $M: M \subseteq \Omega$ називається функція, яка кожному елементу $\omega \in \Omega$ ставить у відповідність або 0 або 1 за правилом.

$$v_m(x) = 1 \text{ якщо } x \in M$$
$$v_m(x) = 0 \text{ якщо } x \notin M$$

Декартів добуток множин.

Означення 4. Декартовим добутком множин A та B називається множина впорядкованих пар (a, b), де $a \in A$, $b \in B$, тобто

$$A \times B = \{(a,b) | a \in A, b \in B\}.$$

Впорядкованість тут означає, що в парі (a, b) визначено, що першим елементом є a, а другим є b. Отже, рівність $(a, b) = (b, a)$ можлива лише за умови $a = b$. Зауважимо також, що операція декартового добутку, взагалі кажучи не є комутативною, тобто $A \times B \neq B \times A$. Справді, якщо множина A є множиною цілих чисел, а B множиною літер, то запис (b, a) для елементів типу даних $A \times B$ приведе до змішування типів даних і відповідного повідомлення компілятора.

Означення 5. Нехай $f : A \to B$ функція визначена на множині A, яка приймає значення в множині B. Графіком функції f називається підмножина декартового добутку

$A \times B$, яка визначається наступним чином

$$f = \{(a,b) | b = f(a), a \in A\} \subset A \times B.$$

Якщо A, B – множини чисел, тобто $A, B \subseteq$ R, то точки площини, з декартовими координатами $(a, f(a))$ називають також графіком функції.

Для трьох множин можна визначити такі добутки:

$A \times (B \times C)$, $(A \times B) \times C$ та $A \times B \times C = \{(a,b,c) | a \in A, b \in B, c \in C\}$.

Всі три множини є різними (різними типами даних), тобто операція декартового добутку не є асоціативною, але безумовно між вказаними множинами легко встановити взаємнооднозначну відповідність.

Дамо тепер саме загальне означення декартового добутку множин.

Означення 6. Нехай A_i, $i \in I$, довільна сукупність множин (I довільна множина).

Тоді множина функцій $\alpha : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$, таких, що $\forall i \; \alpha(i) \in A_i$, називається декартовим добутком сукупності множин$\{A_i | \; i \in \; I\}$ і позначається:

$$\times_{i \in I} A_i.$$

Зокрема, для декартових добутків двох та трьох множин будемо мати такі множини номерів $I = \{1,2\}, I = \{1,2,3\}$ відповідно. Для $I = \{1,2,3, \dots, n\}$ відповідний декартів добуток можна записати у вигляді

$$\times_{i=1}^{n} A_i$$

Якщо $I = N$ *і* $A_1 = A_2 = \dots = A_n = \dots = R$, то

$$\times_{i \in N} A_i = \times_{i=1}^{+\infty} A_i.$$

є множиною числових послідовностей.

Відображення декартових добутків.

Означення 7. Нехай $A_i = A$, $i = 1, 2, \dots, n$. Будь-яке відображення:

$$f: A \times A \times \dots \times A \to A$$

називається n-арною операцією визначеною на множині A.

Приклад. Нехай $A = N$, відображення $Next: \; N \in x \to x + 1 \in N$, є прикладом 1-арної (уніарної) операції на множині натуральних чисел, а відображення

$$Sum : N \times N \ 3 \ (x, y) \rangle\!\!\longrightarrow x + y \in N,$$

$$Prod : N \times N \ 3 \ (x, y) \rangle\!\!\longrightarrow x \cdot y \in N,$$

є прикладами операцій парності 2 (бінарних) на множині натуральних чисел. Відображення

$(x, y, z) \rangle\!\!\longrightarrow НСД(x, y, z), \; (x, y, z) \rangle\!\!\longrightarrow НСК(x, y, z)$ є прикладами операцій парності 3 (тернарних операцій).

Для бінарних операцій замість запису $f(x, y)$ вживають запис $x * y$, де * символ операції.

Множини функцій та підмножин

Для довільних множин $A, B \subset \Omega$ визначимо множину

$$B^A = \{f: A \to B\},$$

яка складається з усіх функцій, що визначені на множині A і приймають значення в B.

У випадку B = {0, 1} маємо множину унарних предикатів визначених на множині A.

Лема 1. Існує взаємно-однозначна відповідність між множиною всіх підмножин множини A і множиною $\{0, 1\}^{A}$.

Доведення. Ця відповідність встановлюється просто:

підмножина ↔ характеристична функція підмножини.

Означення 8. Булеаном множини A називається множина, елементами якої є всі підмножини множини A.

Враховуючи попередню лему, булеан множини позначається як 2^A, а іноді вживають запис B(A).

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ ДО ЧАСТИНИ 2

1. Як зв'язані теорія відношень та теорія множин?
2. Дайте визначення декартова добутку множин.
3. Нехай A – деяка множина. Що означає запис A^2, A^3 A^n ?
4. Нехай A і B – множини. Поясніть, чому $A \times B \neq B \times A$?
5. Що називається відношенням? Що таке парне, бінарне, унарне відношення?
6. Назвіть способи задання відношень. Які з них застосовні для n-арних відношень при $n > 2$?

ЗАВДАННЯ

1. Для заданих множин A і B обчислити:

a) $A \cup B$;

b) $A \cap B$;

c) $(A \cup C) \cap B$;

d) $A \cap B \cap C$;

e) $A \setminus B$;

f) $A + B$;

g) $(A \setminus C) \cup (A \setminus B)$;

h) $(A \setminus C) \cap (A \setminus B)$,

якщо

1) $A = \{1, 3, 5, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ і $C = \{2, 4, 7\}$;

2) $A = \{x \in R |\ x^2 + x - 2 \leq 0\}$, $B = \{y \in Q |\ y^2 + y - 2 = 0\}$, $C = \{x \in R |\ x^2 > 0\}$.

2. Нехай $A = \{2, 4, 5, 7, 8\}$, $B = \{1, 2, 4, 7\}$ і $C = \{2, 4, 6, 7\}$.

Перевірити, що

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

b) $A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap C)$;

c) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;

d) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

3. Про групу студентів в 30 осіб відомо, що 19 студентів вивчають математику, 17 – музику, 11 – історію, 12 – математику і музику, 7 – історію та математику, 5 – музику та історію, 2 –математику, історію та музику. Скільки студентів вивчає історію, але не вивчає математику?

4. Відомо, що кожен учень школи вивчає принаймні одну іноземну мову. 28 учнів вивчають англійську, 23 учні вивчають французьку. 23 – німецьку, 12 – англійську та французьку, 11 англійську та німецьку, 8 – французьку та німецьку, 5 – всі три мови. Скільки учнів вчаться в школі?

5. В жорстокому бою не менше 70% піратів втратили одне око, не менше 75% — одне вухо, не менше 80% – одну руку та не менше 85% – одну ногу. Яка мінімальна кількість бійців, що втратили одночасно і око, і ногу, і вухо, і руку?

6. . Завербований Москвою американський дипломат повідомив: "У вищих колах армії США деградація та розлад. З 75 чотиризіркових генералів 30 алкоголіків, 28 наркоманів і аж 35 розпусників. Шестеро є і алкоголіками і наркоманами одночасно, одинадцятеро — наркомани та розпусники, восьмеро — алкоголіки та розпусники. Немає жодного генерала без якоїсь з цих вад!". Доведіть, що це дезинформація.

7. В трансконтинентальному літаку знаходяться: 9 хлопчиків, 5 українських дітей, 9 дорослих чоловіків, 7 іноземних хлопчиків, 14 українців, 6 українців чоловічої статі та 7 іноземок жіночої статі. Скільки всього осіб було в літаку?

8. Одного разу під час розмови за кавою в клубі міжгалактичних мандрівників знаменитий член цього клубу, Мюнхгаузен космічної ери, Йон Тихий, мандрівки якого описані Станіславом Лемом в "Зоряних щоденниках Йона Тихого" розповідав: *"Висадка на планету Гесиод була дуже важкою. Та коли я опинився на поверхні, то пожалкував, що вирішив тут приземлитись: на ній жили чудовиська ще більш страшні ніж ті, що змальовані в грецьких міфах. Назустріч мені вийшла делегація з 1000 жителів планети. У 811 з них було одне око, як у велетня Полифема, у 752 - замість волосся були змії, як у Медузи Горгони, а 418 мали риб'ячий хвіст. При цьому 570 створінь були одноокі з зміїним волоссям, 356 – одноокі та з риб'ячим хвостом, 348 — з зміїним волоссям та з риб'ячим хвостом, а 297 – одноокі, з зміїним волоссям та з риб'ячим хвостом. Старший з них звернувся до мене і сказав ... ". В цей момент професор Тарантота миттєво провів якісь обчислення і вигукнув: "Любий Йон! Я готовий повірити, що на цій планеті жили істоти з одним оком, зі зміями замість волоссяі та з з риб'ячими хвостами. Тобі доводилось зустрічати і більш дивних потвор – згадай про курдлів. Та я сподіваюся, що закони математики, ще не перетворились на міфи"*. Що мав на увазі професор Тарантота ?

9. Довести рівність множин

a) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$;

b) A + B = $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$;

c) $A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$;

d) $A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$;

e) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;

f) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$;

g) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$.

h) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

i) $A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap C)$;

j) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

10. Використовуючи основні теоретико-множинні тотожності довести наведені рівності шляхом рівносильних перетворень

a) $(A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) \cup \overline{B} \cup \overline{C} = E$;

b) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$;

c) $A \cap ((A \cup B) \cup (A \cup B)) \cup (A \cup B) = A$;

d) $(\overline{B} \setminus A) \cup (A \setminus C) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap C) = \Omega$;

e) $((A \cap B) \setminus A) \cup ((A+B) \setminus B) = A \cup B$.

11. Довести, що

a) $(A \cup B) \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq C$ і $B \subseteq C$;

b) $A \subseteq B \Rightarrow (A \cap C) \subseteq (B \cap C)$;

c) $A \subseteq B \Rightarrow (A \cup C) \subseteq (B \cup C)$;

d) A ⊆ B ⇒ (A \ C) ⊆ (B \ C);

e) (A ∩ B) × C = (A × C) ∩ (B × C);

f) (A ∪ B) × C = (A × C) ∪ (B × C).

12. Чи існують множини A, B і C, для яких одночасно виконуються такі співвідношення:

a) C ≠ ∅, A ∩ B ≠ ∅, A ∩ C ≠ ∅, (A ∩ B) \ C = ∅;

b) A ≠ ∅, A ∩ B ≠ ∅, A ∩ C ≠ ∅, A \ (B ∩ C) = ∅;

c)A ⊆ B, A ∩ C ≠ ∅, (B \ C) ∩ A = ∅?

ЧАСТИНА 3. БУЛЕВІ ФУНКЦІЇ

РОЗДІЛ 6. ЛОГІЧНІ ФУНКЦІЇ

Означення логічної функції

Означення 1. Функція F від n аргументів (змінних) $x_1, x_2, \dots, x_n$, яка так само, як і її змінні, може приймати лише два значення – 0 і 1, називається логічною (двійковою, булевою).

Розглянуті вище логічні операції над висловлюваннями можуть бути використані для побудови логічних функцій. Ці операції разом з побудованими з їх допомогою логічними функціями створюють *алгебру логіки.* У ній висловлювання в логічних функціях замінюються логічними змінними, і щодо них виконуються необхідні для розв'язання тієї чи іншої задачі логічні операції. Їх найбільш вживаний склад був розглянутий у попередній лекції.

Набори значень змінних логічної функції

Означення 2. Сукупність $a_1, a_2, \dots, a_n$ значень n змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$ називається набором і позначається $a_1, a_2, \dots, a_n$, де $a_i \in \{0,1\}$, i= 1, 2, ..., n.

Розмістимо, наприклад, набори для трьох аргументів у вигляді двійкових чисел у спеціальній таблиці - таблиці наборів. Очевидно, що їх число дорівнює 8. Зліва в цій таблиці у вигляді номерів зазначимо десяткові еквіваленти двійкових наборів (див. табл. 1). Це дозволяє досить легко перейти від десяткового запису номеру набору до його двійкового вигляду.

Таблиця 1. Набори значень двійкових змінних

Номер набору	x_1	x_2	x_3
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1

Через те, що кількість змінних скінченна, кількість можливих наборів обмежена, і, відповідно, ці набори й значення логічної функції можуть бути задані в спеціальній таблиці в порядку зростання від 0 до *2n* - I.

Теорема 1. ***Число наборів для аргументів*** $x_1, x_2, \dots, x_n$ ***логічної функції*** $\boldsymbol{N = 2^n}$**.**

Доведення. Оскільки за означенням логічної функції кожна змінна x_i , i = 1, 2, ..., *n,* може приймати значення 0 і l, кількість наборів, що містять j одиниць і відповідно n-j нулів, дорівнює числу сполучень j з $n - C_n^j$. Оскільки може приймати значення $0, 1, \dots, n,$ то число всіх можливих наборів дорівнюватиме $N = \sum_{j=0}^{n} \quad C_n^j$, яке, як відомо, становить $\mathbf{2}^n$.

Теорему доведено.

Кількість логічних функцій

Кожна логічна функція F приймає у кожному зі своїх наборів значення, яке дорівнюють 0 або 1. Кількість наборів, як було доведено в теоремі l, відповідає числу$\boldsymbol{N = 2^n}$. Виходячи з цього, має місце така теорема.

Теорема 2. ***Кількість різних логічних функцій від n аргументів***

$$\boldsymbol{M = 2^N}$$

Доведення. Дійсно, оскільки на кожному наборі *i* = 0, 1, ..., *N* логічна функція *F,* дорівнює 0 або 1, то число функцій, що приймають 1 на γ наборах і 0 на решті $N - \gamma$наборах, дорівнює числу сполучень γ з числа можливих наборів $N - C_N^\gamma$.

Оскільки $\gamma = 0,1, \dots, N,$ то число всіх можливих функцій

$$M = \sum_{\gamma=0}^{N} C_N^\gamma = 2^N$$

Теорему доведено.

Елементарні логічні функції

Розмістимо логічні функції разом з таблицею наборів у порядку зростання їх десяткових індексів, починаючи з нуля, і зазначимо на кожному наборі значень змінних у відповідній клітинці таблиці значення функції, яке відповідає нулю або одиниці (див. табл.

2, 3). Створені таким чином таблиці називаються таблицями *істинності.* З їх допомогою для однієї і двох змінних побудуємо елементарні логічні функції, на основі яких можна створити інші функції, якими б складними вони не були.

Існує чотири різні логічні функції одного аргументу *A* (табл. 2). Їх назва обирається відповідно до логічної операції, яка їх створює.

Таблиця 2. Таблиця істинності логічних функцій однієї змінної

Номер набору	A	F_0	F_1	F_2	F_3
0	0	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1

Функція F_0 тотожно дорівнює 0. Її називають *"Константою нуль".*

Функція F_1, повторює значення змінної і тому тотожно дорівнює цій змінній. Її називають *"Змінна A".*

Функція F_2 приймає значення, протилежні до значень аргументу. Тобто це є логічна функція *"НІ"'*. Її ще називають

"Інверсію A", або *"Запереченням A".* Позначається *A.*

Функція F_3 тотожно дорівнює 1. Її називають *"Константою одиниці".*

Згідно з теоремою 2 існує $\boldsymbol{M = 2^N = 2^{2^n} = 16}$ різних логічних функцій двох аргументів *A* і *B,* кожна з яких визначена у $N = 2^2$ наборах змінних (див. табл. 3).

Таблиця 3. Таблиця істинності логічних функцій двох змінних

№ набору	Змінна		Функція F															
	A	B	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
2	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
3	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Ці функції мають однакові назви з логічними операціями, які їх створюють:

$F_0 = 0$ – константа нуль;

$F_1 = A \wedge B$ – логічне множення (кон'юнкція, добуток);

$F_2 = A \triangle B$ – заборона за B;

$F_3 = A$ – змінна A;

$F_4 = B \triangle A$ – заборона за A;

$F_5 = B$ – змінна B;

$F_6 = A \oplus B$ – сума за модулем 2 (логічна нерівнозначність);

$F_7 = A \vee B$ – логічне додавання (диз'юнкція);

$F_8 = A \downarrow B$ – операція Пірса (стрілка Пірса);

$F_9 = A \sim B$ – логічна рівнозначність;

$F_{10} = \bar{B}$ – інверсія В;

$F_{11} = B \to A$ – імплікація від В до А;

$F_{12} = \bar{A}$ – інверсія А;

$F_{13} = A \to B$ – імплікація від А до В;

$F_{14} = A|B$ – операція Шефера (штрих Шефера);

$F_{15} = 1$ – константа одиниця.

Закони алгебри логіки

В алгебрі логіки існують логічні *закони,* логічні *суперечності* і *твердження,* що логічно виконуються.

Означення 2. Висловлення, що є істинним для всіх можливих комбінацій значень простих висловлювань, з яких воно складається, називається логічним **законом.**

Означення 3. Висловлення, що є хибним для всіх можливих комбінацій значень простих висловлювань, з яких воно складається, називається логічною **суперечністю.**

Означення 4. Висловлення, що є істинним для одних. значень простих висловлювань, з яких воно складається, і хибним для решти, називається **твердженням,** що логічно виконується.

Наведемо основні закони алгебри логіки (див. табл. 4).

Таблиця 4 Основні закони алгебри логіки

Назва закону	Логічний запис
1. Тотожності	$A = A$
2. Суперечності	$\overline{A\bar{A} = 1}$
3. Виключеного третього	$A + \bar{A} = 1$
4. Ідемпотентності	$AA = A;\ A + A = A$
5. Комvтативний	$\mathrm{AB = BA, A + B = B + A}$
6. Асоціативний	$\mathrm{(AB)C = A(BC)}$; $\mathrm{(A + B) + C = A + (B + C)}$
7. Дистрибутивний	$\mathrm{A(B + C) = AB + AC}$; $\mathrm{A + BC = (A + B)(A + C)}$
8. Поглинання	$\mathrm{A(B + A) = A;\ A + AB = A}$
9. Подвійності (теорема де Моргана)	$\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B};\ \ \overline{A + B} = \bar{A}\bar{B}$
10. Подвійного заперечення	$A = \bar{\bar{A}}$
11. Властивість одиниці	$\mathrm{A \cdot 1 = A;\ A + \mathbf{1} = 1}$

РОЗДІЛ 7. ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛОГІЧНИХ ФУНКЦІЙ

Базисні функції

Розглянуті вище 16 логічних функцій для двох змінних, як уже зазначалося раніше, мають назву ***елементарних.*** Це функції, на основі яких (ґрунтується алгебра логіки та її достатньо поширене застосування в науці та техніці. Серед цих функцій відокремимо ***базисні.*** За допомогою цих функцій можна одержати будь-які інші логічні функції. У той же самий час базисні функції не можуть бути одержані з більш простих. До них належать:

1. Константа нуль.
2. Константа одиниця.
3. Змінна.
4. Інверсія.
5. Диз'юнкція.
6. Кон'юнкція.

Інверсні функції

Означення 1. Логічна функція називається ***інверсною*** відносно іншої, якщо вона може бути отримана з останньої способом інверсії всіх її значень.

Кожна із 16 функцій $F_i, i = 0, 1, \dots, 15$ має також інверсну функцію. Так, наприклад, функція F_0 має інверсну функціюF_{15} , а F_3 – інверсну функцію F_{12} (див. табл. 3).

Перетворення елементарних функцій

Запровадимо ряд важливих формул для елементарних функцій. Доведення правильності формули легко отримати за допомогою безпосередньої перевірки в таблицях істинності за збіжністю значень, що утворюють праву і ліву сторони співвідношень, які доводяться (див. табл. 5 - 8).

Таблиця 5 $A \wedge B = \overline{\bar{A} \vee \bar{B}}$ – правило де Моргана

$A \wedge B$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{A} \vee \bar{B}$	$\overline{\bar{A} \vee \bar{B}}$
0	1	1	1	0
0	1	0	1	0
0	0	1	1	0
1	0	0	0	1

Таблиця 6. $A \vee B = \overline{\bar{A} \wedge \bar{B}}$ *– правило де Моргана*

$A \vee B$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{A} \wedge \bar{B}$	$\overline{\bar{A} \wedge \bar{B}}$
0	1	1	1	0
1	1	0	0	1
1	0	1	0	1
1	0	0	0	1

Таблиця 7. $A \to B = \bar{A} \vee B$

$A \to B$	$\bar{A}$	B	$\bar{A} \vee B$
1	1	0	1

1	1	1	1
0	0	0	0
1	0	1	1

Таблиця 8. $A \sim B = (\bar{A} \vee B)(A \vee \bar{B})$

$A \sim B$	$\bar{A}$	B	$\bar{A} \vee B$	A	$\bar{B}$	$A \vee \bar{B}$	$(A \vee \bar{B}) \wedge$ $\wedge (\bar{A} \vee B)$
1	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	0	1	1

Аналогічно доводяться й співвідношення

1. $A = \bar{\bar{A}}$
2. $A \sim B = AB \vee \bar{A}\bar{B}$
3. $A \bigtriangleup B = \overline{\bar{\bar{\mathrm{A}}} \vee B} = A \wedge \bar{B}$
4. $B \bigtriangleup A = \overline{\bar{\bar{\mathrm{B}}} \vee A} = B \wedge \bar{A}$
5. $A \oplus B = \overline{A \sim B} = \overline{(\bar{A} \vee B)\left(A \vee \bar{\bar{\mathrm{B}}}\right)} = (A \wedge \bar{B}) \vee (\bar{A} \wedge B)$
6. $A \downarrow B = \overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}$
7. $A|B = \overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}$
8. $B \rightarrow A = \bar{B} \vee A$

У разі, коли однією зі змінних є константа 1 або 0, справедливі співвідношення, що наведені у табл. 9.

Таблиця 9.

Співвідношення	Співвідношення
$x \vee 1 = 1$	$x \vee 0 = x$
$x \wedge 1 = x$	$x \wedge 0 = 0$
$x \sim 1 = x$	$x \sim 0 = \bar{x}$
$x \oplus 1 = \bar{x}$	$x \oplus 0 = x$
$x \rightarrow 1 = 1$	$x \rightarrow 0 = \bar{x}$
$1 \rightarrow x = x$	$0 \rightarrow x = 1$
$x\|1 = \bar{x}$	$x\|0 = 1$
$x \downarrow 1 = 0$	$x \downarrow 0 = \bar{x}$

У випадках, коли дві змінні $x_1 = x_2 = x$, а також коли $x_1 = x$ і $x_2 = x$, маємо для цих змінних співвідношення, які наведені в табл. 10.

Таблиця 10. Співвідношення для змінних $x_1 = x_2 = x$ та $x_1 = x$ і $x_2 = \bar{x}$

Співвідношення	Співвідношення
$x \vee x = x$	$x \vee \bar{x} = 1$

$xx = x$	$x\bar{x} = 0$
$x \sim x = 1$	$x \sim \bar{x} = 0$
$x \oplus x = 0$	$x \oplus \bar{x} = 1$
$x \to x = 1$	$x \to \bar{x} = \bar{x}$ $\bar{x} \to x = x$
$x \vert x = \bar{x}$	$x \vert \bar{x} = 1$
$x \downarrow x = \bar{x}$	$x \downarrow \bar{x} = 0$

Порядок виконання логічних операцій

Наведені елементарні функції дозволяють будувати нові, у тому числі й більш складні, функції від довільного скінченного числа змінних шляхом підстановки до функцій інших функцій замість змінних. При цьому для запису функцій використовуються дужки

Передбачається, що спочатку виконуються операції всередині дужок, після цього – операції під знаком заперечення, потім кон'юнкція, а надалі диз'юнкція і всі інші операції в порядку запису зліва направо, наприклад, імплікація.

Суперпозиція логічних функцій

Означення 2. Функція $F = F(F_1, F_2, \dots, F_n)$, яка отримана із функцій $F_1, F_2, \dots, F_n$, називається ***суперпозицією*** функцій $F_1, F_2, \dots, F_n$

Приклад *1.* Надані функції $\bar{A} = (\overline{x_1} \sim x_3);\ B = x_1 \downarrow x_2;\ C = x_1 \oplus x_2;\ D = x_3$. Потрібно отримати суперпозицію функцій *A, B,* C, D – *F (A, B,* C, *D)*, а з неї функцію $F(x_1, x_2, x_3)$.

Розв'язання. Отримаємо суперпозицію $F\ (A, B, C, D) = \big((A \vee B) \wedge C\big) \rightarrow D$. Далі замість функцій *A, B,* C, D запишемо їх значення:

$$F = ((A \vee B) \wedge C) \rightarrow D = F(x_1, x_2, x_3) = \{[x_1 \sim x_3) \vee (x_1 \downarrow x_2)] \wedge (x_1 \oplus x_2)\} \rightarrow x_3$$

Використовуючи таблиці елементарних логічних функцій для $\sim, \vee, \downarrow, \oplus, \rightarrow$,отримаємо в табл. 11, 12 всі значення функції $F(x_1, x_2, x_3)$

Таблиця 11. Функція $F(x_1, x_2, x_3)$

Номер набору	x_1	x_2	x_3	$\overline{x_1}$	$\overline{x_1} \sim x_3$	$x_1 \downarrow x_2$	[ ]
0	0	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0	0	0
3	0	1	1	1	1	0	1
4	l	0	0	0	1	0	l
5	1	0	1	0	0	0	0
6	1	1	0	0	1	0	1
7	1	1	1	0	0	0	0

Таблиця 12. Функція $F\ (x_1\,, x_2\,, x_3)$

Номер набору	x_1	x_2	x_3	$x_1 \oplus x_2$	{ }	x_3	$F(x_1\,, x_2\,, x_3)$
0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	l	0	0	1	1
2	0	1	0	1	0	0	1
3	0	1	1	1	1	1	1
4	1	0	0	1	1	0	0
5	1	0	1	1	0	1	1
6	1	1	0	0	0	0	1
7	1	1	1	0	0	1	1

Таким чином, функція $F\ (x_1\,, x_2\,, x_3) = x_1\,\overline{x_2 x_3}$ дорівнює 0 на наборі 4, і l на решті наборів.

РОЗДІЛ 8. ОСНОВНІ ФОРМУЛИ БУЛЕВОЇ АЛГЕБРИ

Означення 1. Логічні операції над змінними $x_1, x_2, \dots, x_n$ логічних функцій $F\ (x_1, x_2, \dots, x_n)$, що містять у собі операції заперечення, диз'юнкції, кон'юнкції, а також операції константа 0 і константа I, називаються ***булевими.***

Означення 2. Булеві операції над змінними логічних функцій і співвідношення, які випливають з них, називаються ***булевою алгеброю.***

Важливим є те, що з допомогою цієї алгебри можна реалізувати будь-яку логічну функцію. Ця алгебра отримала свою назву на честь англійського математика 19-го століття Джорджа Буля, що заклав її основи.

Змінні $x_1, x_2, \dots, x_n$ у булевій алгебрі вважаються довільними логічними функціями, тобто для них справджується принцип *суперпозиції.* Це означає, що будь-який вираз булевої алгебри являє собою логічну функцію і може бути позначений однією літерою, яка є змінною у іншому виразі.

Наведемо в табл. 13 основні формули булевої алгебри для диз'юнкції, кон'юнкції та інверсії.

Таблиця 13. Основні формули булевої алгебри

Формула для диз'юнкції	Формула для кон'юнкції	Формула для інверсії
$0 \vee 0 = 0$	$0 \wedge 0 = 0$	$\bar{0} = 1$
$1 \vee 0 = 1$	$1 \wedge 0 = 0$	$\bar{1} = 0$
$1 \vee 1 = 1$	$1 \wedge 1 = 1$	$\bar{\bar{x}} = x$
$0 \vee x = x$	$0 \wedge x = 0$	
$1 \vee 0 = 1$	$1 \wedge x = x$	
$x \vee x = x$	$x \wedge x = x$	
$x \vee \bar{x} = 1$	$x \wedge \bar{x} = 0$	
$x \vee y = y \vee x$	$x \wedge y = y \wedge x$	
$x \vee (y \vee x) = (x \vee y) \vee x$	$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$	

Спеціальні формули булевої алгебри

1. Операція поглинання $x \vee xy = x$ *і* $x(x \vee y) = x$.
2. Операція склеювання $xy \vee x\bar{y} = x$ і $(x \vee y)(x \vee \bar{y}) = x$.
3. Операція з дужками $xy \vee xz = x(y \vee z)$.
4. Формули де Моргана: $\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$; $\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$.
5. $x_1 F(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 F(1, x_2, \dots, x_n)$
6. $x_1 \vee F(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \vee F(0, x_2, \dots, x_n)$
7. $\overline{x_1} F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{x_1} F(0, x_2, \dots, x_n)$
8. $\overline{x_1} \vee F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{x_1} \vee F(1, x_2, \dots, x_n)$
9. $\overline{F(x_1, x_2, \dots, x_n, V, \cdot)} = F(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}, V, \cdot)$

Доведення формул 1-9 провести самостійно.

Формула 9 означає, що якщо функція F складена таким чином, що змінні пов'язані тільки операціями диз'юнкції і кон'юнкції, то, замінивши всюди у виразі для F знак диз'юнкції на знак кон'юнкції і навпаки, а також узявши заперечення з кожної зі змінних, одержимо заперечення даної функції F .

Формули 8 і 9 з табл. 13 являють собою комутативний і асоціативний закони, а формула 3 зі спеціальних формул – розподільний (дистрибутивний) закон. Тому у виразах, які створюють операції диз'юнкції і кон'юнкції, можна розкривати дужки, виносити спільний множник, переставляти місцями члени за правилами звичайної алгебри, вважати формально диз'юнкцію операцією додавання, а кон'юнкцію - операцією множення.

ЗАВДАННЯ

1. Скільки інтерпретацій має булева функція від трьох змінних *f(x, y, z)*? Назвіть їх.
2. Знайдіть кількість булевих функцій *n* змінних, що приймають значення 1 рівно на одному наборі.
3. Знайдіть кількість булевих функцій *n* змінних, що приймають на протилежних наборах однакові значення. Протилежними наборами називаються такі набори, які в однакових позиціях містять протилежні елементи. Наприклад: (0, 0) – (1, 1); (1, 0) – (0, 1) тощо.
4. Опустіть максимально можливе число дужок у формулі з урахуванням пріоритету виконання операцій:

$$\left(\left((x \sim y) \sim \left(\left(\left((x \wedge z) \wedge t\right) \vee (\bar{x})\right) \to y\right)\right) \vee y\right);$$

$$\left((x \to z) \to \left(\left((y \sim (\bar{z})) \wedge t\right)\right) \vee \left((\bar{t} \wedge x) \sim y\right)\right);$$

$$\left(y \wedge (\bar{z}) \vee \left(((\bar{x}) \to z)\right) \vee \left((\bar{t} \wedge y)\right) \vee \left((\bar{y}) \sim (t \vee x)\right)\right).$$

5. Визначте інтерпретації, на яких виконуються співвідношення:

$$x \wedge (x \to y) \to (x \to z) = 0;$$
$$(x \to y) \wedge (t \to x) \vee \bar{t} = 1;$$
$$(\bar{x} \downarrow y) \wedge (x \sim y) = 1.$$

6. Побудуйте таблиці істинності їх функцій та визначте їхній порядковий номер:

$$f(x, y) = (x \to y) \wedge (y \to x);$$
$$f(x, y, z) = (x \wedge y) \oplus (x \wedge z) \oplus (y \wedge z);$$
$$f(x, y, z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z);$$
$$f(x, y, z) = (x \wedge \bar{y}) \vee (x \wedge \bar{z}) \vee (y \wedge \bar{z}).$$

РОЗДІЛ 9. БУЛЕВІ ЛОГІЧНІ ЕЛЕМЕНТИ

Інвертор

Елементи цифрової техніки, які застосовують елементарні логічні функції, називаються *логічними* елементами цифрових пристроїв. Серед цих елементів вирізняють універсальні набори, з допомогою яких можна реалізувати логічну функцію будь-якої складності. Такі набори називають *функціонально-повними* універсальними логічними базисами. До цих базисів належить булевий набір логічних елементів, який складається з елементів *НІ, І, АБО,* а також констант 0 і 1. Розглянемо цей базис.

У більшості випадків константа 1 реалізується за допомогою

деякого значення фізичного параметру, а константа 0 - через відсутність цього значення, хоча можливе й зворотне кодування.

Елемент, що реалізує логічну функцію *НІ* з допомогою одиничних чи нульових значень напруги, струму чи інших фізичних параметрів, називають ***інвертором.*** Логіка його роботи зображена в табл. 14, а функціональна схема на рис. 1.

На функціональних схемах інвертор зображується прямокутником, в якого вхід - зліва, вихід - справа (рис. 1 а, б). На вихідній *чи* вхідний лінії місце її з'єднання з прямокутником зображується кружком - символом інверсії. Стрілку на вхідних і вихідних лініях ставити заборонено.

Зображення інвертора може бути повернуте на 90° таким чином, що вхід буде зверху, а вихід знизу (рис. 1 в, г). Інші повороти заборонені.

Таблиця 14. Логіка функціонування інвертора

x	$f=\bar{x}$
0	1
1	0

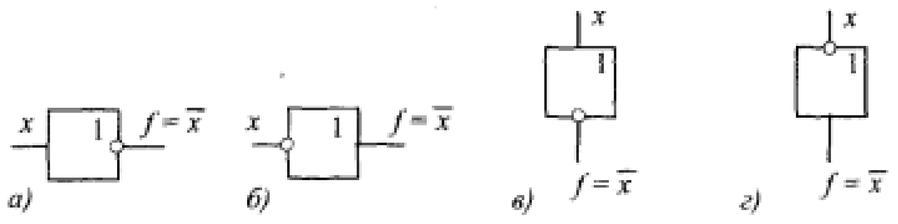


Рис. 1 а, б, в, г. Функціональна схема інвертора

У релейно-контактній логіці функцію *НІ* реалізує контакт, який перебуває в замкнутому стані, поки в обмотках реле відсутній струм *x,* і розімкнутому під час подачі струму *x* (рис. 2). Часова діаграма його роботи зображена на рис. 3.

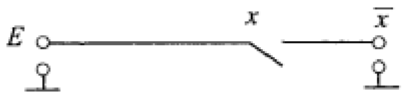


Рис. 2. Інвертор в релейному виконання

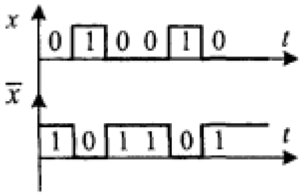


Рис. 3. Часова діаграма роботи інвертора

Кон'юнктор

Кон'юнктор (схема *1,* схема кон'юнкції, клапан) – двійковий логічний елемент, який реалізує операцію *І* (логічне множення). Зображується, як це показано на рис. 4. На його виході з'являється І тільки тоді, коли маємо сигнали І на всіх його входах (табл. 15).

Таблиця 15. Логіка функціонування кон'юнктора

$x_1 x_2$	$f = x_1 \cdot x_2$
0 0	0
0 1	0
1 0	0
1 1	1

Логічна функція, що реалізує кон'юнктор, має вигляд

$$f = x_1 \cdot x_2 = x_1 \wedge x_2 = x_1 \& x_2 = x_1 x_2$$

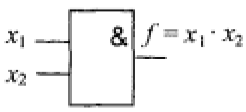


Рис. 4. Функціональна схема кон'юнктор

У релейному вигляді кон'юнктор зображений на рис. 5, а часова діаграма його роботи наведена на рис. 6.

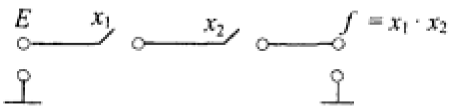


Рис. 5. Кон'юнктор у релейному виконанні

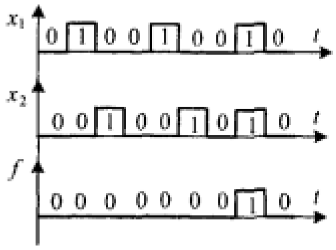


Рис. 6. Часова діаграма роботи кон'юнктора

Реалізація схеми *I* на основі правила де Моргана

Для реалізації схеми *I* досить часто використовується формула де Моргана

$$xy = \overline{\bar{x} + y}.$$

Вона дозволяє функціонально замінити операцію *I* операцією *АБО* і інверсією, що можна в технічному плані легше реалізувати на практиці. Функціонування такої схеми наведене в табл. 16, а її зображення - на рис. 7

Таблиця 16. Логіка роботи схеми I на основ правила де Моргана

$x \quad y$	$\bar{x} \quad \bar{y}$	$\bar{x} + \bar{y}$	$\overline{\bar{x} + \bar{y}} = x \cdot y$
0 0	1 1	1	0
0 1	1 0	1	0
1 0	0 1	1	0
1 1	0 0	0	1

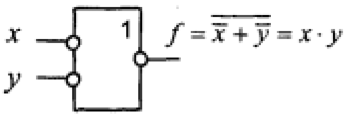


Рис. 7.Реалізація елемента I на основі правила де Моргана

Диз'юнктор

Диз'юнктор (схема диз'юнкції, схема *АБО)* представляє логічний елемент, який реалізує операцію *АБО* (логічне додавання).

Логічна функція, яку реалізує диз'юнктор

$$f = x_1 + x_2 = x_1 \vee x_2$$

Функціонує диз'юнктор відповідно до табл. 17, а його функціональна схема наведена на рис. 8. Релейний варіант схеми диз'юнкції наданий на рис. 9. Часова діаграма роботи подається на рис. 10.

Таблиця 17. Логіка роботи диз'юнктора

$x_1 \ \ x_2$	$f = x_1 \vee x_2$
0 0	0
0 1	1
1 0	l
1 1	1

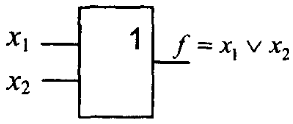


Рис. 8. Функціональна схема диз'юнктора

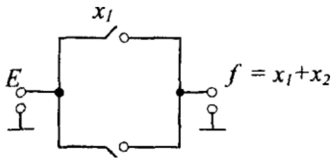


Рис. 9. Диз 'юнктор у релейному виконанні

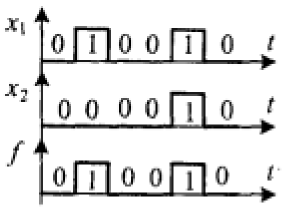


Рис. 10. Часова діаграма роботи диз'юнктора

Реалізація схеми *АБО* на основі правила де Моргана

Правило де Моргана використовується у вигляді формули:

$$x + y = \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}}$$

Функціонування схеми відбувається відповідно до табл. 18.

Таблиця 18. Логіка роботи схеми АБО на основі Правила де Моргана

$x\ \ y$	$\bar{x}\ \ \bar{y}$	$\bar{x} \cdot \bar{y}$	$\overline{\bar{x} \cdot \bar{y}} = x + y$
0 0	1 1	1	0
0 1	1 0	0	1
1 0	0 1	0	1
1 1	0 0	0	1

Реалізується схема *АБО* з допомогою правила де Моргана у вигляді схеми, що подається на рис. 11.

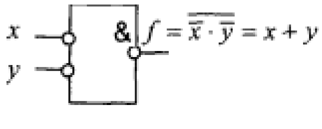
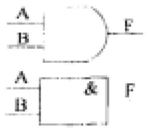
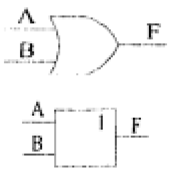
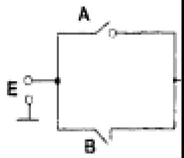
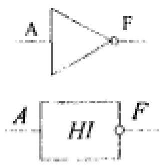
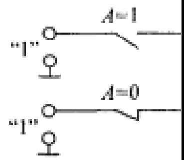
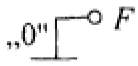
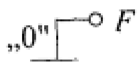
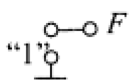
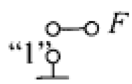


Рис. 11. Реалізація елемента АБО на основі правила де Моргана

Таблиця 19. Зведена таблиця елементів універсального логічного базису

<table>
<tr><th>Найменування</th><th>Графічне позначення</th><th>Реалізація функцій</th><th>Таблиця істинності</th><th>Релейне виконання</th></tr>
<tr><td>AND
I, &</td><td></td><td>$F = A \cdot B =$
$= AB = A \& B =$
$= A \wedge B$</td><td><table><tr><th>B</th><th>A</th><th>F</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td>OR
АБО, I</td><td></td><td>$F = A + B =$
$= A \vee B$</td><td><table><tr><th>B</th><th>A</th><th>F</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td>NOT
НІ</td><td></td><td>$F = \bar{A}$</td><td><table><tr><th>A</th><th>F</th></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td>Змінна A</td><td></td><td>$F = A$</td><td><table><tr><th>A</th><th>F</th></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td>Константа 0</td><td></td><td>$F = 0$</td><td><table><tr><th>A</th><th>F</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td>Константа 1</td><td></td><td>$F = 1$</td><td><table><tr><th>A</th><th>F</th></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr></table></td><td></td></tr>
</table>

Завдання

1. Спростіть за допомогою законів логіки Буля нижченаведені вирази. Потім за допомогою таблиць істинності порівняйте одержані вирази з вихідними:
   а) $\big(x \vee (\bar{t} \wedge y)\big) \wedge ((\bar{x} \wedge (\bar{y} \vee t)) \vee z)) \vee \bar{z} \vee (x \vee (y \wedge \bar{t}))$;
   б) $\big((x \vee z) \wedge (x \vee t)\big) \wedge \Big(\big((z \vee (z \wedge y)\big) \wedge \bar{z}\Big) \vee \bar{x})$;
   в) $(\bar{y} \vee t) \wedge \big((\bar{x} \wedge z) \vee (x \wedge z) \vee (\bar{t} \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge \bar{z})\big) \wedge (y \vee t)$;
   г) $(x \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (\bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y) \wedge (y \vee z)$;
   д) $(x \wedge z) \vee \big((y \vee \bar{t}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{t}) \wedge (t \vee y) \wedge (\bar{x} \vee t) \vee (x \wedge \bar{z})\big)$;
   е) $((\bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (x \vee y) \vee (t \wedge \bar{z}) \vee (((\bar{y} \wedge \bar{x}) \vee z) \wedge (x \vee y)$;
   ж) $(x \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (y \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y) \vee (z \wedge \bar{y})$;
   з) $\Big(\big(x \vee (z \vee (y \wedge z))\big) \wedge (\overline{z \wedge t}) \wedge (z \wedge \bar{t})\Big) \wedge (z \vee (\bar{t} \wedge \bar{z}) \vee t)$;
   и) $\big((x \vee \bar{x}) \wedge (\bar{y} \vee \bar{t}) \wedge (\bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{z} \vee t)\big) \vee \big((\bar{y} \vee z) \wedge (z \vee t)\big)$;
   к) $(x \vee \bar{z}) \wedge ((\bar{x} \wedge t) \vee (y \wedge t) \vee (\bar{x} \wedge \bar{t}) \vee (y \wedge \bar{t})) \wedge (x \vee z)$.

РОЗДІЛ 10. СПЕЦІАЛЬНІ ФУНКЦІОНАЛЬНО ПОВНІ ЛОГІЧНІ ЕЛЕМЕНТИ

Реалізація логічних схем на основі елемента Штрих Шефера

Розглянуті вище логічні функції створювали функціонально- повний логічний базис. Такий базис називається ***мінімальним,*** якщо видалення з нього хоча б однієї з логічних функцій перетворює його на неповний. До таких базисів належить елемент Штрих Шефера - $\mathrm{A|B} = \overline{A \cdot B}$, який реалізує операцію логічного множення з інверсією (І – НІ) . Його функціональна схема наведена на рис. 12.

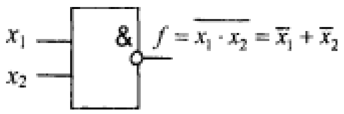


Рис. 12. Функціональна схема елемента Штрих Шефера

Елемент Штрих Шефера створює *універсальний* функціонально-повний логічний базис, оскільки з його допомогою можна виконати логічні операції інверсії, додавання та множення, а також константи 1 і 0. Виключення з цього елементу можливості виконувати операцію інверсії чи логічного множення робить його *неповним.* Тому він створює мінімальний базис.

З допомогою цього елемента легко реалізуються операції константа 0 і константа 1 (див. рис. 13). Для цього лише потрібно постійно подавати на його входи 1 або 0. Тоді на виході відповідно буде постійно знаходитися 0 або 1. Якщо ж 1 і 0 будуть знаходитися на входах як сигнали, тобто деякий час, і потім змінюватися на протилежні, то тоді буде виконуватися операція інверсії.

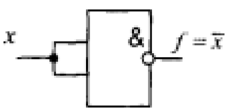


Рис. 13. Реалізація інвертора на елементах Штрих Шефера

Реалізація схеми *І* з допомогою елемента Штрих Шефера показана на рис. 14, а схеми *АБО* на рис. 15.

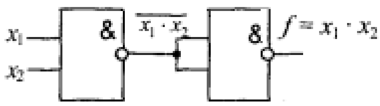


Рис. 14. Реалізація схеми 1 на елементах Штрих Шефера

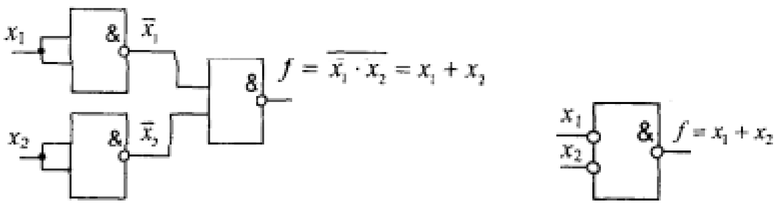


Рис. 15. Реалізація схеми АБО на елементах Штрих Шефера

Реалізація логічних схем на основі елемента Стрілка Пірса

Стрілка Пірса $A \downarrow B = \overline{A + B}$ реалізує операцію множення с інверсією

(АБО – НІ) і за аналогією з елементом Штрих Шефера створює функціонально повний універсальний мінімальний базис. Схема цього елемента показана на рис. 16.

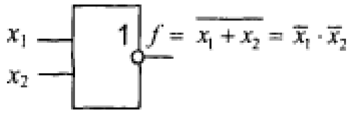


Рис. 16. Функціональна схема елемента Стрілка Пірса

Виконання інверсії з допомогою цього елемента наведено на рис. 17. Як бачимо, для цього потрібно лише перемкнути входи цього елемента між собою.

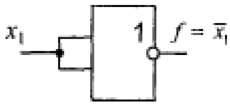


Рис. 17. Реалізація інвертора на елементі Стрілка Пірса

Операція логічного множення *І* зображена на рис. 18. Для її виконання потрібно три елементи Стрілка Пірса, два з яких виконують функції схеми *НІ*.

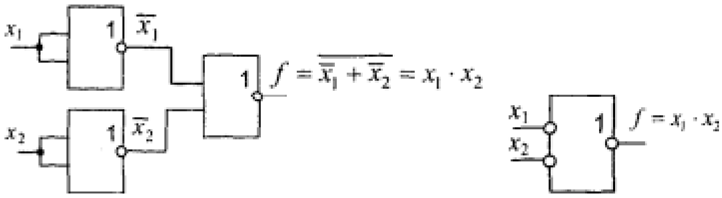


Рис. 18. Реалізація схеми І на елементах Стрілка Пірса

Простіше реалізується схема логічного додавання АБО, оскільки для своєї реалізації потребує лише два елемента Стрілка Пірса (див. рис. 19).

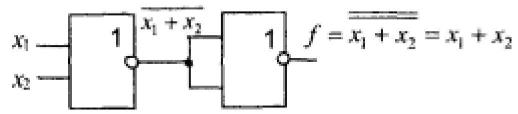


Рис. 19. Реалізація схеми АБО на елементах Стрілка Пірса

ЗАВДАННЯ

1. Побудуйте таблиці функціонування універсальних елементів Штрих Шефера і стрілка Пірса.
2. Реалізуйте з допомогою елемента Штрих Шефера і Стрілка Пірса логічні операції імплікації, рівнозначності і нерівнозначності.

РОЗДІЛ 11. ДОСКОНАЛІ ДИЗ'ЮНКТИВНІ НОРМАЛЬНІ ФОРМИ

Елементарні добутки

Логічні функції можуть бути подані в різних формах. Серед них досить поширеними є *нормальні* форми. Їх вивчення важливе, оскільки з їх допомогою відбувається синтез логічних схем у цифровій техніці. Практично не існує такого цифрового пристрою чи системи (наприклад, комп'ютера чи мобільного телефону), де б не застосовувалася логічна схема, синтез якої не відбувався би на основі нормальних форм, серед яких важливе місце посідають *диз 'юнктивні нормальні форми* (ДНФ). Тому вивченню методів синтезу логічних схем на основі диз'юнктивних нормальних форм у посібниках з цифрової техніки приділяється значна увага. У даному підручнику методам синтезу логічних схем приділяється також значна увага як у практичному аспекті, так і теоретичному. Такий підхід дозволить майбутнім спеціалістам в галузі цифрової й комп'ютерної техніки більш професіонально розробляти різні цифрові пристрої, особливо використовуючи їх у структурах програмно-логічних інтегральних схем.

Означення 1. Добуток кількох змінних, узятих із запереченням або без, називається елементарним ***добутком***, або ***кон'юнкцією***.

Приклад 1. Елементарним добутком є вирази $x_1\overline{x_2}, x_1\overline{x_2}x_3, \bar{x}z, xyz,$ а вирази $\overline{xy}$ та $xy \vee x\bar{z}$ не с ним, оскільки в першому виразі член $\overline{xy}$ має спільне заперечення, а в другому між добутками змінних знаходиться знак, який не відповідає операції логічного множення.

Означення 2. Логічна функція, що подається диз'юнкцією елементарних добутків (кон'юнкцій), називається ***диз'юнктивною нормальною формою*** (ДНФ).

Теорема 1. ***Елементарний добуток змінних, чи кон'юнкція, дорівнює одиниці тоді і лише тоді, коли її змінні із запереченням дорівнюють нулю, а змінні без заперечення - одиниці***

Доведення. Поява хоча б одного нуля в логічному добутку змінних із запереченням і без згідно з властивістю $0 \wedge x = 0$ спричинить нульове значення всього добутку.

Тепер припустимо, що в заданому елементарному добутку хоча б одній змінній із запереченням $\bar{x}$ присвоєна одиниця з будь-якого набору. Тоді ця змінна із запереченням в силу $\bar{1} = 0$ набуде значення, що дорівнює нулю, і, відповідно, увесь елементарний добуток буде дорівнювати 0.

Припустимо далі, що хоча б одна змінна x без заперечення набула нульового значення. Тоді згідно з властивістю добутку $0 \wedge x = 0$ логічний добуток змінної, що набула нульового значення, з рештою змінних незалежно від їх значень також дорівнюватиме нулю.

У випадку, коли в елементарному добутку змінні із запереченням $\bar{x}$ набувають значення нуля, а змінні без заперечення x – одиниці, то, оскільки $\overline{0} = 1$ $і$ $1 \wedge x = x$, добуток усіх змінних дорівнюватиме одиниці.

Таким чином, елементарний добуток дорівнює одиниці лише в тому випадку, коли всім змінним із запереченням присвоєно нуль, а всім змінним без заперечення – одиницю.

Теорему доведено.

Наслідок. Кожному елементарному добутку змінних відповідає один і лише один набір їх значень, на якому цей добуток дорівнює одиниці.

Таким єдиним набором, як це випливає з теореми 1**,** є набір, в якому змінним із запереченням присвоюється нуль, а змінним без заперечення – одиниця.

Приклад 2. Набір значень змінних x_1, x_2, x_3 на якому

елементарний добуток $\varphi = \overline{x_1}\, x_2\, x_3$ дорівнює одиниці, буде 011, оскільки $\varphi = \overline{0} \wedge 1 \wedge 1 = 1 \wedge 1 \wedge 1 = 1$. Цей набір згідно з наслідком теореми 1 є єдиним. Будь-який інший набір перетворює добуток φ у нуль. Наприклад, якщо змінні x_1, x_2, x_3 набудуть відповідно значення 0, 0, 1, то $\varphi = \overline{0} \wedge 0 \wedge 1 = 1 \wedge 0 \wedge 1 = 0$.

Теорема 2. **Для кожного набору значень існує один і лише один елементарний добуток змінних, який приймає на ньому значення, що дорівнює одиниці, за умови, що кількість змінних у добутку буде дорівнювати кількості їх значень у наборі.**

Доведення. Зафіксуємо довільний набір значень і побудуємо на ньому елементарний добуток змінних з такою ж самою їх кількістю, як і кількість значень у їх початковому наборі. Розставимо на добутку змінних заперечення таким чином, щоб він дорівнював одиниці. Це означає, що в цьому добутку змінних кожному нулю з набору їх значень відповідатиме одна з них із запереченням, а одиниці - змінна без заперечення. Будь-який інший добуток змінних буде відрізнятися від добутку, який розглядається, наявністю заперечення хоча б в одній з його змінних. У результаті елементарний добуток змінних станє дорівнювати нулю.

Тобто набору значень змінних, який розглядається, відповідає лише один набор змінних, який на цьому наборі буде дорівнювати одиниці.

Теорему доведено.

Конституенти одиниці

Означення 3. Логічна функція *п* змінних, що приймає значення, яке дорівнює одиниці, лише на одному їх наборі, називається ***конституента одиниці.***

Інколи плутають поняття конституента одиниці з поняттям константа одиниці. Це, проте, різні речі. Константа одиниці дорівнює одиниці на *всіх* без винятку наборах значень, а конституента одиниці лише на *одному.* На це слід звернути особливу увагу, оскільки ці поняття відіграють важливу роль в алгебрі логіки.

Теорема 3. ***Елементарний добуток (кон'юнкція) усіх п змінних, що належать функції F, створює конституенту одиниці.***

Доведення. Оскільки відповідно до наслідку теореми 1 будь-який елементарний добуток змінних приймає значення, яке дорівнює 1, лише на одному наборі значень, то й добуток усіх *п* змінних дорівнює одиниці лише на одному наборі їх значень. Такий добуток саме й створює конституенту одиниці.

Теорему доведено.

Теорема 4. ***Число конституешп одиниці п змінних дорівнює*** $\mathbf{2^n}$.

Доведення. Доведення випливає з того, що кількість наборів значень для *п* змінних дорівнює $\mathbf{2^n}$, а кожному такому набору значень відповідає лише один добуток змінних, який самий й створює конституенту одиниці. Отже, число конституент одиниці буде дорівнювати $\mathbf{2^n}$.

Теорему доведено.

Відповідно до змісту теореми 1, для того щоб представити конституенту одиниці з n змінними на m-му наборі, слід подати число m у вигляді *n*-розрядного двійкового числа і в добутку змінних узяти із запереченням лише ті змінні, яким у двійковому числі відповідають нулі, а інші залишити без змін.

Приклад 3. Записати конституенту одиниці 17-го набору.

Розв'язання. Подамо число 17 у двійковому вигляді: $17_{(10)} = 10001_{(2)}$. Запишемо кон'юнкцію п'яти змінних: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 . Візьмемо із запереченням ті змінні, яким у двійковому числі відповідають нулі: $x_1, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \overline{x_4}, x_5$ Одержаний результат є конституента одиниці 17-го набору.

Подання логічних функцій у ДДНФ

Одна й та ж сама логічна функція може бути подана з допомогою диз'юнкції різних добугків змінних, але найбільш простою й уживаною є досконала диз'юнктивна нормальна форма.

Означення 4. Диз'юнкція конституент одиниці, які дорівнюють одиниці на тих самих наборах, що й задана функція, називається ***досконалою диз'юиктивною нормальною форлтою (ДДНФ)*** логічної функції.

Теорема 5. **Будь-яка логічна функція F, крім константи нуля, може бути поданою в ДДНФ, до того ж єдиним способом.**

Доведення. Дійсно, будь-яка логічна функція *F*, крім константи нуля, характеризується тим, що на $k(1 \le k \le 2^n)$наборах вона дорівнює одиниці, а на решті – нулю. Конституента одиниці дорівнює одиниці лише на одному наборі, а на решті – приймає нульове

значення. Тому, якщо всі конституенти одиниці $K_i, i = 1,2, \dots, k,$, які дорівнюють одиниці на тих самих наборах, що й логічна функція, об'єднати знаком диз'юнкції, то відповідно до правила $1 \vee x = 1$ функція F буде дорівнювати одиниці на цих же самих наборах і нулю, якщо жодна з конституент одиниці K_i не буде дорівнювати одиниці. Це можливе лише в разі наборів значень змінних, які не належать жодній з цих конституент.

З цього випливає, що будь-яка функція *F* може бути подана з допомогою ди·з юнкції конституент одиниці. Таке подання єдине, оскільки в протилежному випадку дві або більше різних конституенти будуть дорівнювати одиниці на одному й тому ж самому наборі змінних, або два різних набори будуть призводити до того, що конституента дорівнюватиме одиниці. Перший випадок виключається теоремою l, а другий – теоремою 2. При цьому константа нуля на всіх наборах змінних дорівнює нулю. Тому її не можна подати за допомогою конституент одиниці, тобто у ДДНФ.

Теорему доведено.

Виходячи з доведеної теореми 5, розглянемо задачу подання логічних функцій у ДДНФ.

Для її розв'язання потрібно скласти диз'юнкцію конституент одиниці, які дорівнюють одиниці на тих самих наборах, що й задана функція, за таким алгоритмом:

1. Виписати за числом одиниць у логічній функції добутки всіх аргументів від першого до *n-го* і поєднати їх знаком диз'юнкції.

2. Записати під кожним аргументом його значення у відповідному до даного добутку наборі, що дорівнює 1 або 0, і над аргументами, що дорівнюють нулю, поставити знаки заперечення.

Даний алгоритм носить назву запису логічної функції в досконалій диз'юнктивній формі або за одиницями.

Приклад 4. Подати у ДДНФ логічну функцію п'яти змінних $F = F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, що дорівнює одиниці на наборах з номерами 5, 14, 16, 31 і нулю – на решті наборів.

Розв'яжемо цю задачу за наведеним вище алгоритмом:

1. Випишемо чотири конституенти одиниці й поєднаємо їх знаками диз'юнкції

$$x_1\, x_2\, x_3 x_4 x_5 \vee x_1\, x_2\, x_3 x_4 x_5 \vee x_1\, x_2\, x_3 x_4 x_5 \vee x_1\, x_2\, x_3 x_4 x_5$$

2. Під кожним добутком поставимо набори значень змінних, поданих у двійковому виді числа 5, 14, 16, 31, і розставимо заперечення над змінними, що дорівнюють нулю.

Тоді отримаємо ДДНФ:

$$F = \overline{x_1}\,\overline{x_2} x_3 \overline{x_4} x_5 \vee \overline{x_1} x_2\, x_3 x_4 \overline{x_5} \vee x_1\, \overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\,\overline{x_5} \vee x_1\, x_2\, x_3 x_4 x_5 \ldots$$

$$0\ 0\ 1\ 0\ 1 \quad 0\ 1\ 1\ 1\ 0 \quad 1\ 0\ 0\ 0\ 0 \quad 1\ 1\ 1\ 1\ 1$$

ДДНФ є найбільш загальною формою подання логічних функцій у диз'юнктивній нормальній формі і тому містить найбільш можливу кількість літер. Кількість літер, що належать до ДНФ логічної функції, *дорівнює* або *більше* від кількості змінних, які містяться в цій функції, оскільки одна і та ж сама змінна може входити до функції кілька разів. Наприклад, ДНФ функції $F = xy \vee x\bar{y}z \vee yz$ містить три змінних *x, y, z* і сім літер унаслідок того, що *x* входить до функції двічі, *y* – тричі (один раз із запереченням) і z – двічі.

Знати кількість літер під час синтезу логічних функцій важливо, оскільки кожна з них реалізується відповідною, як правило, електронною схемою, і тому від кількості· літер залежить величина апаратурних затрат, а отже, і вартість цифрових пристроїв, але не тільки. Від цієї кількості залежить швидкодія і надійність цифрової апаратури. Тому питання зменшення кількості літер під час синтезу логічних функцій є досить важливим, і на нього завжди слід звертати увагу. На практиці й відповідно в теорії постає проблема скорочення кількості літер у ДДНФ. Розв'язання цієї задачі розглядається в наступних лекціях підручника.

ЗАВДАННЯ

1. Випишіть конституенти одиниці булевої функції $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ з такого списку елементарних кон'юкцій:
   а) $x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}$;
   б) $x_1\overline{x_2}\,\overline{x_1}$;
   в) $x_4 x_2\overline{x_3}\, x_1$;
   г) x_1.
2. Випишіть конституенти нуля булевої функції $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ з такого списку елементарних диз'юнкцій:
   а) $x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_5}$;
   б) $x_4 \vee x_2 \vee \overline{x_3}$;
   в) $\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}$;
   г) $\overline{x_1}$

3. Знайти диз'юктивне розкладання таких функцій за змінними x, z:
   а) $(yx \vee x\bar{z})\big(x \ \vee \bar{y}z(z \ \vee \bar{x}y)\big)$;
   б) $\Big(\big(x \ \vee (z \vee yz)\big)\Big)(z \vee \bar{x}\bar{z} \vee y)$;
   в) $\big((x \vee \bar{y})(\bar{y} \vee \bar{z})(\bar{z} \vee x)\big)\big((\bar{y} \vee z)\big)$;
   г) $(x \vee \bar{z})(\bar{x}t \vee yt \vee \overline{xt} \vee y\bar{t})(x \vee z)$;
   д) $(xy \vee x\bar{y}) \vee ((\bar{x} \vee y)(z \vee \bar{t})(\bar{x} \vee \bar{y})(t \vee z)$.

4. Знайти кон'юктивне розкладання таких функцій за змінними x,z:
   1) $(xz \vee y)(x\bar{y} \vee \bar{x}\bar{y} \vee \bar{z})(x \vee \bar{y})$;
   2) $\big((y \vee z)(t \vee y\bar{z})\big) \vee \bar{t}\bar{x} \ \vee \big((z \vee y)(\bar{t} \vee \bar{z})\big)$;
   3) $yt \vee (z \vee \bar{t})(x \vee z)(\bar{t} \vee \bar{z})(x \vee \bar{z})) \vee \bar{y}t$;
   4) $(\bar{z} \vee t)(t \vee x) \vee (\bar{z} \vee \bar{x})(\bar{z} \vee \bar{t})(\bar{t} \vee z)$;
   5) $x\bar{t} \vee ((\bar{z}\bar{y}) \vee t)(z \vee y)) \vee ((\bar{t} \vee \bar{z})(z \vee y))$;
   6) $\Big(\big((t \vee \bar{t}z)\bar{t}\big) \vee \bar{y}\Big)\big((y \vee t)(y \vee x)\big)$;
   7) $\big((z \vee \bar{x})(\bar{x} \vee \bar{t})(x \vee z)(\bar{y} \vee x)\big) \vee y\bar{t} \vee yt$;
   8) $(t \vee \bar{x}\bar{t} \vee x)\big(y \vee (t \vee tz)\big)\bar{z}\bar{x}t$;
   9) $\bar{z}\bar{y} \vee tz \ \vee \bar{y}z \vee t\bar{z} \ \vee y\bar{t}$.

РОЗДІЛ 12. СКОРОЧЕНІ ДИЗ'ЮНКТИВНІ НОРМАЛЬНІ ФОРМИ

Імпліканти логічної функції

Означення 1. Якщо деяка логічна функція φ (в окремому випадку елементарний добуток) дорівнює нулю на тих наборах, на яких дорівнює нулю інша функція F, то функція φ називається ***імплікантою*** функції F. При цьому функція φ може дорівнювати нулю на тих наборах, на яких F = 1, але не навпаки.

У разі, коли функція φ є імплікантою функції F, то кажуть, що функція φ належить функції F. Умова входження записується як $\varphi \subset F$.

Застосування терміну *і.мпліканта* пов'язане з логічною функцією $F_{13} = A \rightarrow B$. Вираз $\varphi \rightarrow F$ дорівнює одиниці лише тоді, коли $\varphi \subset F$, тобто на наборах, де значення для φ і F відповідно мають вид: 0 – 0, 0 – 1, 1 – 1. Якщо $\varphi \notin F$, то на одному з наборів функція φ має прийняти одиничне значення, а функція F – нульове. У цьому разі вираз $(\varphi \rightarrow F) = 0$.

Приклад 1. У табл. 20 дані функції

$$F = F\,(x_1\,, x_2\,, x_3), \varphi = \varphi(x_1\,, x_2\,, x_3), Z = Z(x_1\,, x_2\,, x_3)$$

Яка з функцій φ і Z є імплікантою функції F?

Таблиця 20 Функції трьох змінних для прикладу 1

Номер набору	x_1	x_2	x_3	F	φ	Z
0	0	0	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0
2	0	1	0	1	0	0
3	0	1	1	1	1	0
4	1	0	0	0	0	1
5	1	0	1	0	0	0
6	1	1	0	1	0	0
7	1	1	1	1	1	1

Відповідь. Імплікантою є функція φ, оскільки вона дорівнює нулю на тих наборах, де функція *F* також дорівнює нулю. Функція *Z* не є імплікантою функції *F*, оскільки на наборі 4 функція *Z* = 1, а функція *F* = 0.

Теорема 1. **Будь-яка конституента одиниці, що належить до ДДНФ логічної функції F, є її імплікантою**.

Доведення. Дійсно, конституента одиниці дорівнює одиниці лише на одному наборі змінних. А оскільки ДДНФ логічної функції *F* складається з диз'юнкції конституент одиниці, то одиничне значення будь-якої конституенти одиниці, що належить до ДДНФ, збігається з одним із значень одиниці логічної функції *F*. Решта значень конституенти одиниці, як відомо, буде дорівнювати нулю. Тобто неможливо, щоб імпліканта набула значення одиниці, а відповідне їй значення функції дорівнювало нулю. Тому конституента одиниці, що належить до ДДНФ, є її імплікантою.

Теорему доведено.

Теорема 2. **Константа нуль є імплікантою будь-якої логічної функції:**

Доведення. Дійсно, функція константа нуля за означенням дорівнює нулю на всіх її можливих наборах значень, і тому обов' язково дорівнює нулю на всіх тих наборах, на яких функція *F* дорівнює нулю. Цього досить для того, щоб константа нуля мала всі ознаки імпліканти.

Теорему доведено.

Кожна логічна функція є імплікантою самої себе. Це випливає з того, що ця функція збігається сама з собою й, відповідно, дорівнює нулю на тих наборах значень, де вона вже дорівнювала нулю раніше ще до того, як проводився її аналіз щодо належності до імпліканти, і ніде не дорівнює одиниці, де функція дорівнює нулю. Саме це і є ознакою імпліканти.

Теорема 3. **Будь-яка логічна функція є імплікантою константи одиниці.**

Доведення. Константа одиниці не дорівнює нулю на жодному наборі. Це означає, що в будь-якої логічної функції, на яких наборах не стояли б у неї одиниці, існуватиме відповідність її одиничних значень до одиничних значень константи одиниці, і ніде не можливий набір, для якого логічна функція дорівнюватиме одиниці, а константа одиниці в цей час дорівнюватиме нулю.

Теорему доведено.

Прості імпліканти

Означення 2. Елементарний добуток, одержаний шляхом виключення з початкового добутку однієї або кількох змінних, називається ***власною*** частиною останнього.

Приклад 2. Нехай елементарний добуток – $x\bar{y}z$. Тоді власними частинами будуть добутки

$$x\bar{y}, \bar{y}z, xz, x, \bar{y}, z.$$

Означення 3. Елементарні добутки, які самі належать даній функції в ДДНФ, але ніяка їх власна частина самостійно їй не належить, називаються ***простими*** імплікантами.

Приклад 3. Припустимо, що добутки $\varphi = x_1\, x_2\, x_3\overline{x_4}$ і $x_2\,\overline{x_4}$ належать деякій логічній функції $F = F\,(x_1\,, x_2\,, x_3, x_4)$, а змінні x_2 і $\overline{x_4}$ самостійно до неї не входять. Тоді добуток $x_2\,\overline{x_4}$ буде простою імплікантою функції F, оскільки $x_2\,\overline{x_4} \subset \varphi \subset F$, а $\overline{x_2} \notin F$ і $\overline{x_4} \notin F$.

Разом з тим добуток φ не буде простою імплікантою, оскільки його власна частина

$x_2\,\overline{x_4} \subset F$.

Якщо добуток належить даній функції, то з появою в ньому додаткових змінних новий добуток також буде належати цій функції, оскільки він перетворюється на нуль завжди, коли вихідний добуток дорівнює нулю, незалежно від того, дорівнюють чи не дорівнюють нулю додаткові змінні. Це випливає з того, що добуток 0 з будь-якою змінною дорівнює 0.

Подання логічних функцій у скорочених ДНФ

Означення 4. Диз'юнкція простих імплікант називається ***скороченою ДНФ***.

Теорема 4. ***Будь-яку логічну функцію F можна подати у вигляді скороченої ДНФ, тобто диз'юнкції простих імплікант.***

Доведення. Оскільки прості імпліканти належать самостійно функції *F*, то вони повинні дорівнювати нулю на тих самих наборах, що й функція *F*. Якщо це не так і проста імпліканта дорівнює одиниці там, де функція *F* має дорівнювати нулю, то на підставі рівності $1 \lor x = 1$ функція *F* дорівнюватиме одиниці, що неприпустимо для імплікант.

Для кожного набору, де функція *F* дорівнює одиниці, має знайтись хоча б одна проста імпліканта, що дорівнює одиниці, інакше функція *F* у цьому випадку не буде дорівнювати одиниці. В гіршому випадку такою імплікантою є конституента одиниці.

Серед імплікант у функції *F* можуть знайтись прості імпліканти *u,* які є власною частиною імплікант *y.* У цьому випадку $y = uv$. На підставі рівностей $uv + u = u(v + \mathrm{I}) = u$ і відповідно $y + u = u$ відбудеться поглинання імпліканти *y* її власною частиною *u,* яка є простою імплікантою.

Це означає, що функція *F* після всіх можливих поглинань врешті-решт буде складатися з одних простих імплікант.

Теорему доведено.

З метою подання логічної функції *F* у вигляді скороченої ДНФ розглянемо операції повного і неповного склеювання, а також поглинання і розгортання в ДНФ.

Операція повного склеювання визначається співвідношенням

$$xy \vee x\bar{y} = x$$

Це випливає з того, що

$$xy \vee x\bar{y} = x(y \vee \bar{y}) = x \wedge 1 = x$$

Склеювання добутків xy і $x\bar{y}$ відбувається в цьому разі за змінною *y*.

Операція неповного склеювання має вигляд:

$$xy \vee x\bar{y} = x \vee xy \vee x\bar{y}.$$

Це можливе тому, що логічне додавання змінної *x* з виразом $xy \vee x\bar{y}$ ніяк не впливає на останній. Він залишається незмінним, скільки б разів змінна *x* до нього не додавалась.

Операція поглинання визначається з рівностей

$$x \vee xy = x \text{ і } x \vee x\bar{y} = x$$

У цьому випадку *x* поглинає весь вираз. Це випливає з того, що

$$x \vee xy = x(1 \vee y) = x$$

Відповідно

$$x \vee x\bar{y} = x(1 \vee \bar{y}) = x$$

Оскільки далеко не завжди вихідна логічна функція подається в ДДНФ, розглянемо операцію її розгортання. Вона перетворює будь-яку просту імпліканту в диз'юнкцію конституент одиниці.

Нехай, наприклад, $x\bar{y}$ – проста імпліканта логічної функції чотирьох аргументів: *x, y, z, u.* Тоді, застосовуючи двічі операцію розгортання, одержимо

$$x\bar{y} = x\bar{y}\,(z \vee \bar{z}) = x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} = x\bar{y}z(u \vee \bar{u}) \vee x\bar{y}\bar{z}(u \vee \bar{u}) =$$
$$= x\bar{y}zu \vee x\bar{y}z\bar{u} \vee x\bar{y}\bar{z}u \vee x\bar{y}\bar{z}\bar{u}.$$

При розгортанні різні імпліканти можуть утворювати одну й ту ж саму конституенту одиниці. У цьому разі на основі тотожності $x \vee x = x$ треба залишити одну конституенту одиниці. Унаслідок цього одержимо ДДНФ вихідної логічної функції.

РОЗДІЛ 13. ДОСКОНАЛІ КОН'КЮТИВНІ НОРМАЛЬНІ ФОРМИ

Елементарні суми

Означення 1. Логічна сума кількох різних змінних, узятих із запереченням або без нього, називається ***елементарною сумою,*** або ***диз'юнкцією.***

Означення 2. Логічна функція, що подається кон'юнкцією елементарних сум (диз'юнкцій), називається ***кон'юнктивною нормальною формою (КНФ).***

Приклад 1. Елементарними сумами будуть вирази $x_1 \vee \overline{x_2}$, $x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3, x \vee y \vee z,$ а вирази $\overline{x \vee y}$ і $(x \vee y)(x \vee \bar{z})$ ними не є, оскільки в першому виразі член $\overline{x \vee y}$ має загальне заперечення, а в другому є знак кон'юнкції.

Теорема 1. ***Елементарна сума, або диз'юнкція, дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли її змінним із запереченням присвоєна одиниця, а змінним без заперечення – нуль.***

Наслідок. Кожній елементарній сумі відповідає один і лише один набір значень змінних, що належать до неї, на якому вона дорівнює нулю.

Приклад 2. Набір значень змінних x_1, x_2, x_3, на якому елементарна сума $\varphi = \overline{x_1} + x_2 + x_3$ дорівнює нулю, буде дорівнювати 1 0 0, оскільки $\varphi = \overline{1} \vee 0 \vee 0 = 0 \vee 0 \vee 0 = 0$.

Теорема 2. ***Для кожного набору значень існує одна й лише одна елементарна сума змінних, яка набуває на ньому значення, що дорівнює нулю, за умови, що кількість змінних у сумі буде дорівнювати кількості значень у наборі.***

Конституенти нуля

Означення 3. Логічна функція *n* змінних, що приймає значення, яке дорівнює нулю, лише на одному їх наборі, називається ***конституентою нуля.***

Теорема 3. ***Елементарна сума (диз'юнкція) усіх n змінних, що належать до функції F, є конституентою нуля.***

Теорема 4. ***Число конституент нуля n змінних дорівнює*** $\mathbf{2^n}$ **.**

Згідно з теоремою 1, щоб подати конституенту нуля від *n* змінних, що дорівнює 0 на *m-му* наборі, потрібно подати число *m* у вигляді *n*-розрядного двійкового числа і в диз'юнкції всіх змінних узяти із запереченням лише ті змінні, яким у двійковому числі відповідають одиниці.

Приклад 3. Записати конституенту нуля 17-го набору.

Розв'язання. Подамо десяткове число 17 у двійковому вигляді:

$17_{(10)} = 10001_{(2)}$. Запишемо диз'юнкцію 5 змінних: $x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5$.

Візьмемо із запереченням ті змінні, яким у двійковому коді відповідають одиниці: $\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5}$. Одержаний результат є конституентою нуля 17-го набору.

Подання логічних функцій у ДКНФ

Означення 4. Кон'юнкція конституент нуля, що дорівнює нулю на тих самих наборах, що й задана функція, називається ***досконалою кон'юнктивною нормальною формою (ДКНФ)*** логічної функції.

Теорема 5. ***Будь-яка логічна функція, крім конституенти одиниці, може бути подана в ДКНФ, до того ж єдиним способом.***

Виходячи з теореми 5, розглянемо алгоритм подання логічних функцій в ДКНФ.

З цією метою треба скласти добуток тих конституент нуля, що дорівнюють нулю на тих самих наборах, що й задана функція, за таким алгоритмом:

а) виписати за числом нулів у логічній функції диз'юнкції всіх аргументів від першого до *n-го* й поєднати їх знаками кон'юнкції;

б) записати під кожним аргументом його значення у відповідному до даного добутку наборі, яке дорівнює одиниці або нулю, і над аргументами, що дорівнюють одиниці, поставити знаки заперечення.

Даний алгоритм носить назву запису логічної функції в досконалій кон'юнктивній нормальній формі або за нулями.

Приклад 4. Подати у ДКНФ логічну функцію п'яти аргументів $F = F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, що дорівнює нулю на наборах з номерами 5, 14, 16, 31 і одиниці - на решті наборів.

Розв'яжемо цю задачу за наведеним вище алгоритмом:

1. Випишимо чотири суми аргументів і поєднаємо їх знаками кон'юнкції

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) \wedge (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) \wedge (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) \wedge$$
$$\wedge (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) \wedge (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5).$$

2. Під кожною сумою поставимо подані у двійковому вигляді числа 5, 14, 16, 31 і розставимо заперечення над змінними, які відповідають одиниці.

Тоді отримаємо ДКНФ

$$F = (x_1 + x_2 + \overline{x_3} + x_4 + \overline{x_5}) \wedge (x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3} + \overline{x_4} + x_5) \wedge$$
$$0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \qquad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0$$
$$\wedge (\overline{x_1} + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) \wedge (\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3} + \overline{x_4} + \overline{x_5})$$
$$1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \qquad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$$

РОЗДІЛ 14. СКОРОЧЕНІ КОН'ЮНКТИВНІ НОРМАЛЬНІ ФОРМИ

Імпліценти логічної функції

ДКНФ є найбільш загальною формою подання логічної функції у кон'юнктивній формі і тому містить найбільш можливу кількість літер. Розглянемо питання зменшення їх числа.

Означення 1. Якщо деяка логічна функція φ (в окремому випадку - елементарна сума) дорівнює *одиниці* на всіх тих наборах, на яких дорівнює одиниці інша функція *F*, то функція φ називається ***імпліцентою*** функції *F*. Кажуть, що функція φ належить функції *F*. При цьому функція φ, може дорівнювати одиниці і на тих наборах, на яких *F* = 0, але не навпаки - не може дорівнювати нулю на наборах, де функція *F* дорівнює одиниці.

Приклад 1. У в табл. 21 подані функції

$$F = F(x_1, x_2, x_3), \varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3), Z = Z(x_1, x_2, x_3)$$

Яка з функцій φ і *Z* є імплікантою функції *F?*

Таблиця 21 Функції трьох змінних для прикладу 1

Номер набору	x_1	x_2	x_3	F	φ	Z
0	0	0	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0
2	0	1	0	1	0	0
3	0	1	1	1	1	0
4	1	0	0	0	0	1
5	1	0	1	0	0	0
6	1	1	0	1	0	0
7	1	1	1	1	1	1

Відповідь. Ані функція φ, ані функція *Z* не є імпліцентами функції *F*, оскільки перша дорівнює нулю на наборах 2 і 6, а друга – на наборах 0, 2, 3 і 6. На цих наборах функція *F* дорівнює одиниці, що суперечить означенню імпліценти.

Теорема 1. **Будь-яка конституента нуля, що належить до ДКНФ логічної функції F, є її імпліцентою.**

Теорема 2. **Константа одиниці є імпліцентою будь-якої логічної функції.**

Теорема 3. **Будь-яка логічна функція є імпліцентою константи нуля.**

Прості імпліценти

Означення 2. Елементарна сума, одержана виключенням з вихідної суми однієї або кількох змінних, називається ***власною*** частиною останньої.

Приклад 2. Нехай є елементарна сума $x+\bar{y}+z$. Тоді її власними частинами будуть суми:

$$x+\bar{y};\ \bar{y}+z;\ x+z;\ \text{x};\ \bar{y};\ z.$$

Означення 3. Елементарні суми, які самі належать даній функції, але жодна їх власна частина не належить, називається ***простими імпліцентами.***

Приклад 3. Припустимо, що сума $\varphi = x_1 + x_2 + x_3 + \overline{x_4}$ і її частина $x_2 + \overline{x_4}$ належать як самостійні члени функції $F = F\,(x_1, x_2, x_3, x_4)$, а змінні x_2 і $\overline{x_4}$ не належать. Тоді сума $x_2 + \overline{x_4}$ буде простою імпліцентою функції *F*, оскільки $x_2 + \overline{x_4} \subset \varphi \subset F$, а $\overline{x_2} \notin F$ і $\overline{x_4} \notin F$.

У той же самий час сума φ не буде простою імпліцентою, оскільки $(x_2 + \overline{x_4}) \subset F$.

Якщо будь-які елементарні суми належать даній функції, то при додаванні до них будь-яких змінних нова сума також буде належати цій функції, оскільки вона перетворюється в одиницю разом з початковою сумою.

Подання логічних функцій у скорочених КНФ

Означення 4. Кон'юнкція простих імпліцент називається ***скороченою КНФ.***

Теорема 4. **Будь-яку логічну функцію F можна подати у вигляді скороченої КНФ, тобто кон'юнкції простих імпліцент.**

З метою подання логічної функції F у вигляді скороченої КНФ розглянемо операції повного і неповного склеювання, а також поглинання і розгортання в КНФ. Операція повного склеювання визначається співвідношенням

$$(x+y)(x+\bar{y}) = x.$$

Це випливає з того, що

$$(x+y)(x+\bar{y}) = x + x\bar{y} + xy + y\bar{y} = x + x(\bar{y}+y) = x$$

Склеювання сум $x+y$ і $x+\bar{y}$ відбувається в цьому випадку за змінною y.

Операція неповного склеювання мас вигляд:

$$(x+y)(x+\bar{y}) = x(x+y)(x+\bar{y}).$$

Операція поглинання визначається з рівностей $x(x+y) = x$ і $x(x+\bar{y}) = x$. У цьому випадку x поглинає весь вираз. Це випливає з того, що $x(x+y) = x + xy = x(1+y) = x$

Відповідно:

$$x(x+\bar{y}) = x + x\bar{y} = x(1+\bar{y}) = x.$$

Операція розгортання перетворює будь-яку просту імпліценту в диз'юнкцію конституент нуля. Нехай, наприклад, $x+y$ – проста імпліцента логічної функції чотирьох аргументів: x, y, z, u. Тоді, застосовуючи двічі операцію розгортання, отримуємо:

$$x+\bar{y} = (x+\bar{y})+(z\bar{z}) = (x+\bar{y}+z)(x+\bar{y}+\bar{z}) =$$
$$= \big((x+\bar{y}+z)+u\bar{u}\big)\big((x+\bar{y}+\bar{z})+u\bar{u}\big) =$$
$$= (x+\bar{y}+z+u)(x+\bar{y}+z+\bar{u})(x+\bar{y}+\bar{z}+u)(x+\bar{y}+\bar{z}+\bar{u}).$$

При розгортанні різні impліценти можуть утворювати одну й ту саму конституенту нуля. У цьому разі на основі тотожності $xx = x$ треба залишити одну конституенту нуля. У результаті отримаємо ДКНФ початкової логічної функції.

РОЗДІЛ 15. МІНІМІЗАЦІЯ ЛОГІЧНИХ ФУНКЦІЙ У ДНФ

Метод мінімізації логічних функцій, що є предметом розгляду в цьому розділі, базується на теоремі Квайна.

Теорема Квайна для ДДНФ. ***Якщо в ДДНФ логічної функції F виконати всі операції неповного склеювання, а потім усі операції поглинання, то одержимо скорочену ДНФ цієї функції, тобто диз'юнкцію всіх її простих імплікант.***

Доведення. Припустимо, що після виконання всіх операцій неповного склеювання, а потім поглинання отримана ДНФ буде містити у вигляді кон'юнкції член q, який не є простою імплікантою. Тоді до цієї функції, крім члена q, самостійно входить також у вигляді кон'юнкції якась його частина p, яка є простою імплікантою. Це означає, що функція F буде містити імпліканту q і просту імпліканту p у вигляді їх диз'юнкції $p \vee q$. Але $q = q_1 p$. Тоді член q згідно зрівністю $p \vee q = p \vee q_1\, p = p$ поглинатиметься простою імплікантою p, і, відповідно, ДНФ буде містити лише цю імпліканту. Отже, ця ДНФ складатиметься лише з простих імплікант, об'єднаних операціями диз'юнкції, тобто наше вихідне припущення неправильне, і вона буде надана у вигляді скороченої ДНФ.

Теорему доведено.

Особливістю метода мінімізації за Квайном є те, що його робота починається після подання логічної функції, яка мінімізується, в ДДНФ. Тому, якщо логічна функція задана в довільній ДНФ, то перед мінімізацією необхідно перетворити логічну функцію в ДДНФ шляхом її розгортання.

Потім для проведення безпосередньо вже самої мінімізації необхідно виконати такі кроки:

1. У ДДНФ $\boldsymbol{F = F(x_1, x_2, \dots, x_n)}$ здійснюються всі операції неповного склеювання конституент одиниці.

Неповне склеювання, як уже зазначалося раніше, характеризується тим, що конституенти одиниці після склеювання їх з іншими конституентами, які належать до ДДНФ логічної функції, залишаються в ній для подальшої мінімізації. Це викликане тим, що кожна конституента одиниці може склеюватися з кількома іншими. Тоді її після першого склеювання не поглинають, а використовують для інших операцій склеювання з конституентами, з якими ще не виконувалося склеювання.

У результаті одержують конституенту одиниці й імпліканти, в які входять $(n - 1)$ змінна. При цьому ймовірне також отримання й простих імплілікант, якими також можуть бути й конституента одиниці.

2. Відбувається поглинання імплікантами всіх конституент одиниці, які беруть участь у неповному склеюванні.

Конституенти одиниці, що беруть участь в операціях неповного склеювання, обов'язково поглинаються, оскільки кожна з них має у своєму складі імпліканту. Після першого склеювання, з якого починається мінімізація, імпліканти містять в собі $n - 1$ літеру.

Конституенти одиниці, які не були задіяні в операціях склеювання, не можуть поглинатися, оскільки вони являють собою прості імпліканти з n змінними. Тому вони залишаються у функції як прості імпліканти.

3. Здійснюються операції неповного склеювання і поглинання імплікант з $n - 1$ змінною, одержаних на першому кроці склеювання, за аналогією з пунктами 1 та 2.

Ця процедура повторюється доти, поки існує ймовірність операцій неповного склеювання. Отримана в результаті неї ДНФ відповідно до теореми Квайна буде скороченою, тобто міститиме в собі лише прості імпліканти

Приклад 1. Знайти скорочену ДНФ логічної функції

$$F = F(x, y, z) = xy \vee \bar{x}z \vee \bar{y}\bar{z}.$$

Розв'язання.

1. Застосовуючи операцію розгортання, одержимо ДДНФ функції $F = F(x, y, z)$:

$$F = F(x, y, z) = xy(z \vee \bar{z}) \vee \bar{x}z(y \vee \bar{y}) \vee \bar{z}(x \vee \bar{x}) =$$
$$= xyz \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}.$$

2. Здійснимо в ДДНФ функції *P = P(x, y, z)* усі можливі операції неповного склеювання конституент одиниці.

Для цього пронумеруємо всі конституенти одиниці функції:

$$F = F(x, y, z) = \overset{1}{xyz} \vee \overset{2}{xy\bar{z}} \vee \overset{3}{\bar{x}yz} \vee \overset{4}{\bar{x}\bar{y}z} \vee \overset{5}{x\bar{y}\bar{z}} \vee \overset{6}{\bar{x}\bar{y}\bar{z}}.$$

і виконаємо щодо цих конституент усі можливі операції неповного склеювання.

Результати такого склеювання занесемо до табл.. 22, в якій перший стовпчик показує номери конституент одиниці, другий - результат склеювання, третій - змінні, за якими відбулося склеювання.

Таблиця 22. Склеювання конституент одиниці в прикладі 1

Номера конституент, які склеюються		Імпліканта	Змінна, яка склеюється
1.	1 - 2	xy	z
2.	1 - 3	yz	x
3.	2 - 5	$x\bar{z}$	y
4.	3 - 4	$\bar{x}z$	y
5.	4 - 6	$\bar{x}\bar{y}$	z
6.	5 - 6	$\bar{y}\bar{z}$	x

3. Проведемо поглинання отриманими в табл. 22 імплікантамивідповідних їм конституент одиниці. У результаті одержимо функцію:

$$F = F(x, y, z) = xy \vee yz \vee x\bar{z} \vee \bar{x}z \vee \bar{x}\bar{y} \vee \bar{y}\bar{z}.$$

Очевидно, що подальше склеювання отриманих у табл. 22 імплікант неможливе, і тому вони будуть простими. Тобто одержана ДНФ буде скороченою.

Цей вираз містить шість простих імплікант. Серед них знаходяться й добутки, що належать початковій функції *P*. Тому інші імпліканти можна вважати зайвими.

Отриманий розв'язок лише підтвердив, що добутки вихідної функції F є простими імплікантами і вона була з самого початку скороченою, але не мінімальною.

Таким чином, ми бачимо, що скорочена ДНФ - це далеко не завжди мінімальна ДНФ, оскільки вона хоч і містить прості імпліканти, проте серед них можуть бути й надлишкові.

Означення 1. Диз'юнкція простих імплікант, жодна з яких не є зайвою, називається ***тупиковою*** ДНФ логічної функції.

Тупикових функцій у загальному випадку може бути декілька. Кожна з цих функцій може містити кількість літер, відмінну від решти функцій.

Тоді виникає проблема пошуку такої тупикової логічної функції, яка б мала мінімальну кількість літер. Така функція називається ***мінімальною ДНФ.***

Деякі логічні функції можуть мати кілька мінімальних ДНФ, що містять однакову кількість літер. У цьому випадку вибирається мінімальна ДНФ, яка більш придатна порівняно з рештою для технічної реалізації в цифровому пристрої або керуючій програмі.

З метою Означення мінімальної ДНФ використовуються імплікантні матриці.

Нижче в табл. 23 наведена імплікантна матриця для розглянутої вище в прикладі логічної функції. У ній за вертикальними входами записуються конституенти одиниці, які належать заданій функції, а за горизонтальними - прості імпліканти цієї функції, одержані зі скороченої ДНФ.

Якщо імпліканта є власною частиною деякої конституенти одиниці, то клітинка імплікантної матриці, що відповідає цій імпліканті та конституенті одиниці, помічається позначкою. У даному випадку цією позначкою буде хрестик. Щоб одержати мінімальну ДНФ заданої функції, достатньо знайти мінімальне число імплікант, які разом накриють хрестиками всі стовпці імплікантної матриці.

У табл. 23 кожний стовпець помічений двома хрестиками. Тому зі скороченої ДНФ функції, що розглядається, можна виключити будь-яку імпліканту з двох, що накривають одну й ту ж саму конституенту одиниці. Мінімальна кількість імплікант, що накривають хрестиками всі стовпці, дорівнює 3: xy накриває перший і другий, $\bar{x}z$- третій і четвертий, $\bar{y}\bar{z}$ - п'ятий і шостий стовпці таблиці. Можна накрити й інакше: yz накриває перший і третій, $x\bar{z}$ - другий і п'ятий, $\bar{x}\bar{y}$ - четвертий і шостий стовпці.

Отже, дана логічна функція має дві мінімальні ДНФ з однаковою кількістю (6) літер

$$1.\ F = xy \vee \bar{x}z \vee \bar{y}\bar{z}.$$
$$2.\ F = yz \vee x\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}.$$

Таблиця 23. Імплікантна матриця для прикладу 1

Проста імпліканта	Конституента					
	1	2	3	4	5	6
	xyz	$xy\bar{z}$	$\bar{x}yz$	$\bar{x}yz$	$\bar{x}\bar{y}z$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$
1. xy	x	x				
2. yz	x		x			
3. $x\bar{z}$		x			x	
4. $\bar{x}z$			x	x		
5. $\bar{x}\bar{y}$				x		x
6. $\bar{y}\bar{z}$					x	x

Крім мінімальних форм, функція, що розглядається, як це випливає з таблиці 23, має ряд тупикових ДНФ, в яких кількість букв буде більшою, ніж у мінімальних. Наприклад, тупиковою буде така ДНФ:

$$F = xy \vee yz \vee x\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}.$$

У ній жодна проста імпліканта не є зайвою, але кількість імплікант не три, як це має місце в мінімальній ДНФ, а чотири.

Виходячи з розглянутого вище прикладу, наведемо решту кроків, необхідних для мінімізації логічних функцій.

3. За отриманою скороченою ДНФ будується імплікантна матриця.

4. В імплікантній матриці містяться набори простих імплікант, які накривають усі конституенти одиниці логічної функції, що подана в ДНФ і мінімізується.

5. Серед цих наборів знаходять один або кілька таких, які в сумі містять мінімальну кількість літер.

6. Об'єднують прості імпліканти цих наборів знаками диз'юнкції і одержують одну або декілька мінімальних ДНФ.

Приклад 2. Знайти мінімальну ДНФ логічної функції $F = F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ яка дорівнює одиниці на наборах з номерами 1, 3, 5, 7, 14, 15 і нулю на решті наборів.

Розв 'язання. Спочатку подамо функцію F у ДДНФ

Потім здійснимо операції неповного склеювання в такому порядку:

1. Виконаємо всі можливі неповні склеювання першого члена функції в ДДНФ з рештою членів, потім другого, третього й т.д.

2. Проведемо всі можливі операції поглинання конституент одиниці і результат подамо в табл. 24 у колонці "Імпліканта".

Таблиця 24. Перше склеювання конституент 1 у прикладі 2

Номера конституенти “1”, які склеюються		Імпліканта	Змінна, яка склеюється
1.	1 - 2	$\overline{x_1x_2}x_4$	x_3
2.	1 - 3	$\overline{x_1x_3}x_4$	x_2
3.	2 - 4	$\overline{x_1}x_3x_4$	x_2
4.	3 - 4	$\overline{x_1}x_2x_4$	x_3
5.	4 - 6	$x_2x_3x_4$	x_1
6.	5 - 6	$x_1x_2x_3$	x_4

З табл. 24 видно, що всі конституенти одиниці поглинаються імплікантами, отриманими після склеювання. У результаті отримуємо функцію:

$$F = \overset{1}{\bar{x}_1\bar{x}_2x_4} \vee \overset{2}{\bar{x}_1\bar{x}_3x_4} \vee \overset{3}{\bar{x}_1x_3x_4} \vee \overset{4}{\bar{x}_1x_2x_4} \vee \overset{5}{x_2x_3x_4} \vee \overset{6}{x_1x_2x_3}.$$

3. Для отриманої скороченої функції P знову проведемо всі можливі операції неповного склеювання й поглинання, а результати ведемо в табл. 25.

Таблиця 25. Друге склеювання конституент 1 у прикладі 2

Номера склеюваної конституенти “1”		Імпліканта	Склеювана змінна
1.	1 - 4	$\overline{x_1}x_4$	x_2
2.	2 - 3	$\overline{x_1}x_4$	x_3

У результаті одержимо

$$F = F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1 x_4 \vee x_2 x_3 x_4 \vee x_1 x_2 x_3$$

До цього виразу операції неповного склеювання й поглинання застосувати не можна, і тому він є дійсно скороченою ДНФ заданої логічної функції. Тобто цей вираз містить тільки прості імпліканти, серед яких можуть бути й надлишкові.

Побудуємо імплікантну матрицю для одержаної функції *P* (див. табл. 26).

Таблиця 26. Імплікантна матриця

Проста імпліканта	**Конституента одиниці**					
	1	2	3	4	5	6
	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4$	$\bar{x}_1x_2x_3x_4$	$x_1x_2x_3\bar{x}_4$	$x_1x_2x_3x_4$
1. $\bar{x}_1x_4$	X	X	X	X		
2. $x_2x_3x_4$				X		X
3. $x_1x_2x_3$					X	X

З табл. 26 випливає, що до мінімальної форми обов'язково має ввійти імпліканта $\bar{x}_1x_4$, оскільки лише вона накриває хрестиками перший, другий, третій і четвертий стовпці імплікантної матриці. Крім того, обов'язково має бути вибрана імпліканта $x_1x_2x_3$, оскільки вона накриває п'ятий і шостий стовпці. При виборі цих двох імплікант всі стовпці табл. 2 5 залишаються перекритими, і тому імпліканта $x_2x_3x_4$ є зайвою. У цьому випадку логічна функція має єдину мінімальну ДНФ:

$$F = F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1 x_4 \vee x_1 x_2 x_3$$

РОЗДІЛ 16. МІНІМІЗАЦІЯ ЛОГІЧНИХ ФУНКЦІЙ У КНФ

Метод мінімізації логічних функцій у КНФ буде розглянутий більш коротко, ніж метод побудови мінімальних ДНФ, оскільки між цими двома методами спостерігається аналогія.

Мінімізація логічних функцій у КНФ використовує також теорему Квайна, але вже для ДКНФ.

Теорема Квайна для ДКНФ. ***Якщо в ДКНФ логічної функції F виконати всі операції неповного склеювання, а потім усі операції поглинання, то отримаємо скорочену КНФ цієї функції, тобто кон'юнкцію всіх її простих імпліцент.***

Для мінімізації логічної функції F, поданої в КНФ, з допомогою теореми Квайна її спочатку треба перетворити на ДКНФ, а потім виконати такі кроки:

1. У ДКНФ для $\boldsymbol{F = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ виконати всі операції неповного склеювання, а потім поглинання конституент нуля.
2. Виконати всі операції неповного склеювання й поглинання імпліцент з $(n-1)$ змінними, отриманих на першому кроці склеювання, потім - імпліцент з $(n-2)$ змінними й т.ін., поки ця процедура можлива. У результаті буде отримана скорочена КНФ.
3. З допомогою скороченої КНФ побудувати імпліцентну матрицю.

4. В імпліцентній матриці відшукати набори простих імпліцент, які накривають усі конституенти нуля логічної функції, що подана в ДКНФ і мінімізується.

5. Серед цих наборів знайти такі, які в сумі містять мінімальну кількість літер.

6. Одержати мінімальні КНФ, об'єднавши прості імпліценти набора з їх мінімальною кількістю знаками кон'юнкції. Серед них вибрати одну найбільш ефективну для реалізації.

Приклад. Знайти мінімальну КНФ логічної функції, що дорівнює нулю на наборах з номерами 0, 1, 2, 3, 7, 9, 12, 13, 15 і одиниці - на решті.

1. Знайдемо скорочену КНФ

$$F = F(x_1, x_2, x_3, x_4) =$$
$$= \overset{1}{(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4)} \wedge \overset{2}{(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)} \wedge \overset{3}{(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)} \wedge \overset{4}{(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)} \wedge$$
$$\wedge \overset{5}{(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)} \wedge \overset{6}{(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)} \wedge \overset{7}{(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4)} \wedge \overset{8}{(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)} \wedge$$
$$\wedge \overset{9}{(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)}$$

2. Виконаємо всі можливі операції неповного склеювання й поглинання:

$$1 - 2 = x_1 \vee x_2 \vee x_3 \qquad x_4$$
$$1 - 3 = x_1 \vee x_2 \vee x_4 \qquad x_3$$
$$2 - 4 = x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_4 \qquad x_3$$
$$2 - 6 = x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4 \qquad x_1$$
$$3 - 4 = x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \qquad x_4$$
$$4 - 5 = x_1 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4 \qquad x_2$$
$$5 - 9 = \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4 \qquad x_1$$
$$6 - 8 = \bar{x}_1 \vee x_3 \vee \bar{x}_4 \qquad x_2$$
$$7 - 8 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \qquad x_4$$
$$8 - 9 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_4 \qquad x_3$$

У результаті отримуємо

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) =$$
$$= \overset{1}{(x_1 \vee x_2 \vee x_3)} \wedge \overset{2}{(x_1 \vee x_2 \vee x_4)} \wedge \overset{3}{(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_4)} \wedge \overset{4}{(x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)} \wedge$$
$$\wedge \overset{5}{(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)} \wedge \overset{6}{(x_1 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)} \wedge \overset{7}{(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)} \wedge \overset{8}{(\bar{x}_1 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)} \wedge$$
$$\wedge \overset{9}{(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)} \wedge \overset{10}{(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_4)}$$

В одержаному виразі знову виконаємо всі операції неповного склеювання й поглинання

$$1 - 5 = x_1 \vee x_2 \qquad x_3$$
$$2 - 3 = x_1 \vee x_2 \qquad x_4$$

У кінцевому підсумку отримуємо

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) =$$
$$= \overset{1}{(x_1 \vee x_2)} \wedge \overset{2}{(x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)} \wedge \overset{3}{(x_1 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)} \wedge \overset{4}{(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)} \wedge$$
$$\wedge \overset{5}{(\bar{x}_1 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)} \wedge \overset{6}{(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)} \wedge \overset{7}{(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_4)}$$

До останнього виразу операції неповного склеювання й поглинання застосувати не можна, і тому він є скороченою КНФ.

1. Побудуємо імпліцентну матрицю (див. табл. 27). До мінімальної форми слід включити імпліценти $(x_1 \vee x_2)$ і $(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$

Унаслідок вибору цих імпліцент опиняються перекритими стовпці з номерами 1, 2, 3, 4, 7, 8. Решту рядків 5, 6, і 9 можна перекрити двома способами:

4 2 4 5

імпліцентами $(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)$ і $(x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)$ або $(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)$ і $(\bar{x}_1 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)$

Таким чином, задана функція має дві мінімальні форми з однаковою кількістю літер:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)(x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)$$

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)$$

Слід зазначити, що кількість літер у мінімальних КНФ і ДНФ логічної функції різна. Тому при розв'язуванні задач мінімізації логічних функцій потрібно знайти як диз'юнктивні, так і кон'юнктивні мінімальні нормальні форми і вибрати серед них форму з найменшою кількістю літер.

Таблиця 27. Імпліцентна матриця

Проста імпліцента	**Конституента нуля**		
	1 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$	2 $x_1 + x_2 + x_3 + \bar{x}_4$	3 $x_1 + x_2 + \bar{x}_3 + x_4$
1. $x_1 + x_2$	X	X	X
2. $x_2 + x_3 + \bar{x}_4$		X	
3. $x_1 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4$			
4. $\bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4$			
5. $\bar{x}_1 + x_3 + \bar{x}_4$			
6. $\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3$			
7. $\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_4$			

Продовження таблиці 27.

Проста імпліцента	**Конституента нуля**		
	1 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$	2 $x_1 + x_2 + x_3 + \bar{x}_4$	3 $x_1 + x_2 + \bar{x}_3 + x_4$
1. $x_1 + x_2$	X		
2. $x_2 + x_3 + \bar{x}_4$			X
3. $x_1 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4$	X	X	
4. $\bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4$		X	
5. $\bar{x}_1 + x_3 + \bar{x}_4$			X
6. $\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3$			
7. $\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_4$			

Проста імпліцента	Конституента нуля		
	1 $x_1+x_2+x_3+x_4$	2 $x_1+x_2+x_3+\bar{x}_4$	3 $x_1+x_2+\bar{x}_3+x_4$
1. x_1+x_2			
2. $x_2+x_3+\bar{x}_4$			
3. $x_1+\bar{x}_3+\bar{x}_4$			
4. $\bar{x}_2+\bar{x}_3+\bar{x}_4$			X
5. $\bar{x}_1+x_3+\bar{x}_4$		X	
6. $\bar{x}_1+\bar{x}_2+x_3$	X	X	
7. $\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_4$		X	X

РОЗДІЛ 17. ОДЕРЖАННЯ МІНІМАЛЬНИХ КНФ ЗА ДОПОМОГОЮ ДНФ

Логічні функції, подані у ДНФ, після мінімізації можна перетворити на КНФ, використовуючи доведені нижче властивості логічних функцій.

Припустимо, що дана логічна функція $F = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, набуває на наборах $j_1, j_2, \ldots, j_m$ значення одиниці, а на наборах $i_1, i_2, \ldots, i_p$, *де* $p = 2^{n-m}$ значення нуля. Тоді має місце така теорема.

Теорема 1. ***Диз'юнкція всіх конституент одиниці*** $\boldsymbol{K_{i1}} \vee \boldsymbol{K_{i2}} \vee \ldots \vee \boldsymbol{K_{ip}}$***, що не належать до ДДНФ логічної функції F, є запереченням цієї функції:***

$$\boldsymbol{K_{i1}} \vee \boldsymbol{K_{i2}} \vee \ldots \vee \boldsymbol{K_{ip}} = \boldsymbol{\bar{F}}$$

Доведення. Сума всіх конституент 1 для $\boldsymbol{n}$ змінних створює функцію константу 1:

$$\boldsymbol{K_{i0}} \vee \boldsymbol{K_{i1}} \vee \ldots \vee \boldsymbol{K_{i2^n-1}} = \mathbf{1}$$

тобто функцію, яка дорівнює одиниці на всіх наборах рначень змінних. Серед цих конституент виокремимо конституенти $K_{j1}, K_{j2}, \ldots, K_{jm}$, що утворюють функцію $F = K_{j1} \vee K_{j2} \vee \ldots \vee K_{jp}$ Тоді маємісце співвідношення:

$$F = K_{i1} \vee K_{i2} \vee \ldots \vee K_{ip} = 1$$

З тотожності $x \vee \bar{x} = 1$ випливає, що і $F \vee \bar{F} = 1$, відповідно

$$F = K_{i1} \vee K_{i2} \vee \ldots \vee K_{ip}$$

Теорему доведено.

Теорема 2. ***КНФ логічної функції F, одержана з мінімальної ДНФ функції*** $\boldsymbol{\bar{F}}$ ***після перетворення за допомогою формул де Моргана, також буде мінімальною.***

Доведення. Правило де Моргана не змінює кількість літер у логічному виразі, який є результатом перетворення, порівняно з початковим, що перетворюється.

Тому, якщо мінімальна ДНФ функції $\bar{F}$ містить *K* літер, то й одержана після перетворення за правилом де Моргана КНФ логічної функції F буде містити ту ж саму кількість літер *K*. Це число є мінімальним. Якщо це не так і існує інша КНФ логічної функції F з меншою кількістю літер, то, перетворивши її з КНФ на ДНФ за правилами де Моргана, одержимо ДНФ функції $\bar{F}$ з меншою кількістю літер, ніж це було визначено раніше у вихідній мінімальній. Унаслідок цього приходимо до суперечності.

Теорему доведено.

Виходячи з доведених теорем 1 і 2, запишемо алгоритм одержання мінімальної КНФ логічної функції F на основі мінімізації функції $\bar{F}$ у ДНФ.

1. Записують диз'юнкцію всіх конституент одиниці, які не належать до ДДНФ функції $\bar{F}$.
2. Знаходять мінімальну ДНФ за відомим алгоритмом для функції $\bar{F}$.
3. Беруть заперечення від функції $\bar{F}$ і перетворюють її за правилами де Моргана в КНФ. Одержана КНФ буде мінімальною КНФ функції F.

Приклад 1. Знайти мінімальну КНФ логічної функції

$$F = F\,(A, B, C) = A\bar{C} \vee \bar{A}\bar{B}C$$

Роз'вязання.

1. Знайдемо ДДНФ функції F:

$$F = AB\bar{C} \vee A\bar{B}\bar{C} \vee \bar{A}\bar{B}C$$

2. Одержимо ДДНФ функції $\bar{F}$:

$$\bar{F} = \bar{A}\bar{B}\bar{C} \vee \bar{A}B\bar{C} \vee \bar{A}BC \vee A\bar{B}\bar{C} \vee ABC$$

3. Знайдемо скорочену ДНФ функції $\bar{F}$, виконавши всі операції неповного склеювання й поглинання

$$\bar{F} = \bar{A}\bar{C} \vee \bar{A}B \vee BC \vee AC$$

4. Складемо імплікантну матрицю для функції $\bar{F}$ (див. табл. 28)

Таблиця 28. Імплікантна матриця для прикладу 1

Імплікантна	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}B\bar{C}$	$\bar{A}BC$	$A\bar{B}C$	ABC
1. $\bar{A}\bar{C}$	x	x			
2. $\bar{A}B$			x		
3. BC			x		
4. AC		x		x	x

5. Знайдемо мінімальні форми функції $\bar{F}$ в ДНФ

$$\bar{F} = \bar{A}\bar{C} \vee BC \vee AC$$

$$\bar{F} = \bar{A}\bar{C} \vee \bar{A}B \vee AC$$

6. Узявши заперечення від обох частин останніх рівностей і застосовуючи формули де Моргана, одержимо дві мінімальні кон'юнктивні нормальні форми

$$F = (A \vee C)(\bar{B} \vee \bar{C})(\bar{A} \vee \bar{C})$$
$$F = (A \vee C)(A \vee \bar{B})(\bar{A} \vee \bar{C})$$

ЗАВДАННЯ

1. Одержати ДНФ функції, що задана формулою $\big(x(\bar{x} \to y)\big) \to y$.
2. Одержати КНФ формули $(\overline{x \vee y})(x \to y)$.
3. Побудувати таблиці істинності для функцій, що задані ДКНФ:
   а) $f_1(x,y,z) = (\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee z)(x \vee y \vee \bar{z})$;
   б) $f_2(x,y,z) = (\bar{x} \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)$;
   в) $f_3(x,y,z) = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})(x \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})$;

4. Побудувати таблиці істинності для функцій, що задані ДДНФ:

   а) $f(x,y,z) = x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}z$;
   б) $f(x,y,z) = xyz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z$;
   в) $f(x,y,z) = xy\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z$;
   г) $f(x,y,z) = \bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z$.

5. Знайдіть ДДНФ таких функцій:
   а) $f_1(x,y,z) = (1,1,0,1,0,0,0,0)$,
   то функція f_1 задана стовпцем значень з таблиці істинності;
   б) $f_2(x,y,z) = x \wedge y \wedge z$;
   в) $f_3(x,y,z) = x \oplus y \oplus z$;
   г) $f_4(x,y,z) = x \vee yz$;
   д) $f_5(x,y,z) = (x \wedge y) \to z$.

6. Отримайте ДКНФ таких функцій:
   а) $f_1(x,y,z) = (1,1,0,1,0,0,0,0)$,
   то функція f_1 задана стовпцем значень з таблиці істинності;
   б) $f_2(x,y,z) = x \vee y \vee z$;
   в) $f_3(x,y,z) = x \oplus y \oplus z$;
   г) $f_4(x,y,z) = x \vee \bar{y}z \vee \bar{z}$;
   д) $f_{201}(x,y,z)$, тут функція задана порядковим номером.

7. Доведіть справедливість таких тотожностей, використовуючи закони булевої алгебри:
   а) $((x|y) \mid (x \sim y)) \mid \big((z \oplus t) \to (t \leftarrow z)\big) = \big((y \to z) \to (x \leftarrow z)\big) \downarrow \big((x|t)\big| (t \to y))$;
   б) $\big((x \wedge \bar{z}) \downarrow (y \leftarrow z)\big) \wedge \big((x|t) \leftarrow (y \wedge t) = \big((x|y)\,\big|\,(x \oplus y)\big) \to ((z \oplus t) \wedge \wedge (t \to y))$;
   в) $\big((x \downarrow y) \vee (x \oplus y)\big) \leftarrow \big((z \leftarrow t) \downarrow (z \sim t)\big) = \big((z \to x) \wedge (z \to y)\big) \to \big((x \downarrow t) \vee (y \downarrow t)\big)$;

г) $\big((x\sim y) \leftarrow (x \downarrow y)\big) \downarrow \big((z\sim t) \downarrow (z \leftarrow t)\big) = \big((z \leftarrow x) \downarrow (z \leftarrow y)\big) \big| \big((x \downarrow t) \downarrow (y \downarrow t)\big)$;
д) $\big((x \wedge y) \vee (x \oplus y)\big) \leftarrow \big((t \leftarrow z) \downarrow (t\sim z)\big) = \big((x \to z) \wedge (y \to z)\big) \to \big((x|t)\big|(y|t)\big)$;
е) $\big((x \vee y) \leftarrow (x \oplus y)\big) \vee \big((z \leftarrow t) \downarrow (z\sim t)\big) = \big((z \leftarrow x) \downarrow (z \leftarrow y)\big) \wedge ((x \vee t) \leftarrow (y \downarrow t))$;
ж) $\big((t \to y) \to (\bar{z} \leftarrow y)\big) \downarrow (z \vee x)\big|(t \to x)\big) = ((\bar{z}\,|t)|(z \oplus t))\big|\big((x\sim y) \to (\bar{x} \leftarrow y)\big)$.

РОЗДІЛ 18. ТАБЛИЦІ ВЕЙЧА

Існують універсальні методи мінімізації логічних функцій, наприклад, розглянутий вище метод Квайна, який придатний для будь-якого числа змінних *n*. Він зручний для застосування на універсальних обчислювальних машинах в алгоритмічній формі в разі великої кількості змінних. Однак на практиці при проектуванні цифрових схем часто ставиться завдання мінімізації функцій для невеликого їх числа. З цією метою були розроблені методи мінімізації логічних функцій у наочній формі у вигляді спеціальних таблиць, що називаються також картами або діаграмами.

Розглянемо один з таких методів, яким будемо користуватися для мінімізації логічних функцій $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, що містять не більше п'яти змінних, $n \leq 5$, – ***метод таблиць Вейча.*** Мінімізація в цьому випадку здійснюється для функції, записаної в аналітичній формі, – ДДНФ або ДКНФ.

Таблиця Вейча являє собою прямокутник, що вміщує 2^n клітинок, до яких заносяться одиниці при мінімізації логічних функцій, які задані в ДДНФ, або нулі у випадку мінімізації логічних функцій, поданих у ДКНФ. Якщо функція записана в ДНФ або КНФ, то її слід попередньо перетворити на ДДНФ або ДКНФ.

Щоб задати логічну функцію $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, яка задана в ДДНФ, у вигляді таблиці Вейча, слід внести одиниці до клітинок, що відповідають конституентам одиниці, а решту клітинок залишити порожніми. Оскільки кількість конституент одиниці дорівнює числу клітинок у таблиці -2^n, то будь-яку функцію від n змінних, число яких менше 5, подану в ДДНФ, можна навести у таблиці Вейча.

З цією метою спочатку треба виконати її розмітку. Для цього необхідно розмістити змінні $x_i, i = 1,2, \dots, n$, і їх заперечення $\bar{x}_i$ з боків прямокутника - зверху, знизу, зліва, справа, до того ж таким чином, щоб змінна без заперечення і ця сама змінна із запереченням порізно покривали 2^{n-1} різних клітинок кожна, а разом відповідно – 2^n. Це можливе в тому випадку, коли змінна x_i, і її заперечення $\bar{x}_i$ знаходяться з одного боку таблиці. За такого розміщення дві різні змінні із запереченням чи без покривають сумісно 2^{n-2} клітинки, три – 2^{n-3} і т. д., поки n змінними не буде покриватися всього одна клітинка.

Такі покриття відповідають логічним добуткам *n* змінних – конституентам одиниці. Важливою властивістю цих конституент є те, що ті з них, які належать до сусідніх клітинок і до клітинок, що знаходяться з краю одних і тих же рядків і стовпців таблиці, відрізняються знаком заперечення лише в одній зі змінних. Це дозволяє здійснювати мінімізацію функції безпосередньо за таблицею в наочній формі.

Для цього в клітинках таблиці, що відповідають конституентам одиниці логічної функції, яка мінімізується, проставляються одиниці. Нижче в табл. 29 розглядається таблиця Вейча з трьома змінними і вісьма клітинками відповідно.

Якщо одиниці розташовані в сусідніх двох клітинках, наприклад, таких, що відповідають добуткам xyz і $x\bar{y}z$, то внаслідок того, що вони відрізняються знаком заперечення лише в одній змінній (у даному випадку *y),* відбувається склеювання за цією змінною. Результат склеювання для цього випадку $xyz + x\bar{y}z = xz(y + \bar{y}) = xz$. Дві змінні x і z у цьому випадку покривають сумісно разом дві клітинки.

Таблиця 29. Розміщення добутків змінних та їх запереченьу клітинках таблиці Вейча

y	x		$\bar{x}$	
	$xy\bar{z}$	xyz	$\bar{x}yz$	$\bar{x}y\bar{z}$
$\bar{y}$	$x\bar{y}\bar{z}$	$x\bar{y}z$	$\bar{x}\bar{y}z$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$
	$\bar{z}$	z		$\bar{z}$

Якщо одиниці розташовані в чотирьох сусідніх клітинках, то це означає, що відбувається склеювання чотирьох сусідніх конституент за стовпцями й рядками. У результаті буде одержана одна змінна, яка покриє всі чотири сусідні клітинки.

Якщо в таблиці Вейча n=4 і відповідно її покривають 4 змінні, вона повинна мати 16 клітинок. Процедура об'єднання клітинок у ній буде відбуватися аналогічно тому, як і в таблиці з вісьма клітинками, з тією відміною, що чотири змінні сумісно покривають одну клітинку, три – дві, дві – чотири і одна – вісім клітинок. Для таблиці з 32 клітинками п'ять змінних разом сумісно покривають одну клітинку, чотири – дві, три – чотири, дві – вісім і одна – шістнадцять клітинок.

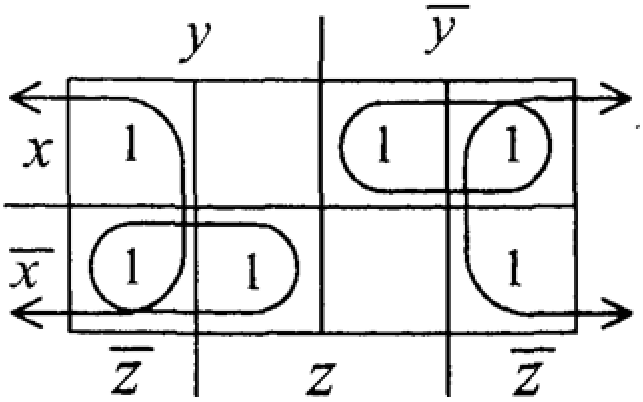
Проілюструємо викладений матеріал з допомогою прикладів.

Приклад 1. Знайти мінімальну ДНФ функції

$$f(x, y, z) = xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

Розв'язання. У табл. 30 чотири одиниці, що знаходяться у двох клітинках першого і останнього стовпців, накриваються змінною, а одиниці, які залишились, об'єднуються по дві в нижньому і верхньому рядках таблиці.

Таблиця 30. Об`єднання одиниць для приклада 1



У результаті одержимо, що

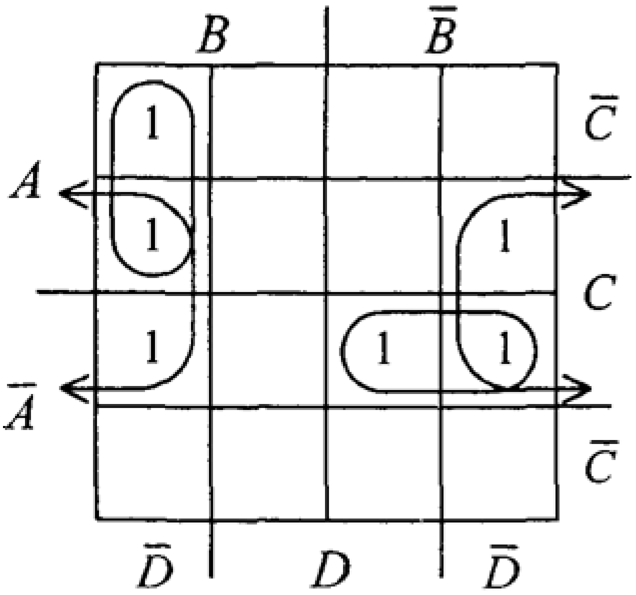
$$f(x, y, z) = \bar{z} + x\bar{y} + \bar{x}y$$

Приклад 2. Знайти мінімальну ДНФ функції

$$f(A, B, C, D) = AB\bar{C}\bar{D} + ABC\bar{D} + \bar{A}BC\bar{D} + \bar{A}\bar{B}CD + A\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}C\bar{D}$$

Розв'язання. У табл. 31 наведений спосіб найбільш раціонального об'єднання одиниць.

Таблиця 31. Об'єднання одиниць для приклада 2



При цьому мінімальна диз'юнктивна нормальна форма функції/ матиме такий вигляд:

$$f(A,B,C,D) = C\bar{D} + AB\bar{D} + \bar{A}\bar{B}C$$

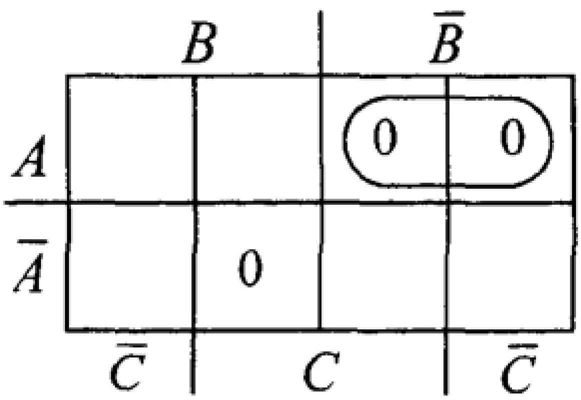
Для мінімізації логічної функції $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$,, поданої в ДКНФ, таблицю Вейча заповнюють не одиницями, а нулями. Вони заносяться в клітинки, що відповідають логічним сумам, на яких функція fдорівнює нулю, – конституентам нуля. У всьому іншому процедура мінімізації відбувається за аналогією з вищенаведеною для логічних функцій, поданих у ДНФ.

Приклад 3. Знайти мінімальні КНФ функції

$$f(A,B,C) = (A + \bar{B} + C)(A + \bar{B} + \bar{C})(\bar{A} + B + C)$$

Розв'язання. Спочатку побудуємо для мінімізації наданої функції таблицю Вейча і розставимо в ній нулі відповідно до конституент нуля (див. табл. 32). Для одержання мінімальної кон'юнктивної нормальної форми цієї функції слід об'єднати нулі, які стоять поряд у табл. 32. Два окреслених суцільною лінією нулі покриваються логічною сумою $A + \bar{B}$, а нуль, який залишився, – конституентою нуля $\bar{A} + B + C$.

Таблиця 32. Об'єднання нулів для приклада 3



Мінімальна кон'юнктивна нормальна форма вихідної функції, як це випливає з табл.

32, матиме вигляд:

$$f(A, B, C) = (A + \bar{B})(\bar{A} + B + C)$$

Вихідну функцію приклада 3 можна мінімізувати й на основі ДДНФ, якщо для цього використати конституенти одиниці, які до неї належать. Очевидно, що їх буде п'ять.

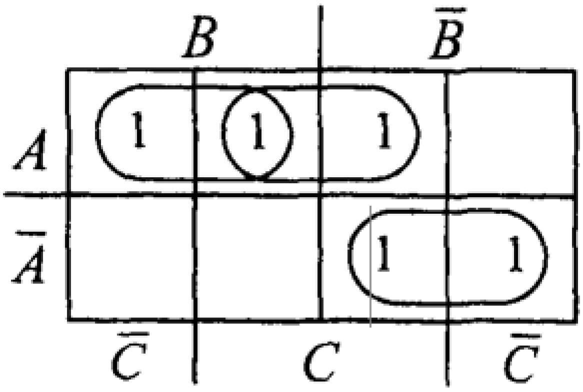
Приклад 4. Знайти мінімальну ДНФ для функції $f(A, B, C)$, яка надана в прикладі 3.

Розв'язання. Для цього подамо вихідну функцію приклада 3 в ДДНФ з допомогою конституент одиниці

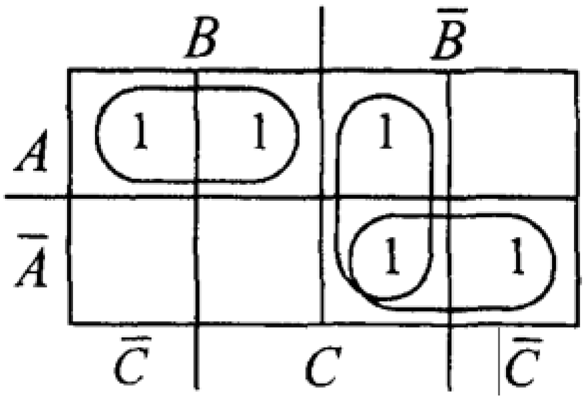
$$f(A, B, C) = AB\bar{C} + ABC + A\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$$

Мінімальну форму цієї функції знайдемо з допомогою табл. 33 і 34 у двох варіантах.

Таблиця 33. Об'єднання одиниць для приклада 4 (перший варіант)



Таблиця 34. Об'єднання одиниць для приклада 4 (другий варіант)



Цим таблицям відповідають дві мінімальні ДНФ функції:

$$f(A, B, C) = AB + AC + \bar{A}\bar{B}$$
$$f(A, B, C) = AB + \bar{B}C + \bar{A}\bar{B}$$

Звернемо при цьому увагу на те, що мінімальна КНФ, яка була отримана раніше, містить менше літер, ніж кожна з цих двох.

Іноді зручно поєднувати в одній таблиці Вейча мінімізацію в ДНФ і мінімізацію в КНФ, наприклад, на основі табл. 33. Тоді при мінімізації в КНФ нулі записуються до порожніх клітинок цієї таблиці. Результатом цих дій є табл. 35. Результат мінімізації отримаємо в кон'юктивній формі як добуток диз'юнкцій інверсних значень змінних, що покривають клітинки з нулями. Він виходить з правила де Моргана, відповідно до якого

$$\overline{A+\bar{B}+C} = \bar{A}B\bar{C}\ ,$$
$$\overline{A+\bar{B}+\bar{C}} = \bar{A}BC,$$
$$\overline{\bar{A}+B+C} = A\bar{B}\bar{C}$$

Таблиця 35. Об'єднана мінімізація за нулями і одиницями

	B		$\bar{B}$	
A	1	1	1	0
$\bar{A}$	0	0	1	1
	$\bar{C}$	C	C	$\bar{C}$

Відповідно до результуючої мінімальної функції записуються інверсні значення змінних, що покривають нулі

$$f(A,B,C) = (A+\bar{B})(\bar{A}+B+C)$$

Вона має такий самий вигляд, як і для табл. 32. Знайдіть самостійно відповідь на питання: "Чому?".

РОЗДІЛ 19. МІНІМІЗАЦІЯ НЕ ПОВНІСТЮ ВИЗНАЧЕНИХ ЛОГІЧНИХ ФУНКЦІЙ

Означення 1. Логічна функція f, яка визначена *на всіх* наборах значень змінних, називається ***повністю*** визначеною.

Означення 2. Логічна функція f , яка визначена *не на всіх* наборах значень змінних, називається ***не повністю,*** або ***частково,*** визначеною.

Припустимо, що є не повністю визначена логічна функція f, яка не визначена на $p < 2^n$ наборах змінних $z_1, z_2, \dots, z_n$. Тоді її можна доповнити 2^n способами до повністю визначеної логічної функції:

$$\varphi = \varphi(z_1, z_2, \dots, z_n)$$

Означення 3. Логічна функція $\varphi = \varphi(z_1, z_2, \dots, z_n)$**,** значення якої збігаються зі значеннями функції $f = f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ на всіх наборах значень, на яких остання визначена, називається ***еквівалентною*** функції f.

Серед всіх 2^p функцій φ**,** еквівалентних f, є, очевидно, одна або декілька таких, що містять мінімальну кількість літер. Розглянемо їх пошук на прикладі.

Приклад 1. Знайти мінімальну диз'юнктивну нормальну форму логічної функції

$$f = f(A,B,C,D) = \bar{A}B\bar{C}\bar{D} \vee \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} \vee AB\bar{C}\bar{D}$$

При цьому задано, що функція не визначена на 4 наборах: 1110, 1011, 0011 і 0010. Цим наборам відповідають добутки змінних: $ABC\bar{D}, A\bar{B}CD, \bar{A}\bar{B}CD$ і $\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$, які через невизначеність функції f на цих 5 наборах можуть дорівнювати на них як 1, так і 0.

Наведемо в табл. 36 діаграму Вейча для цієї функції.

Порожні p = 4 клітинки відповідають добуткам змінних, які можуть приймати значення як 1, так і 0. У цих клітинках одиниці й нулі можуть бути розміщені $2^p = 2^4 = 16$ способами.

Таблиця 36. Неповністю визначена функція

	B	B	$\bar{B}$	$\bar{B}$	
A	1	0	0	0	$\bar{C}$
A	0	0		0	C
$\bar{A}$		0			C
$\bar{A}$	1	0	0	1	$\bar{C}$
	$\bar{D}$	D	D	$\bar{D}$	

Виберемо такий розподіл одиниць і нулів, який мінімізуєфункцію (див. табл. 37).

Таблиця 37. Доповнення функції одиницями

	B	B	$\bar{B}$	$\bar{B}$	
A	1	0	0	0	$\bar{C}$
A	0	0	0	0	C
$\bar{A}$	1	0	0	1	C
$\bar{A}$	1	0	0	1	$\bar{C}$
	$\bar{D}$	D	D	$\bar{D}$	

Результуюча функція матиме вигляд:

$$f = f(A,B,C,D) = \bar{A}\bar{D} \vee B\bar{C}\bar{D}$$

Доповнимо тепер порожні клітинки лише нулями (див. табл. 38)

Таблиця 38. Доповнення функції нулями

	B	B	$\bar{B}$	$\bar{B}$	
A	1	0	0	0	$\bar{C}$
A	0	0	0	0	C
$\bar{A}$	0	0	0	0	C
$\bar{A}$	1	0	0	1	$\bar{C}$
	$\bar{D}$	D	D	$\bar{D}$	

У результаті мінімальна кон'юнктивна нормальна форма функції матиме такий вигляд:

$$f = f(A,B,C,D) = \bar{C}\bar{D}(\bar{A} \vee B)$$

Як випливає з вищенаведеного, не повністю визначені функції дають можливість додатково зменшити кількість літер при мінімізації логічних функцій, а отже, дозволяють синтезувати більш економічні цифрові схеми. Тому синтез цифрових схем слід виконувати з урахуванням можливої їх невизначеності, що дозволить знаходити більш мінімальні схеми, ніж без такого урахування.

КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ І ПИТАННЯ ДО ЧАСТИНИ 3

1. Що вам відомо про алгебру логіки і обчислення висловлень?
2. Що таке істинне і хибне, просте і складне висловлення?Наведіть приклади.
3. Розкажіть, як працює інвертор. Наведіть його типове зображення і часову діаграму роботи.
4. Як виглядає зображення диз'юнктора та часова діаграма його роботи?
5. Поясніть, як працює кон'юнктор і наведіть його графічну типову схему.
6. Наведіть релейні схеми інвертора, диз'юнктора та кон'юнктора.
7. Дайте характеристику основних логічних операцій: константа нуля, константа одиниці, операції "НІ", "І", "АБО".
8. Дайте характеристикулогічних операцій: "імплікація", "заборона", "рівнозначність", "нерівнозначність". Наведіть приклади.
9. Дайте характеристику логічних операцій: Шеффера, Пірса,"змінна". Наведіть

приклади.

10. Що вам відомо про логічний закон, логічне протиріччя й твердження, яке логічно виконується? Наведіть приклади.

11. Які є основні закони алгебри логіки? Наведіть приклади.

12. Дайте Означення набору логічної функції. Що таке таблиця істинності? Як визначити кількість наборів від *n* аргументів функції?

13. Дайте Означення логічної функції та її аргументів. Як визначити кількість функцій від *n* аргументів? Доведіть відповідну формулу.

14. Які існують логічні функції двох аргументів? Визначить їх кількість і дайте назву. Наведіть таблиці істинності.

15. Як здійснюються доведення логічних тверджень і законів за допомогою таблиць істинності? Наведіть приклади.

16. Наведіть приклади доведення за допомогою таблиць істинності правила де Моргана, "імплікації", "рівнозначності".

17. Наведіть і доведіть співвідношення між двома аргументами, один із яких приймає значення 1 або 0.

18. Наведіть і доведіть співвідношення між двома аргументами x_1, x_2, коли $x_1 = x_2 = x$ і $x_1 = x$, а $x_2 = \bar{x}$.

19. Що вам відомо *про булеву алгебру? Наведіть основні* співвідношення в булевій алгебрі для операцій диз'юнкції та кон'юнкції.

20. Що таке спеціальні рівності булевої алгебри? Доведіть їх на прикладах.

21. Що вам відомо про диз'юнктивну нормальну форму (ДНФ)? Що таке елементарний добуток? Конституента одиниці? Наведіть основні теореми для конституенти одиниці та її наслідків.

22. Дайте Означення імпліканти і простої імпліканти. Наведіть приклади.

23. Що таке досконала диз'юнктивна нормальна форма (ДДНФ)? Який алгоритм одержання конституенти одиниці та ДДНФ? Наведіть приклади.

24. Дайте Означення скороченої ДНФ. Наведіть приклади.

25. Охарактеризуйте операції повного і неповного склеювання в ДНФ, операції поглинання й розгорнення. Наведіть приклади.

26. Сформулюйте теорему Квайна для ДДНФ. Доведіть її.

27. Що таке алгоритм мінімізації ДДНФ за Квайном? Наведіть приклади.

28. Що таке імплікантні матриці і як з їх допомогою можна одержати мінімальну ДНФ? Наведіть приклади.

29. Дайте Означення тупикових і мінімальних ДНФ. Наведіть приклади.

30. Дайте характеристику поняття про кон'юнктивну нормальну форму (КНФ). Що таке елементарна сума і конституента нуля? Наведіть основні теореми для КНФ.

31. Що таке досконала кон'юнктивна нормальна форма (ДКНФ)? Який існує алгоритм одержання конституенти нуля і ДКНФ? Наведіть приклади.

32. Дайте характеристику імпліценти і простої імпліценти. Наведіть приклади.

33. Дайте характеристику скороченої КНФ. Наведіть приклади.

34. У чому полягають операції повного і неповного склеювання в КНФ, операції поглинання і розгорнення? Наведіть приклади.

35. Сформулюйте теорему Квайна для ДКНФ. Доведіть її.

36. Дайте алгоритм мінімізації ДКНФ за Квайном. Наведіть приклади.

37. Що таке імпліцентна матриця для одержання мінімальної КНФ? Наведіть приклади.

38. Що таке тупикові й мінімальні КНФ? Наведіть приклади.

39. Як одержати мінімальні КНФ за допомогою диз'юнктивних форм? Наведіть

приклади.

40. Наведіть алгоритм мінімізації булевих функцій, поданих в ДДНФ за допомогою карт Вейча. Приклади.

41. Як проводиться мінімізації булевих функцій, поданих в ДКНФ за допомогою карт Вейча. Наведіть приклади.

42. Як виконується мінімізація неповністю означених булевих функцій? Наведіть приклади.

Завдання

1) Знайти мінімальні ДНФ функцій методом Квайна – Мак-Класкі. ДДНФ функцій задані номерами конституент одиниці таким чином:

а) $f(x,y,z,t) = \{0,1,2,4,5,7,8,10,11,13,14,15\}$;
б) $f(x,y,z,t) = \{0,1,2,3,4,5,7,8,10,11,13,14\}$;
в) $f(x,y,z,t) = \{0,1,2,3,5,6,7,9,10,11,13,14,15\}$;
г) $f(x,y,z,t) = \{1,2,3,4,6,7,8,9,11,12,14,15\}$;
д) $f(x,y,z,t) = \{1,3,4,5,6,8,9,10,12,13,15\}$;
е) $f(x,y,z,t) = \{2,4,5,6,7,8,9,11,12,13,14\}$.

2. Знайти мінімальні КНФ для функцій, що задані такими діаграмами Вейча:

xy / zt	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	0	1	1
11	1	1	1	1
10	0	0	1	1

xy / zt	00	01	11	10
00	0	1	0	1
01	0	1	1	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

1. Побудувати карти Карно для таких функцій:
   а) $f(x,y,z,t) = xyzt \vee \bar{x}yzt \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee xy\bar{z}\bar{t}$;
   б) $f(x,y,z,t) = x\bar{y}zt \vee \bar{x}y\bar{z}t \vee xyz\bar{t} \vee \bar{x}yz\bar{t}$;
   в) $f(x,y,z,t) = \bar{x}yz\bar{t} \vee x\bar{y}zt \vee x\bar{y}z\bar{t} \vee xyz\bar{t}$;
   г) $f(x,y,z,t) = xy\bar{z}t \vee \bar{x}yz\bar{t} \vee \bar{x}\bar{y}zt \vee \bar{x}y\bar{z}t$;
   д) $f(x,y,z,t) = \bar{x}yzt \vee \bar{x}\bar{y}zt \vee xyzt \vee x\bar{y}\bar{z}\bar{t}$;

e) $f(x,y,z,t) = (x \vee y \vee \bar{z} \vee t)(\bar{x} \vee y \vee z \vee \bar{t})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee t)(x \vee \bar{y} \vee z \vee t)(x \vee \bar{y} \vee z \vee \bar{t})$

2. Знайти мінімальні ДНФ функцій, що задані такими картами Карно:

xy / zt	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	0
11	1	0	0	1
10	1	0	0	1

xy / zt	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	0
11	0	1	0	0
10	1	0	0	1

v=0

zt / xy	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	0	0	0
11	0	1	1	0
10	0	1	1	0

v=1

zt / xy	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	0	1	1	0

ЧАСТИНА 4. КОМБІНАТОРИКА

РОЗДІЛ 20. КОМБІНАТОРИКА

Комбінаторикою називається розділ математики, що вивчає спосіб підрахунку кількості варіантів, якими можна зробити певну дію. З точки зору теорії множин, комбінаторика дає можливість підрахувати кількість елементів в скінченній множині, яка описана тим чи іншим (часом досить складним) способом.

Основні правила комбінаторики.

1. **Правило суми (розбиття).** Якщо маємо n різних елементів, то один з них може бути обрано n способами. Іноді для отримання числа способів легше розбити елементи на два типи і рахувати окремо для кожного. Якщо маємо k елементів першого типу, то елемент першого типу можна обрати k способами, якщо маємо l елементів другого типу, то елемент другого типу можна обрати l способами. Тоді елемент 1-го або другого типів може бути обраний $k + l$ способами. Мовою теорії множин це правило можна виразити наступним чином: для множин A, B, що не перетинаються $A \cap B = \emptyset$, має місце

$$|A \cup B| = |A| + |B| \qquad (3.1)$$

де |A| - це розмірність множини A (або кількість елементів множини A, або потужність).
Питання. Якою буде формула для $|A \cup B|$, якщо множини перетинаються?

2. **Правило добутку.** Якщо елемент типу I можна вилучити n способами, а елемент типу II, після вилучення елементу типу I, можна вилучити m способами (незалежно від того, який саме елемент I-го типу був перед цим вилучений), то послідовне вилучення елементів I-го типу, а потім елементів II-го типу можна зробити $n \cdot m$ способами. Мовою теорії множин це правило можна записати таким чином:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B| \qquad (3.2)$$

Узагальнене правило суми (розбиття). Якщо маємо скінченну сукупність множин $A_1, A_2, \ldots, A_n$, що попарно не перетинаються $\forall i, j (i < j)\ A_i \cap A_j = \emptyset$, то

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{p=1}^{n} |A_i| \qquad (3.3)$$

Узагальнене правило добутку. Для довільної скінченної сукупності множин $A_1, A_2, \ldots, A_n$, маємо

$$\left|\times_{i=1}^{n} A_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |A_i| \qquad (3.4)$$

В якості прикладу застосуємо правило добутку для підрахунку кількості функцій, які задані на n-елементній множині A і приймають значення в m-елементній множині B. Як відомо, кожній з таких функцій однозначно можна співставити таблицю значень

x	a_1	a_2	a_3	...	a_n
$f(x)$	*	*	*	...	*

де кожна * може набувати довільного значення з множини B. Тоді ми маємо m способів для заповнення клітини, яка відповідає $f(a_1)$. Незалежно від того, який елемент з B ми обрали, для заповнення клітини, яка відповідає $f(a_2)$, ми маємо m способів також. Незалежно від значень $f(a_1), f(a_2)$ для заповнення клітини, яка відповідає $f(a_3)$, ми знову маємо m способів. Продовжуючи ці міркування, приходимо до висновку, що і останню клітину, яка відповідає $f(a_n)$ ми можемо заповнити m способами. Для підрахунку кількості способів заповнення всього рядка застосуємо узагальнене правило добутку 3.4, згідно якого це число дорівнює $m \cdot m \cdot m \cdot \ldots \cdot m = mn$. Тим самим ми довели формулу:

$$|B^A| = |B|^{|A|} \qquad (3.5)$$

Окремим важливим випадком є випадок, коли B = {0, 1}

Задача. *Скількома способами можна розсадити n різних осіб по m різним залізничним вагонам?*

Тут допускається, що всі особи можуть опинитися в одному вагоні. Звернемо увагу на те, що в умові задачі два рази вжито слово різні. Це дуже важливо в задачах комбінаторики відразу домовитись, які способи відрізняються, а які ні. Як ми побачимо далі розв'язок задачі може радикально змінитися при зміні цих умов. Якщо в першому вагоні двоє пасажирів – Оксана та Петро, то це інший спосіб розміщення пасажирів ніж той при якому в першому вагоні теж двоє пасажирів, але з Оксаною замість Петра їде Василь. Якщо всіх пасажирів посадили в перший вагон, то цей спосіб ми вважаємо відмінним від того, коли вони всі сіли в другий.

Насправді, коли ми в той чи інший спосіб розміщуємо пасажирів по вагонам, ми задаємо функцію на множині пасажирів, значенням якої є номер вагона.

$$\{\text{Тетяна, Оксана, Петро, Василь, Степан, Микола, ...}\} \to \{1, 2, 3, \ldots, m\}$$

Кількість функцій ми навчилися рахувати в попередні задачі і це число дорівнює m^n .

Розміщення та перестановки.

Означення 1. Нехай Ω− скінченна *n*-елементна множина. *k*-елементним **розміщенням** визначеним на множині Ω називається ін'єкція (відображення в)

$$\{1, 2, \ldots, k\} \to \Omega, \quad (k \le n).$$

Означення 2. *n*-елементне розміщення визначене на множині Ω називається **перестановкою.**

Довільне *k*-елементне розміщення можна отримати в два етапи:

1. Обрати довільну k елементну підмножину Ω.
2. Занумерувати обрані елементи, тобто присвоїти кожному з них його номер.

При цьому ми отримаємо вектор $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k)$, $\omega_i \in \Omega$, причому $\forall i, j (i < j)\ \omega_i \neq \omega_j$.

Число *k*-елементних розміщень, визначених на *n*-елементній множині позначається A_n^k. Підрахуємо скільки існує векторів виду $(*, *, \ldots, *) = k$, $* \in \Omega$, у яких всі координати різні. Якщо $|\Omega| = n$, то для заповнення першої координати маємо *n* можливостей. Множина $\Omega \backslash \{\omega\}$ елементами якої ми можемо заповнити другу клітину залежить від елемента *ω*, який був обраний в якості першої координати вектора. Але кількість елементів в цій множині від цього не залежить і дорівнює $n-1$. Продовжуючи ці міркування отримаємо $n-2$ можливості для заповнення третьої координати, $n-3$ можливості для заповнення четвертої координати і т.д. $n-k+1$ можливостей для заповнення останньої $k-$ ї координати (питання: чому +1 ?). Застосуванням узагальненого правила добутку 3.4 отримуємо:

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

З використанням факторіалів ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$), формулу можна подати у вигляді

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Для кількості перестановок або впорядкувань на множині Ω отримуємо

$$A_n^n = n!\,.$$

Нагадаємо, що за домовленістю вважається, що $0! = 1$.

Комбінації.

Означення 3. Нехай Ω – скінченна *n*–елементна множина. Будь-яка $k-$ елементна підмножина множини Ω називається *k*–елементною **комбінацією** визначеною на множині Ω.

Число таких комбінацій позначається C_n^k.

Як уже зазначалося, довільне k–елементне розміщення можна отримати обравши k–елементну комбінацію, а потім впорядкувавши її елементи. Першу дію можна виконати C_n^k способами, другу (впорядкування), незалежно від обраної комбінації, згідно (3.7) можна виконати $k!$ способами. За правилом добутку маємо

$$A_n^k = C_n^k \cdot k!,$$

звідки,

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}.$$

Враховуючи (3.6), маємо формулу для числа комбінацій:

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Приклад 1. Скільки існує розв'язків рівняння на множині N натуральних чисел?

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k = n \qquad (3.9)$$

Розглянемо запис:

$$1 + 1 + \ldots + 1 = \text{n}.$$

В лівій частині маємо $n-1$ проміжків між одиницями. Оберемо які-небудь $k-1$ з них і поставимо туди риски. Наприклад для $n = 9$, $k = 4$:

$$1 + 1| + 1 + 1 + 1 + 1 + |1 + 1| + 1 = 9$$

Групуючи доданки між рисками отримаємо розв'язок наведеного рівняння (в наведеному рівнянні це буде (2, 4, 2, 1) .

Навпаки, кожному розв'язку рівняння можна співставити відповідне розташування рисок. Маючи множину з $n - 1$ проміжків ми маємо обрати $k - 1$ проміжків, в які будуть поставлені риски. Очевидно, що це можна зробити C_{n-1}^{k-1} способами.

Приклад 2. Скільки існує розв'язків рівняння (3.9) на множині цілих невід'ємних чисел $\overline{N} = N \cup \{0\}$?

Кожному розв'язку ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) вказаного рівняння можна співставити вектор ($x_1 + 1$, $x_2 + 1, \ldots, x_k + 1$), який буде розв'язком рівняння

$$x_1 + x_2 + \ldots x_k = n + k,$$

на множині натуральних чисел. Навпаки, кожному розв'язку ($x_1, x_2, \ldots, x_k$) цього рівняння на множині N відповідає розв'язок ($x_1 - 1, x_2 - 1, \ldots, x_n - 1$) рівняння (3.9) на множині N. Побудована бієкція зводить задачу до попередньої і ми отримуємо, що шукане число дорівнює C_{n+k-1}^{k-1}.

Приклад 3. Згадаємо задачу про розміщення n пасажирів по m залізничним вагонам і припустимо тепер, що ми не розрізняємо пасажирів. Адже залізничникам важливо знати тільки наповнюваність вагонів, а не хто конкретно в них їде. Тоді з кожним способом розміщення пасажирів, ми можемо зв'язати розв'язок рівняння

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_m = n,$$

на множині $\overline{N}$, де x_i – кількість пасажирів в i– му вагоні. Тепер, відповідь отримуємо з попередньої задачі — C_{n+m-1}^{m-1} .

Задача 1. Скількома способами можна розмістити n пасажирів, яких ми не розрізняємо, по m залізничним вагонам так, що порожніх вагонів не буде?

Задача 2. В продажу є k сортів тістечок, причому кожного сорту є не менше ніж n штук. Скількома способами можна обрати n тістечок, якщо тістечка одного сорту не розрізняються?

Розв'язок. Якщо через x_i позначити кількість обраних тістечок i– го сорту, то задача зводиться до підрахунку кількості розв'язків рівняння (3.9) на множині натуральних чисел з нулем. Тобто маємо C_{n+k-1}^{k-1} способів.

Наведемо інший спосіб розв'язання. Закодуємо нулями та одиницями наш вибір тістечок. Записуємо підряд стільки одиничок, скільки було куплено тістечок першого сорту, якщо таких не було куплено взагалі, то нічого не пишемо, після чого записуємо 0. Далі записуємо стільки одиничок скільки було куплено тістечок другого сорту, які закриваємо нулем і так далі. Після запису одиничок, що відповідають тістечкам останнього $k-$ го сорту нуля не ставимо.

Наприклад, для k = 3, n = 5 якщо ми купили 1 тістечко першого сорту, і по два другого та третього сортів, то це має бути закодовано такою стрічкою 1011011. А якщо ми вирішили купити всі п'ять тістечок третього сорту, то цьому вибору буде відповідати стрічка: 0011111.

Навпаки, будь-якій двійковій послідовності у якої $k-1$ нулів і n одиничок відповідає певний вибір тістечок. Підрахуємо кількість таких послідовностей. Маємо стрічку ∗, ∗, ∗, . . . , ∗ | {z } n+k−1 В цій стрічці слід обрати n позицій куди слід поставити 1, це можна зробити C_{n+k-1}^{n} способами, а решту позицій заповнити нулями. Або обрати $k-1$ позицій для нулів, що можна зробити C_{n+k-1}^{k-1} способами, а решту позицій заповнити одиницями.

Зауважимо, що двійкове кодування є досить поширеним прийомом розв'язування комбінаторних задач.

Властивості чисел C_n^k

1^0

$$C_n^k = C_n^{n-k};$$

2^0 Має місце рекурентне співвідношення, яке називають трикутником Паскаля.

$$C_{n+1}^{k} = C_n^{k-1} + C_n^k$$

3^0

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$$

Доведення. Доведення всіх трьох властивостей можна провести аналітично, що радимо зробити самостійно. Наведемо комбінаторні доведення тверджень.

Перше твердження є очевидним, адже вибираючи довільну $k-$елементну підмножину, ми одночасно обираємо і $n-k$-елементну підмножину, яка є доповненням першої. В такий спосіб встановлюється біекція між множинами $k-$ елементних та $n-k$-елементних підмножин.

Для доведення другого твердження оберемо певний елемент $\omega* \in \Omega$ ($|\Omega| = n+1$) та зафіксуємо його. Всі $k-$ елементні підмножини Ω розіб'ємо на два класи:

1) підмножини такі, що містять ω∗ ,

2) підмножини такі, що не містять ω∗ .

Підмножину першого типу можна отримати наступним чином: з множини $\Omega\setminus \{\omega^*\}$ обрати $k-1$-елементну підмножину (це можна зробити C_n^{k-1} способами) і приєднати до неї елемент ω *. Отже, кількість $k-$ елементних підмножин першого класу дорівнює C_n^{k-1}.

Кількість підмножин, що належать до 2-го класу дорівнює кількості $k-$ елементних підмножин множини $\Omega \setminus \{\omega^*\}$, яка дорівнює C_n^k.

Залишилося застосувати правило розбиття, яке в даній ситуації стверджує, що кількість $k-$ елементних підмножин $n+1-$ елементної множини дорівнює сумі кількостей підмножин першого та другого класів, тобто $C_n^{k-1} + C_n^k$.

Для доведення 3-ї властивості зауважимо, що в лівій частині рівності стоїть кількість всіх підмножин множини з n елементів. Згадаємо, що існує взаємнооднозначна відповідність між підмножинами Ω, ($|\Omega| = n$) та функціями $\Omega \to \{0, 1\}$. Ця відповідність має таку форму $\Omega \supset A \leftrightarrow \chi_A(x)$. Кількість функцій між множинами ми навчилися рахувати раніше і воно дорівнює $2^{|\Omega|} = 2^n$.

Попередній прийом з фіксацією елемента ω∗ можна використати також для іншого доведення цієї властивості за методом математичної індукції по кількості елементів у множині Ω.

База індукції – $\Omega = \{\omega\}$, $|\Omega| = 1$. Очевидно, що одноелементна множина має лише дві підмножини — це порожня ∅ і сама Ω. Отже, базу індукції доведено.

Індукційний крок. Припустимо, що твердження доведено для $n-$ елементних множин і доведемо його для множин, Ω, що містять $n+1$ елемент. Проведемо розбиття всіх (а не тільки $k-$елементних) підмножин на два класи вказані вище. Легко бачити, що маємо взаємно-однозначну відповідність між множинами класів: $\omega* \ni M \leftrightarrow M \notin \omega*$. Отже, кількості множин в обох класах рівні.

Для підрахунку кількості підмножин з 2-го класу слід порахувати кількість підмножин множини $\Omega\setminus\{\omega*\}$, яка містить n елементів. За припущенням індукції ця кількість дорівнює 2^n. Оскільки кількість множин з другого класу така ж сама, то за правилом суми маємо: кількість підмножин Ω дорівнює $2^n + 2^n = 2^{n+1}$.

Біном Ньютона

Формула біному Ньютона має вид

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^k \cdot b^{n-k}. \qquad (3.12)$$

Доведення. Розглянемо добуток

$$(a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b) \cdot . . . \cdot (a + b) \mid \{z\}\ n .$$

Якщо розкривати за законами дистрибутивності цей добуток, то ми отримаємо суму доданків виду $a^k \cdot b^{n-k}$. Кожен такий доданок отримується таким чином: з множини усіх співмножників (а їх n) обирається k–елементна підмножина — тих співмножників, з яких буде братися елемент а, з решти співмножників (яких $n-k$) буде обиратися елемент b. Такий вибір можна здійснити C_n^k способами. Отже, будемо мати таку кількість подібних доданків $a^k \cdot b^{n-k}$ в сумі. Таким чином, після приведення подібних ми маємо отримати формулу (3.12).

Як наслідки з формули (3.12) легко отримати багато властивостей біноміальних коефіцієнтів.

Покладемо a = b = 1 отримаємо вже доведену властивість (3.11). При $a = -1$, $b = 1$ отримаємо іншу тотожність.

$$\sum_{k-0}^{n} (-1)^k \cdot C_n^k = 0.$$

Поліноміальні коефіцієнти

Задача. Скількома способами можна розмістити n пасажирів по m вагонах так, що у першому вагоні буде n_1 пасажирів, у другому - n_2 і т.д. у m-му n_m, причому $n = n_1 + n_2 + . . . + n_m$, $n_i > 0$.

З умови задачі зрозуміло, що пасажири тут розрізняються. Отже, є $C_n^{n_1}$ способів обрання пасажирів для 1-го вагону. Для другого вагону це число дорівнює $C_{n-n_1}^{n_2}$, для третього $C_{n-n_1-n_2}^{n_3}$, ..., для $n-1$-го – $C_{n_{m-1}+n_m}^{n_{m-1}}$, для n-го дорівнює $C_{n_m}^{n_m} = 1$. Після застосування правила добутку і проведення відповідних скорочень отримуємо, що загальна кількість способів розміщення пасажирів дорівнює:

$$C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \cdot ... \cdot C_{n_{m-1}+n_m}^{n_{m-1}} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot ... \cdot n_m!}. \qquad (3.13)$$

Нехай маємо розбиття множини $A = \bigcup_{i-1}^{k} A_i$, ($\forall i, j : 1 \le i < j \le k \quad A_i \cap A_j = \emptyset$), причому $|A_i| = n_i \sum_{i=1}^{k} n_i = |A| = n$). Множину $I = \{1, 2, 3, . . . , k\}$ будемо називати множиною типів (кольорів), а функцію $i : A \to I$ таку,що $\forall a \in A_i i(a) = i$– типізацією. Так у вищерозглянутій задачі такою функцією є : пасажир → номер вагона.

Означення. Перестановкою з повтореннями $(n_1, n_2, . . . , n_k)$ називається функція $\sigma : \{1, 2, 3, . . . , n\} \to I = 1, 2, 3, . . . , k$, така, що $|\sigma^{-1}(i)| = n_i$, $i = 1, 2, . . . k$. Число таких перестановок з повтореннями будемо позначати $P(n_1, n_2, n_3, . . . , n_k)$.

Зауважимо, що якщо $1 = n_1 = n_2 = . . . = n_n$, то маємо звичайну перестановку, тобто $P(1, 1, 1, . . . , 1) = n!$.

Кожну звичайну перестановку можна отримати в два кроки:

1^0 обрати перестановку з повторенням $(n_1, n_2, . . . , n_k)$, в якій елементи однакового типу (кольору) не розрізняються;

2^0 почати розрізняти елементи одного типу (наприклад ввівши їх нумерацію) і зробивши k перестановок елементів однакового типу.

Кількість способів, якою можна зробити перший крок (за означенням) дорівнює $P(n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k)$. Елементи 1-го типу можна переставити $n_1!$ способами, 2-го типу - $n_2!$ способами і т.д., k-го типу - $n_k!$ способами. Отже, за правилом добутку, другий крок можна виконати $n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \ldots \cdot n_k!$ способами. Оскільки загальна кількість звичайних перестановок дорівнює $n!$, то за тим же правилом добутку отримуємо $n! = P(n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k) \cdot n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \ldots \cdot n_k!$, звідки, отримуємо

$$P(n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \ldots \cdot n_k!}. \qquad (3.14)$$

При $k = 2$ отримуємо $P(n_1, n_2) = C_n^{n_1} = C_n^{n_2}$ – звичайні біноміальні коефіцієнти. Узагальненням формули біному Ньютона (3.12) є **поліноміальна формула**.

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{(n_1,n_2,\ldots n_k):\sum_{j=1}^k n_i = n} \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \ldots \cdot n_k!} x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{n_k}. \qquad (3.15)$$

Звернемо увагу, що сумування ведеться по всім наборам цілих невід'ємних чисел ($n_1, n_2, \ldots, n_k$), які в сумі дають n.

Питання: як порахувати кількість доданків у цій сумі?

Доведення. Доведення цієї формули проведемо аналогічно доведенню формули (3.12).

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k) \cdot (x_1 + x_2 + \ldots + x_k) \cdot \ldots \cdot (x_1 + x_2 + \ldots + x_k) \mid \{z\ \}\ n\ .$$

За законами дистрибутивності, обираючи з кожних дужок по одному доданку, ми отримаємо суму доданків виду:

$$x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{n_k}.$$

При цьому кожній дужці можна співставити її тип — номер змінної, яка обирається з цієї дужки. Очевидно, що всі перестановки з повторенням ($n_1, n_2, \ldots, n_k$), у яких кількість елементів першого типу є n_1, другого — n_2, і т.д. k–го є n_k, будуть давати один і той же доданок $x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{n_k}$, а отже у формулі (3.15) цей доданок буде з коефіцієнтом $P(n_1, n_2, \ldots n_k)$. Цим рівність доведена.

Завдання. Методом математичної індукції по n і окремо по k отримати ще два доведення цієї формули.

Формула включень і виключень

Ми вже знаємо формулу для підрахунку кількості елементів в об'єднанні двох множин

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Її узагальненням є наступна формула

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{n+1} \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right| \qquad (3.16)$$

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції по кількості множин.

База індукції — $n = 1$ є очевидною.

Індукційний крок. Припустимо, що формула (3.16) доведена для довільної сукупності з n множин і отримаємо відповідну формулу для $|\bigcup_{i=1}^{n} A_i|$.

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \left|\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \bigcup A_{n+1}\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| + |A_{n+1}| - \left|\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap A_{n+1}\right)\right|$$

За узагальненим законом дистрибутивності, маємо рівність множин:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1}),$$

Звідки,

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right| = \left|\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \bigcup A_{n+1}\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| + |A_{n+1}| - \left|\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap A_{n+1}\right)\right|.$$

Перший і третій доданки у правій частині є кількостями елементів в об'єднаннях множин, кількість яких дорівнює n і до них можна застосувати припущення індукції:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| + |A_{n+1}| - \left(\sum_{i=1}^{n} |A_i \cap A_{n+1}| - \sum_{1 < i < j < n} |A_i \cap A_j \cap A_{n+1}| + \sum_{1 < i < j < k < n} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_{n+1}| + \dots + (-1)^{n+1} \left|\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i\right|\right)$$

Приєднавши до першої суми доданок $|A_{n+1}|$ отримаємо $\sum_{i=1}^{n+1} |A_i|$. У наступній сумі відсутні попарні перетини з множиною A_{n+1}, але відповідні доданки є у дужках, те саме стосується потрійних перетинів. Таким чином, об'єднавши відповідні суми остаточно отримуємо:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n+1} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n+1} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^{n+2} \left|\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i\right|,$$

Що і треба було довестию

Кількість елементів у доповненні $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}$ дорівнює $|\Omega| - |\bigcup_{i=1}^{n} A_i|$. За узагальненим законом де Моргано маєм

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}.$$

І ми отримуємо формулу включень та виключень у другій формі:

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right| = |\Omega| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n+1} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n+1} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^{n+2} \left|\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i\right| \qquad (3.17)$$

Питання: скільки доданків містять суми у формулі включень та виключень?

Приклад. Розглянемо впорядкований набір чисел *(1, 2, . . . , n)*. Будемо переставляти елементи цього набору. Всього є *n!* таких перестановок. Якщо для деякої перестановки жодне число не буде знаходитись на своєму місці (тобто на місці, номер якого дорівнює цьому числу), то таку перестановку будемо називати повним безпорядком. Знайдемо кількість всіх повних безпорядків.

Спочатку порахуємо кількість всіх перестановок, що не є беспорядками. Нехай A_i – множина всіх перестановок, що залишають *i*–ий елемент на своєму місті, $1 \le i \le n$. Тоді об'єднання $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ буде множиною всіх перестановок, що залишають хоча б одне число на своєму місті. Обчислимо кількість таких перестановок, тобто обчислимо $|\bigcup_{i=1}^{n} A_i|$. Кількість перестановок, що залишають *i*–ий елемент на своєму місті, дорівнює $|A_i| = (n-1)!$. Кількість перестановок, що залишають як *i*-ий, так і *j*-ий елементи на своїх місцях, рівна $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$, причому всього таких подвійних перетинів буде C_n^2. Аналогічно, для довільного $1 < k < n$ $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \dots \cap A_{i_k}| = (n-k)!$. При цьому кількість всіх таких перетинів дорівнює C_n^k. Також існує єдина перестановка, що залишає всі числа на своєму місті. Використовуючи формулу включень та виключень, отримаємо:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le n}|A_i \cap A_j|$$
$$+ \sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{n+1}|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \dots \cap A_n|$$
$$= n \cdot (n-1)! - (n-2)!\,C_n^2 + \cdots + (-1)^{k+1}(n-k)!\,C_n^k + \cdots + (-1)^{n+1} \cdot 1$$
$$= n! - \frac{n!}{2!} + \cdots + (-1)^{k+1}\frac{n!}{k!} + \cdots + (-1)^{n+1}. \tag{3.18}$$

Таким чином, оскільки всього є n! перестановок, то кількість повних безпорядків дорівнює

$$n! - \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = n! - \left(n! - \frac{n!}{2!} + \cdots + (-1)^{k+1}\frac{n!}{k!} + \cdots + (-1)^{n+1}\right) = n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{1}{n!}\right).$$

ЗАВДАННЯ

1. Скільки є п‘ятизначних чисел, які діляться ні 5?
2. Учні вивчають 10 предметів. У понеділок 6 уроків, причому всі уроки різні. Скількома способами можна скласти розклад на понеділок?
3. Скільки є чисел у системи числення за основою n, для запису яких потрібно використати точно k знаків?
4. Скільки є п‘ятизначних чисел, у яких кожна наступна цифра більша попередньої?
5. Скільки існує п’ятизначних чисел які діляться на 3?
6. З точки проведено n променів. Скільки кутів вони утворюють?
7. На залізничній станції n семафорів, кожен з яких може знаходитись в одному з 3 положень. Скільки можна дати різних сигналів одночасно?
8. Скільки є натуральних чисел, менших 100, цифри яких ідуть у зростаючому порядку?
9. Скільки дільників має число $6^5 \cdot 10^4$? Скільки дільників має число $p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{a_r}$, де $p_i (i = 1,2,\ldots r)$– різні прості числа?
10. Скільки існує камінців в грі доміно? Скількома способами можна обрати два камінці, які можна прикласти один до іншого?
11. Скількома способами можна розмістити на шаховій дошці 8 тур так, щоб вони не могли бити одна одну ?
12. Скількома способами n людей можуть стати в коло?
13. Скільки є способів складання намиста із k різних предметів?
14. Скількома способами можна поставити дві тури на шахову дошку так, щоб одна не била іншу?
15. Скількома способами можна поставити два ферзі на шахову дошку так, щоб один не бив іншого?
16. Скількома способами можна з 7 осіб вибрати комісію, яка складається з 3 осіб?
17. У скількох точках перетинаються діагоналі опуклого n-кутника, якщо жодні три з них не перетинаються в одній точці?
18. На площині дано n точок, причому m точок лежать на одній прямій. Скільки існує невироджених трикутників зі стороною, що лежить на цій прямій?
19. В чемпіонаті по футболу беруть участь 16 команд. Будемо говорити, що результати двох чемпіонатів по футболу тотожні, якщо в результаті цих чемпіонатів однакові команди отримують золоту, срібну, бронзову медалі, і покидають вищу лігу(4 команди). Скільки є різних, не тотожних чемпіонатів?
20. На одній із бічних сторін трикутника взято n точок, на другій m точок. Кожну вершину при основі трикутника сполучено прямими з точками на протилежній стороні. На скільки частин поділиться трикутник цими прямими?

21. Скільки можна зробити перестановок із n елементів у яких дані 2 елементи стоять поруч?

22. Скількома способами можна розставити 10 книг на полиці, щоб певні 3 книги не стояли поруч?

23. З колоди 52 карти вибрали 10 карт.

а) У скількох випадках серед цих карт є хоча б один туз?

б) У скількох випадках серед цих карт був рівно один туз і дві карти бубнової масті?

в) У скількох випадках — не менше двох тузів?

г) У скількох випадках серед цих карт є рівно два тузи і рівно 3 хрестові карти?

24. Скільки існує відображень з множини M $(|M| = m)$ в множину N $|N| = n$? Скільки серед них ін'єкцій, сюр'єкцій, бієкцій?

25. Скількома способами можна обрати 5 свідків з 12 осіб, що сиділи в одному ряду так, щоб свідки не сиділи поруч?

26. Від міста А до В 999 км. Уздовж дороги стоять стовпи, на яких указано відстані до А і до В:

$$\overline{\underline{|0|999|}} \quad \overline{\underline{|1|998|}} \quad \overline{\underline{|2|997|}} \ldots \overline{\underline{|999|0|}}$$

Скільки серед них таких, на яких є тільки дві різних цифри?

27. На площині є n різних точок. Кожні дві точки сполучаються відрізком. Скільки відрізків утвориться при цьому?

28. Скільки існує цілочисельних трикутників, довжина максимальної сторони яких дорівнює n?

29. Скільки існує цілочисельних трикутників, периметр яких дорівнює n?

30. 6 ящиків занумеровано від 1 до 6. Скількома способами можна розкласти по цих ящиках 20 однакових куль так, щоб ні один ящик не виявився порожнім?

31. 6 ящиків занумеровано від 1 до 6. Скількома способами можна розкласти по цих ящиках 20 однакових куль (деякі ящики можуть бути порожніми)?

32. 12 п'ятаків розклали по 5 різних гаманцях так, щоб жоден гаманець не виявився порожнім. Яка ймовірність того, що в першому гаманці буде 7 монет?

33. Палітурник повинен переплести 12 однакових книг в червону, зелену чи синю палітурки. Яка ймовірність того, що всі книги будуть одного кольору?

34. Скількома способами можна розрізати намисто , що складається з 30 різних бусинок, на 8 частин ?

35. В поштовому відділенні продаються листівки 10 видів. Скількома способами можна купити в ньому

а) 12 листівок;

б) 8 листівок;

в) 8 різних листівок?

36. В гаманці лежить 20 монет вартістю 10, 25 і 50 копійок. Яка ймовірність того, що серед вибраних 20 монет з цих 60, 10 монет вартістю 50 копійок?

37. Скількома способами можна розкласти в 6 різних ящиків 4 чорні, 4 білі і 4 сині кулі?

38. В 9 різних лузах розташували 7 білих і 2 чорні кулі (деякі лузи можуть бути порожніми). Яка ймовірність того, що обидві чорні кулі опиняться в одній лузі?

39. Виклали в ряд 5 червоних, 5 синіх і 5 зелених куль. Яка ймовірність того, що ніякі дві сині кулі не лежать поряд?

40. У квітковому магазині під кінець робочого дня залишилось 7 троянд білого кольору, 8 червоного і по 9 рожевого і жовтого. Скількома способами можна скласти букет з 5 квітів, якщо троянди одного кольору не відрізняються?

41. Колоду з 52 карт перетасували і витягли навмання 6 карт. Яка ймовірність того, що присутні всі масті?

42. 6 людей вибрали з 6 пар рукавиць по лівій і правій кожен.

а) Яка ймовірність того, що жоден не отримав пари?

б) Розв'язати цю задачу у випадку 9 пар і 6 людей.

43. За круглим столом сидять 3 англійців, 3 французів і 3 німців. Яка ймовірність того, що ніякі співвітчизники не сидять поруч?

44. В класі 28 учнів, 16 дівчаток і 12 хлопчиків, які сидять за 15 партами.

а) Скількома способами можна розсадити дітей за партами?

б) Скількома способами можна розсадити так, щоб кожен хлопчик сидів з дівчинкою?

в) Скількома способами можна розсадити дітей так, щоб жоден хлопчик не сидів з дівчинкою?

45. Є кубики червоного, помаранчевого, білого і синього кольорів. Скількома способами дитина може скласти башту з 6 кубиків?

46. Скільки різних слів можна утворити з слів

а)"математика",

b) "комбінаторика",

c) "додавання"?

47. У мами є 2 однакових яблука і 3 однакових груші. Кожен день протягом 5 днів мама видає сину по одному фрукту. Скількома способами це можна зробити?

48. У Петра 6 друзів і кожен день, протягом декількох днів він запрошує до себе в гості трьох з них так, що компанія жодного разу не повторюється. Скільки днів Петро може так запрошувати до себе гостей, і скількома способами це можна зробити?

50. По пустелі іде караван верблюдів. Після перепочинку верблюдів переставили так, щоб попереду кожного верблюда йшов інший верблюд, ніж раніше. Скількома способами можна це зробити?

51. Є n конвертів з адресами і n листів. Листи навмання кладуть у конверти. Яка ймовірність того, що хоча б одна людина отримає свій лист?

52. Гравець в "Спортлото" з 49 видів спорту повинен вибрати 6. Яка ймовірність повного виграшу (відгадано всі 6 видів) Яка ймовірність виграшу (виграш отримує той, хто правильно вказав хоча б 3 види)?

53. Розкрити дужки:

a) $(2x + y)^6$;

b) $(x + y + z)^4$.

54. В розкладі $(1 + x)^n$ коефіцієнти при x^5 і x^{12} однакові. Знайти n.

55. Скільки раціональних членів містить розклад $\left(\sqrt{3}+\sqrt[4]{5}\right)^{100}$?

56. Чому дорівнює коефіцієнт в розкладі $(x + y^2 + z)^{15}$

а) при $x^6y^{10}z^4$;

b) при $x^6y^8z^6$?

57. Нехай $(1 + x^2 + x^5)^{20} = a_0 + a_1x + . . . + a_{100}x^{100}$. Скільки коефіцієнтів a_i , $1 \le i \le 100$ дорівнюють 0?

58. Обчислити суми:

a) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + C_n^4 + C_n^5 +\ldots+C_n^n$;

b) $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + C_n^7 + C_n^9 + C_n^{11} +\ldots$;

c) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + C_n^8 + C_n^{10} +\ldots$;

d) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + C_n^4 - C_n^5 +\ldots+(-1)^nC_n^n$;

e) $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + 4C_n^4 + 5C_n^5 - 6C_n^6 +\ldots+nC_n^n$;

f) $C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + 4C_n^3 + C_n^4 - C_n^5 +\ldots+(n+1)C_n^n$;

g) $C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - 4C_n^4 + 5C_n^5 - 6C_n^6 +\ldots+(-1)^nnC_n^n$.

59. Довести рівність:

$$C_p^0C_{n-p}^m + C_p^1C_{n-p}^{m-1} + C_p^2C_{n-p}^{m-2} + \cdots + C_p^kC_{n-p}^{m-k} + \cdots C_p^mC_{n-p}^0 = C_n^m.$$

60. Сім монет кинули на стіл. Скільки є можливих варіантів їх падіння, якщо

a) всі монети різної вартості;

b) всі монети однакові?

61. Скільки є чисел, більших 1 і менших 10000, які не діляться хоча б на одне з чисел 2, 5, 3?

62. Скільки шестизначних чисел можна скласти з цифр числа 1233145254 так, щоб дві однакові цифри не йшли одна за одною?

63. Скільки є десятизначних чисел, у яких сума цифр дорівнює трьом?

64. Скільки різних десятизначних чисел можна записати за допомогою цифр 1, 2, 3, причому цифра 3 вживається рівно двічі?

65. Скількома нулями закінчується число 100! ?

66. На конференції повинні виступити доповідачі *A, B, C, D* і *E*, причому *A* не може виступати раніше, ніж B. Скількома способами можна це здійснити?

67. Екскурсанти замовили на пароплаві 8 чотиримісних кают. Всі місця і всі каюти рівноцінні. Скількома способами 32 туриста можуть розміститись в каютах?

68. На площині проведено m паралельних прямих та n прямих, які перетинають дані і одна одну. Жодні три прямі не перетинаються в одній точці. На скільки частин розбито площину цими $n + m$ прямими?

69. Скільки різних намист можна зробити з 3 чорних і 2 білих намистинок?

ЧАСТИНА 5. ГРАФИ

РОЗДІЛ 20. НЕОРІЄНТОВАНІ ГРАФИ

Основні поняття теорії графів і їх властивостей. Подання графів. Основні Означення.

З поняттям графа зазвичай зв'язується його графічне представлення, при якому він зображується як множина точок, деякі з яких з'єднані лініями. Однак граф відрізняється від геометричних конфігурацій (скажімо, фігур, які також складаються з точок-вершин і ліній-сторін) тим, що в графі несуттєві відстані між точками, форма з'єднання ліній і кути між ними. Важливо лише, з'єднана дана пара точок лінією, чи ні. Тому граф іноді називають топологічним об'єктом, тобто об'єктом, властивості якого не змінюються при розтягуванні, стисненні, викривленні (але без розривів і склеювання). З цієї ж причини (важливо лише наявність або відсутність з'єднання) граф - об'єкт дискретний і може бути заданий двома дискретними множинами: множиною точок, які будемо називати *вершинами*, і множиною ліній, що з'єднують деякі вершини. Лінії будемо називати *ребрами* або *дугами*.

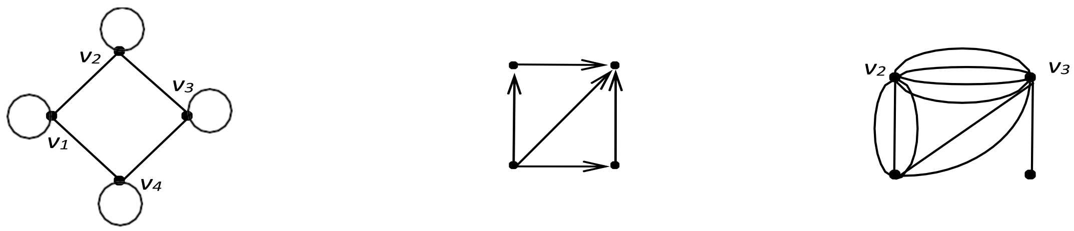
Існують два основних види графів - *орієнтовані*, в яких лінії мають направлення від однієї вершини до іншої, і *неорієнтовані*, в яких лінії не мають напрямки.

Означення 1. *Неорієнтованим графом* $G = (V, E)$ називається об'єкт, заданий парою множин (V, E), де V – множина *вершин*, $E \subseteq V \times V$ – множина *ребер*.

Означення 2. *Орієнтованим графом* (*орграфом*) називається граф $D = (V, E)$, де V – множина *вершин*, $E \subseteq V \times V$ – множина *орієнтованих ребер*, або *дуг*.

Означення 3. Граф називається *простим*, якщо кожна пара вершин з’єднується не більше ніж одним ребром. Граф називається *мультиграфом*, якщо хоч би одну пару вершин з'єднує більш ніж одне ребро. Ребра мультиграфа, що з'єднують одну і ту ж пару вершин, називаються *кратними*. У простому графі ребро однозначно визначається парою вершин, які воно з'єднує. У неорієнтованому графі порядок вершин в парі не важливий, тому ребра простого неорієнтованого графа визначаються як множина невпорядкованих пар вершин $(v_i, v_j) \in V \times V$. У орієнтованому графі впорядкована пара $(v_i, v_j) \in V \times V$ указує напрям дуги: від вершини v_i до вершини v_j. Вона має початок (вершину vi, з якої дуга виходить) і кінець (вершину v_j, в яку вона заходить). У мультиграфі кожне ребро повинне мати своє власне ім'я. Вершини, що з'єднуються ребром, не обов'язково різні. Ребро, що з'єднує вершину v_i з самої собою, тобто пара (v_i, v_i), називається *петлею*.

Приклади



Простий неорієнтований граф з петлями G

Орієнтований граф D

Неорієнтований мультиграф M

Рис. 1. Приклади графів

Граф може зовсім не мати ребер: $E = \varnothing$. Такий граф називається порожнім (пустим), або 0-графом.

Для простого графа існує інший крайній випадок, коли всі вершини з'єднані між собою ребрами. Такий граф називається повним, причому розрізняють два види повних графів - з петлями і без петель. Повний граф з n вершинами має $(n^2 - n) / 2$ ребер (число поєднань з n по 2), якщо петлі не враховуються, і $(n^2 - n) / 2 + n = (n^2 + n) / 2$ ребер, якщо додати n петель. Повний граф з n вершинами без петель позначається K_n. Зрозуміло, що в мультиграфі обмежень на число ребер немає.

Неорієнтовані графи – основні Означення.
Матриці, шляхи і зв'язність, радіус і діаметр

Матриця суміжності

Неорієнтовані граф задає два відношення між своїми елементами: відношення суміжності і відношення інцидентності. Суміжність - відношення між вершинами: дві вершини називаються суміжними, якщо вони з'єднані ребром. Це відношення - звичайне бінарне відношення на множині V, яке для простого графа може бути задано квадратної бінарною (тобто складається з нулів і одиниць) матрицею суміжності A(G) = (aij), яка визначається наступним чином:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (\mathrm{v}_i, \mathrm{v}_i) \in E, \\ 0, & (\mathrm{v}_i, \mathrm{v}_j) \notin E. \end{cases}$$

Відношення суміжності в неорієнтованому графі завжди симетрично, оскільки порядок вершин в парі (v_i, v_j) не важливий. Наявність рефлексивності і транзитивності залежить від конкретних властивостей графа. Матриця суміжності порожнього графа заповнена тільки нулями, а матриця суміжності повного графа з петлями - тільки одиницями. Для мультиграфів матриця суміжності вже не є бінарною: в ній $a_{ij} = k$, де k - число кратних ребер, що з'єднують вершини v_i і v_j.

Приклади.

Матриці суміжності для графів, наведених на рис. 1:

$$A(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \text{[illegible]} \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \text{[illegible]} & \text{[illegible]} & \text{[illegible]} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; A(M) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Матриця інцидентності

Інцидентність - це відношення між вершинами і ребрами: ребро інцидентне кожній з вершин, яке воно з'єднує. Воно задається матрицею інцидентності C, в якій рядки позначаються іменами вершин, а стовпці - іменами ребер графа. Матриця інцидентності графа визначається як ($n \times m$) матриця $C(G) = (c_{ij})$, у якій

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, \text{вершина } v_i \text{ інцидентна ребру } e_j, \\ 0, \text{вершина } v_i \text{ інцидентна ребру } e_j. \end{cases}$$

Це прямокутна бінарна матриця, в якій число рядків дорівнює числу вершин графа n, а число стовпців - числу ребер m.

Число ребер, інцидентних вершині v_i графа (орграфа, мультиграфа), називається степенем цієї вершини і позначається $deg\,(v_i)$. Степінь вершини можна визначити за матрицями інцидентності і суміжності. Степінь вершини v_i дорівнює числу одиниць в i-му рядку матриці інцидентності або матриці суміжності.

Сума степенів усіх вершин дорівнює подвоєному числу ребер, оскільки кожне ребро бере участь в степенях двох вершин, тобто вважається в цій сумі два рази. Оскільки ця сума парна, то і число вершин з непарними степенями теж парне.

Вершина, степінь якої дорівнює 1, називається *кінцевою,* або висячою.

Граф називається *однорідним степені k*, якщо степені всіх його вершин дорівнюють k.

Означення 4. Граф $G' = (V', E')$ називається *частиною* графа $G = (V, E)$, якщо $V' \subseteq V$, а E' підмножина множини ребер G, обидва кінці яких належать V'.

Означення 5. Граф $G' = (V', E')$ називається *підграфом* графа $G = (V, E)$, якщо $V' \subset V$, а E' - множина всіх ребер G, обидва кінці яких належать V'. Множину вершин $V' \subset V$ називають такою, що породжує множину підграфа V', а сам підграф - *породженим* вершинами V'.

Всякий підграф графа G є частиною G, але не всяка частина - підграф (див. рис. 2). Підграф повністю визначається множиною V' своїх вершин і може бути побудований так: у вихідному графі G вибираємо множину вершин V' і видаляємо всі ребра такі, хоча б один кінець яких не належить V'. Частина графа - це підграф, з якого, можливо, видалені деякі ребра. Наприклад, частина графа G на рис. 2, б) містить вершини v_3, v_4, v_5, v_6, але не містить ребер (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_6), (v_3, v_6), в той час, як його підграф на рис. 2, в) містить всі ребра, що з'єднують ці вершини.

Означення 6. Частина графа, утворена вершиною v_i і всіма вершинами, суміжними з нею, називається *зіркою* вершини v_i.

Означення 7. Повний підграф, породжений заданою множиною вершин, називається *клікою*.

Приклад.

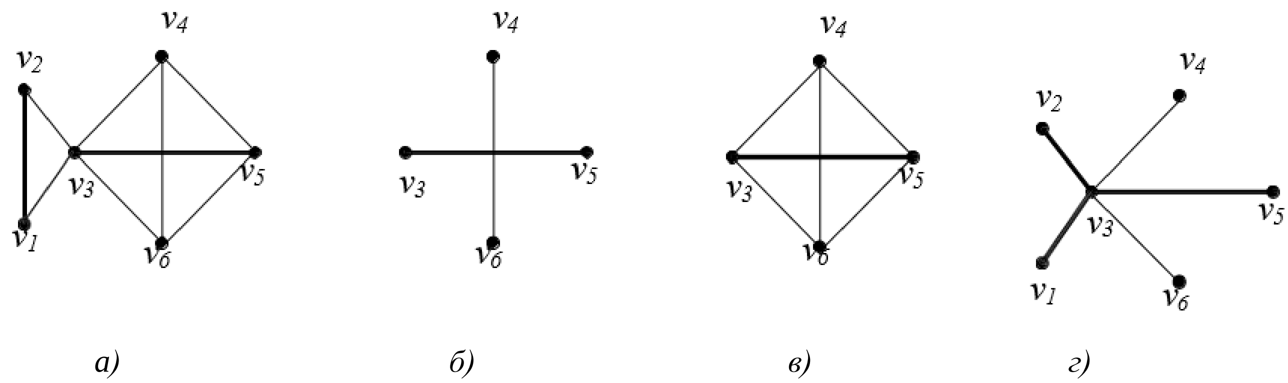


Рис. 2. а) граф G; б) частина графа G;
в) підграф графа G, кліка; г) зірка вершини v_3

Означення 8. Підграф G' графа G називається *максимальним* по деякій властивості, якщо G' володіє цією властивістю, а будь-який підграф графа G, що містить G', не володіє ним. Підграф G' графа G називається *мінімальним* по деякій властивості, якщо G' володіє цією властивістю, а будь- який підграф графа G, що міститься в G', не володіє ним.

Наприклад, підграф на рис. 2, в) є максимальною клікою; підграф цього підграфа, породжений вершинами v_3, v_4, v_5, також буде клікою, але не максимальної, а мінімальної клікою буде підграф, породжений двома вершинами, наприклад, v_3 і v_4.

Шляхи і зв'язність в неорієнтованих графах

Означення 9. *Шлях* P_i в неорієнтованому графі – це послідовність ребер (v_{i0}, v_{i1}), (v_{i1}, v_{i2}), ..., ($v_{i,n-1}$, v_{in}), така, що будь-які два сусідні ребра різні і мають загальну інцидентну ним вершину. Вершина v_{i0} називається *початком* шляху, вершина v_{in} – *кінцем* шляху.

Шлях можна задати також послідовністю вершин, не указуючи ребер, наприклад: v_{i0}, v_{i1}, v_{i2}, ..., $v_{i,n-1}$, v_{in}. У мультиграфі при завданні шляху потрібно вказувати імена ребер. Число ребер на шляху P називається його *довжиною* і позначається $l(P)$.

Очевидно, що, якщо в неорієнтованому графі існує шлях з v_{i0} в v_{in}, то існує шлях з v_{in} в v_{i0}, – це той же шлях, пройдений у зворотному напрямі.

Шлях називається *циклічним*, або просто *циклом*, якщо $v_{i0} = v_{in}$. Цикл називається *простим*, якщо будь-яка вершина графа зустрічається в ньому не більше одного разу. Цикл називається *повним*, якщо в нього входять всі вершини графа.

Одне і те ж ребро може зустрічатися на шляху декілька разів. Шлях називається *ланцюгом*, якщо кожне ребро зустрічається в ньому не більше одного разу, і *простим ланцюгом* (або простим шляхом), якщо будь-яка вершина графа зустрічається в ньому не більше, ніж один раз. Простий ланцюг – це ланцюг, який не перетинає сам себе.

Означення 10. Вершини v_i і v_j називаються *зв'язаними*, якщо існує шлях з початком в v_i і кінцем в v_j. В цьому випадку говорять також, що вершина v_j *досяжна* з вершини v_i. Кожна вершина за Означенням пов'язана сама з собою шляхом нульової довжини.

Означення 11. Неорієнтований граф називається *зв'язним*, якщо всі його вершини зв'язані між собою.

Зв'язаність - це бінарне відношення на множині вершин. Воно рефлексивно (кожна вершина пов'язана сама з собою за Означенням), симетрично (для кожного шляху є зворотний шлях) і транзитивне. Транзитивність означає, що якщо є шлях з v_i в v_j і шлях з v_j в v_k, тобто шлях з v_i в v_k. Це очевидно: щоб отримати такий шлях, досить до послідовності ребер, що веде з v_i в v_j, приписати праворуч послідовність ребер, що веде з v_j в v_k.

Таким чином, відношення зв'язаності є відношенням еквівалентності на множині вершин графа G і розбиває цю множину на неперетинаючі підмножини - класи еквівалентності. Всі вершини одного класу пов'язані між собою, вершини з різних класів між собою не пов'язані. Максимальний зв'язний підграф графа G називається *компонентой зв'язності* графа G.

Зв'язний граф складається з однієї компоненти зв'язності.

Теорема. Якщо дві вершини зв'язані між собою, то існує простий ланцюг, що зв'язує їх.

Приклад.

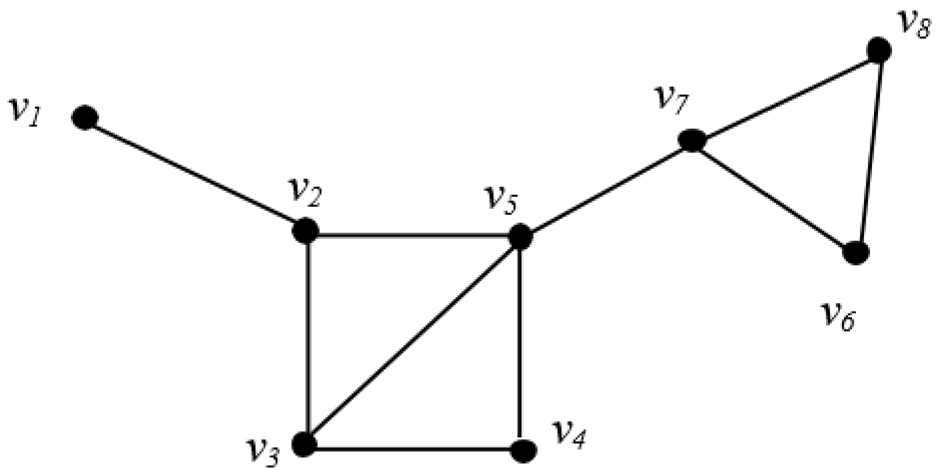


Рис. 3. Точки зчленування в неорієнтованому графі

Роздільні графи називають ще *1-зв'язними*. Взагалі, *k-зв'язним* називають граф, для порушення зв'язності якого треба видалити не менше k вершин. Можна сказати, що число зв'язності k характеризує надійність зв'язності. Якщо граф зображує, наприклад, мережу комунікацій, то це число говорить про те, що при пошкодженні будь-яких k-1 вузлів мережа все ще забезпечує зв'язок між будь-якими вузлами, що залишилися.

Відстані. Діаметр, радіус, центр.

Означення 12. У неорієнтованому графі *відстанню* $d(v_i,\ v_j)$ між вершинами v_i і v_j називається мінімальна з довжин простих ланцюгів, що зв'язують ці вершини.

Оскільки за Означенням кожна вершина пов'язана сама з собою, то $d(v_i, v_i)$=0.

Відстань $d(v_i, v_i)$ задовольняє аксіомам метрики:

$d(v_i, v_j) \geq 0$, причому $d(v_i, v_i) = 0$, якщо і тільки якщо $v_i = v_j$; $d(v_i, v_j) = d(v_j,v_i)$;

$d(v_i, v_j) + d(v_j, v_k) \geq d(v_i, v_k)$ (нерівність трикутника).

Означення 13. *Діаметром* $d(G)$ графа G називається максимальна з відстаней між його вершинами: $d(G)$=max $d(v_i,\ v_j)$. *Максимальним* $v_i\ ,v_j \in G$ *видаленням* від вершини v_i називається величина $r(v_i)$ = max $d(v_i, v_j)$. Вершина $v_j \in G\ v$ називається *центром* графа G, якщо $r(v)$ мінімально серед інших вершин графа: $r(v)$= min $r(v_i)$. Максимальне видалення $r(v)$ від центру v називається $v_i \in G$ *радіусом* графа G і позначається $r(G)$. Вершини з максимальним видаленням $r(v)$, що співпадає зі значенням діаметру, називаються периферіями.

Число центрів і співвідношення між радіусом і діаметром в графі можуть бути різними. У повному неорієнтованому графі діаметр і радіус рівні одиниці, і всі вершини – центри, і одночасно периферії. Якщо граф G - простий ланцюг з непарним числом $2n + 1$ вершин, то $n + 1$-а від початку вершина - єдиний центр, $d(G) = 2n$, $r(G) = n$. Якщо ж граф G - простий ланцюг з парним числом $2n$ вершин, то n-а і $n+1$-а від початку вершини - два центри, $d(G) = 2n - 1$, $r(G) = n - 1$. Периферіями в обох випадках будуть перша і остання вершини.

Приклад 1

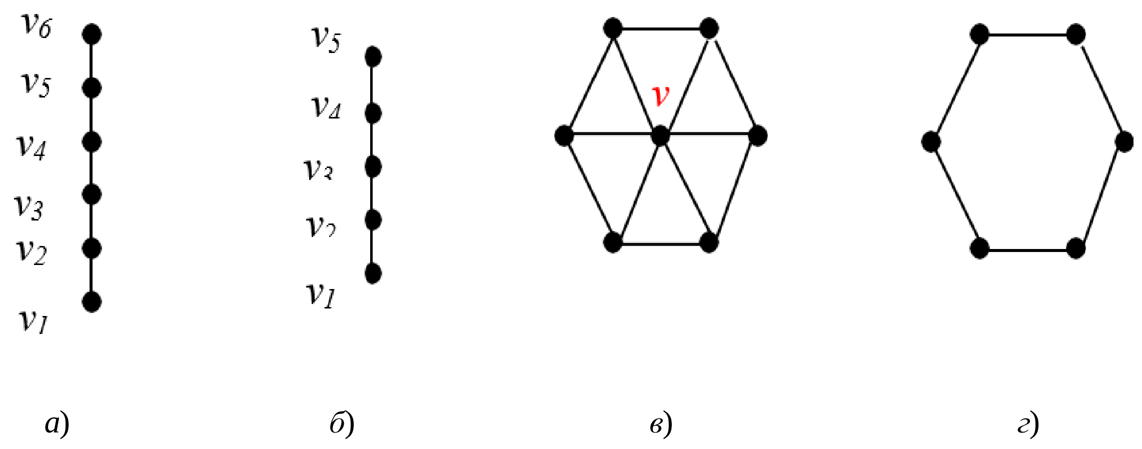


Рис. 4. Приклади графів

Діаметр графа на рис. 4, а) дорівнює 5, радіус - 3; в графі два центри: вершини v_3, v_4. Діаметр графа на рис. 4, б) дорівнює 4, радіус - 2; вершина v_3- центр графа. У графі на рис. 4, в) топологічно еквівалентній окружності (вірніше, колесу телеги), діаметр $d(G) = 2$, радіус $r(G) = 1$, тобто діаметр, як і в колі, в два рази більше радиуса; вершина v - центр. У графі на рис. 4, г) $d(G) = 3$, радіус $r(G) = 3$, і всі вершини - центри.

Приклад 2. Побудуємо матрицю відстаней для графа, що зображено на рисунку 3.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	$r(v_i)$
v_1	0	1	2	3	2	4	3	4	**4**
v_2	1	0	1	2	1	3	2	3	**3**
v_3	2	1	0	1	1	3	2	3	**3**
v_4	3	2	1	0	1	3	2	3	**3**
v_5	2	1	1	1	0	2	1	2	**2**
v_6	4	3	3	3	2	0	1	1	**4**
v_7	3	2	2	2	1	1	0	1	**3**
v_8	4	3	3	3	2	1	1	0	**4**

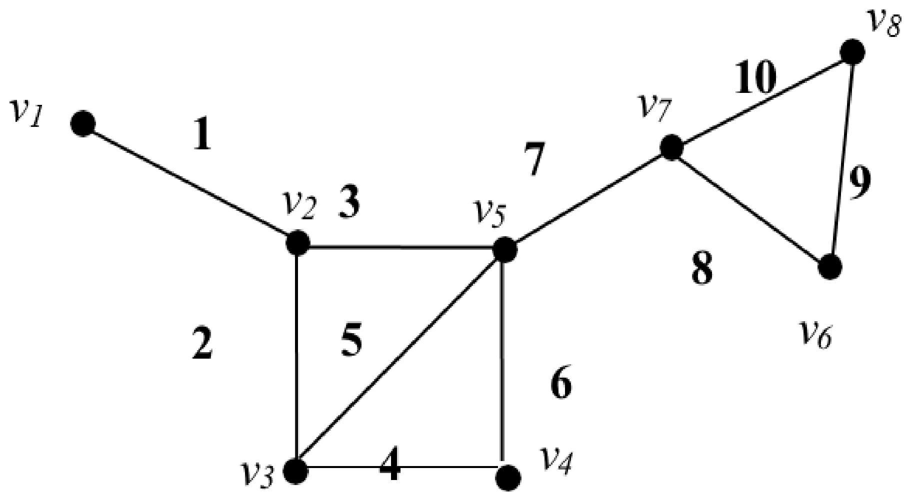
Знаходимо максимальні віддалення та визначаємо діаметр $d=4$ та радіус графа $r=2$; відповідно центр - v_5, а периферії - v_1, v_6, v_8 (позначено кольором).

Побудуємо для графа матриці суміжності та інцедентності та визначимо степені вершин.

A	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	***deg***
v_1	0	1	0	0	0	0	0	0	**1**
v_2	1	0	1	0	1	0	0	0	**3**
v_3	0	1	0	1	1	0	0	0	**3**
v_4	0	0	1	0	1	0	0	0	**2**
v_5	0	1	1	1	0	0	1	0	**4**

v_6	0	0	0	0	0	0	1	1	**2**
v_7	0	0	0	0	1	1	0	1	**3**
v_8	0	0	0	0	0	1	1	0	**2**
deg	**1**	**3**	**3**	**2**	**4**	**2**	**3**	**2**	***20***

Для побудови матриці інцедентності треба поіменувати ребра.



A	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	***deg***
v_1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**
v_2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	**3**
v_3	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	**3**
v_4	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	**2**
v_5	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	**4**
v_6	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	**2**
v_7	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	**3**
v_8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	**2**

Ейлерові графи. Гамільтонів цикл. Ейлеров обхід. Теорема Ейлера.

Ейлерові графи

Означення. *Ейлеровим обходом*, або е*йлеровим циклом*, в неорієнтованому графі (мультиграфі) називається цикл, який містить всі ребра графа в точності по одному разу. Граф називається е*йлеровим*, якщо в ньому існує ейлерів обхід.

Не будь-який граф – ейлерів. Це встановив великий математик Л.Ейлер, займаючись задачею про Кенігсбергські мости. У місті Кенігсберг за часів Ейлера було сім мостів (див. рис. 5). Задача полягає в тому, щоб пройти кожен міст по одному разу і повернутися в початкову точку. Ейлер звів цю задачу до задачі знаходження обходу графа на рис. 6 і показав, що вона не має рішення. Необхідні і достатні умови існування ейлерова обходу він сформулював в наступній теоремі.

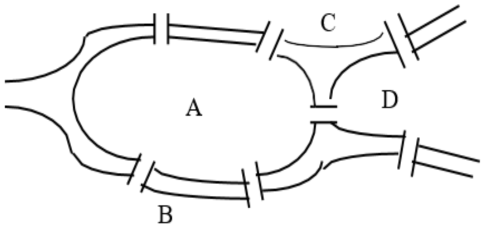


Рис. 5.Кенігсбергські мости.

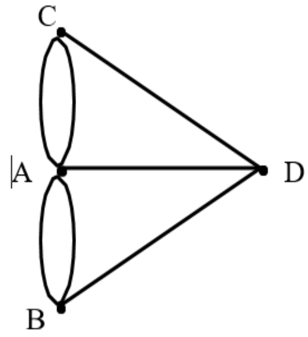


Рис. 6. Граф до задачі про Кенігсбергські мости

Теорема. (Л. Ейлер, 1736 р.). Неорієнтований граф є ейлеровим тоді і тільки тоді, коли він зв'язний, і степені всіх його вершин – парні.

Доведення.

Необхідність. Нехай G - ейлеров граф. Ейлеров обхід цього графа такий, що проходячи через кожну його вершину, входить в неї по одному ребру, а виходить по іншому. Це означає, що кожна вершина інцидентна парному числу ребер ейлерова циклу, а оскільки такий цикл містить всі ребра графа G, то це означає парність степенів усіх вершин.

Достатність. Припустимо тепер, що степені вершин графа G парні. Нехай ланцюг P_1 починається з довільної вершини v_1. Будемо продовжувати ланцюг, наскільки можливо, вибираючи кожного разу нове ребро. Так як степені всіх вершин парні, то, потрапивши в чергову відмінну від v_1 вершину, ми завжди будемо мати в розпорядженні ще не пройдене ребро. Тому ланцюг P_1 можна продовжити шляхом додавання цього ребра. Таким чином, побудова ланцюга P_1 закінчиться в вершині v_1, тобто P_1 неодмінно буде циклом. Якщо виявиться, що P_1 містить всі ребра графа G, то це буде необхідний ейлеров цикл. В іншому випадку, видаливши з графа G всі ребра циклу P_1, розглянемо граф G_1, отриманий в результаті такої операції. Оскільки P_1 і G мали вершини тільки парних степенів, то, очевидно, і G_1 буде володіти тою же властивістю. Крім того, в силу зв'язності графа G, графи P_1 і G_1 повинні мати хоча б одну загальну вершину v_2. Тепер, починаючи з вершини v_2, побудуємо цикл P_2 в графі G_1 подібно до того, як будували цикл P_1. Позначимо через P_1', P_1'' частини циклу P_1 від v_1 до v_2 і від v_2 до v_1 відповідно. Отримаємо новий цикл $P_3 = P_1' \cup P_2 \cup P_1''$, який, починаючись в v_1, проходить по ребрах ланцюга P_1' до v_2, а потім обходить всі ребра циклу P_2 і, нарешті, повертається в v_1 по ребрах ланцюга P_1'' (рис. 7).

Якщо цикл P_3 не ейлерів, тобто містить ще не всі ребра графа, то, виконавши аналогічні побудови, отримаємо ще більший цикл, і т. п. Цей процес закінчиться побудовою ейлерова циклу.

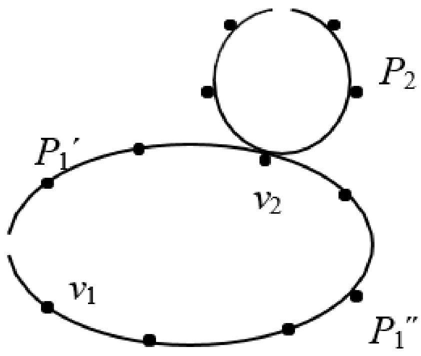


Рис. 7. Граф до доведення теореми Ейлера

Приклади.

На рис. 8 показаний ейлерів граф. Крім задачі про Кенігсбергські мости, відомий ряд інших старовинних цікавих задач і головоломок, вирішення яких зводиться до з'ясування питання, чи є граф ейлеровим. В одній з них потрібно окреслити фігуру, іменовану шаблями (знаком) Магомета (рис. 9), не відриваючи олівця від паперу і не повторюючи ліній.

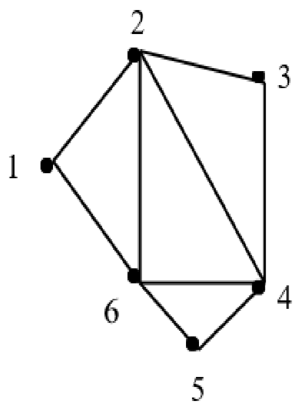


Рис. 8. Ейлеров граф.

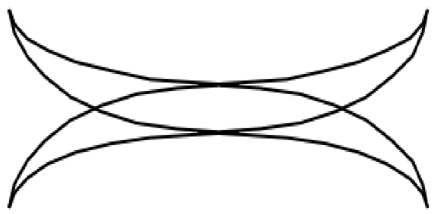


Рис. 9. Шаблі Магомета.

Гамільтонів цикл

Означення 14. Цикл в неорієнтованому графі називається *гамільтоновим*, якщо він містить всі вершини графа в точності по одному разу. Граф називається *гамільтоновим*, якщо в ньому існує гамільтонів цикл.

Задача знаходження гамільтонова циклу, поставлена англійським математиком Гамільтоном, при всій схожості її формулювання із задачею про ейлерів обхід, виявляється набагато складнішою. Прості критерії існування гамільтонова циклу невідомі. В той же час інтерес до її рішення великий, оскільки вона має природну прикладну інтерпретацію. Якщо розглядати граф як транспортну мережу, вершини якої – міста, а ребра – шляхи між містами, то задача про гамільтонів цикл виявляється окремим випадком відомої “задачі про комівояжера”: об'їхати всі міста, побувавши в кожному рівно один раз і повернутися в початкове місто.

Складніша постановка цього завдання пов'язана з випадком, коли різні шляхи мають різну ціну у вартості або тривалості; тоді потрібно знайти обхід всіх міст з мінімальною ціною.

Необхідні умови існування Гамільтонових графів поки не знайдені. Наступні теореми визначають достатні умови існування Гамільтонових графів (це тільки дві з деякої множини теорем та умов, але всі вони - достатні).

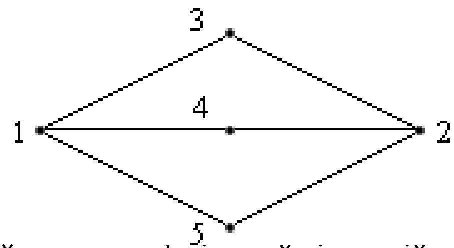
Теорема Дірака. Якщо в графі $G\ (V,\ E)$ з $n \geq 3$ вершинами $\forall v \in V\ deg\ (v) \geq n\ /\ 2$, то граф G є Гамільтоновим.

Теорема Оре. Якщо $n \geq 3$ і $deg\ u + deg\ v \geq n$ для будь-яких двох різних несуміжних вершин u і v неорієнтованого графа G, то G - Гамільтонів граф.

Легко бачити, що повні графи - Гамільтонові, а однозв'язні графи не є Гамільтоновими. Будь-який граф, що містить точку зчленування - є однозв'язний, тобто графи з точками зчленування, перешийками - негамільтонові.

Значить, Гамільтонові графи зв'язності 2 і більше. Але не всі.

Тета-графом називають граф, що містить дві вершини ступеня 3, з'єднані трьома простими ланцюгами, що попарно не перетинаються, довжини не менше двох:



Якщо двозв'язний граф містить тета-граф, то він негамільтонів.

Незважаючи на те, що існує критерій для Означення Ейлерова графа і такий відсутній для Гамільтонових графів, більшість графів - Гамільтонові.

Плоскі та планарні графи. Теорема Понтрягина-Куратовського.

Означення 15. Граф називається *планарним*, якщо він може бути намальований на площині так, що його ребра перетинаються тільки у вершинах графа. Граф називається *плоским*, якщо він вже укладений на площині так, що ніякі його два ребра не перетинаються в точках, відмінних від вершин графа.

На рис. 10, а) показаний планарний граф, зображений так, що його ребра перетинаються, а на рис. 10, б) - той же граф без перетинів ребер, тобто плоский граф.

Розглянемо умови, при яких граф є плоским.

Означення 16. Частина плоского графа, яка обмежена циклом і не включає ніякий інший цикл, називається *гранню*. Необмежена нескінченна область, зовнішня по відношенню до кінцевих граней, також вважається гранню.

Грані плоского графа утворюють розбиття площини, на якій він зображений. На рис. 10, б) в графі $G\ z_0$ - нескінченна грань, z_1, z_2, z_3 - кінцеві. Якщо граф непланарен, то він не може бути зображений у вигляді плоского графа, і поняття грані для нього втрачає сенс.

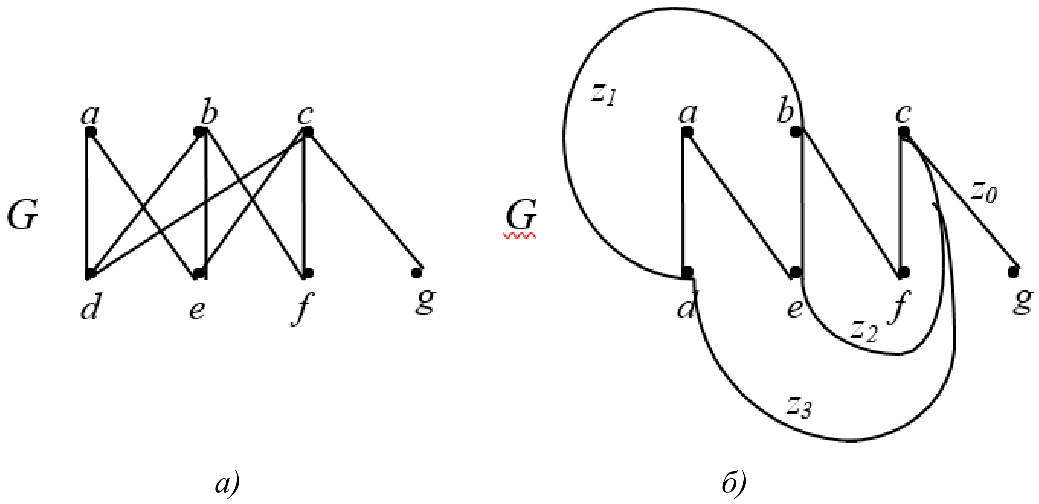


Рис. 10. Плоский граф.

Теорема (Ейлера). Плоске представлення зв'язаного планарного графа (мультиграфа) з n вершинами, m ребрами і r гранями задовольняє наступній формулі:

$$n - m + r = 2.$$

Доведення проводиться по індукції за числом граней або ребер.

Теорема. У простому планарному графі з n вершинами, m ребрами і r гранями $3r \leq 2m$.

Доведення грунтується на тому факті, що кожна грань має принаймні три ребра, що її обмежують, і кожне ребро знаходиться на межі принаймні двох граней.

Наступна теорема встановлює так звану *нерівність Ейлера*.

Теорема. У простому планарному графі з n вершинами, m ребрами і r гранями $\boldsymbol{m \leq 3n - 6}$.

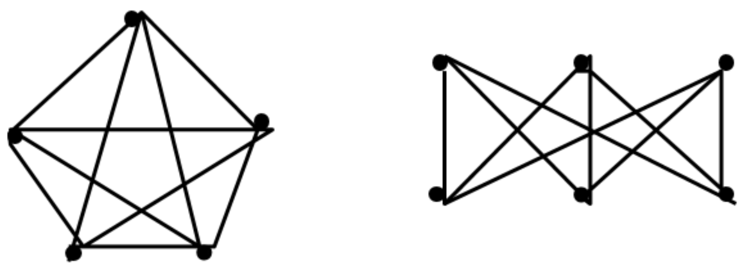
Доведення.

З формули $n - m + r = 2$ отримуємо: $r = 2 + m - n$. Підставляючи значення r в нерівність $3r \leq 2m$, отримаємо: $6 + 3m - 3n \leq 2m$, тобто $m \leq 3n - 6$.

Теорема дає необхідну умову планарності графа, базуючись на явних об'єктах: вершинах та ребрах, а грань, якої може і не бути, якщо граф виявиться не плоским, не фігурує у формулі.

На рис. 11 зображені два неплоских графа, які мають найменше число вершин і не є планарними. Доведемо це.

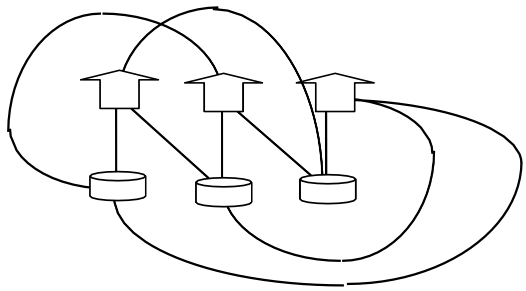
Граф K_5 - це простій повний граф, що є зіркою, вписаною в п'ятикутник. Він має *5* вершин і *10* ребер, тобто 3n – 6 = 9, тому нерівність Ейлера 10 ≤ 3n–6 не виконано. За теоремою граф K_5 непланарен.



K_5 $K_{3,3}$

Рис. 11. *Неплоскі графи*

Очевидно, що будь-який граф, що містить у якості підграфа граф K_5, обов'язково буде неплоским. Інший граф, який не містить графа K_5 і є непланарним, – це повний *дводольний* граф $K_{3,3}$. У *дводольних графах* множина вершин розбита на дві неперетинаючі підмножини, які називають *долями.* Такі графи виникають в задачах про з'єднання n будинків і m пунктів обслуговування за допомогою комунікацій (див. рис. 12). Наприклад, дослідження планарности графа $K_{3,3}$ необхідне в задачі "про три будинки і три колодязі", в якій жителі будинків хотіли б ходити за водою до колодязів так, щоб ніколи не зустрічати нікого з своїх сусідів. Очевидно, для того, щоб їх бажання було виконано, потрібно, щоб їх шляхи ніколи не перетиналися. Для цього граф, що сполучає "дома" і "колодязі", повинен бути плоским. Проте граф $K_{3,3}$ – непланарний, так що бажання жителів нездійсненно.



$K_{3,3}$

Рис. 12. Задача про будинки і колодязі.

Здається, що для графа $K_{3,3}$ $m = 9$, $n = 6$, тобто нерівність Ейлера виконується. Проте, він непланарен. Доведемо це.

Припустимо, що граф $K_{3,3}$ планарен. Тоді, за теоремою Ейлера, число його граней $r = 9 - 6 + 2 = 5$. В силу дводольні $K_{3,3}$, в ньому немає циклів довжиною менше 4, тому, підсумовуючи довжини меж всіх граней і з огляду на те, що в цій сумі кожне ребро графа $K_{3,3}$ зустрінеться двічі, отримаємо: $2m \geq 4r$, тобто $4r \leq 18$, і, отже, $r < 5$, що суперечить теоремі Ейлера. Таким чином, $K_{3,3}$ непланарен. Це приклад того, що умова $m \leq 3n - 6$ не є достатньою умовою планарності.

Графи K_5 і $K_{3,3}$ дозволяють визначити найбільш загальний критерій планарності, який ми наводимо тут без доказу зважаючи на його складність. Попередньо введемо нові Означення.

Означення 17. Операція підразбиття ребра (u, v) в графі $G = \{V, E\}$ полягає у видаленні з E ребра (u, v), додаванні до V нової вершини w і додаванні до $E \{(u, v)\}$ двох ребер (u, w) і (w, v). Граф H називається підразбиттям графа G, якщо H може бути отриманий з G шляхом послідовного застосування операції підразбиття ребер.

Неважко переконатися в тому, що операція підразбиття ребра не змінює співвідношення Ейлера. Дійсно, в результаті підразбиття як кількість ребер, так і кількість вершин, збільшиться на одиницю, а кількість граней не зміниться (див. рис. 13), так як при видаленні ребра в плоскому графі зникне одна грань, а при додаванні двох ребер з'явиться нова.

Таким чином, $(n + 1) - (m + 1) + (r - 1 + 1) = n - m + r$.

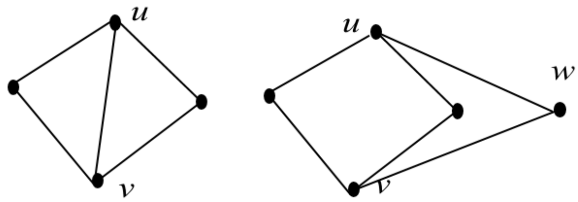


Рис. 13 Підразбиття ребра (u, v).

Означення 18. Графи *G* і *H* *гомеоморфні*, якщо існують такі їх підрозбиття, які ізоморфні.

Теорема Понтрягіна — Куратовського. Граф планарен тоді і тільки тоді, коли він не містить підграфів, гомеоморфних графам K_5 і $K_{3,3}$.

Теорема. У кожному планарном графі існує вершина, степінь якої не більше 5.

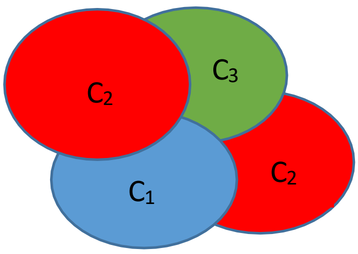
Доведення від противного. Припустимо, що степеня усіх вершин рівні 6. Тоді, з одного боку (за нерівністю Ейлера) $m \le 3n-6$, а з іншого боку

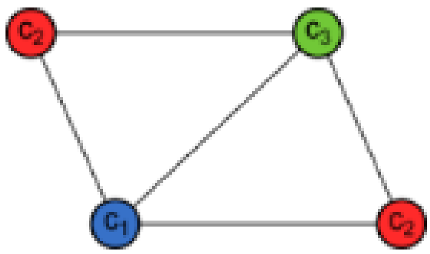
$$6n \le \Sigma\deg(v_i) = 2m \Rightarrow 3n \le m \Rightarrow m \ge 3n.$$

Отримали протиріччя: $m \le 3n-6$ і одночасно $m \ge 3n$.

Розфарбування графа

Розбиття площини на непересічні області називаються *картою*. Області на карті називаються сусідніми, якщо вони мають спільну межу. Задача полягає в розфарбовуванні карти таким чином, щоб ніякі дві сусідні області не були зафарбовані одним кольором.





Розфарбуванням графа називається таке приписування кольорів (натуральних чисел) його вершинам, що ніякі дві суміжні вершини не отримують однаковий колір. Найменше можливе число кольорів в розфарбуванні графа G називаєтся *хроматичним числом* і позначається χ *(G).* Множина вершин, що розфарбована в один колір, називається *однокольоровим класом* і є незалежним (тобто будь-які дві вершини з одного класу не є суміжними).

Спосіб явного вираження хроматичного числа через інваріанти графа невідомий, відомі тільки деякі оцінки, наприклад, $\chi(G) \le \max \deg u + 1$.

Хоча ефективного методу Означення χ, не знайдено, існують цілком ефективні алгоритми розфарбовування графів.

На основі хроматичного числа можна сформулювати ще одну властивість **планарності:** χ ***(G) ≤ 4.***

Власне в 1879 році Келі була висунута гіпотеза 4 фарб: будь-який планарний граф - 4-х розфарбовований. Спроби довести цю гіпотезу привели Хівуда в 1890 році до доведення теореми: всякий планарний граф можна розфарбувати 5 фарбами.

Труднощі проблеми 4-х фарб привела до появи різних інтерпретацій, і в кінці 60-х років була зведена до дослідження великої, але кінцевої множини непереборних конфігурацій - тисячі чотиреста вісімдесят два зразка. У 1976 році Аппелю і Хейкену вдалося протягом 2000 годин машинного часу розфарбувати ці графи в 4 кольори.

Спочатку розфарбування графів були потрібні для складання географічних карт. Сьогодні ж вони (зокрема розфарбування з використанням мінімальної кількості кольорів) використовуються, наприклад, для складання розкладів, розподілу регістрів в мікропроцесорах, розпаралелювання чисельних методів.

Задача про знаходження χ *(G)* не розв'язується за поліноміальний час. Хроматичні числа різних графів:

1-хроматичні графи - це нульові (що не мають ребер) графи і тільки вони - $\chi(O_n) = 1$.

$\chi(K_n) = n$ *- хроматичне число повного графа з n вершинами .*

$\chi(C_n) = \{2$, *якщо n - парне;* 3, *якщо n – непарне}* *– циклічні графи. Для дводольних графів та дерев -* $\chi(G) = 2$.

Цикломатичне число

Цикломатичне число визначається як $\gamma(G) = m-n+k$, де m-кількість ребер, n-кількість вершин, k-кількість компонент зв'язності (наприклад, для неорієнтованого зв'язного графа $k=1$). Тоді, для плоского неориентированного зв'язаного графа можна визначити кількість граней як $r = \gamma(G) + 1$.

Цикломатичне число є однією з можливих числових характеристик графа. Наприклад, при цикломатичному числі, що дорівнює нулю, граф не містить циклів; якщо ж воно дорівнює одиниці, то граф має тільки один цикл. Або, цикломатичне число це - мінімальне число ребер, які треба видалити, щоб граф став ациклічним.

РОЗДІЛ 21. ОРІЄНТОВАНІ ГРАФИ

Основні поняття для орієнтованих графів. Основні визначенні, матриці. Шляхи та зв'язність.

У орієнтованих графах ряд понять співпадає з аналогічними для неорієнтованих графів. Проте, в літературі часто одні і ті ж поняття мають різні назви. В основному ми дотримуватимемося однакової термінології як для орієнтованих, так і для неорієнтованих графів.

Матриці суміжності та інцидентності

Для орграфа його бінарна матриця суміжності A в загальному випадку несиметрична: елемент $a_{ij} = 1$, якщо і тільки якщо є дуга $e = (v_i, v_j)$. Число одиниць в цій матриці дорівнює числу дуг графа. (Зауважимо, що в матриці суміжності неорієнтованого графа петлі відповідає одна одиниця, що стоїть на головній діагоналі, а іншим ребрам - по дві одиниці, відповідні елементам, симетричним відносно головної діагоналі.) Якщо ж матриця суміжності орграфа D виявляється симетричною, то це означає, що для кожної дуги (v_i, v_j) в ньому є протилежно спрямована дуга (v_j, v_i). Така матриця збігається з матрицею суміжності неорієнтованого графа, отриманого з D заміною кожної пари протилежно орієнтованих дуг (v_i, v_j) і (v_j, v_i) на одне неорієнтоване ребро (v_i, v_j). Тому симетричний орграф завжди можна замінити простим неорієнтованим графом, які мають ту ж матрицю суміжності. Однак

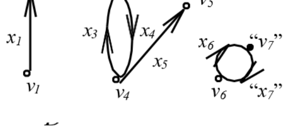
властивість симетричності може виконуватися не для всіх дуг орграфа; тоді на рисунку зображуються обидві протилежно спрямовані дуги.

Поняття інцидентності для орграфів зберігається, проте в матриці інцидентності C розрізняють початок і кінець дуги.

Матрицею інцидентності орграфа D називається $(n \times m)$ матриця $C(D) = (c_{ij})$, у якій

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо вершина } v_i \text{ є кінцем дуги } e_j, \\ -1, & \text{якщо вершина } v_i \text{ є початком дуги } e_j, \\ 0, & \text{якщо вершина } v_i \text{ не інцидентна дузі } e_j. \end{cases}$$

Приклад



$$C(D) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Рис. 1. Орграф і його матриця інцидентності.

У кожному стовпці матриці інцидентності знаходиться рівно дві одиниці: 1 і -1. Вершина

v_6 на рис. 1. має петлю. Щоб відобразити її в матриці інцидентності, вводиться додаткова фіктивна вершина v_7 і петля ділиться на дві дуги: x_6 і x_7 .

Необхідність враховувати орієнтацію дуг в орграфі призводить до розщеплення поняття "степінь вершини" на дві частини. *Напівстепені заходу* deg^+ (v_i) вершини v_i називається число дуг, що входять в v_i ; *напівстепені результату* $deg^-(v_i)$ - число дуг, що виходять з неї. Напівстепені результату v_i дорівнює числу одиниць в i-му рядку матриці суміжності, напівстепені заходу v_i - числу одиниць в i-му стовпці матриці суміжності. Напівстепені заходу і результату легко визначаються і по матриці інцидентності: сума позитивних одиниць в i-му рядку визначає напівстепені заходу вершини v_i , а негативних - виходу. Загальна сума дає степінь вершини: $deg\,(v_i) = deg^+(v_i) + deg^-(v_i)$

Поняття підграфа для орграфа залишається тим же. Поняття зірки, як і степінь, розщеплюється на дві частини. *Напівзірка заходу* вершини v_i - це підграф, який визначається вершиною v_i і всіма вершинами, з яких дуги заходять в вершину v_i . *Напівзірка виходу* вершини v_i - це підграф, який визначається вершиною v_i і всіма вершинами, в які з v_i йдуть дуги.

Приклад.

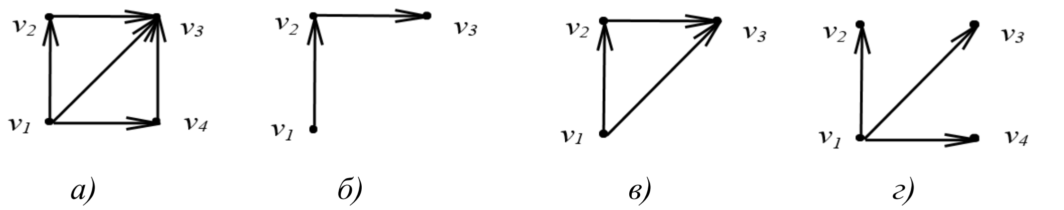


Рис. 2. а) - орієнтований граф D ; б) - частина графа D , в) - підграф графа D , породжений вершинами v_1 , v_2 , v_3 ; г) – напівзірка виходу вершини v_1 .

Отже, графи і орграфи можуть бути задані трьома способами:

• безпосереднім завданням множин вершин V і дуг E (наприклад, списком);

• матрицею суміжності або матрицею інцидентності (правда, мультіграф матрицею суміжності не може бути заданий однозначно, оскільки ця матриця не містить імен ребер);

• малюнком.

Коли два графа однакові? Для перших двох способів завдання відповідь проста: коли збігаються їх описи - списки вершин і ребер або матриці. Візуально, за малюнком, визначити, чи однакові графи, складніше. Один і той же граф можна зобразити різними малюнками, по різному розташувавши вершини і надавши ребрам різну геометричну форму і довжину.

Наприклад, графи D_1 і D_2 на рис. 2 геометрично однакові. Однак вони відрізняються нумерацією вершин, через що матриці суміжності і списки дуг у них будуть різні. Наприклад, дуга (v_1, v_3) є в першому графі, але відсутня у другому: замість неї з'явилася дуга (v_4, v_2). Тому множини дуг цих графів різні і різні самі графи.

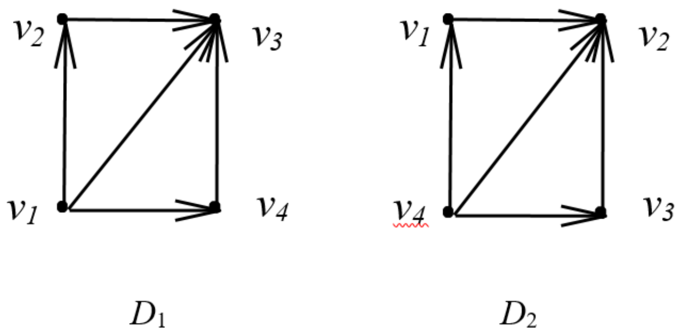


Рис. 2 . Ізоморфізм графів

Графи, які відрізняються тільки нумерацією вершин (і які, отже, при деякій іншій нумерації можна зробити однаковими), називаються *ізоморфними*. Ізоморфізм графів з невеликим числом вершин іноді можна безпосередньо побачити на малюнку, однак, в загальному випадку проблема встановлення ізоморфізму графів виявляється складною в обчислювальному відношенні задачею.

Шляхи і зв'язність в орієнтованих графах

Означення. *Шлях* P_i в орієнтованому графі - це послідовність дуг $(v_{i\,0}, v_{i\,1})$, $(v_{i\,1}, v_{i\,2})$, ..., $(v_{i\,n-1}, v_{in})$, така, що кінець будь-якої дуги збігається з початком наступної. Вершина v_{i0} називається *початком* шляху, вершина v_{in} - *кінцем* шляху.

Інше позначення шляху - послідовність вершин v_0, v_1, ..., v_{n-1}, v_n, які з'єднані дугами в напрямку стрілок. Надалі ми саме так і будемо позначати шлях в орграфі.

Поняття циклу, ланцюга, простого ланцюга, довжини шляху і циклу без зміни переносяться на орграфи. (Цикл в орграфі називають інакше *контуром*). На рис. 5.2 зображено кілька орграфов. У орграфе D_7 u, v, w - простий ланцюг, а u, v, y, x, v, w - ланцюг,який не є простим, оскільки вершина v зустрічається в ній двічі. Шлях u, v, y, x, u є простим циклом, але не є гамільтоновим (повним) циклом. Шлях u, v, w, x, u в графі D_4 є циклом; він є також простим, гамільтоновим і ейлеровим циклом. У графі D_6 шлях u , v, u є циклом, але не є гамільтоновим циклом, так як він містить не всі вершини графа. Інші поняття, і, перш за все, зв'язність і досяжність, істотно змінюються для орграфів.

Означення. Вершина v_j *досяжна* з вершини v_i , якщо існує шлях з початком в v_i і кінцем в v_j . За Означенням вважаємо, що будь-яка вершина досяжна з себе самої.

Теорема. Якщо вершина v_j досяжна з вершини v_i , то існує простий шлях з v_i в v_j .

Означення. *Напівшлях* в орієнтованому графі – це послідовність ребер, така, що будь-які два сусідні ребра різні і мають загальну інцидентну їм вершину. Інакше кажучи, напівшлях – це шлях, який проходить без урахування орієнтації ребер. Кажуть, що вершини u і v в орграфе *поєднувані*, якщо v можна досягти з u, не обов'язково дотримуючись напрямку в дугах, тобто, якщо між ними існує напівшлях.

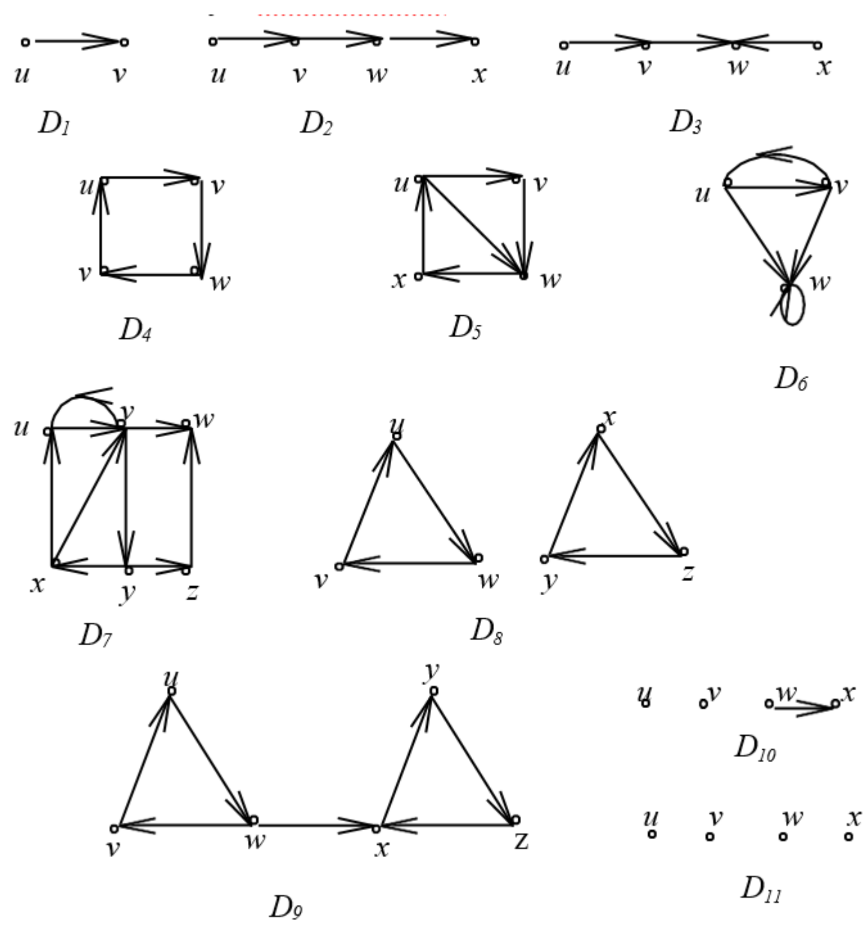


Рис. 3. Приклади орграфів.

Відношення досяжності між вершинами в орграфі несиметрично: якщо v_j досяжна з v_i , то v_i не обов'язково досяжна з v_j . Однак напівшлях з v_j в v_i в цьому випадку існує завжди. Можливий випадок, коли між вершинами немає шляху ні в одну, ні в іншу сторону, але є напівшлях. Наприклад, на рис. 3 в графі D_3 не існує шляху з вершини u в вершину x, однак існує напівшлях u, v, w, x.

У зв'язку з несиметричністю відношення досяжності, відстань між двома вершинами орграфа $d\ (u,\ v)$ не задовольняє всім аксіомам метрики. Зокрема, воно не обов'язково симетрично: в загальному випадку $d\ (u, v) \neq d\ (v, u)$. Як приклад розглянемо орграф D_7 на рис. 5.2: $d(x, v) = 1$, $d(v, x)= 2$. При відсутності шляху між двома вершинами відстань вважається або невизначеною, або нескінченною. Наприклад, в графі D_7 відстань $d\ (w, u)$ не визначена.

Нерівність трикутника має місце в тому випадку, якщо вершина v досяжна з u і w досяжна з v. Дійсно, нехай $d\ (u, v\ ) = s$, $d\ (v, w) = t$ і u , u_2 , u_3 , ..., u_s , v - найкоротший шлях з u в v , а v , v_2 , v_3 , ..., v_t , w - найкоротший шлях з v в w. Тоді u , u_2 , u_3 , ..., u_t , w - шлях довжини $s + t$ з u в w , і ми робимо висновок, що $d\ (\ u\ ,\ v\ ) \leq d\ (\ u\ ,\ v\ ) + d\ (\ v\ ,\ w\ )$.

Види зв'язності орграфів

В орграфа існують різні види зв'язності, які описуються наступним Означенням.

Означення. Орграф $D = (V, E)$ називається *сильно зв'язним,* або *сильним* , якщо будь-які дві його вершини досяжні одна з одної (тобто якщо між ними існують шляхи в обидві сторони).

Приклад

Орграфи D_4, D_5 на рис. 3 сильно зв'язні, тоді як інші орграфи – ні. Наприклад, в орграфі D_9 вершини *x, y, z* недосяжні з вершин *u, v, w*.

Якщо мережа комунікацій сильно зв’явязна, то кожна особа може передати повідомлення будь-якої іншої особі.

Орграф називається *односторонньо зв'язаним,* або *одностороннім*, якщо для будь-якої пари вершин хоча б одна досяжна з іншої, тобто якщо існує шлях між ними хоча б в одну сторону.

Наприклад, орграфи D_1, D_2, D_9 на рис. 3 односторонньо зв'язні. Орграф D_3 не односторонній, так як вершини *u* і *x* недосяжні одна для одної.

Мережа комунікацій є односторонньо зв'язаної, якщо для кожної пари її членів принаймні один може послати повідомлення іншому.

Орграф називається *слабо зв'язаним*, або *слабким* , якщо кожна пара вершин поєднувані, тобто, якщо між будь-якою парою вершин існує напівшлях. Наприклад, орграф D_3 на рис. 3 слабо зв'язний, тоді як орграф D_8 – ні, так як вершини *u* і *x* НЕ поєднувані.

Орграф називається *незв'язним*, якщо між деякою парою вершин немає напівшляху (тобто якщо він не є слабо зв'язаним).
Приклади незв'язних графів на рис. 3: D_8 , D_{10} , D_{11}.

Відзначимо, що ці чотири властивості впорядковані по включенню: граф, що володіє однією з цих властивостей, має всі властивості, які в цьому визначенні "нижче" нього. Так, сильно зв'язний граф має властивості 2 - 4 і т.д.

Критерії зв'язності

Перевірка сильної, слабкої або односторонньої зв'язності шляхом безпосереднього використання визначень може виявитися дуже трудомісткою, оскільки в орграфі з n вершинами є (n (n-1)) /2 пар вершин. Наведемо критерії приналежності до кожного з трьох класів орграфів: сильних, односторонніх і слабких.

У сильно зв'язкового графі будь-яка вершина v_i входить принаймні в один цикл, утворений шляхами з v_i в деяку іншу вершину v_j і назад з v_j в v_i. Цикли, що проходять через v_i і інші вершини графа, необов'язково всі різні. Зокрема, сильно зв'язний граф, що містить *n* вершин, може являти собою один простий цикл, що проходить через всі вершини.

Теорема. Орграф сильно зв'язний тоді і тільки тоді, коли в ньому є повний цикл, тобто цикл, що проходить через всі вершини.

У термінах мереж комунікацій теорема стверджує, що для того, щоб кожна особа могло відправити повідомлення до будь-якої іншої особи, необхідно (і достатньо) наявність послідовності осіб з наступними властивостями: 1) кожна з них може зв'язатися з наступним; 2) в послідовності представлені всі учасники мережі; 3) остання особа може зв'язатися з першим.

Теорема. Орграф *D* односторонньо зв'язний тоді і тільки тоді, коли в ньому є повний шлях.

В якості ілюстрації цієї теореми зауважимо, що орграф D_7 на рис. 3 односторонньо зв'язний, тому що в ньому є повний шлях x , u , v , y , z , w . Граф D_2 також односторонньо зв'язний.

Лема. У будь-якій підмножині вершин одностороннього графа D існує вершина, з якої досяжні (шляхом використання дуг D) всі інші вершини в цій множині.

Доказ леми проведемо індукцією по числу вершин k в довільній множині U. При k=1 лема вірна, так як кожна вершина досяжна сама з себе. Припустимо, що вона вірна для всіх множин з k вершинами, і виберемо деяку множину U, що містить k+1 вершину. Позначимо елементи U через v_1 , v_2 , ..., v_{k+1} . За припущенням індукції в $U \setminus \{ v_{k+1} \}$ існує вершина v_i, з якої досяжні все v_j при $j<k+1$. Тепер, оскільки орграф D односторонній, або v_i досяжна з v_{k+1}, або v_{k+1} досяжна з v_i . Якщо v_{k+1} досяжна з v_i , то з v_i досяжні всі вершини в U. Якщо v_i досяжна з v_{k+1} , то з v_{k+1} досяжні всі вершини в U. Це доводить лему.

Теорема. Орграф D слабо зв'язний тоді і тільки тоді, коли в ньому є повний напівшлях.

Для ілюстрації цієї теореми зауважимо, що орграф D_3 на рис. 3 – слабо зв'язний, оскільки послідовність вершин u, v, w, x утворює повний напівшлях. При цьому він не є одностороннім, так як в ньому не існує повного шляху. Граф D_9 є слабо зв'язаним і одностороннім.

РОЗДІЛ 22. ДОСЛІДЖЕННЯ ОРГРАФІВ ЗА ДОПОМОГОЮ МАТРИЦЬ.

Зв’язок матриць орграфів зі шляхами. Матриця досяжності. Матриця відстаней.

Значну частину інформації щодо орграфа D можна уявити в зручній формі, використовуючи матриці. Визначимо наступні операції над матрицями. Нехай $A = (a_{ij})$ і $B = (b_{ij})$ - дві матриці $n \times n$. Тоді

$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$ – поелементне складання матриць A , B ,

$A \times B = (a_{ij} \times b_{ij})$ – поелементний добуток A і B ,

$AB = (c_{ij})$, де $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$, – добуток A і B .

Транспонованою матрицею A' до матриці A є матриця (a'_{ij}), в якій $a'_{ij} = a_{ji}$.

Визначимо булево перетворення $B : N \to \{0,1\}$ наступним чином:

$$B(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x = 0, \\ 1, \text{ якщо } x > \end{cases}$$

Тоді перетворення $B (A)$ для матриці $A = (a_{ij})$ означає, що елемент (i , j) в $B (A)$ дорівнює $B (a_{ij})$. наприклад:

$$B\begin{pmatrix}1 & 8 & 5\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

В результаті отримуємо бінарну матрицю.

Будемо позначати через ***I*** діагональну одиничну матрицю (матрицю, в якій на головній діагоналі стоять одиниці, а всі інші елементи дорівнюють нулю), і через ***J*** – одиничну матрицю, в якій ***всі*** елементи дорівнюють одиниці.

Матриці орграфов і їх зв'язок зі шляхами

Матрицю суміжності A (D) орграфа D можна використовувати для підрахунку кількості різних шляхів в D. Сама матриця A задає ребра D, тобто шляхи довжини 1. Виявляється, що матриця A^{l} (l- я степінь A) задає число шляхів довжини l.

Теорема. Елемент $(i, j) = \mathrm{C}_{\mathrm{ij}}^{(\mathrm{L})}$ матриці A^{l} орграфа D дорівнює числу шляхів довжини l з v_i в v

Доведення теореми проведемо індукцією по l. Для $l = 1$ теорема очевидна: матриця суміжності задає шляхи довжиною 1. Нехай для деякого l теорема вірна, тобто елемент матриці A^{l} дорівнює числу шляхів довжини l з v_i в v_j . Доведемо її для l+1. Будь-який шлях довжини l+1 з v_i в v_j складається з дуги, що веде з v_i в суміжну з нею вершину v_k , і потім шляху довжини l з v_k в v_j . Число шляхів довжини l+1 з v_i в v_j , що проходять на першому кроці через вершину v_k , так само a_{ik} (якщо дуги з v_i в v_k немає, то

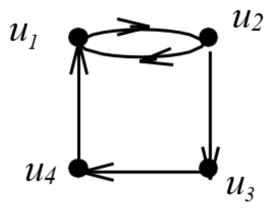
$a_{ik} = 0$, і $a_{ik}\, c^{(l)} = 0$, а якщо така дуга є, то $a_{ik}\mathrm{C}_{\mathrm{ij}}^{(\mathrm{L})} = \mathrm{C}_{\mathrm{ij}}^{(\mathrm{L})}$, так як $a_{ik} = 1$). Загальна кількість шляхів довжини l+1 з v_i в v_j отримаємо, якщо підсумуємо цю величину за всіма k : $\sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{c}_{\mathrm{ik}}\mathrm{C}_{\mathrm{ij}}^{(\mathrm{L})}$ Ця сума дорівнює елементу (i, j) добутку

матриць A і A^{l}, тобто елементу (i, j) матриці A^{l+1}, що і доводить теорему.

Слідування. Елемент (i, j) матриці $A + A^{2} + ... + A^{l}$ орграфа D дорівнює числу всіх шляхів довжини $\leq l$ з v_i в v_j.

Приклад. На рис. 6.1 наведені матриці суміжності A, A^2, A^3 і A^4, відповідні орграфу D. Матриця A^2 показує число шляхів довжиною два: оскільки елемент a_{11} в A^2 дорівнює 1, в D існує шлях довжиною 2 з u_1 в u_1 . Дійсно, це цикл u_1, u_2, u_1. Елемент $a_{13} = 1$, тобто в D існує шлях довжиною 2 з u_1 в u_3 : u_1, u_2, u_3 , і т.д. Елемент $a_{21} = 2$ в A^3 , отже, існує два шляхи довжини 3 з u_2 в u_1 . Ці шляхи - u_2, u_1, u_2, u_1 і u_2, u_3, u_4, u_1. Аналогічно інтерпретуються інші елементи матриць A^2, A^3, A^4 і т.д.

Неважко помітити, що якщо в графі немає циклів, матриця A^n стане нульовою через певну (яку?) кількість кроків.



D

$$A = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad A^2 = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A^3 = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad A^4 = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Рис. 4 Степені матриці суміжності орграфа D.

виявляється корисною при розгляді орграфів, – *матриця відстаней* (d_{ij}), де d_{ij} – відстань від u_i до u_j, яке визначається як довжина найкоротшого шляху з u_i в u_j. (Нагадаємо, що величина d_{ij} не визначена, якщо шляху з u_i в u_j немає.)

Теорема. Нехай орграф *D* має матрицю суміжності *A* і матрицю відстаней (d_{ij}). Тоді, якщо величина d_{ij}, $i \neq j$ визначена, то вона дорівнює найменшому *k*, для якого елемент (i, j) в A^k не дорівнює 0.

Дотримуючись цієї теореми, можна побудувати матрицю відстаней, послідовно зводячи до степені матрицю суміжності орграфа. На рис. 4 наведені степені матриці суміжності орграфа *D*. Використовуємо їх для отримання матриці відстаней цього графа (див. рис. 19).

1. Матриця відстаней має нулі на головній діагоналі і спочатку збігається з матрицею суміжності, тобто вона містить всі шляхи довжиною 1. Інші елементи матриці відстаней поки не визначені.

2. Матриця A^2 вказує всі шляхи довжиною 2. Невизначеним елементам матриці відстаней d_{ik} присвоюємо значення 2, якщо $a_{ik}^{(2)} \neq 0$.

3. Тим елементам d_{ik}, які ще не визначені, присвоюємо значення 3, якщо елементи A^3 $a_{ik}^{(3)} \neq 0$.

Тепер матриця відстаней повністю визначена.

$$1).\ d(D)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & x & x \\ 1 & 0 & 1 & x \\ x & x & 0 & 1 \\ 1 & x & x & 0 \end{pmatrix} 2).\ d(D)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & x \\ 1 & 0 & 1 & \\ 2 & x & 0 & 1 \\ 1 & 2 & x & 0 \end{pmatrix} 3).\ d(D)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ & & & \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Рис. 4 Обчислення матриці відстаней орграфа D.

Теорема. Для того, щоб орграф з n вершинами з матрицею суміжності A мав хоча б один цикл, необхідно і достатньо, щоб матриця $K = A^2 + A^3 + ... + A^n$ мала хоча б один не нульовий діагональний елемент.

Використання матриць дозволяє отримати і перелічення конкретних шляхів. Для цього всім дугам графа D дамо конкретні імена (наприклад, $e1$, ..., em), і в матриці A замінимо одиниці іменами відповідних дуг, тобто елемент $aij = 1$ замінимо ім'ям дуги, яка з'єднує вершину vi з вершиною vj. Отриману матрицю позначимо через $H(D)$. Для того, щоб визначити добуток матриць цього виду, введемо алгебру на множинах шляхів.

Шлях будемо розглядати як слово (послідовність символів) в алфавіті $\{e_1$,

..., em $\}$. Нехай дано дві множини шляхів $M1$ і $M2$. Сума $M1$ і $M2$ визначається як їх звичайне теоретико-множинне об'єднання: $M1 \cup M2$, добуток $M1 \cdot M2$ - як множина, що отримується приписуванням справа до кожного слова з $M1$ всіх слів з $M2$. Наприклад , якщо $M1 = \{ e_2 ,e_4, e_2 , e_3 ,e_1 , e_1 \}$, $M 2 = \{ e_3, e_1, e_4 , e_2 \}$, то $M 1 \cdot M 2$

$=\{ e_2 , e_3 ,e_1 , e_4 , e_2, e_4 , e_3, e_1, e_4 , e_2 , e_2 , e_3, e_1, e_4 , e_2 , e_3 , e_3, e_1, e_4 , e_2 , e_1 , e_3, e_1, e_4 , e_2 , e_1 , e_3, e_1, e_4 , e_2 \}$. Таку операцію називають *конкатенацією*. Порожня множина $\varnothing$ грає тут роль нуля: $M1 \cdot \varnothing = \varnothing \cdot M2 = \varnothing$. Тому замість $\varnothing$ будемо, як і в матриці A, писати 0. Очевидно, що операція конкатенації некомутативна. Вона має простий сенс: якщо $M1$ - множина всіх шляхів, що ведуть з v_i в v_j , а $M2$ - множина всіх шляхів, що ведуть з v_j в v_k, то $M1 \cdot M2$ - це множина всіх шляхів, що ведуть з v_i в v_k і проходять через vj .

За допомогою цих операцій визначимо добуток $Z=X \cdot Y$ квадратних матриць X і Y однаковою розмірності n, елементами яких є множини слів (такі матриці назвемо словниковими):

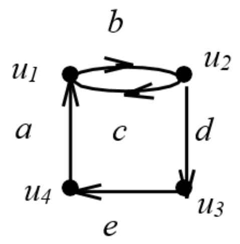
$$z_{ij} = \bigcup_{k=1}^{n} x_{ik} \cdot y_{kj} \ .$$

У цій формулі роль суми елементів грає теоретико-множинне об'єднання, а добутку – вище наведена конкатенація. Степінь матриці H визначається по індукції формулою $H^{l+1} = H \cdot H^l$.

Теорема. Елемент $(i, j) = h_{ij}^{(L)}$ матриці H^l орграфа D являє собою множину всіх шляхів довжини l з v_i в v_j .

Слідування. Елемент (i, j) матриці $H \cup H^2 \cup ... \cup H^l$ орграфа D дорівнює множині всіх шляхів довжини $\leq l$ з v_i в v_j.

Приклад



$$U=\begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e \\ a & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\quad U^2=\begin{pmatrix} bc & 0 & bd & 0 \\ 0 & cd & 0 & de \\ ea & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ab & 0 & 0 \end{pmatrix}\quad U^3=\begin{pmatrix} 0 & bcb & 0 & bde \\ cbc \cup dea & 0 & cbd & 0 \\ 0 & eab & 0 & 0 \\ abc & 0 & abd & 0 \end{pmatrix}$$

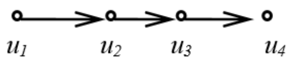
Рис. 5. Матриця шляхів в орграфі

Матриця досяжності

Матриця досяжності $R(D)=(r_{ij})$ визначається наступним чином:

$$r_{ij}\begin{cases} 1, & u_j \text{ досяжна з } u_i, \\ 0, & u_j \text{ ні досяжна з } u_i. \end{cases}$$

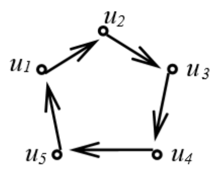
Будь-яка вершина досяжна сама з себе, тому r_{ii} = 1 для всіх i . На рис. 6 представлені матриці суміжності, відстаней і досяжності для деяких орграфів.



D_2

$$A(D_2)=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

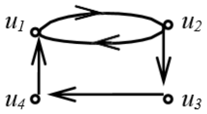
$$R(D_2)=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\qquad (d_{ij})=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ x & 0 & 1 & 2 \\ x & x & 0 & 1 \\ x & x & x & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



D_3

$$A(D_3)=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$R(D_3) = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1&2&3&4&5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad (d_{ij}) = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1&2&3&4&5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0&1&2&3&4\\ 4&0&1&2&3\\ 3&4&0&1&2\\ 2&3&4&0&1\\ 1&2&3&4&0 \end{pmatrix} \end{array}$$



D_4

$$A(D_4) = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1&2&3&4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 1&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ 1&0&0&0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$(d_{ij}) = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1&2&3&4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0&1&2&1\\ 1&0&1&2\\ 2&3&0&1\\ 1&2&3&0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad R(D_4) = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1&2&3&4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1&1&1&1\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Рис. 6. Матриці відстаней і досяжності для орграфів

Матриця досяжності може бути отримана за допомогою матриці суміжності.

Теорема. Нехай A - матриця суміжності і R - матриця досяжності орграфа D з n вершинами. Тоді

$$R = B(\boldsymbol{I} + A + A^2 + ... + A^{n-1}) = B[(\boldsymbol{I} + A)^{n-1}],$$

де B – булеве перетворення, а $\boldsymbol{I}$ – одинична діагональна матриця.

Доведення. Дійсно, за теоремою, якщо v_j досяжна з v_i, то існує простий ланцюг з v_i в v_j. Довжина цього шляху не перевищує n-1, оскільки у простому ланцюзі вершини не повторюються. Згідно зі слідуванням з теореми, в цьому випадку елемент (i, j) матриці $\boldsymbol{I} + A + A^2 + ... + A^{n-1}$ буде ненульовим, звідки і слідує наша теорема.

У наступній теоремі буде показано застосування матриці досяжності як методу Означення зв'язності орграфа.

Теорема. Нехай орграф D має матрицю досяжності R і матрицю суміжності A. Тоді

1) D сильно зв'язний тоді і тільки тоді, якщо $R = \boldsymbol{J}$;
2) D односторонньо зв'язний тоді і тільки тоді, якщо $B (R + R') = \boldsymbol{J}$;
3) D слабо зв'язний тоді і тільки тоді, коли $B [(\boldsymbol{I} + A + A')^{n-1}] = \boldsymbol{J}$, де $\boldsymbol{J}$ – одинична матриця.

РОЗДІЛ 22. ВЕРШИННІ БАЗИ І МЕРЕЖІ КОМУНІКАЦІЙ

Сильні компоненти і вершинна база

Припустимо, ми хочемо передати повідомлення по мережі комунікацій так, щоб воно могло досягнути всіх її учасників. Якщо мережа сильно зв’язна, досить передати повідомлення будь-якій одній особі. Однак, якщо орграф не є сильно зв'язним, то повідомлення, передане одній особі, не завжди досягне всіх учасників. В такому випадку виникає задача знаходження множини вершин, з яких досяжні всі інші вершини, причому бажано, що б ця множина містила найменше число вершин.

Означення. Сукупність вершин *B* орграфа *D* називається його *вершинною базою* (або базою вершин), якщо кожна вершина, яка не входить в *B,* досяжна з деякої вершини в *B,* і множина *B* – мінімальна. Тут *мінімальність B* означає, що ні з якої власної підмножини *B* не можна досягти всіх вершин *D,* що залишилися.

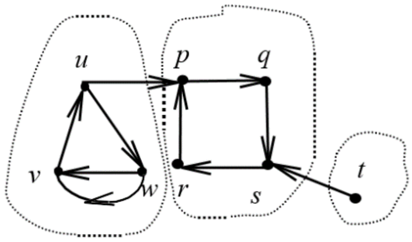


Рис. 7. Сильні компоненти орграфа.

Для прикладу розглянемо орграф, зображений на рис. 7. Знайдемо вершинну базу з найменшим числом елементів, виходячи з її Означення. Вершина t не має вхідних дуг, тому ми повинні включити її в вершинну базу. Вершини u, v, w недосяжні з p, q, r, s, але кожна з них досяжна одна для одної, тому одна з них повинна входити в будь-яку з вершинних баз. Отже, вершинну базу можна отримати додаванням до t або u, або v, або w. З множини $\{t, u, q\}$ також можна досягти всі інші вершини, але вона не є вершинною базою, оскільки підмножина $\{t, u\}$ вже володіє необхідною властивістю. Насправді множини $\{t, u\}$, $\{t, v\}$ і $\{t, w\}$ утворюють всі вершинні бази. Як видно, всі вони мають однакове число вершин, і це не випадково. Таким чином, пошук вершинної бази з найменшим числом елементів закінчується відразу, як тільки знаходиться довільна вершинна база. Розглянемо процедуру знаходження всіх вершинних баз даного орграфа. Більшість результатів з пошуку вершинних баз належить Кенігу. Щоб описати процедуру Кеніга, введемо деякі попередні Означення.

Означення 1. Максимальний сильно зв'язний підграфорграфа D називається *сильно зв'язною компонентою* D (*сильною компонентою зв'язності, сильною компонентою*).

Наприклад, на рис. 7 підграф, породжений вершинами v, w, є сильно зв'язним, проте він не є сильною компонентою, так як входить в сильний підграф, породжений вершинами u, v, w, тобто не є максимальним за властивістю сильної зв'язності. Іншою сильною компонентою є підграф, породжений вершинами p, q, r, s – всі вони досяжні одна для одної, так як входять в один цикл. Одна вершина t також є сильною компонентою. Сильні компоненти мають наступні властивості.

Теорема. У орграфі $D = (V, E)$ кожна вершина u входить в одну і тільки одну сильну компоненту.

Доведення. Вершина u входить щонайменше в одну сильну компоненту. Справді, підграф, породжений u, є сильним (так як кожна вершина досяжна сама для себе). Будемо додавати вершини до тих пір, поки будуть все ще виходити сильно зв'язані підграфи. Така процедура призводить до сильно зв'язаної компоненти, що містить u. Припустимо тепер, що u входить в сильні компоненти K і L. Розглянемо підграф, породжений вершинами з K і L. Цей підграф сильно зв'язний, так як, якщо a входить в K, а b входить в L, то з a можна потрапити в b через вершини з $K \cup L$, оскільки з a можна досягти u через вершини K і з u можна досягти b через вершини L. Аналогічно, з b можна потрапити в a через вершини $K \cup L$. З максимальності K і L маємо, що $K \cup L = K$ і $K \cup L = L$, тому $K = L$.

Ця теорема дає той же самий результат, що і лема про впорядкування квазівпорядкованої множини. Дійсно, всі вершини сильно зв'язного підграфа досяжні одна для одної, тобто перебувають у відношенні сильної зв'язності, яке є симетричним, рефлексивним і транзитивним. Отже, множина вершин сильно зв'язаної компоненти утворюють один клас еквівалентності. Ці класи еквівалентності пов'язані між собою і утворюють новий граф D^*, вершини якого відповідають сильним компонентів графа D.

Орграф D^*, званий *конденсацією* графа D, будується наступним чином. Нехай K_1, K_2, ..., K_p – сильні компоненти D. Тоді вибираємо множину вершин $V(D^*) = \{K_1, K_2, ..., K_p\}$, і проводимо дугу від K_i до K_j тоді і тільки тоді, коли $i \neq j$ і для деяких вершин $u \in K_i$ і $v \in K_j$ в D є хоча б одна дуга з u в v.

Конденсація D^* орграфа D не має циклів. Дійсно, нехай в D^* існує цикл $K_{i_1}, K_{i_2}, \ldots, K_{i_1}$ і u – деяка вершина в K_{i_1}, v – деяка вершина в K_{i_2}. Використовуючи цикл $K_{i_1}, K_{i_2}, \ldots, K_{i_1}$, легко довести, що u досяжна з v і v досяжна з u. Таким чином, виявляється, що u і v входять в одну сильну компоненту і , отже , $K_{i_1} = K_{i_2}$ а це про суперечить визначенню циклу.

Оскільки новий орграф D^*, що є конденсацією вихідного орграфа D, і не містить циклів, він буде мати легко визначаєму єдину вершину базу B^* і з неї буде легко отримати всі вершинні бази орграфа D. Це властивість конденсації графа заснована на наступній теоремі

Теорема. В орграфі без циклів D є єдина вершинна база, що складається з усіх вершин, які не мають вхідних дуг.

Доведення. Нехай B – множина всіх вершин, які не мають вхідних дуг. Ясно, що будь-яка вершина u з B має бути присутня в кожній вершинної базі. Досить довести, що будь-яка вершина v, яка не належить B, досяжна з деякої вершинної множини B. Щоб показати це, припустимо, що $v \notin B$. Нехай $v = v_0$. Оскільки $v_0 \notin B$, є дуга (v_1, v_0), що входить в v_0, причому $v_1 \neq v_0$. Якщо $v_1 \in B$, все доведено. Якщо немає, то значить є дуга (v_2, v_1), що входить в v_1, причому $v_2 \neq v_1$. Продовжуючи цей процес, побудуємо шлях $v_t, v_{t-1}, ..., v_1, v_0$, який не містить вершин з B. Всі вершини цього шляху різні, оскільки, якщо $v_i = v_j$, $i > j$ і $v_i, v_{i-1}, ..., v_{j+1}$ різні, то $v_i, v_{i-1}, ..., v_{j+1}, v_j$ - цикл, що суперечить допущенню про відсутність циклів в орграфе D. Так як D має кінцеве число вершин, то побудова шляху $v_t, v_{t-1}, ..., v_1, v_0$ не може тривати нескінченно. Врешті-решт ми повинні досягти деякої вершини v_t, що входить в B. Таким чином, вершина $v = v_0$ досяжна з v_t.

Слідування. У орграфі без циклів існує вершина, в яку не входить жодна дуга.

Теорема. Нехай B^* – єдина вершинна база конденсації D^* орграфа D. Тоді вершинними базами в D, служать такі множини B, які містять по одній вершині з кожної сильної компоненти D, що належить B^*.

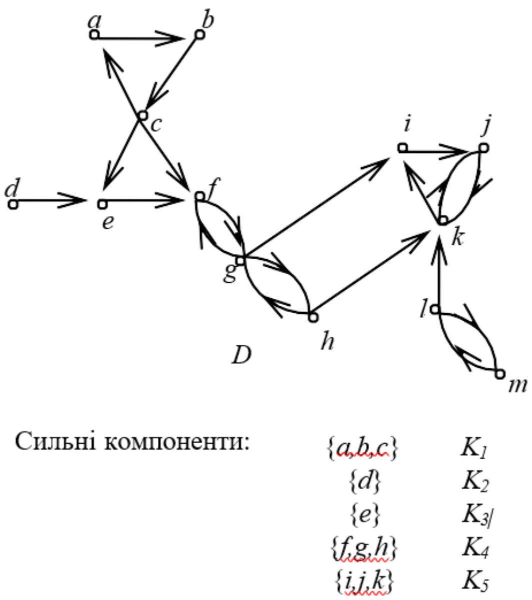
Доведення. Припустимо, що B^* – єдина вершинна база в D^* і B містить по одній вершині з кожної сильної компоненти B^*. Ясно, що кожна вершина в D досяжна з B. Потрібно показать, що B є мінімальною множиною, що володіє такою властивістю, що кожна вершина в D досяжна з B. Для доведення мінімальності досить показати, що не знайдеться вершини $v \in B$, що досяжна з іншої вершини $u \in B$. Якби це було можливо, то сильна компонента, містить v, була б досяжна в D^* з сильної компоненти, що містить u, що суперечило б мінімальності B^*. Щоб завершити доведення, покажемо, що якщо B є довільна вершинна база, то вона містить точно по одній вершині з кожної сильної компоненти D, що належить B^*. Звичайно, база B повинна містити принаймні по одній вершині з кожної такої сильної компоненти, а також, можливо, і інші вершини. За умови мінімальності випливає, що ніякі інші вершини не потрібні.

Теорема. Будь-які дві вершинні бази орграфа містять однакове число вершин.

З цих теорем витікає процедура (Кеніга) знаходження множини вершинних баз орграфа.

1. Знаходяться всі сильні компоненти орграфа D.
2. Будується конденсація D^* орграфа D.
3. Знаходиться множина вершин орграфа конденсації B^*, що складається з вершин, в які не входить ні одна дуга (вершинна база B^* конденсації графа D^*).
4. З кожної сильної компоненти, що входить в B^*, вибирається по одній вершині. Ця множина і є вершинною базою B орграфа D.

Розглянемо цю процедуру для орграфа, зображеного на рис. 8.



Сильні компоненти:		
	$\{a,b,c\}$	K_1
	$\{d\}$	K_2
	$\{e\}$	K_3
	$\{f,g,h\}$	K_4
	$\{i,j,k\}$	K_5
	$\{l,m\}$	K_6

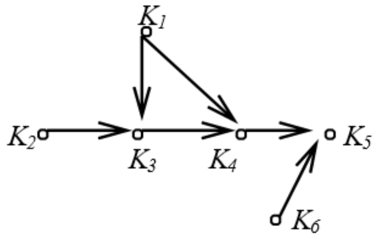


Рис. 8. Орграф, його конденсація і вершинна база

Знайдемо всі сильні компоненти цього орграфа. Він містить шість сильних компонент (множини вершин, що входять до них, вказані на малюнку). Будуємо конденсацію D^* графа D. У якості вершин D^* вибираємо все сильні компоненти K_1 - K_6 і з'єднуємо їх дугами. В конденсації D^* знайдеться, наприклад, дуга з K_3 в K_4, оскільки в орграфі D є дуга (e, f). Аналогічно в D^* знайдеться дуга з K_4 в K_5, оскільки в D є дуга з g в i. Є й інша дуга (h, k) з вершини в K_4 до вершини в K_5, проте в конденсацію графа включається тільки одна з них.

Тепер знайдемо вершинну базу в D^*. Компоненти K_1, K_2 і K_6 не мають вхідних дуг; вони утворюють множину $B^* = \{K_1, K_2, K_6\}$, з якої досяжна кожна інша вершина в D^*. Таким чином, $B^* = \{K_1, K_2, K_6\}$ є вершинної базою для конденсації D^*. Далі, якщо взяти по одному елементу з кожної сильної компоненти K_1, K_2, K_6, то отримаємо вершинну базу для D. Наприклад, множина $B = \{a, d, l\}$ дає таку вершинну базу. Інша вершинна база задається множиною $\{a, d, m\}$. З B^* виходять і інші вершинні бази: $\{b, d, l\}$, $\{b, d, m\}$, $\{c, d, l\}$, $\{c, d, m\}$.

Ми бачимо, що в D^* завжди є єдина вершинна база B^*, що складається, як в цьому прикладі, з усіх вершин, які не мають вхідних дуг. У свою чергу, кожну вершину базу в D можна отримати з бази в D^*, вибираючи по одній вершині з кожної сильної компоненти в D, що входить в B^*. Таким чином, отримані вершинні бази складають множини всіх вершинних баз.

Використання матриці досяжності для знаходження сильних компонент орграфа

Теорема. Нехай орграф D має матрицю досяжності $R=(r_{ij})$ і $R^2 = (s_{ij})$. Тоді:

1) сильна компонента, що містить вершину u_i, визначається одиничними елементами в i-му рядку (або стовпці) поелементного добутку $R \times R'$, де R'- матриця, транспонована до R;
2) число вершин в сильній компоненті, що містить u_i, так само s_{ii}.

Доведення. Вершина u_j досяжна з вершини u_i тоді і тільки тоді, коли $r_{ij}=1$. У свою чергу, u_i досяжна з u_j тоді і тільки тоді, коли $r_{ji}=1$. Таким чином, u_i і u_j взаємно досяжні в тому і тільки тому випадку, якщо $r_{ij} r_{ji}=1$.

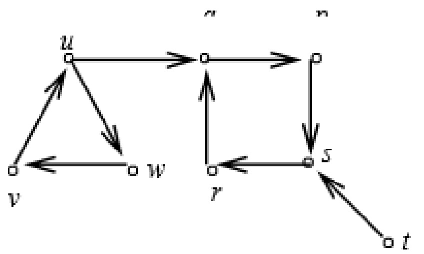
Величина s_{ii} дорівнює $\sum_{j=1}^{n} r_{ij} r_{ji}$, де n – число вершин. Далі, $r_{ij} r_{ji} = 1$ тоді і тільки тоді, коли u_i і u_j взаємно досяжні. Таким чином, підсумовування цих чисел за всіма j дає число вершин u_j, взаємно досяжних для вершин u_i.

На рис. 9 наведені матриці R, $R \times R'$ і R^2 для зображеного там же орграфа D.

Поелементний добуток $R\times R'$ є клітинно-діагональною матрицею. Кожна клітина відповідає одній сильній компоненті. Ми можемо знайти сильні компоненти, переглядаючи матрицю по рядках. Наприклад, рядок, що відповідає вершині u в матриці $R\times R'$, визначає сильну компоненту

$\{u, v, w\}$. Елемент (u, u) в матриці R^2 , а саме 3, дає число елементів в цій сильній компоненті. Аналогічно можна знайти інші сильні компоненти.

$$
R=R(D)=\begin{array}{c} \\ u\\ v\\ w\\ p\\ q\\ r\\ s\\ t \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} u & v & w & p & q & r & s & t \end{array}\\
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$



$$
R\times R'=\begin{array}{c} \\ u\\ v\\ w\\ p\\ q\\ r\\ s\\ t \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} u & v & w & p & q & r & s & t \end{array}\\
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Сильні компоненти
$\{u, v, w\}$
$\{p, q, r, s\}$
$\{t\}$

$$
R^2=\begin{array}{c} \\ u\\ v\\ w\\ p\\ q\\ r\\ s\\ t \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} u & v & w & p & q & r & s & t \end{array}\\
\begin{pmatrix}
3 & 3 & 3 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0\\
3 & 3 & 3 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0\\
3 & 3 & 3 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0\\
0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & 0\\
0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & 0\\
0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & 0\\
0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & 0\\
0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Рис. 9. Сильні компоненти орграфа, що визначаються по матриці досяжності.

Графи і бінарні відношення

Між простими (без кратних ребер) графами і бінарними відношеннями існує взаємно однозначна відповідність. Всякий орграф з множиною вершин $V = \{ v_1 , \dots v_n \}$ визначає бінарне відношення на множині V - відношення суміжності. Матриця суміжності цього графа - це матриця бінарного відношення суміжності. Вірно і зворотне - всяке бінарне відношення ρ на довільній множині $M = \{ m_1 , \dots, m_n \}$ можна представити графом G, вершини якого відповідають елементам M, а ребро (m_i , m_j) в цьому графі існує, тоді і тільки тоді, якщо виконується $m_i \rho m_j$. Бінарна матриця відношення ρ одночасно є матрицею суміжності графа G, а сам граф називають графом відношення ρ.

По матриці суміжності графа можна визначити властивості відношення ρ. Граф рефлексивного відношення містить петлі у всіх вершинах і, відповідно, одиниці у всіх елементах головною діагоналі матриці суміжності. Симетричному відношенню відповідає граф із симетричною матрицею суміжності. Як було зазначено вище, такий орграф рівносильний простому неорієнтованому графів. Граф транзитивного відношення має наступну властивість: якщо існують ребра (v_i, v_j) і (v_j, v_k), то існує ребро (v_i, v_k). Граф відношення еквівалентності являє собою сукупність повних підграфів.

Оскільки будь-який граф являє певне відношення, можна визначити операції об'єднання і перетину над графами так само, як над відношеннями. Доповненням ρ' відношення ρ (тобто відношенню, яке істинно, коли ρ не виконується) відповідає доповнення графа G до повного графа, тобто граф G', в якому є ті і тільки ті дуги, яких немає в G. Зворотному відношенню ρ^{-1} відповідає граф G^{-1}, який отриманий з графа G зміною орієнтації всіх його дуг на протилежні.

РОЗДІЛ 23. АЦИКЛІЧНІ ГРАФИ

Топологічне сортування ациклічних графів. Ациклічні графи, топологічне сортування

Означення 1. Орграф називається *ациклічним,* якщо він не містить циклів.

У загальному випадку орграф може містити шляхи якої завгодно довжини, оскільки кожен шлях може проходити через одну вершину будь-яке число раз. Однак це можливо, тільки якщо в графі є цикли. У ациклічному графі довжини шляхів обмежені, так як вершини в його шляхах не можуть повторюватися, тобто всі його шляхи – прості ланцюги. Отже, в ациклічному орграфі є шляхи максимальної довжини, тобто шляхи, які не можуть бути продовжені: не можна додати ребро ні до їх початку, ні до їх кінця. Звідси випливає, що в ациклічному графі існує, принаймні, одна вершина, в яку не входить жодна дуга (таку вершину називають *витоком*, або *джерелом*), і, принаймні, одна вершина, з якої не виходить жодна дуга (таку вершину називають *стоком*).

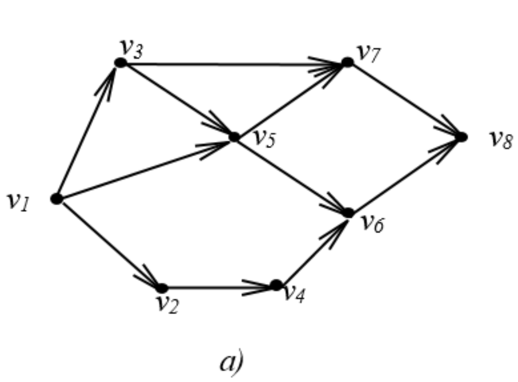


Рис. 10. *Ациклічні графи*

Дійсно, в ациклічному графі будь-який шлях приводить в вершину, з якої він не може продовжитися (див. рис. 10). Така вершина і є стік. Якщо ж продовжити цей шлях від його початку проти орієнтації, прийдемо в вершину, з якої не можна вийти проти орієнтації інцідентних їй ребер, тобто в вершину, яка не має вхідних ребер. Така вершина є джерелом.

Приклади.

Ациклічний орграф з одним джерелом і одним стоком називається *двополюсним*. Двополюсний граф зображений на рис. 10,а). Ациклічний орграф на рис. 10, б) має три джерела і один стік.

Граф конденсації деякого орграфа є ациклічним графом, так як він ніколи не містить циклів. Іншим прикладом ациклічного графа є уявлення напіврешіток у вигляді діаграм Хассе. Діаграма повної решітки являє собою двополюсний ациклічний орграф.

Означення 2. *Топологічним сортуванням* орграфа називається така нумерація вершин, що для будь-якого ребра (v_i, v_j) номер його початку менше номера його кінця: $i < j$.

Теорема. Для орграфа топологічне сортування існує тоді і тільки тоді, коли він ациклічний.

Доведення. Припустимо, що для циклу топологічне сортування можливе. Виберемо в циклі довільну вершину v_i. Цикл містить ребра (v_i, v_j) і (v_k, v_i), причому за Означенням повинно бути $i<j$ та $k<i$. При проходженні вздовж циклу номера вершин повинні тільки зростати і, отже, всі вони будуть більше i. Тому, коли ми прийдемо в v_k, отримаємо $k>i$, що суперечить припущенню.

Для ациклічного орграфа D з n вершинами топологічне сортування здійснюється за допомогою наступного алгоритму. Виберемо в D будь-який стік і дамо йому номер n. Всі инцидентні йому ребра – входять, тому їх початки будуть мати номери, менші n, і, отже, для них умову Означення виконано. Видалимо обраний стік разом з усіма инцидентними йому ребрами. Отримаємо ациклічний граф з n-1 вершиною. Виберемо в ньому будь-який стік і дамо йому номер n-1. Будемо повторювати процедуру видалення стоків і инцидентних їм ребер до тих пір, поки не пронумеруємо все вершини. Оскільки щоразу ребра, що видаляються, будуть задовольняти умові Означення, отримаємо топологічне сортування вихідного орграфа. Приклад топологічної сортування графа наведено на рис. 10 б).

РОЗДІЛ 24. ДЕРЕВА

Властивості дерев. Бінарні дерева. Збалансовані дерева

Якщо в ациклічному орграфі "скасувати" орієнтацію ребер, то в отриманому неорієнтованому графі можуть виникнути цикли. Тому неорієнтовний ациклічний граф має більш специфічний вигляд.

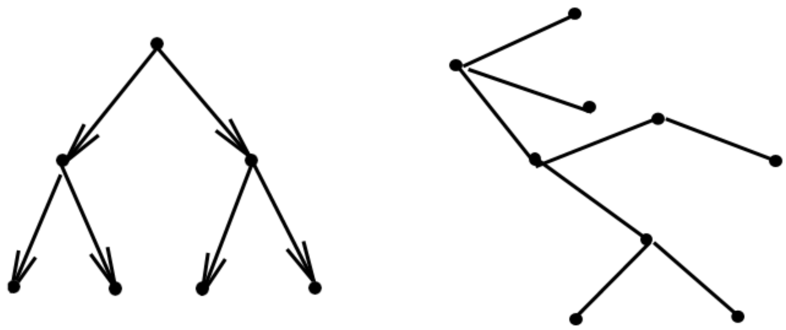
Означення 1. Зв'язний неорієнтований граф без циклів називається *неорієнтованим деревом*. Незв'язний граф, що складається з декількох дерев, називається *лісом*. Таке дерево є неорієнтованим ациклічним графом, тому в ньому всі шляхи – прості.

Поняття *орієнтованого* дерева відрізняється від ациклічного графа.

Означення 2. Зв'язний орграф, що не містить циклів, в якому тільки одна вершина не має вхідних дуг, а всі інші вершини мають по одній дузі, що входить, називається *орієнтованим* , або *спрямованим деревом*.

Означення 3. Вершина, яка не має вхідних дуг, називається *коренем* дерева. Вершини, які не мають дуг, що виходять, називаються *кінцевими*, або *термінальними*, або *листям*. Проміжні вершини, що лежать між коренем і листям, називаються *транзитними*

Орієнтовані дерева часто зображують без стрілок, попередньо обумовивши, що це зростаюче вниз (або вгору) дерево. На рис. 11 ,а) зображено зростаюче вниз дерево, на рис. 11, б) – неорієнтоване дерево.



а) *б)*

Рис. 11. *Приклади дерев.*

Наступна теорема описує основні властивості дерев.

Теорема.

1. У будь-якому дереві є, принаймні, дві кінцеві вершини (вершини ступеня 1).
2. Між будь-якими двома вершинами дерева є рівно один шлях.
3. Число ребер у дереві з n вершинами дорівнює n -1.

Доведення.

1. Оскільки в дереві всі шляхи - прості, то в ньому є принаймні один максимальний шлях, тобто шлях, який не можна продовжити. Кінці цього шляху і є кінцевими вершинами. (Зауважимо, що в довільному ациклічному орграфі теж є максимальні шляхи; їх кінцями є стоки. Однак стік може мати ступінь, більше одиниці. В цьому випадку продовжити з нього шлях не можна не тому, що немає іншого інцидентного йому ребра, а тому, що інші ребра - теж входять,

і вийти по них зі стоку не можна.)

2. Наявність шляху між будь-якою парою вершин випливає зі зв'язності дерева, а єдиність цього шляху – з того, існування двох шляхів між парою вершин завжди створює цикл.

3. Третій пункт теореми найпростіше довести, ввівши процедуру перетворення неориентированного дерева в орієнтоване. Виберемо в дереві довільну вершину. Назвемо її *коренем*. Ребра, інцидентні кореню, орієнтуємо в напрямку від кореня. Для кожної вершини v_i, що є кінцем одного з цих ребер, орієнтуємо інші інцідентні їй ребра в напрямку від v_i. Продовжуємо цю процедуру до тих пір, поки не будуть досягнуті кінцеві вершини. В силу єдиності шляху між вершинами жодна вершина не буде досягнута двічі (тобто не доведеться орієнтувати вже орієнтовані ребра), а в силу зв'язності дерева все вершини будуть досягнуті. З цієї процедури видно, що корінь не має вхідних ребер (його напівстепень заходу дорівнює 0), а кожна з інших n-1 *вершин* має одне вхідне ребро. Оскільки всі ребра є вхідними для якоїсь вершини, то звідси і випливає п.3 теореми.

З одного неорієнтованого дерева з n вершинами можна отримати рівно n різних орієнтованих дерев, так як вибір різних коренів завжди дає різні ордерева. Це випливає з того, що з кореня досяжні всі інші вершини, сам же корінь недосяжний ні з якої іншої вершини. Іншими словами, орієнтоване дерево завжди односторонньо зв'язно. Однак різні ордерева, отримані з одного і того ж дерева, можуть виявитися ізоморфними.

Приклад. Якщо вихідне дерево - простий ланцюг, то вибір в якості кореня кінців цього ланцюга дасть два ізоморфні орієнтовані ланцюги, а якщо цей ланцюг містить парне число вершин і, отже, два центри, то вибір цих центрів дасть два ізоморфних ордерева з двома шляхами, що починаються з кореня.

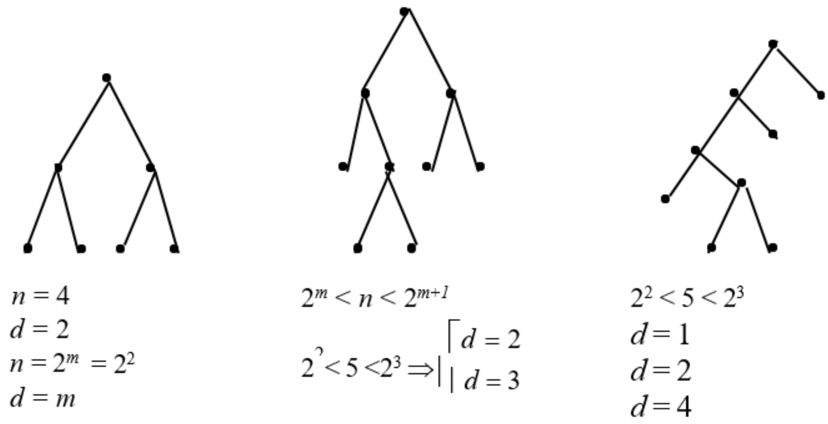
Означення. Дерево, в якому кожна вершина має по дві вихідних дуги або не має зовсім, називається *двійковим*, або *бінарним* деревом.

Означення. Нехай n – кількість кінцевих вершин в бінарному дереві, d – довжина шляху від кореня дерева до кінцевої вершини і m – натуральне число, тоді дерево називається *збалансованим*, якщо:

1) або $n = 2^m$ і тоді $d = m$,

2) або $2^m < n < 2^{m+1}$, і тоді $d = m$ або $d = m + 1$.

На рис. 12, *а*), *б*) дерева збалансовані, *в*) - незбалансоване дерево.



а) б) в)

Рис. 12. *Приклади дерев.*

Дерева відображають ієрархічні структури, наприклад, за допомогою дерева можна уявити ієрархію службових положень в деякій організації, ієрархію понять деякої предметної області, родинні стосунки (генеалогічне дерево) і т.п.

Бінарні орієнтовані дерева мають велике значення в програмуванні для представлення складних структур даних і побудови алгоритмів їх обробки. Зручним способом уявлення арифметичного виразу є польський запис, де операції передують операндам, на відміну від зазвичайного запису. Наприклад, функція $f\ (x,\ y) = x+y$ в польскому запису має вигляд: $+ (x , y)$ або просто $+ xy$. На рис. 28 показано дерево арифметичного виразу $(a+b) \times(a-b)$. Для перетворення його в польський запис $\times+ ab - ab$ використовується алгоритм обходу дерева зверху вниз і зліва направо, який показаний на рис. 13

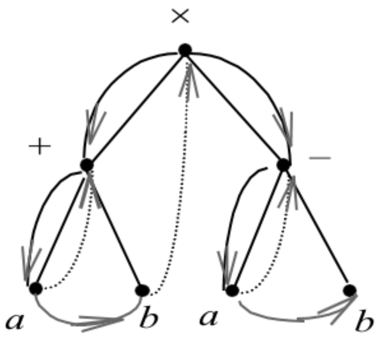


Рис. 13. *Обхід дерева.*

Спочатку вибирається значення, що зберігається в корені дерева (воно завантажується в стек). Потім відбувається спуск по лівій гілці до термінальної вершини. Всі значення, що лежать на цьому шляху, записуються після кореневого: $\times+a$. Дійшовши до термінальної вершини, ми піднімаємося до першої знизу транзитної вершини, і спускаємося по правому піддереву; отримуємо $\times+ ab$. Послідовно повторюючи цей процес, ми дійдемо знову до кореня дерева, після чого спускаємося по правому піддереву за тим же алгоритмом. В результаті отримуємо вираз: $\times+ ab-ab$.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Основні поняття для неорієнтованих графів.
2. Діаметр, радіус, центри і периферії графа.
3. Ейлеров обхід графа. Теорема Ейлера. Гамільтонів цикл.
4. Основні поняття для орієнтованих графів
5. Досяжність в орграфі. Типи зв'язності орграфів. Критерії зв'язності орграфів.
6. Поняття вершинної бази, компоненти сильної зв'язності, конденсації орграфів. Процедура Кеніга знаходження вершинної бази орграфів.
7. Використання матриць для дослідження орграфів.
8. Ациклічні графи. Топологічне сортування.
9. Дерева. Орієнтовані дерева. Збалансовані дерева.
10. Планарні і плоскі графи. Дослідження планарності графів. Теорема Понтрягіна-Куратовского.
11. Розфарбування графів. Гіпотеза 4-х фарб.

ЗАВДАННЯ

1. Нехай у графі G з n вершинами і m ребрами є p вершин степеня t, а всі інші вершини мають степінь $t+1$. Довести, що $p = (t+1)n - 2m$.

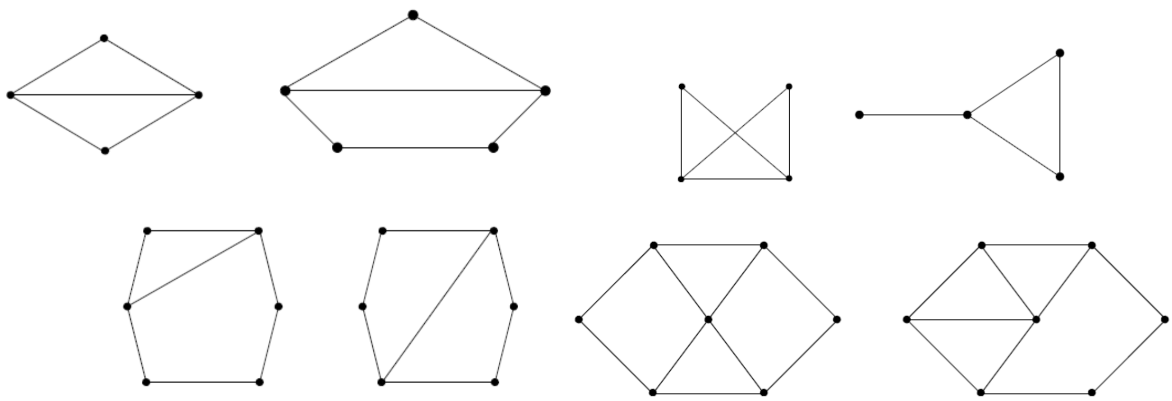
2. Чи існує граф з n вершинами, усі вершини якого є кінцевими, якщо:

a) $n = 10;$
b) $n = 11;$
c) $n = 2k;$
d) $n = 2k + 1$

3. Побудувати кубічний граф, що має:

a) 6 вершин;
b) 4 вершини;
c) 8 вершин.

4. Визначити, чи серед пар графів, зображених на малюнках, є ізоморфні (нумерація починається з верхнього ряду, зліва – графи 1, 2, 3, 4 (зверху), графи 6, 7, 8, 9 (нижній):



СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Дискретна математика: Конспект лекцій (Частина 1) [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 113 «Прикладна математика», освітньої програми «Наука про дані та математичне моделювання» / О.Л.Темнікова ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 2,97 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 154 с.
2. Темнікова О.Л. Дискретна математика: практикум з дисципліни «Дискретна математика» для студентів спеціальності 113 «Прикладна математика» [Електронне видання] / О.Л.Темнікова – К. : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018.
3. Борисенко О.А. Дискретна математика: Підручник. – Суми: ВТД «Університетська книга», 2007. – 255 с.
4. Основи дискретної математики (для студентів-інформатиків): Посібник / Бондарчук Ю.В., Олійник Б.В. – Київ: Національний університет «Києво-Могилянська академія», 2007. – 138 с.
5. Комп'ютерна дискретна математика: Підручник / М.Ф. Бондаренко, Н.В. Білоус, А.Г. Руткас. – Харків: «Компанія СМІТ», 2004. – 480 с.
6. Бардачов Ю.М. Дискретна математика / Ю.М.Бардачов, Н.А.Соколова, В.Є.Ходаков – К.: Вища школа, 2002.
7. Бондаренко М.Ф. та ін. Збірник тестових завдань з дискретної математики / М.Ф. Бондаренко, Н.В. Білоус, І.Ю. Шубін. – Харків: ХТУРЕ, 2000. – 156 с.