УДК 004.942

С. А. Положаєнко, д-р техн. наук,
Н. О. Лисенко

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ БАГАТОКОМПОНЕНТНОГО РЕОЛОГІЧНОГО ПРОЦЕСУ «ПОРШНЕВОГО» ВИТІСНЕННЯ І ЇЇ ОБЧИСЛЮВАЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ

Анотація: *Запропоновано математичну модель фронтального витіснення для багатокомпонентного реологічного процесу взаємофільтрації внутрішньо пластових рідин, що не змішуються (в тому числі і аномальних), відмінною ознакою якого є застосування проміжного агенту – «поршня». В умовах реальної прикладної задачі дано якісний опис досліджуваного реологічного процесу, а математичну модель сформульовано у вигляді системи з варіаційними нерівностями, для якої розроблено схему простої обчислювальної реалізації.*

Ключові слова: *багатокомпонентні системи, фронтальне витіснення, «застійна зона», граничний градієнт, математична модель, варіаційна нерівність*

S. Polozhaenko, ScD.,
N. Lysenko

A MATHEMATICAL MODEL OF MULTICOMPONENT REALAGE PROCESS OF THE "PISTON" CROWDING OUT AND ITS COMPUTATIONAL IMPLEMENTATION

Abstract. *A mathematical model of frontal displacement for multicomponent rheological process usaboston internally reservoir fluids are not mixed (including abnormal), distinctive feature of which is the use of an intermediate agent, a "piston". In terms of real applied problems given a qualitative description of the studied rheological process, and a mathematical model is formulated as a system with waracle irregularities for which the scheme simple computational implementation*

Keywords: *multicomponent systems, frontal expulsing, «stagnant zone», maxitum gradient, mathematical model, variation inequality*

С. А. Положаенко, д-р техн. наук,
Н. А. Лысенко

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОЕЛЬ МНОГОКОМПОНЕНТНОГО РЕОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА «ПОРШНЕВОГО» ВЫТЕСНЕНИЯ И ЕЁ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Аннотация. *Предложена математическая модель фронтального вытеснения для многокомпонентного реологического процесса взаимофильтрации внутри пластовых жидкостей (в том числе и аномальных), отличительным признаком которого является применение промежуточного агента – «поршня». В условиях реальной прикладной задачи дано качественное описание исследуемого реологического процесса, а математическая модель сформулирована в виде системы с вариационными неравенствами, для которой разработана схема простой вычислительной реализации.*

Ключевые слова: *многокомпонентные системы, фронтальное вытеснение, «застойная зона», граничный градиент, математическая модель, вариационное неравенство*

Вступ. Ряд технологічних процесів, зумовлених фільтраційним рухом у пористому середовищі, характеризується явищем взаємофільтрації рідин, які не змішуються (або, як прийнято у спеціальної літературі [1 – 4] – *реологічних* процесів багатокомпонентних систем). Типовим прикладом такого технологічного процесу є водонапірний режим розробки виснажених нафтових родовищ [3 – 5]. При цьому через особливості структури «кістяку» пористого середовища або фізико-хімічних властивостей (наприклад, збільшення вмісту парафінів) нафта може виявляти властивості аномальної рідини, що знаходить відображення у наявності граничного градієнту тиску [3 – 4; 6 – 7], а також у нульових швидкостях фільтрації при ненульовому пластовому тиску [3 – 4]. У зв'язку зі слабкою здатністю «кістяка» пористого середовища змочуватись водою найчастіше можна бачити незадовільний відмив нафти та, як наслідок, створення «застійних зон» – целіків невідфільтрованої нафти [3 – 4]. Нівелювати це явище можна за допомогою проміжного агенту, тобто рідини із хорошими властивостями змочування (наприклад, поверхнево-активних речовин – ПАР), фільтрація яких відбувається просторово між водою та нафтою. Ці речовини являють собою своєрідний «поршень», що витискає нафту та запобігає створенню невідфільтрованих целіків [8 – 13].

Мета роботи. Розробка класу математичних моделей реологічних процесів для аномальних рідин на прикладі процесу витіснення у багатокомпонентній системі із проміжним агентом – «поршнем».

Основна частина. По-перше, виконаємо якісний опис процесу фільтрації багатокомпонентних аномальних рідин при витісненні однієї рідини іншою, а потім розробимо математичну модель (ММ) даного процесу у вигляді варіаційної нерівності.

1. ***Якісний опис процесу витіснення у багатокомпонентній системі із проміжним агентом – «поршнем».*** Умовою, яка визначає границю Г розподілу дифундуючих компонент у разі спільної фільтра-

ції двох рідин, що не змішуються, в області Ω може слугувати «стрибок» насиченості у функції Баклея-Леверетта [3 – 5]

$$J(S)=\frac{k_1^0(S_1)}{\mu_1 k_1^0(S_1)+\mu_2 k_2^0(S_2)}, \qquad (1)$$

де $k_1^0(S_1)$ та $k_2^0(S_2)$ – відносні фазові проникності рідин, що не змішуються; μ_1 та μ_2 – їх в'язкості; S_1 та S_2 – насиченості пористого простору рідинами, що фільтруються, відповідно.

Експериментально встановлено [3], що фронт витіснення переміщується стало, якщо рухливість компоненти, яка витискає, не перевищує рухливість компоненти, яка витискається

$$\frac{k_1(S_1)}{\mu_1}\le\frac{k_2(S_2)}{\mu_2} \quad (2) \text{ або } \frac{\partial P(t,z)}{\partial\eta}>0, \quad \frac{\partial P_c(S)}{\partial\eta}>0, \quad (3)$$

де $P(t,z)$ задає внутрішньо пластовий (усереднений) тиск для рідин, що фільтруються; $P_c(S)$ – капілярний тиск, зумовлений наявністю різних швидкостей фільтрації для рідин у багатокомпонентній системі; η – нормаль до градієнту внутрішньо пластового тиску $P(t,z)$.

Нехай у момент часу $t=0$ поверхня фронту витіснення є площина

$$F(z_i,t)=\Xi_0(t);\, i=1,2, \qquad (4)$$

де z_i – відповідають координатам у незбуреній площині фронту витискання.

Відомі [4] рівняння двофазної фільтрації з граничним градієнтом G, які описують процес фільтрації при відхиленні від закону Дарсі [3 – 5] – у відповідності до якого ненульовому градієнту пластового тиску відповідає ненульове значення швидкості фільтрації (тут і надалі індекс j позначає номер фази, тобто однієї з рідин, що фільтрується у двофазній системі)

$$\varpi_j=-\frac{k\lambda_j(S_j)}{\mu_j}\left[grad(P_j)-\frac{G_j}{|grad(P_j)|}grad(P_j)\right],$$

$$|grad(P_j)|>G_j,\ \varpi_j=0;\ |grad(P_j)|\le G_j;\ j=1,2, \qquad (5)$$

а також рівняння безперервності (випадок двох рідин, які фільтруються)

$$div(\varpi_j)-(-1)^j m\frac{\partial S_j}{\partial t}=0;\quad j=1,2, \qquad (6)$$

де ϖ_j – для кожної з рідин швидкість фільтрації, що зумовлена дією внутрішньо пластового тиску $P(t,z)$ (за законом Дарсі [3 – 5]); m – пористість середовища, у якому відбувається фільтрація.

Рівняння виду (5) та (6) при припущенні малості відхилень лінеарізуються. Граничні умови (ГУ) на збудженій поверхні фронту витіснення (4), що відображають рівняння тиску перед та за фронтом витіснення, а також витрати

$$\frac{\partial Q_1}{\partial\eta}=m\overline{\varpi}\left(S_1^h-S_1^f\right);\quad \frac{\partial Q_2}{\partial\eta}=m\overline{\varpi}\left(S_2^h-S_2^f\right),$$

визначено на не збудженій поверхні фронту витіснення Ξ_0. Для плавності границі розподілу визначимо обмеженість збуджень на поверхні Ξ_0. Тоді для визначення збуджень швидкостей, тиску та насиченості маємо наступні вирази (збудження відповідних значень позначені знаком тильда, а незбуджені значення позначені індексом 0)

$$\varpi_j=-\frac{k\lambda_j(S_j)}{\mu_j}J_0(S_j)\left[grad(\widetilde{P}_j)-\frac{G_j}{|grad(\widetilde{P}_j)|}grad(\widetilde{P}_j)\right];$$

$$|grad(\widetilde{P}_j)|>G_j,\ \varpi_j=0;\ |grad(\widetilde{P}_j)|\le G_j;\ j=1,2, \qquad (7)$$

з ГУ, які враховують збудження на поверхні фронту $F(z_i)=\Xi_0;\, i=1,2,\ j=1,2$

$$\frac{\partial\widetilde{P}(t,z_i)}{\partial\eta}>0,\ \frac{\partial\widetilde{P}_c(S)}{\partial\eta}>0 \quad (8) \qquad \frac{\partial\widetilde{Q}_j}{\partial\eta}=m\overline{\varpi}\left(S_j^h-S_j^f\right). \quad (9)$$

2. ***Формалізація задачі фронтального «поршневого» витіснення для багатокомпонентних сумішей у вигляді варіаційної нерівності***. Сформуємо ММ процесу «поршневого» витіснення. Запишемо для плаского випадку ($i=2$) рівняння динаміки виду (5) та (7) відповідно для компоненти, яка витискається (індекс 1 у змінних), та компоненти, яка витискає (індекс 2 у змінних), а також для проміжного агенту – «поршня» (індекс 3 у змінних) з урахуванням «стрибка» насиченості у функції Баклея-Леверетта (опускаючи для простоти запису параметри у функцій). Як і у випадку двокомпонентних сумішей, збуджуючими функціями будемо розглядати витрати (дебіти) у свердловинах Q_{j_d} ($d=\overline{1,D}$ D — число свердловин).

$$-\frac{m\partial S_1}{\partial t}-\frac{k_1\rho_1}{\mu_1}J(S_1)[1-S_1G_1]\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial z_i}\left[\frac{\partial P}{\partial z_i}-\frac{dP_c}{dS_1}\right]\right\}=$$
$$=\frac{1}{h}\sum_{d=1}^{D_1}\zeta_d Q_{j_d}, \qquad (10)$$

$$-\frac{m\partial S_2}{\partial t}-\frac{k_2\rho_2}{\mu_2}J(S_2)\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial z_i}\left[\frac{\partial P}{\partial z_i}-\frac{dP_c}{dS_2}\right]\right\}=$$
$$=\frac{1}{h}\sum_{d=1}^{D_2}\zeta_d Q_{j_d}, \qquad (11)$$

$$-\frac{m\partial S_3}{\partial t}-\frac{k_3\rho_3}{\mu_3}J(S_3)[1-S_3G_3]\times$$
$$\times\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial z_i}\left[\frac{\partial P}{\partial z_i}-\frac{dP_c}{dS_3}\right]\right\}=0. \qquad (12)$$

Початкові та граничні умови будуть мати вигляд ($l=\overline{1,3}$)

$$S_l(0,z)=S_{l_0}(z). \quad (13) \qquad \frac{\partial P}{\partial\eta}>0,\ \frac{\partial P_c(S_3)}{\partial\eta}>0. \quad (14)$$

Граничні умови (14) визначено тільки для границі Γ_{13}, яка цікава, а саме: «компонента, що витискається – проміжний агент», оскільки для неї прийнято умову стійкості фронтального витіснення (тобто, відсутність утворення «застійних зон»). При цьому просування «поршня» у вигляді проміжного агенту будемо фіксувати по «стрибку» насиченості $S_3(t,z)$ в функції Баклея-Леверетта. У виразах (10) – (14) h позначає потужність пласта [4 – 5], функція $\zeta_d=1$

тільки в точці, де розташовано відповідну свердловину (інакше $\zeta_d = 0$), а інші змінні, що входять у вирази (10) — (14), описано вище.

Перед подальшими розмірковуваннями зауважимо наступне. В фізичній системі: «рідина, яка витискається (нафта) – проміжний агент («поршень») – рідина, яка витискає (вода)», що описується системою (10) – (13), вода завжди є в'язкою рідиною (тобто ідеальною рідиною [3]), суть такою, що завжди підпорядковується лінійному закону Дарсі, і тому рівняння динаміки виду (11) для рідини, яка витискає (води), за будь якої якісної фізичної картини процесу взаємофільтрації не змінюється.

Іншими словами, для рідини, що витискає (води), не може бути застосовано закон фільтрації з граничним градієнтом (наприклад, виду (5)), а тому якісна картина процесу взаємофільтрації не змінює вигляд рівняння (11).

На відміну від цього, рідина, яка витісняється (нафта) та проміжний агент («поршень») можуть, в процесі взаємофільтрації, виявляти властивості в'язко-пластичності, тобто підпорядковуватися закону фільтрації з граничним градієнтом (вираз (5)). Це проявляється у порушенні лінійного закону Дарсі, коли ненульовому градієнту пластового тиску $\left|grad(P_j)\right| > 0$ відповідає нульову значення швидкості фільтрації $\varpi_j = 0$; $j = 1,2$ (така «картина» фільтрації може зберігатися скільки завгодно довго, поки не буде виконано умову $\left|grad(P_j)\right| > G_j$; $j = 1,2$). В'язко-пластичність, в даному випадку, може спричиняти, наприклад, складний фракційний склад нафти або піно подібність структури проміжного агента. Саме в'язко-пластичність, у кінцевому підсумку, і визначає «аномальність» рідин, що фільтруються.

Для нафти з низькою питомою вагою («легкої» нафти) та проміжного агента у вигляді колоїдних сумішей якісна «картина» процесу фільтрації може відповідати ідеальним рідинам [3], а ММ – відповідати системі (10) – (14). У подальшому, до випадку ідеальних рідин, звернемося при обговоренні обчислювальної реалізації відповідних ММ.

Як зазначалося, рідини, які фільтруються у багатокомпонентній системі, можуть проявляти аномальний характер. Адекватною формою урахування «аномальності» рідин, які фільтруються (тобто відхилення процесу фільтрації від лінійного закону Дарсі), є формалізація задачі у варіаційній формі [4; 10]. Тоді, для приведення задачі, що досліджується до варіаційної форми (у вигляді варіаційної нерівності) введемо до розгляду пробну функцію v, яка за фізичною природою аналогічна функціям насиченості $S_l(t,z)\left(l=\overline{1,3}\right)$, та визначену на множині K: $\forall v \in K, K = \{v \mid v \geq 0$ майже скрізь в $\Omega\}$. Скалярно помножимо (10) та (12) відповідно на $(v - S_1)$ та $(v - S_3)$. Далі, застосовуючи до перетворених таким чином виразів (10), (12) функцію Гріна [4], отримаємо

$$-\frac{m\partial S_1}{\partial t}(v-S_1)-\int_\Omega \frac{k_1\rho_1}{\mu_1}J(S_1)\Big\{[1-S_1G_1]\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2}\cdot\frac{\partial(v-S_1)}{\partial z_i}-\right.$$
$$\left.-\frac{dP_c}{dS_1}\cdot\frac{\partial S_1}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial(v-S_1)}{\partial z_i}\right]\Big\}dz=\frac{1}{h}\sum_{d=1}^{D_1}\zeta_d Q_{j_d}+$$
$$+\int_\Gamma\left[\frac{\partial S_1}{\partial \eta}\cdot(v-S_1)\right]d\Gamma,\quad \forall v,\, S_1\in K, \qquad (15)$$

$$-\frac{m\partial S_3}{\partial t}(v-S_3)-\int_\Omega \frac{k_3\rho_3}{\mu_3}J(S_3)\Big\{[1-S_3G_3]\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2}\cdot\frac{\partial(v-S_3)}{\partial z_i}-\right.$$
$$\left.-\frac{dP_c}{dS_3}\cdot\frac{\partial S_3}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial(v-S_3)}{\partial z_i}\right]\Big\}dz=$$
$$=\int_\Gamma\left[\frac{\partial S_3}{\partial \eta}\cdot(v-S_3)\right]d\Gamma,\quad \forall v,\, S_3\in K. \qquad (16)$$

Виконуючи у (15), (16) заміну змінної v на $(-v)$ [4; 10] запишемо нову систему, беручи до уваги рівняння (11) для компоненти, яка витискає

$$-\frac{m\partial S_1}{\partial t}(v-S_1)-\int_\Omega \frac{k_1\rho_1}{\mu_1}J(S_1)\times$$
$$\times\left\{[1-S_1G_1]\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{dP_c}{dS_1}\cdot\frac{\partial S_1}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial(v-S_1)}{\partial z_i}\right]dz\right\}+\int_\Omega \frac{k_1\rho_1}{\mu_1}J(S_1)\times$$
$$\times\left\{[1-S_1G_1]\cdot\left[\frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2}|v|\right]\right\}dz-\int_\Omega \frac{k_1\rho_1}{\mu_1}J(S_1)\times$$
$$\times\left\{[1-S_1G_1]\cdot\left[\frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2}|S_1|\right]\right\}\geq\frac{1}{h}\sum_{d=1}^{D_1}\zeta_d\, Q_{1_d}$$
$$\forall v,\, S_1\in K\quad \forall z\in\Omega_1\bigcup\Omega_3,\quad \Gamma_{13}\in\Omega_1\bigcap\Omega_3, \qquad (17)$$

$$-\frac{m\partial S_2}{\partial t}-\frac{k_2\rho_2}{\mu_2}J(S_2)\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial z_i}\left[\frac{\partial P}{\partial z_i}-\frac{dP_c}{dS_2}\right]\right\}=\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{D_2}\zeta_d\, Q_{2_d}$$
$$\forall z\in\Omega_2, \qquad (18)$$

$$-\frac{m\partial S_3}{\partial t}(v-S_3)-\int_\Omega \frac{k_3\rho_3}{\mu_3}J(S_3)\times$$
$$\times\left\{[1-S_3G_3]\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{dP_c}{dS_3}\cdot\frac{\partial S_3}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial(v-S_3)}{\partial z_i}\right]dz\right\}+\int_\Omega \frac{k_3\rho_3}{\mu_3}J(S_3)\times$$
$$\times\left\{[1-S_3G_3]\cdot\left[\frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2}|v|\right]\right\}dz-\int_\Omega \frac{k_3\rho_3}{\mu_3}J(S_3)\times$$
$$\times\left\{[1-S_3G_3]\cdot\left[\frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2}|S_3|\right]\right\}dz\geq 0$$
$$\forall v,\, S_3\in K,\quad \forall z\in\Omega_2\bigcup\Omega_3,\quad \Gamma_{32}\in\Omega_3\bigcap\Omega_2. \qquad (19)$$

Вирази (17) – (19) доповнюються початковими (13) та граничними (14) умовами. Таким чином, (17) – (19), (13), (14) являє собою ММ «поршневого» витіснення для багатокомпонентної системи.

На кожній з границь «компонента, що витискається – проміжний агент» Γ_{13} та «проміжний агент — компонента, що витискає» [8 – 9; 11 –13] Γ_{32} мають виконуватися відповідно очевидні умови $S_1 = (1\text{-}S_3)$ та $S_2 = (1\text{-}S_3)$. Беручі до уваги дані співвідношення вирази (17) – (19) зводяться до наступного виду

$$-\frac{m\partial S_3}{\partial t}(v-S_3)-\int_\Omega \frac{k_1\rho_1}{\mu_1}J(S_3)\times$$
$$\times\left\{S_3G_1\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{dP_c}{dS_3}\cdot\frac{\partial S_3}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial(v-S_3)}{\partial z_i}\right]dz\right\}+\int_\Omega \frac{k_1\rho_1}{\mu_1}J(S_3)\times$$
$$\times\left\{S_3G_1\cdot\left[\frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2}|v|\right]\right\}dz-\int_\Omega \frac{k_1\rho_1}{\mu_1}J(S_3)\left\{S_3G_1\cdot\left[\frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2}|S_3|\right]\right\}dz\geq$$
$$\geq\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{D_1}\zeta_d Q_{j_d}$$
$$\forall v,\, S_1\in K\,,\quad \forall z\in\Omega_1\bigcup\Omega_3\,,\quad \Gamma_{13}\in\Omega_1\bigcap\Omega_3\,, \qquad (20)$$
$$-\frac{m\partial S_3}{\partial t}-\frac{k_2\rho_2}{\mu_2}J(S_3)\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial z_i}\left[\frac{\partial P}{\partial z_i}-\frac{dP_c}{dS_3}\right]\right\}=\frac{1}{h}\sum_{d=1}^{D_2}\zeta_d Q_{j_d}$$
$$\forall z\in\Omega_2\,, \qquad (21)$$
$$-\frac{m\partial S_3}{\partial t}(v-S_3)-\int_\Omega \frac{k_3\rho_3}{\mu_3}J(S_3)\times$$
$$\times\left\{[1-S_3G_3]\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{dP_c}{dS_3}\cdot\frac{\partial S_3}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial(v-S_3)}{\partial z_i}\right]dz\right\}+\int_\Omega \frac{k_3\rho_3}{\mu_3}J(S_3)\times$$
$$\times\left\{[1-S_3G_3]\cdot\left[\frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2}|v|\right]\right\}dz-\int_\Omega \frac{k_3\rho_3}{\mu_3}J(S_3)\times$$
$$\times\left\{[1-S_3G_3]\cdot\left[\frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2}|S_3|\right]\right\}dz\geq 0$$
$$\forall v,\, S_3\in K\,,\quad \forall z\in\Omega_3\bigcup\Omega_2\,,\quad \Gamma_{32}\in\Omega_3\bigcap\Omega_2\,. \qquad (22)$$

Математична модель виду (20) – (22), на відміну від ММ виду (17) – (19), для обчислювальної реалізації якої (тобто відшукання внутрішньо пластового тиску $P(t,z)$ та функцій насиченості $S_1(t, z)$, $l=\overline{1,3}$) необхідно спільно розв'язувати систему з двох нерівностей (17), (19) та рівняння (18), допускає незалежний розв'язок для кожної з границь Γ_{13} або Γ_{32} (тобто з системи (20), (21) або системи (21), (22)), оскільки модель виду (20) – (22) складено тільки відносно однієї функції насиченості $S_3(t, z)$. Остання обставина значно спрощує обчислювальну реалізацію ММ виду (20) – (22). Крім того, чисельні схеми розв'язання системи (17) – (19) зводяться [5; 14 – 15] до складання блочних матриць коефіцієнтів, дискретних шуканих функцій внутрішньо пластового тиску та насиченостей, а також збуджуючих впливів (дебітів свердловин), що потребує значних обчислювальних витрат. При чисельній реалізації системи (20), (21) або системи (21), (22) можна використати схему послідовного розв'язання дискретної задачі [4 – 5] для дискретних шуканих функцій внутрішньо пластового тиску $P_{n,r}^m$ та насиченості $S_{3_{n,r}}^m$ ($m=M/\Delta t$; $n=N/\Delta z_1$; $r=R/\Delta z_2$, де Δt, ΔZ_1 та ΔZ_2 – відповідно кроки за часовою та просторовими координатами), що, за оцінками обчислювальних експериментів [13], знижує запити на обчислювальні ресурси (запити пам'яті) до 30 %.

Висновок. Запропоновано ММ задачі «поршневого» витіснення при фільтраційному русі рідин, що не змішуються, для випадків як ідеальних рідин, так і аномальних рідин. Показано можливість спрощення обчислювальної реалізації початкової задачі шляхом зведення останньої до двох більш простих задач — у вигляді систем з однієї варіаційної нерівності та одного рівняння, які можна розв'язувати послідовно і незалежно однієї від іншої.

Список використаної літератури

1. Tretheway D., Stone S., and Meinhart C., (2004), Effects of Absolute Pressure and Dissolved Gases on Apparent Fluid Slip in Hydrophobic Microchannels, *Bulleten of American Physical Society,* Vol. 49, pp. 215 – 223.

2. Derek C.; Tretheway D.C., and Mainhart C.D., (2012), Apparent Fluid Slip at Hydrophobic Micro Channel walls, *Physics of Fluids*, Vol. 14, pp. 119 – 126.

3. Бернадинер М. Г. Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей / М. Г. Бернадинер, В. М. Ентов. – М. : Наука, 1975. – 199 с.

4. Верлань А. Ф. Математическое моделирование аномальных диффузионных процессов / А. Ф. Верлань, С. А. Положаенко, Н. Г. Сербов. — К. : Наукова думка, 2011. – 416 с.

5. Азиз Х. Математическое моделирование пластовых систем / Х. Азиз, Э. Сеттари. – М. : – Ижевск : Ин-т компьютерных исследований, 2004. – 406 с.

6. Леонтьев Н. Е. Основы теории фильтрации / Н. Е. Леонтьев. – М. : Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2009. – 88 с.

7. Басниев К. С. Нефтегазовая гидродинамика: учебн. пособие для ВУЗов / К. С. Басниев, Н. М. Дмитриев, Г. Д. Розенберг. – М. : – Ижевск : Ин-т компьютерных исследований, 2005. – 544 с.

8. Положаенко С. А. Математическая модель процесса вытеснения в многокомпонентной системе с промежуточным «агентом» / С. А. Положаенко, Н. А. Лысенко // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки: зб. наук. Праць. Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАНУ, Кам'янець-Подільський націон. ун-т ім. Івана Огієнка. – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський нац. ун-т ім. Івана Огієнка. – 2014. – Вип. 11. – С. 134 – 140.

9. Положаенко С. А. Математическая модель «поршневого» вытеснения несмешивающихся жидкостей при фильтрации в пористой среде / С. А. Положаенко, Н. А. Лысенко // Problemele Energeticii Egionale. – 2014. – № 3 (26). – Термоэнергетика. – С. 60 – 67.

10. Polozhaenko S.A., and Babiyzcuk O.B., (2014), Representation of Mathematical Models of Nonlinear Unilateral Technological Processes in the form of Variation Inequalities and Optimization Method for Numerical Implementation, *Electrotechnic and Computer Systems,* No. 16 (92), pp. 109 – 114.

11. Положаенко С. А. Математическая модель «поршневого» вытеснения в пластовых системах / С. А. Положаенко, Н. А. Лысенко // Праці V Міжнародної науково-практичної конференції «Обробка сигналів і негаусівських процесів»,20-22 травня 2015 р., Черкаси : – С. 193 – 195.

12. Лысенко Н. А. Математическая модель процесса фильтрации в мнококомпонентной системе с промежуточным «агентом» / Н. А. Лысенко, В. С. Савич// Матеріали п'ятої міжнародної конференції студентів і молодих науковців «Сучасні інформаційні технології 2015», 21-22 квітня 2015 р., Одеса : ВМВ. – С. 78 – 79.

13. Лысенко Н. А. Математическое моделирование процесса фильтрации в многокомпонентной системе с промежуточным «агентом» / Н. А. Лысенко // Материалы шестнадцатой международной научно-практической конференции «Современные информационные и электронные технологии», 25-29 мая 2015 г., Одесса, ТКЕА. – С. 68 – 73.

14. Васильев В. И. Вычислительные методы в разработке месторождений нефти и газа / В. И. Васильев, В. В. Попов, В. С. Тимофеева. – Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2010. – 126 с.

15. Васильев В. И. Численное моделирование процессов разработки углеводородного сырья // Наука и образование. – 2008. – Вып. 3. – С. 57 – 63.

Отримано 30.05.2015

References

1. Tretheway D., Stone S., and Meinhart C., (2004), Effects of Absolute Pressure and Dissolved Gases on Apparent Fluid Slip in Hydrophobic Micro channels, *Bulleten of American Physical Society,* Vol. 49, pp. 215 – 223.

2. Derek C.; Tretheway, D.C., and Mainhart C.D., (2012): Apparent Fluid Slip at Hydrophobic Micro channel walls, *Physics of Fluids*, Vol. 14, pp. 119 – 126.

3. Bernadiner M.G., and Entov V.M., Gidrodinamicheskaya teoriya fil'tratsii anomal'nykh zhidkostei [Hydrodynamic theory of Filtration of Anomalous Liquids], (1975), Moscow, Russian Federation, *Nauka*, 199 p. (In Russian).

4. Verlan A.F., Polozhaenko S.A., and Serbov N.G., Matematicheskoe modelirovanie anomal'nykh diffuzionnykh protsessov [Mathematical Modeling of Anomalous Diffusion Processes], (2011), Kiev, Ukraine, *Naukova Dumka*, 416 p (In Russian).

5. Aziz H., and Setari E. Matematicheskoe modelirovanie plastovykh sistem [Mathematical Modeling of Reservoir Systems], (2004), Moscow-Izhevsk, Russian Federation, *Institute of Computer Studies,* 406 p. (In Russian).

6. Leont'ev N. E. Osnovy teorii fil'tratsii [Fundamentals of the theory of Filtration], (2009), Moscow, Russian Federation, *Publishing House of the CEM at the Mechanics and Mathematics Faculty of Moscow State University*, 88 p. (In Russian).

7. Basniev K.S., Dmitriev N.M., and Rosenberg G. D. [Oil and Gas Hydrodynamics: Training. Manual for Schools], (2005), Moscow-Izhevsk, Russian Federation, *Institute of Computer Studies,* 544 p. (In Russian).

8. Polozhaenko S.A., and Lysenko N.A. Matematicheskaya model' protsessa vytesneniya v mnogokomponentnoi sisteme s promezhutochnym «agentom» [Mathematical Model of the Displacement Process in a Multicomponent System with Intermediate "agent"], (2014), *Mathematical and Computer Modeling. Series: Technical Sciences: Coll. Sciences, Publications. Institute of Cybernetics. V.M. Glushkov NAS, Kamenetz-Podolsk National. Univ. Ivan Ohienko,* Kamyanets-Podilskyi, Ukraine, *Kamyanets-Podilsky National. Univ. Ivan Ohienko*, Vol. 11, pp. 134 – 140.

9. Polozhaenko S.A., and Lysenko N.A. Matematicheskaya model' "porshnevogo" vytesneniya nesmeshivayushchikhsya zhidkostei pri fil'tratsii v poristoi srede [Mathematical Model of the "Piston" Immiscible Liquid-scribed in Filtration in Porous Media], (2014), *Problems of the Regional Energetic*, No. 3(26), *Termoenergetika,* pp. 60 – 67.

10. Polozhaenko S.A., and Babiyzcuk O.B., (2014), Representation of Mathematical Models of Nonlinear Unilateral Technological Processes in the form of Variation Inequalities and Optimization Method for Numerical Implementation, *Electrotechnic and Computer Systems,* No. 16 (92), pp. 109 – 114.

11. Polozhaenko S.A., and Lysenko N.A. Matematicheskaya model' "porshnevogo" vytesneniya v plastovykh sistemakh [A Mathematical Model of the "Piston" Displacement in Reservoir Systems], (2015), *Proceedings of V International Scientific-practical Conference "Signal Processing and Negassa Processes", 20-22 may 2015*, Cherkassy, Ukraine, pp. 193 – 195.

12. Lysenko N.A., and Savich V.S. Matematicheskaya model' protsessa fil'tratsii v mnokokomponentnoi sisteme s promezhutochnym "agentom" [A Mathematical Model of the Filtration Process in Mnogokomponentnoi System with an Intermediate "Agent"], (2015), *Materials of the Fifth International Conference of Students and Young Scientists "Modern Information Technologies 2015", 21-22 April 2015,* Odessa, Ukraine, *WWII,* pp. 78 – 79.

13. Lysenko N.A. Matematicheskoe modelirovanie protsessa fil'tratsii v mnogokomponentnoi sisteme s promezhutochnym "agentom" [Mathematical Modeling of the Filtration Process in a Multicomponent System with Intermediate "agent"], (2015), *Proceedings of the Sixteenth International Scientific and Practical Conference "Modern Information and Electronic Technologies",* 25 – 29 may 2015, Odessa, Ukraine, *TCEA*, pp. 68 – 73.

14. Vasiliev V.I., Popov V.V., and Timofeev V.S. Vychislitel'nye metody v razrabotke mestorozhdenii nefti i gaza [Computational Methods in Petroleum Engineering oil and gas], (2010), Novosibirsk, Russian Federation, *Publishing House of SB RAS*, 126 p. (In Russian).

15. Vasiliev V.I. Chislennoe modelirovanie protsessov razrabotki uglevodorodnogo syr'ya [Numerical Simulation of the Processes of Development of Hydrocarbon Raw Materials], (2008), *Science and Education*, Vol. 3, pp. 57 –63.

Положаєнко
Сергій Анатолійович, д.т.н., проф., зав. каф. комп'ютеризованих систем управління Одеського нац. політехнічного ун-ту, пр. Шевченка, 1, м. Одеса, Україна, тел.: (0482) 705-84-36.
E-mail: polozhaenko@mail.ru

Лисенко
Наталя Олексіївна, мол. наук. співробітник каф. комп'ютеризованих систем управління Одеського нац. політехнічного ун-ту, пр. Шевченка, 1, м. Одеса, Україна, тел.: (0482) 705-84-36.
E-mail: rosenrotta@gmail.com