Міністерство освіти та науки України

Національний університет «Одеська політехніка»

М.О. Голофєєва

О.С. Левинський

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ З ДИСЦИПЛІНИ

**«*Опрацювання результатів вимірювань»***

для студентів спеціальності 175

Одеса 2024

Міністерство освіти та науки України

Національний університет «Одеська політехніка»

М.О. Голофєєва

О.С. Левинський

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ З ДИСЦИПЛІНИ

**«*Опрацювання результатів вимірювань»***

для студентів спеціальності 175

Одеса 2024

Конспект лекцій з дисципліни «Опрацювання результатів вимірювань» для студентів спеціальності 175 Інформаційно-вимірювальні технології очної форми навчання/ Укл.: М.О. Голофєєва, О.С, Левинський – Одеса: Одеська політехніка, 2024. – 84 c.

Укладачі: М.О. Голофєєва, доц.

О.С. Левинський , ст. викл.

Конспект лекцій містить відомості з теорії оцінювання похибок вимірювань з багаторазовими спостереженнями і практичні рекомендації щодо застосування методів обробки результатів вимірювань. Наведено відомості з теоретичних основ вимірювань, методів обробки опосередкованих, сумісних та сукупних вимірювань, а так само містить математичні методи планування і аналізу вимірювального експерименту. Містить приклади виконання основних етапів обробки вимірювань. Для студентів спеціальності 175 «Інформаційно-вимірювальні технології». Може бути використано аспірантами та інженерами при обробці експериментальних даних.

ЗМІСТ

[ВСТУП 5](#_Toc463263995)

[*Лекція 1* ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ПОХИБОК ВИМІРЮВАНЬ 6](#_Toc463263996)

[*Лекція 2* КЛАСИФІКАЦІЯ ПОХИБОК ВИМІРЮВАННЯ. ПОХИБКА РЕЗУЛЬТАТУ ВИМІРЮВАННЯ 9](#_Toc463263997)

[*Лекція 3* КЛАСИФІКАЦІЯ ПОХИБОК ВИМІРЮВАННЯ. ІНСТРУМЕНТАЛЬНІ ПОХИБКИ 14](#_Toc463263998)

[***Лекція 4***ЗАГАЛЬНА ПОСЛІДОВНІСТЬ ВИКОНАННЯ ОБРОБКИ РЕЗУЛЬТАТІВ СПОСТЕРЕЖЕНЬ 18](#_Toc463263999)

[***Лекція 5***МЕТОДИ ВИКЛЮЧЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ З ГРУБИМИ ПОХИБКАМИ. 25](#_Toc463264000)

[***Лекція 8***ВИКЛЮЧЕННЯ СИСТЕМАТИЧНИХ ПОХИБОК ВИМІРЮВАННЯ. КРИТЕРІЙ ІРВІНА, КРИТЕРІЙ РОМАНОВСЬКОГО, КРИТЕРІЙ ВАРИАЦІЙНОГО РОЗМАХУ, КРИТЕРІЙ ДІКСОНА. 29](#_Toc463264001)

[***Лекція 8***СТАТИСТИЧНА ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ СПОСТЕРЕЖЕНЬ ПРИ РІВНОТОЧНИХ ВИМІРЮВАННЯХ. 35](#_Toc463264002)

[*Лекція 9* СТАТИСТИЧНА ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ СПОСТЕРЕЖЕНЬ ПРИ НЕРІВНОТОЧНИХ ВИМІРЮВАННЯХ 39](#_Toc463264003)

[*Лекція 10* ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ЗАКОНУ РОЗПОДІЛУ СПОСТЕРЕЖЕНЬ ЗА СТАТИСТИЧНИМИ КРИТЕРІЯМИ. 43](#_Toc463264004)

[*Лекція 11* ПРИБЛИЗНА ІДЕНТИФІКАЦІЯ ФОРМИ ТА ВИДУ ЗАКОНУ РОЗПОДІЛУ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ. 50](#_Toc463264005)

[*Лекція 12* ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ПРЯМИХ ОДНОКРАТНИХ ТА ОПОСЕРЕДКОВАНИХ ВИМІРЮВАНЬ. 53](#_Toc463264006)

[*Лекція 13* ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ СУМІСНИХ ВИМІРЮВАНЬ. 60](#_Toc463264007)

[***Лекція 14*** ПРЕДСТАВЛЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ 64](#_Toc463264008)

[***Лекція 15*** МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ПЛАНУВАННЯ ТА АНАЛІЗУ АКТИВНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ 70](#_Toc463264009)

[ДОДАТОК А 73](#_Toc463264010)

[СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ 75](#_Toc463264011)

# ВСТУП

Вимірювання не є самоціллю, а мають певну область використання, тобто проводяться для досягнення деякого кінцевого результату відповідно до поставлених завдань. Залежно від призначення вимірювань (для контролю параметрів продукції, для випробувань зразків продукції з метою встановлення її технічного рівня, для діагностики технічного стану машин і фізіологічного рівня біологічних об'єктів, для наукових досліджень, для обліку матеріальних та енергетичних ресурсів та ін.) кінцевий результат в тому, чи іншому вигляді відображає необхідну інформацію про кількісні властивості об'єктів, явищ і процесів (в тому числі, технологічних). Причому така інформація може бути отримана шляхом вимірювання, в процесі випробування або контролю. Основним об'єктом вимірювання є фізичні величини - властивості фізичного об'єкта (фізичної системи, явища або процесу), загальні в якісному відношенні для багатьох фізичних об'єктів, але в кількісному відношенні індивідуальні для кожного з них.

Висока точність вимірювання і достовірність наукових результатів має велике значення, як в інженерній, так і наукової діяльності. На практиці існує кілька способів підвищення точності вимірювань:

* збільшення точності засобів вимірювальної техніки (ЗВТ),
* вдосконалення методів вимірювань,
* збільшення числа повторних вимірів.

Проведення багаторазових вимірювань однієї і тієї ж величини можуть бути необхідні при атестації та повірці засобів вимірювальної техніки, вимірювальних каналів, інформаційних вимірювальних систем, при контролі технологічних процесів, при випробуваннях виробів, при необхідності проведення експериментального статистичного опису змінних величин, а також в науково-дослідних роботах.

# *Лекція 1* ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ПОХИБОК ВИМІРЮВАНЬ

***Питання, що розглядаються***

1. *Загальні відомості, терміни та поняття*

*.*

* 1. **Загальні відомості**

Під вимірюваною фізичною величиною розуміють фізичну величину, що підлягає вимірюванню, вимірювану або виміряну відповідно до основної мети вимірювального завдання. Безпосередньою метою вимірювань є визначення істинних значень постійної або змінної вимірюваної величини. Результатом як одноразових, так і багаторазових вимірювань є реалізація випадкової величини, яка дорівнює сумі істинного значення вимірюваної величини і похибки вимірювань. Вимірювання можна вважати закінченим, якщо повністю визначено не тільки значення вимірюваної величини, але і можливий ступінь його відхилення від істинного значення.

Під ***похибкою*** результату вимірювання розуміють відхилення результату вимірювання від істинного (дійсного) значення вимірюваної величини. Істинне значення вимірюваної величини невідомо, його використовують тільки в теоретичних дослідженнях. Це модельне значення, яке характеризує ідеальним чином в кількісному і якісному відношенні властивість об'єкта (процесу). На практиці використовують дійсне значення величини *X*д, під яким розуміють значення фізичної величини, отримане експериментальним шляхом і настільки близьке до істинного значення, що в поставленій вимірювальній задачі може бути використано замість нього.

Похибка вимірювання Δ*Х* визначається за формулою:

 , (1.1)

де *Х*вим – виміряне значення фізичної величини;

*Х*д- дійсне значення фізичної величини.

Якщо пряме вимірювання проведено один раз (так звані, одноразові прямі вимірювання), то результатом вимірювання є показання ЗВТ. При цьому за похибку результату вимірювання часто приймається похибка ЗВТ, хоча це лише одна зі складових похибок. В свою чергу, похибка ЗВТ - різниця між показаннями ЗВТ і дійсним значенням вимірюваної фізичної величиною. За окремими джерелами похибка ЗВТ може складати від 50 до 70% від похибки результату вимірювання. В разі багаторазових спостережень результат вимірювання і його похибка знаходяться методом статистичної обробки виконаних спостережень.

За результат вимірювання приймається середнє арифметичне значення результатів спостережень (або їх інший функціонал - в разі, якщо результати спостережень не належать нормальному закону розподілу), а похибка характеризує це середнє (функціонал).

Як одна з основних характеристик вимірювання, похибка повинна бути обов'язково оцінена. Для різних видів вимірювань проблема оцінки похибки може вирішуватися по-різному. Похибка результату вимірювань можна оцінити з різною точністю, на підставі різної вихідної інформації. Розрізняють вимірювання з точною, наближеною і попередньої оцінкою похибок. При вимірюваннях з точною оцінкою похибки враховуються індивідуальні метрологічні властивості і характеристики кожного з застосованих ЗВТ, аналізується метод вимірювань з метою врахування їх впливу на результат вимірювання. Якщо вимірювання ведуться з наближеною оцінкою похибки, то враховують лише нормативні метрологічні характеристики ЗВТ і оцінюють вплив на їх результат тільки відхилення умов вимірювання від нормальних.

У вітчизняній метрології точність (якісна характеристика) і похибка (кількісна характеристика) результатів вимірювань, як правило, визначаються порівнянням результату вимірювань з істинним або дійсним (умовно істинним) значенням вимірюваної фізичної величини (є фактично еталонними значеннями вимірюваних величин, виражених в узаконених одиницях). Якщо відсутні необхідні еталони, що забезпечують відтворення, зберігання і передачу відповідних значень одиниць величин, необхідних для оцінки похибки (точності) результатів вимірювань, і у вітчизняній, і в міжнародній практиці за дійсне значення найчастіше приймають загальне середнє значення (математичне очікування) встановленої сукупності результатів вимірювань, так зване "прийняте опорне значення", тобто значення, що служить в якості узгодженого для порівняння з виміряним значенням. Воно може бути отримано як:

а) теоретичне або встановлене значення, що базується на наукових принципах;

б) приписане або атестоване значення, що базується на експериментальних роботах будь-якої національної або міжнародної організації;

в) узгоджене або атестоване значення, що базується на спільних експериментальних роботах під керівництвом наукової або інженерної групи;

г) математичне сподівання вимірюваної характеристики, тобто середнє значення заданої сукупності результатів вимірювань (лише в тих випадках, коли отримати його перерахованими вище способами неможливо, або вони недоступні).

Під ***точністю*** слід розуміти ступінь близькості результату вимірювань до прийнятого опорного значенням.

***Правильність*** - ступінь близькості результату вимірювань до істинного або умовно істинного (дійсного) значення вимірюваної величини або в випадку відсутності еталона вимірюваної величини - ступінь близькості середнього значення, отриманого на підставі великої серії результатів вимірювань (або результатів випробувань), до прийнятого опорного значенням. Показником правильності зазвичай є значення систематичної похибки.

***Прецизійність*** - ступінь близькості незалежних результатів вимірювань, отриманих в конкретних встановлених умовах, один до одного. При цьому під "незалежними результатами вимірювань" розуміють результати, отримані способом, на який не впливає ніякий попередній результат, отриманий при випробуваннях того ж самого або подібного об'єкта. Прецизійність залежить тільки від випадкових чинників і не пов'язана з істинним або умовно істинним значенням вимірюваної величини. Міру прецизійності зазвичай висловлюють в термінах неточності, вона обчислюється як стандартне (середньоквадратичне) відхилення результатів вимірювань, виконаних в певних умов. Кількісні значення заходів прецизійності істотно залежать від заданих умов. Екстремальні показники прецизійності - повторюваність, збіжність і відтворюваність регламентують і в вітчизняних НД.

Тобто термін «точність» виражає сумарне відхилення результату від еталонного (опорного) значення, яке викликане як випадковими, так і систематичними причинами.

***Збіжність*** результатів вимірювань характеризує близькість один до одного результатів вимірювань однієї і тієї ж величини, виконаних повторно одними і тими ж засобами, одним і тим же методом в однакових умовах і з однаковою ретельністю. Збіжність вимірювань двох груп багаторазових вимірювань може характеризуватися розмахом, середньоквадратичною або середньо арифметичною похибкою.

Під ***відтворюваністю*** результатів вимірювань слід розуміти близькість один до одного результатів вимірювань однієї і тієї ж величини, отриманих в різних місцях, різними методами, різними засобами, різними операторами, в різний час, але приведених до одних і тих самих умовам вимірювань (температури, тиску, вологості та ін.). Відтворюваність вимірювань може так само характеризуватися середніми квадратичними похибками порівнюваних рядів вимірювань. Причому, ряд результатів вимірювань це значення однієї і тієї ж величини, послідовно отримані з наступних один за одним вимірювань.

Під ***достовірністю*** вимірювань слід розуміти ступінь довіри до одержуваного результату вимірювань. Вони, в свою чергу, визначаються межами, в яких очікується отримання результату вимірювання.

***Єдність вимірювань*** є важливою складовою характеристикою якості вимірювань. Такий стан вимірювань характеризується тим, що їх результати виражені в узаконених одиницях, розміри яких в встановлених межах рівні розмірам одиниць, відтворюваних первинними еталонами, а похибки результатів вимірювань відомі та із заданою ймовірністю не виходять за встановлені межі.

# *Лекція 2* КЛАСИФІКАЦІЯ ПОХИБОК ВИМІРЮВАННЯ. ПОХИБКА РЕЗУЛЬТАТУ ВИМІРЮВАННЯ

***Питання, що розглядаються***

*Класифікація похибок вимірювання. Похибка результату вимірювання*

Перш ніж приводити загальну класифікацію похибок слід відзначити, що різним за призначенням вимірювальним процедурам властиві свої складові похибки і причини їх виникнення.

Похибка результату вимірювання виникає:

а) при відтворенні розміру одиниці фізичної величини (в силу того, що створення абсолютно точних еталонів технічно неможливе);

б) при передачі розміру одиниці фізичної величини (до основних процедур передачі розміру відносять повірку, калібрування, атестацію);

в) при атестації (через недосконалість атестаційного обладнання, методик виконання вимірювань та ін.);

г) при перевірці ЗВТ (через недосконалість методів повірки та ін.);

д) під час градуювання (через недосконалість способів нанесення шкал, помилок при побудові градуювальних кривих і т. д.);

е) при робочих вимірюваннях (виконуваних робітниками ЗВТ в лабораторних, польових або інших умовах);

ж) при статистичній обробці результатів вимірювань.

За метрологічним призначенням вимірювання ділять на еталонні та робочі.

Еталонні вимірювання виконуються із застосуванням еталонів. Еталон - це ЗВТ (або комплекс ЗВТ), призначене для відтворення і (або) зберігання одиниці фізичної величини. Конструкція еталона, його властивості та спосіб відтворення одиниці визначаються природою даної фізичної величини і рівнем розвитку вимірювальної техніки в даній галузі вимірювань.

Робочі вимірювання мають місце в повсякденній вимірювальній практиці визначення значення вимірюваної фізичної величини і не пов'язані з передачею розміру її одиниці. До робочих відносять і технічні вимірювання – вимірювання параметрів технологічних процесів, показників готової продукції, устаткування і інших параметрів, непов'язаних з передачею розміру одиниці величини.

Розглянемо класифікацію похибок результату вимірювання.

За формою кількісного вираження похибки вимірювання діляться на абсолютні та відносні.

***Абсолютною похибкою*** (Δ), яка виражається в одиницях вимірюваної величини, називається відхилення результату вимірювання від істинного (дійсного) значення вимірюваної величини. Таким чином, формула (1.1) може бути застосовна для кількісної оцінки абсолютної похибки. Абсолютна похибка характеризує величину і знак отриманої похибки, але не визначає якість самого проведеного вимірювання. Поняття похибки характеризує недосконалість вимірювання. Характеристикою якості вимірювання, яка використовується в метрології, є поняття точності вимірювань, що відображає міру близькості результатів вимірювань до істинного значення вимірюваної фізичної величини. Точність і похибка пов'язані між собою зворотною залежністю. Інакше кажучи, високій точності вимірювань відповідає мала похибка. Тому, щоб мати можливість порівняти якість вимірювань, введено поняття відносної похибки.

***Відносною похибкою*** (δ) називається відношення абсолютної похибки вимірювання до виміряного значення вимірюваної величини. Вона обчислюється за формулою:

. (2.1)

Мірою точності служить величина, обернена до модуля відносної похибки, тобто .

Якщо вимірювання виконано одноразово і за абсолютну похибку результату вимірювання Δ*Х* прийнята різниця між показанням приладу і істинним значенням прийнятої величини *Xі*, то значення відносної похибки δ зменшується з ростом *Xі* величини. Тому для вимірювань доцільно вибирати такий прилад, показання якого були б в останній частині його шкали (діапазону вимірювань), а для порівняння різних приладів використовувати поняття зведеної похибки, яка розраховується за формулою:

, (2.2)

де *Х*норм – нормоване число, що дорівнює діапазону вимірювання, або верхній його межі.

Таким чином, вираз похибки в зведеній формі використовується для кількісної оцінки складової похибки вимірювання, обумовленої інструментальною похибкою.

За характером зміни похибки вимірювань поділяються на систематичні і випадкові. До числа випадкових відносять і грубі похибки.

***Систематичні похибки*** – складові похибки вимірювань, що залишаються постійними або закономірно змінюються при багаторазових (повторних) вимірюваннях однієї і тієї ж величини в одних і тих же умовах. З усіх видів похибок, саме систематичні, є найбільш небезпечними і важко переборні. Це можна пояснити по ряду причин. По-перше, вона постійно спотворює дійсне значення отриманого результату вимірювання в бік його збільшення або зменшення. Причому, заздалегідь напрямок такого спотворення важко визначити. По-друге, величина систематичної похибки не може бути знайдена методами математичної обробки отриманих результатів вимірювання. Вона не може бути зменшена при багаторазовому вимірюванні одними і тими ж вимірювальними засобами. По-третє, вона може бути постійна, може монотонно змінюватися, вона може змінюватися періодично, але за отриманими результатами вимірювання закон її зміни важко, а іноді й неможливо визначити. По-четверте, на результат вимірювань впливають кілька факторів, кожен з яких викликає свою систематичну похибку в залежності від умов вимірювання. Причому, кожен новий метод вимірювання може дати свої, заздалегідь невідомі систематичні похибки і треба шукати прийоми і способи виключення впливу цієї систематичної похибки в процесі вимірювання. Твердження про відсутність систематичної похибки або, що вона зневажливо мала – все це треба не просто показати, а й довести. Такі похибки можуть бути виявлені тільки шляхом детального аналізу можливих їх джерел і зменшені (застосуванням більш точних приладів, калібруванням приладів за допомогою робочих заходів та ін.).

Не слід забувати, що невиявлені систематичні похибки "небезпечніше" випадкової. Якщо випадкові похибки характеризують розкид величини вимірюваного параметра щодо його дійсного значення, то систематична похибка стійко спотворює безпосередньо величину вимірюваного параметра, і тим самим "віддаляє" його від істинного значення.

Іноді для виявлення систематичної похибки доводиться проводити трудомісткі і довготривалі експерименти і внаслідок виявиться, що систематична похибка була зневажливо мала. Це дуже цінний результат. Він показує, що дана методика вимірювання дає точні результати за рахунок виключення систематичної похибки. Однак в реальних умовах повністю виключити систематичну складову похибки неможливо. Завжди залишаються якісь не виключені залишки, які і потрібно враховувати, щоб оцінити їх межі. Це і буде систематична похибка вимірювання.

За характером зміни в часі систематичні похибки підрозділяються на постійні (що зберігають величину і знак), прогресуючі (зростаючі або спадаючі в часі), періодичні, а також змінюються в часі за складним неперіодичним законом. Основні з цих похибок - прогресуючі.

Прогресуюча (дрейфова) похибка - це непередбачувана похибка, повільно змінюється в часі. Відмінні особливості прогресуючих похибок наступні:

а) їх можна скорегувати поправками тільки в даний момент часу, а далі вони знову непередбачувано змінюються;

б) зміни прогресуючих похибок в часі являють собою випадковий процес, і тому в рамках добре розробленої теорії стаціонарних випадкових процесів вони можуть бути описані лише з певними застереженнями.

За джерелами прояви розрізняють наступні систематичні похибки:

- методичні, викликані використовуваним методом вимірювання;

- інструментальні, викликані похибкою використовуваного ЗВТ;

- похибки внаслідок неправильного монтажу ЗВТ або впливом неінформативних зовнішніх чинників;

- похибки, викликані неправильними діями оператора.

***Випадкові похибки*** - складові похибки вимірювань, що змінюються випадковим чином при повторних (багаторазових) вимірюваннях однієї і тієї ж величини в одних і тих самих умовах. У появі таких похибок немає будь-якої закономірності, вони проявляються при повторних вимірюваннях однієї і тієї ж величини у вигляді деякого розкиду одержуваних результатів. Випадкові похибки практично неминучі і завжди мають місце в результаті вимірювання. Опис випадкових похибок можливо тільки на основі теорії випадкових процесів і математичної статистики.

На відміну від систематичних випадкові похибки не можна виключити з результатів вимірювань шляхом введення поправки, проте їх можна істотно зменшити шляхом багаторазового вимірювання цієї величини і подальшої статичної обробки отриманих результатів.

***Грубі похибки (промахи)*** - похибки, істотно перевищують очікувані за даних умов вимірювання. Такі похибки виникають через помилки оператора або неврахованих зовнішніх впливів. Їх виявляють при обробці результатів вимірювань і виключають з розгляду, користуючись певними правилами. Слід помітити, що віднесення результатів спостереження до числа промахів не завжди може бути виконано однозначно. Необхідно враховувати два моменти. З одного боку, обмеженість числа виконаних спостережень, що не дозволяють з високим ступенем достовірності оцінити форму і вид (провести ідентифікацію) закону розподілу, а значить вибрати відповідні критерії оцінки результату на наявність "промаху". Другий момент пов'язаний з особливостями об'єкта (або процесу), показники якого утворюють випадкову сукупність (вибірку).

Обов'язковими компонентами будь-якого вимірювання є ЗВТ, метод вимірювання і людина, що проводить вимірювання. Недосконалість кожного з цих компонентів призводить до появи своєї складової похибки результату вимірювання. Відповідно до цього, за джерелом (причиною) виникнення розрізняють інструментальні, методичні та суб'єктивні похибки.

***Інструментальні похибки*** виникають через недосконалість ЗВТ. Джерелами інструментальних похибок можуть бути, наприклад, неточне градуювання приладу і зміщення нуля, варіація показань приладу в процесі експлуатації і т. д. Точність ЗВТ є характеристикою якості ЗВТ і відображає близькість його похибки до нуля.

Узагальненою характеристикою даного типу ЗВТ є його клас точності. Клас точності ЗВТ, як правило, відображає рівень їх точності, виражається межами допустимих основної та додаткових похибок, а також іншими характеристиками, що впливають на точність. Говорячи про клас точності, слід наголосити на двох моментах:

1) клас точності дає можливість судити про те, в яких межах знаходиться похибка ЗВТ одного типу, але не є безпосереднім показником точності вимірювань, які виконуються за допомогою кожного з цих засобів. Це важливо при виборі ЗВТ залежно від заданої точності вимірювань.

2) клас точності ЗВТ конкретного типу встановлюють в стандартах технічних умовах або в інших НД.

Зменшують інструментальні похибки застосуванням більш точного приладу.

***Методична похибка*** є складовою систематичної похибки вимірювань, що обумовлена недосконалістю прийнятого методу вимірювань. Похибка методу вимірювання викликана:

- відмінністю прийнятої моделі об'єкта вимірювання від моделі, що адекватно описує його властивість;

- впливом способів застосування ЗВТ;

- впливом алгоритмів (формул), за якими проводять обчислення результатів вимірювань (наприклад, некоректністю розрахункових формул;

- впливом обраного ЗВТ на параметри сигналів;

- впливом інших факторів, не пов'язаних з властивостями використовуваних ЗВТ.

Методичні похибки часто називають теоретичними, тому що вони пов'язані з різного роду відхиленнями від ідеальної моделі вимірювального процесу і використання невірних теоретичних передумов (припущень) при вимірюваннях. Внаслідок спрощень, прийнятих в рівняннях для вимірювань, нерідко виникають суттєві похибки, для компенсації дії яких слід вводити поправки. Поправки за величиною рівні похибки і протилежні їй за знаком. Окремо серед методичних похибок виділяють похибки при статистичній обробці результатів спостережень. Крім похибок, пов'язаних з округленням проміжних і кінцевих результатів, вони містять похибки, пов'язані із заміною точкових (числових) і імовірнісних характеристик вимірюваних величин їх наближеними (експериментальними) значеннями. Такі похибки виникають при заміні теоретичного розподілу експериментальним, що завжди має місце при обмеженому числі значень (результатів спостереження). Відмінною особливістю методичних похибок є те, що вони не можуть бути вказані в документації на яке використовується ЗВТ, оскільки від нього не залежать; їх має визначати оператор в кожному конкретному випадку. У зв'язку з цим оператор повинен чітко розрізняти фактично вимірювану їм величину і величину, що підлягає вимірюванню.

Іноді похибка методу може проявлятися як випадкова. якщо, наприклад, електронний вольтметр володіє недостатньо високим вхідним опором, то його підключення до досліджуваної схемою здатне змінити в ній розподіл струмів і напруг. При цьому результат вимірювання може істотно відрізнятися від дійсного. Методичну похибку можна зменшити шляхом застосування більш точного методу вимірювання.

***Суб'єктивна похибка*** - складова систематичної похибки вимірювань, обумовлена індивідуальними особливостями оператора. Суб'єктивні похибки викликаються помилками оператора при зніманні показань ЗВТ. Вона викликається станом оператора, його положенням під час роботи, недосконалістю органів чуття, ергономічними властивостями ЗВТ. Так мають місце похибки від недбалості і неуваги оператора, від паралакса, тобто. від неправильного напрямку погляду при зніманні показань приладу та тощо. Подібні похибки усуваються застосуванням сучасних цифрових приладів або автоматичних методів вимірювання.

***Похибка від впливу зовнішніх факторів*** - важлива складова похибки результату вимірювання, пов'язана з відхиленням однієї або декількох впливають величин від нормальних значень або виходом їх за межі нормальної області (наприклад, вплив вологості, температури, зовнішніх електричних і магнітних полів, нестабільності джерел живлення, механічних впливів і т. д.). У більшості випадків зовнішні похибки є систематичними і визначаються додатковими похибками застосовуваних ЗВТ, на відміну від основної похибки, отриманої в нормальних умовах вимірювання.

Розрізняють нормальні і робочі значення величини, що впливають. На нормальне значення, до якого наводяться результати багатьох вимірювань, виконаних в різних умовах, зазвичай розрахована основна похибка ЗВТ. Область значень величини, що впливають, в межах якої зміною результату вимірювань під її впливом можна знехтувати відповідно з встановленими нормами точності, приймається як нормальна область значень величини, що впливає. Область значень величини, що впливає, в межах якої нормується похибка або зміна показань ЗВТ приймається за робочу область значень величини, що впливає.

Зміна показань ЗВТ в часі, обумовлена зміною величин, що впливають, або інших чинників називається дрейфом показань ЗВТ. Якщо відбувається дрейф показань нуля, то вживають термін "дрейф нуля". Таким чином, похибка від впливу умов вимірювання слід розглядати як складову систематичної похибки вимірювання, що є наслідком неврахованого впливу відхилень в одну сторону будь-якого з параметрів, що характеризують умови вимірювань, від встановленого значення. Цей термін застосовують у разі неврахованої або недостатньо врахованої дії тієї чи іншої величини, що впливає. Однак, слід відзначити що, похибка від впливу умов може проявлятися і як випадкова, якщо діючий фактор має випадкову природу (таким чином проявляє себе температура приміщення, в якому виконуються вимірювання).

За характером поведінки вимірюваної фізичної величини в процесі вимірювань розрізняють статичні і динамічні похибки.

***Статичні похибки*** виникають при вимірюванні сталого значення вимірюваної величини, тобто коли ця величина перестає змінюватися в часі. ***Динамічні похибки*** мають місце при динамічних вимірюваннях, коли вимірювана величина змінюється в часі і потрібно встановити закон її зміни, тобто похибки, властиві умовам динамічного вимірювання. Причина появи динамічних похибок складається в невідповідність швидкісних (тимчасових) характеристик приладу швидкості зміни вимірюваної величини.

Залежно від впливу вимірюваної величини на характер накопичення в процесі вимірювання похибки, вона може бути адитивна або мультиплікативна. ***Адитивною*** називається похибка, яка не залежить від розміру вимірюваної величини. В свою чергу мультиплікативна похибка визначається розміром фізичної величини.

# *Лекція 3* КЛАСИФІКАЦІЯ ПОХИБОК ВИМІРЮВАННЯ. ІНСТРУМЕНТАЛЬНІ ПОХИБКИ

***Питання, що розглядаються***

*Класифікація інструментальних похибок*

ЗВТ при виконанні вимірювальної процедури має великий вплив на сумарну похибку, яка завжди містить похибки випадкового і систематичного характеру. Інструментальна похибка, перш за все, обумовлена недосконалістю самого ЗВТ. Тому при класифікації складових інструментальної похибки виділяють похибку компонентів (складових частин ЗВТ), вона пояснюється неможливістю абсолютно точного виготовлення будь-якого технічного засобу. Розподіл похибки на основну і додаткову пов'язаний з умовами, в яких використовуються ЗВТ. ***Основна похибка*** ЗВТ - похибка, яка має місце при нормальних умовах його експлуатації, обумовлених в нормативних документах (паспорті, технічних умовах і ін.). ***Додаткова похибка*** ЗВТ виникає при відхиленні умов експлуатації від нормальних (номінальних). Дана похибка, як і основна, вказується в нормативній документації.

Інструментальна похибка, обумовлена похибкою самого ЗВТ, як сказано вище, виражається в зведеній формі. Зведена похибка γ, що виражає потенційну точність вимірювань, є відношенням абсолютної похибки (Δ) ЗВТ до нормованого значення величини, постійного у всьому діапазоні вимірювань або в частині діапазону.

Частіше за все інструментальна похибка носить систематичний характер.

***Систематична похибка ЗВТ*** це складова похибки ЗВТ, яка приймається за постійну або закономірну змінюється. Систематична похибка даного ЗВТ, як правило, буде відрізнятися від систематичної похибки іншого екземпляру ЗВТ цього ж типу, внаслідок чого для групи однотипних ЗВТ систематична похибка може іноді розглядатися як випадкова похибка.

Систематична похибка ЗВТ відома, якщо є інформація щодо його метрологічних характеристиках (МХ). Вона може бути отримана з паспорта, або іншої технічної документації на ЗВТ (якщо вони стандартизовані). Для нестандартизованих ЗВТ таку інформацію про МХ отримують при метрологічної атестації. При відсутності такої інформації можлива лише приблизна оцінка похибки результату вимірювань.

При будь-якому спостереженні передбачається, що існує композиція двох законів розподілу похибок: похибки відліку, розподіленої рівномірно в діапазоні ціни поділки приладу ± Δ*x*/2, і випадкової похибки, що має СКО σ нормального розподілу (замінюється, в разі обмеженого числа спостережень, оцінкою СКО *S*). Якщо Δ*x*/(2σ) = 2,5 ÷ 3,5, то можна проводити одноразові вимірювання, так як мала ймовірність того, що випадкова складова похибки матиме значення, більше половини ціни поділки ЗВТ.

Для вимірювання з багаторазовими спостереженнями можна використовувати ЗВТ з менш досконалими елементами схеми, що володіють значною випадковою складовою похибки, але більш чутливі. При цьому Δ*x*/(2σ) = 1 ÷ 0,25. Такі ЗВТ незручні для одноразових спостережень через високу ймовірність похибки, що перевищує половину ціни поділки приладу. Однак результати багаторазових вимірювань, виконані одним і тим же ЗВТ, доцільно обробити, усереднити і таким чином знизити випадкові похибки результатів спостережень.

***Випадкова похибка ЗВТ*** - це складова похибки ЗВТ, що змінюється випадковим чином. Вона призводить до розкиду показань, виконаних в одних і тих же умовах. У цьому випадку говорять про варіації показань.

***Варіація показань вимірювального приладу*** - це різниця показань приладу в одній і тій самій точці діапазону вимірювань при плавному підході до цієї точки з боку менших і більших значень вимірюваної величини. У високочутливих (особливо в електронних) вимірювальних приладах варіація набуває інший зміст і може бути розкрита як коливання його показань біля середнього значення. Варіація (гістерезис) визначається як різниця між показаннями ЗВТ в даній точці діапазону вимірювання при зростанні і убуванні вимірювань величини і незмінних зовнішніх умовах:

, (3.1)

де *Х*з, *Х*У – значення вимірювань еталонними ЗВТ при зростанні і убуванні величини *Х*.

Слід мати на увазі, що, хоча варіація показань ЗВТ викликається випадковими чинниками, сама вона – не випадкова величина.

Залежність між вихідним і вхідним сигналом ЗВТ, отриману експериментально, називають ***градуювальною характеристикою***, яка може бути представлена аналітично, графічно або у вигляді таблиці. Градуювальна характеристика може змінюватися під впливом зовнішніх і внутрішніх причин.

***Похибка міри*** – різниця між номінальним значенням міри та дійсним значенням його величини.

Крім цього, розрізняють похибки, які стосуються виконання метрологічних процедур відтворення і передачі розміру одиниці фізичної величини. Під ***похибкою відтворення одиниці фізичної величини*** розуміється похибка результату вимірювань, які виконуються при відтворенні одиниці фізичної величини. Слід зазначити, що похибка відтворення одиниці при допомоги державних еталонів зазвичай вказують у вигляді її складових: чи не виключеною систематичної похибки; випадкової похибки; нестабільності за рік.

Розрізняють так само ***похибку передачі розміру одиниці фізичної*** ***величини***, під якою розуміють похибку результату вимірювань, що виконуються при передачі розміру одиниці. В похибку передачі розміру одиниці входять як не виключенні систематичні, так і випадкові похибки методу та ЗВТ.

***Похибка повірки*** - похибка застосовуваного методу передачі розміру одиниці фізичної величини, здійснюваного при порівнянні показань приладу, що повіряється, та еталонного.

***Похибка градуювання*** - похибка дійсного значення величини, приписаного тієї чи іншій позначці шкали ЗВТ в результаті градуювання.

***Похибка квантування*** - методична похибка відображення безперервної величини обмеженим за кількістю розрядів числом. Вона дорівнює різниці між значенням неперервної функції і значенням, одержуваних в результаті квантування.

Статичний і динамічний режими роботи ЗВТ дозволяють розрізняти однойменні похибки. ***Статична похибка ЗВТ*** - це похибка ЗВТ, що застосовується при вимірюванні фізичної величини, прийнятої за незмінну. ***Динамічна складова похибки*** виникає при роботі ЗВТ в динамічному режимі і визначається двома факторами: динамічними (інерційними) властивостями ЗВТ і характером (швидкістю) зміни вимірюваної величини. При вимірюваннях детермінованих сигналів динамічні похибки зазвичай розглядаються як систематичні. При випадковому характері вимірюваної величини динамічні похибки доводиться розглядати як випадкові.

Закінчуючи аналіз класифікації похибок вимірювань, необхідно відзначити, що вона (як будь-яка інша класифікація) носить досить умовний (відносний) характер.

Необхідно відмітити також, що якщо групи характеристик похибки вимірювань задані в якості необхідних або допустимих, то їх називають норми характеристик похибок вимірювань (або, коротко, норми похибок вимірювань). Якщо групи характеристик похибки, приписані сукупності вимірювань, які виконуються за певною (стандартизованою або атестованою) методикою, то їх називають приписані характеристики похибки вимірювань.

Крім цього розрізняють статистичні оцінки характеристик похибок вимірювань (або, коротко, статистичні оцінки похибок вимірювань), що відображають близькість окремого, експериментально вже отриманого результату вимірювання до істинного значення вимірюваної величини.

Розглянемо імовірнісні характеристики (і їх статистичні оцінки) похибки результату вимірювань. До них відносяться вибіркове середньоквадратичне відхилення похибки вимірювань або межі, в яких похибка вимірювань знаходиться із заданою ймовірністю (частіше з вірогідністю *Р* = 0,95 *P* = 0,99), а так само характеристики випадкової і систематичної складових похибки вимірювань.

Математичне сподівання похибки вимірювань може бути використано в якості прийнятого опорного значення, так як воно являє собою систематичну похибку. Якщо її значення відомо і постійно, то на неї в результат вимірювань вводиться поправка. В інших випадках використовуються характеристики невиключеної систематичної похибки.

В якості характеристики випадкової складової похибки використовуються середньоквадратичне відхилення випадкової складової похибки вимірювань. В якості статистичних (вибіркових) оцінок похибки вимірювань використовуються результати експериментального або розрахунково-експериментального оцінювання характеристик середнього квадратичного відхилення, меж, в яких похибка вимірювання знаходиться з заданою вірогідністю, а також характеристик випадкової і систематичної складових похибки вимірювань. Слід також зазначити, що замість терміна середньоквадратичне відхилення (*S*) рекомендує застосовувати термін середня квадратична похибка результатів одиничних вимірювань в ряду вимірювань (або коротко, середня квадратична похибка вимірювань).

Це є оцінка (*S*) розсіювання одиничних (одноразових) результатів вимірювань в ряду равноточних вимірювань однієї і тієї ж фізичної величини біля середнього їх значення, що обчислюється за формулою:

, (3.2)

де *xi* - результат i-го одиничного вимірювання;

*X* - середнє арифметичне значення вимірюваної величини *n* одиничних результатів.

Під оцінкою параметра (числових характеристик) законів розподілу прийнято розуміти наближене їх значення, при статистичній обробці обмеженого числа випадкової величини, до числа якої, як відомо, відносять і фізичну величину, властивості оцінок, їх види та способи визначення.

Похибка результату вимірювань завжди відома з деякою довірчою ймовірністю і існують її довірчі межі, під якими розуміють найбільше і найменше значення похибки вимірювань, що обмежують інтервал, усередині якого із заданою ймовірністю знаходиться шукане (справжнє) значення похибки результату вимірювань.

Довірчі межі в разі нормального закону розподілу обчислюються як ± *tS* (*S* - середні квадратичні похибки; *t* - коефіцієнт, що залежить від довірчої ймовірності *Р* і числа вимірювань *n*). При симетричних межах термін може застосовуватися в однині - довірча межа. Іноді замість терміна довірча межа застосовують термін довірча похибка або похибка при даній довірчій ймовірності

***Гранична похибка вимірювання*** - це максимальна похибка вимірювання (плюс, мінус), що допускається для даного вимірювального завдання. У багатьох випадках за граничну похибку приймають Δпр = ± 3*S*. При необхідності за граничну похибку може бути прийнято і інше значення меж похибки (в залежності від форми і виду закону розподілу).

Результат вимірювання завжди містить похибки систематичного і випадкового характеру. Показання ЗВТ при будь-яких вимірах можна представити у вигляді:

, (3.3)

де хд – дійсне значення вимірюваної величини;

 - випадкова складова похибки;

Θ – систематична складова похибки.

Багаторазові вимірювання доцільно застосовувати, якщо необхідно отримання статистичної інформації про об'єкт або процес. Це має місце в ході статистичного контролю, коли на основі статистичних оцінок приймається рішення про зміну або збереження плану контролю або про необхідність втручання в процес виробництва з метою зниження вхідного рівня дефектності. У кількісному хімічному аналізі багаторазові вимірювання застосовуються для побудови калібрувальних і градуювальних кривих. При перевірці нульового показання мікрометричних вимірювальних інструментів з метою визначення адитивної похибки так само необхідно застосовувати багаторазові вимірювання. При багаторазових вимірюваннях середнє значення вимірюваної величини (прийняте за результат вимірювання за умови розподілу похибок вимірювання за нормальним законом) при *n* спостереженнях має вигляд:

. (3.4)

З наведеного співвідношення видно, що при вимірюваннях з багаторазовими спостереженнями за рахунок збільшення числа спостережень *n* відбувається лише зменшення випадкової складової похибки.

На практиці до проведення вимірювань намагаються максимально зменшити систематичну складову похибки. При багаторазових вимірюваннях результат вимірювання отримують в результаті обробки результатів спостережень, що дозволяє зменшити випадкову похибку. При цьому слід усвідомлювати те, що трудомісткість і час вимірювань зростають, тому кількість спостережень *n* повинно бути обґрунтовано, виходячи з необхідної точності вимірювань. Точність вимірювань, в свою чергу, визначається поставленої вимірювальної завданням (метою вимірювального експерименту).

***Лекція 4***ЗАГАЛЬНА ПОСЛІДОВНІСТЬ ВИКОНАННЯ ОБРОБКИ РЕЗУЛЬТАТІВ СПОСТЕРЕЖЕНЬ

***Питання, що розглядаються***

*Порядок обробки результатів спостережень. Визначення точених оцінок закону розподілу випадкових величин*

***4.1 Загальні відомості***

Порядок обробки результатів спостережень при багаторазових вимірюваннях складається з ряду послідовно виконуваних етапів:

1) визначення точкових оцінок параметрів законів розподілу результатів вимірювань. На цьому етапі після ранжирування значень вибірки в порядку зростання і представлення її у вигляді варіаційного ряду (*x*1 ≤ *x*2 ≤ ... ≤ *x*n) визначаються:

а) оцінка центру розподілу (*X*ц. р.) ;

б) оцінка середньоквадратичного відхилення СКО окремих результатів спостережень (*S*);

в) оцінка СКО середнього арифметичного значення (*Sx*). Відповідно до критеріїв виключаються грубі похибки (промахи) і вводяться поправки на систематичні похибки. Після їх виключення проводиться повторний розрахунок оцінок середнього арифметичного значення і оцінок СКО спостережень і вимірювань;

2) визначення оцінок параметрів закону розподілу результатів вимірювань або випадкових похибок вимірювань. У цьому випадку від вибірки результатів вимірювань *x*1, *x*2, ..., *x*n переходять до вибірки відхилень від середнього арифметичного Δ*x*1, Δ*x*2, ..., Δ*x*n:

. (4.1)

Для оцінки параметрів закону розподілу проводиться побудова за виправленими результатами вимірювань *xi*, де *i* = 1,2, ..., *n*, - члени варіаційного ряду (впорядкованої вибірки) *yi*, де *yi* = min(*xi*) і *уn* = max(*xi*).

За видом статистичних функцій розподілів (представлених у вигляді гістограм або полігонів - для диференціальної форми або у вигляді кумулятивної кривої - для інтегральної форми) може бути оцінений закон розподілу результатів спостережень;

3) оцінка закону розподілу за статистичними критеріями згоди. Для перевірки гіпотез щодо виду функції розподілу експериментальних даних використовують такі критерії згоди: Пірсона, Мізеса-Смирнова, складовою критерій *d*. При числі спостережень *n*>50 для ідентифікації закону розподілу використовується критерій Пірсона (хі-квадрат) або критерій Мізеса-Смирнова (ω2). При 15<*n*<50 для перевірки нормальності закону розподілу застосовується складовою критерій (*d*-критерій). При *n*<15 приналежність експериментального розподілу до нормальної не перевіряється. При цьому знаходження довірчих меж випадкової похибки результату вимірювання за методикою можлива в тому випадку, якщо заздалегідь відомо, що результати спостережень належать нормальному розподілу. У разі якщо гіпотеза про приналежність отриманих результатів до нормального закону розподілу не підтверджується, то проводиться наближена оцінка параметрів законів розподілу (ідентифікацією форми і види закону розподілу відповідного теоретичного);

4) визначення довірчих інтервалів випадкової похибки. Якщо вдалося ідентифікувати закон розподілу результатів вимірювань, то з його використанням знаходять квантільний множник *zp* при заданому значенні довірчої ймовірності *Р*. В цьому випадку довірчі межі випадкової похибки Δ = ± *zp*⋅*Sx*;

5) визначення меж не виключеної систематичної похибки результату вимірювань. Під цими межами розуміють знайдені нестатистичними методами межі інтервалу, всередині якого знаходиться невиключена систематична похибка. Вона утворюється з ряду складових, як правило, похибок методу та засобів вимірювань, а також суб'єктивної похибки;

6) визначення довірчої межі похибки результату вимірювання Δ*p*. Дана операція здійснюється шляхом підсумовування СКО випадкової складової *Sx* і меж невиключеної систематичної складової θ в залежності від співвідношення цих похибок між собою;

7) формування результату вимірювань.

***4.2 Визначення точених оцінок закону розподілу результатів спостережень***

В математичній статистиці під оцінками розуміють наближені значення шуканої (істинної) величини, що отримані на підставі результатів вибіркового дослідження та забезпечують можливість прийняття обґрунтованих рішень про невідомі параметри генеральної сукупності. Щоб оцінки істинного значення вимірюваної величини були надійними, представницькими, до них пред'являється ряд вимог. При цьому слід пам'ятати про те, що, проводячи оцінку істинного значення вимірюваної величини за результатами вимірювань, використовують методи теорії ймовірностей, що застосовуються для оцінки невідомих параметрів функції розподілу випадкової величини, тобто оцінки є випадковими величинами. Так, для нормального закону числовими параметрами розподілу є математичне очікування і дисперсія.

Зазвичай при обробці результатів вимірювань оцінку математичного очікування у вигляді середнього арифметичного значення зіставляють з оцінкою істинного значення вимірюваної величини. Але справжнє значення є невідомою нам величиною, що має єдине значення. Тому тільки з формальної точки зору можна визнати адекватними оцінки математичного очікування випадкової величини і істинного значення фізичної величини. Більш того, деякі результати вимірювань знаходиться ближче до істинного значенням, ніж середнє арифметичне значення результатів вимірювань.

Формальним обґрунтуванням зазначеної адекватності є те, що оцінка параметрів закону розподілу випадкової величини і оцінка єдиного істинного значення вимірюваної величини виконуються за деяким числом спостережень, кожне з яких може розглядатися як випадкова подія. Обробка результатів спостережень передбачає обчислення математичних оцінок істинного значення вимірюваної величини. При багаторазових вимірюваннях за оцінку істинного значення вимірюваної величини приймається координата центру експериментального розподілу. Статистичну обробку результатів спостережень слід починати з обчислення центру розподілу, так як похибка його знаходження тягне за собою неправильну оцінку інших характеристик (середнє відхилення - СКО, ексцесу, контрексцесу, виду експериментального розподілу, оцінки похибок результату вимірювань і ін.).

В умовах відсутності відомостей щодо виду і формі закону розподілу результатів спостережень (обмежене число результатів, грубі ЗВТ) середнє арифметичне значення не завжди може бути прийнято за оцінку координати центру розподілу (центр кривої емпіричного розподілу збігається з оцінкою математичного очікування тільки для нормального розподілу). У математичній статистиці відомі кілька оцінок координати центру розподілу: середнє арифметичне, медіана, мода, серединний розмах, центр розмаху. Оскільки всі перераховані оцінки є точковими і вибір їх неоднозначний, вони повинні:

* сходиться до оцінюваного значенням при *n* → ∞;
* їх математичне очікування має дорівнювати оцінюваному значенню;
* їх вибірковий розподіл має мати найменшу дисперсію.

Зупинимося на перерахованих властивості оцінок більш докладно. При збільшенні числа незалежних вимірювань *n* оцінка повинна сходиться за ймовірністю до математичного сподівання випадкової величини.

Однією з умов отримання надійних оцінок є вимога до їх незсуненості, яка полягає в тому, щоб при заміні оцінкою (mx\*) істинного значення *Xn* не допускалася систематична похибка (в бік збільшення або зменшення відносно *Xn*). Ця вимога призводить до необхідності виконання умови: ***математичне очікування оцінки має при будь-якому числі вимірювань збігатися з істинним значенням величини***. Якщо обрана незсунена оцінка в порівнянні з іншими можливими оцінками має найменшу дисперсію, то така оцінка є ефективною.

У разі нормального розподілу результатів спостережень статистична дисперсія є асимптотичною незсуненою, так як при збільшенні числа вимірювань *n* відношення її дисперсії до мінімально можливої вимірюваній величині наближається до одиниці.

Числові характеристики випадкових величин, отриманих за результатами вибіркових спостережень поділяються на три види:

1) характеристики стану;

2) характеристики розсіювання;

3) характеристики форми розподілу.

До характеристик положення відносяться:

а) середнє арифметичне значення;

б) медіана;

в) мода;

г) середнє геометричне значення;

д) середнє гармонійне значення.

Всі перераховані числові характеристики визначають координату центру розподілу впорядкованої сукупності. Варто зазначити, що тільки в разі нормально розподілених результатів спостережень вибіркове середнє арифметичне, медіана і мода збігаються між собою і можуть бути прийняті за центр розподілу статистичної сукупності фізичної величини, отриманої при вимірюваннях.

До характеристик розсіювання значень змінної відносяться:

а) мінімальне і максимальне значення;

б) розмах варіаційного ряду;

в) дисперсія;

г) середньоквадратичне (стандартне) відхилення;

д) 25% -й і 75% квантилі і межквантільний;

е) середнє квадратичне відхилення середнього значення;

ж) 95% -й довірчий інтервал істиного середнього значення.

***4.2.1 Визначення координати центру розподілу***

Координата центру розподілу визначає положення випадкової величини на числовій осі і може бути знайдена декількома способами. Найбільш фундаментальним є відшукання центру за принципом симетрії, тобто такої точки *X*м на осі *x*, ліворуч і праворуч від якої ймовірності появи різних значень випадкової величини однакові і рівні 0,5. В цьому випадку для інтегральної функції розподілу ймовірностей повинна виконуватися умова:

 (4.2)

При цьому точку *X*м називають медіаною або 50%-ний квантиль. Для його знаходження у розподілу випадкової величини має існувати тільки нульовий початковий момент. Нульовим моментом в математичній статистиці називають деяке середнє значення, що відраховується від початку координат. Нульовий початковий момент дорівнює одиниці. Він використовується для завдання умови нормування щільності розподілу і визначається за формулою:

 (4.3)

Першим початковим моментом, як відомо, є математичне сподівання випадкової величини. В якості оцінки центру розподілу може вибиратися одна з наступних оцінок (в залежності від типу розподілу):

* вибіркове середнє арифметичне;
* медіана, центр розмаху;
* серединний розмах.

При виборі оцінок центру розподілу слід враховувати, що вони мають різну чутливість до наявності промахів в оброблюваній сукупності вихідних даних.

***4.2.1.1 Визначення вибіркового середнього арифметичного***

Середнє арифметичне вибірки визначаються за формулою:

, (4.4)

де *xi* - окремі результати спостережень;

*n* - загальна кількість результатів.

Вибіркове середнє арифметичне для впорядкованої сукупності (варіаційного ряду) обчислюється за формулою:

, (4.5)

де *m* - частота повтору окремих результатів спостережень;

- частость (статистична ймовірність) попадання *i*-го спостереження в певний *k*-й інтервал. Вибіркове середнє арифметичне є незсунутою, ефективною і достатньою оцінкою будь-якого закону розподілу. Однак оцінка у вигляді середнього арифметичного слабо захищена від впливу промахів. Вона послаблюється лише в *n* раз, де *n* – число спостережень, в той час як його можливий розмір не обмежений.

***4.2.1.2 Середнє арифметичне 90%-ої вибірки***

Середнє арифметичне (за обмеженим числом спостережень) розраховується за формулою:

, (4.6)

де *εn*≤*t*≤*εn*+1 для випадку, коли з кожного кінця варіаційного ряду виключають по *t* значень для отримання більш стійкою оцінки центру розподілу. Зазвичай використовують значення *ε*=0,05 і *ε*=0,1 (це означає, що слід відкидати по 5 або 10% результатів спостережень).

У метрології частіше знаходить застосування середнє арифметичне 90% -ної вибірки (позначається символами *X*0,9 або *X*0,1). Вона визначається за формулою:

, (4.6)

де 2*r* - число не врахованих результатів;

*mі* – частота потрапляння *i*-го значення в *k*-й інтервал (при інтервальному поданні варіаційного ряду). Оцінка *X*0,9 менш чутлива до результатів з грубими похибками, ніж вибіркове середнє арифметичне *X*; оскільки при обробці 90% обсягу вибірки відкидаються з кінців варіаційного ряду *x*1 <*x*2 <*x*3 <... ≤ *xn* по 5% найбільш віддалених результатів, в яких можуть міститися грубі похибки.

***4.2.1.3 Медіана спостережень***

Медіаною називають спостережуване значення *xi* (так звану варіанту) яка ділить варіаційний ряд на дві частини, рівні за кількістю варіант. Якщо *n* – парне, то медіана розраховується за формулою:

; (4.7)

якщо *n* – непарне, то медіана розраховується за формулою:

 (4.8)

Слід мати на увазі, що медіана є найбільш ефективною оцінкою для симетричних експоненційних розподілів, в яких контрексцес належить інтервалу 0<χ<0,45. Для класу розподілів, близьких до нормального, з 0,45<χ<0,67 ефективними оцінками є середнє арифметичне, що займають медіанне становище. Для розподілів, близьких до рівномірного і арксінусоїдального, з 0,67 <χ <1 доцільно використовувати центр розмаху. Для двомодальних розподілів з 0,67 <χ <1 центр серединного розмаху.

***4.2.1.4 Середній розмах варіаційного ряду***

Центр серединного розмаху визначають залежно від кратності членів ряду за нижченаведеними формулами. При *n*, кратному 4 знаходиться за формулою:

; (4.9)

при парному *n*:

; (4.10)

при *n*-1, кратному 4:

; (4.11)

при *n*+1, кратному 4:

; (4.12)

Центр серединного розмаху варіаційного ряду може бути визначено також за формулою:

, (4.13)

де *x*0,25, *x*0,75 - 25% і 75% -ні квантилі експериментального розподілу (представляють собою усереднені значення конкретних результатів спостережень).

Для симетричних двомодальних розподілів з ексцесом 1 <ε <2,4 (наприклад, композиція двох експоненційних розподілів) ця оцінка є ефективною. Слід зазначити, що обидві квантильні оцінки є захищеними від впливу промахів, оскільки вони не залежать від координат промахів.

***4.2.1.5 Центр розмаху***

Для обмежених розподілів (рівномірних, трикутних, трапецеїдальних та ін.) ефективної оцінкою центру розподілу може служити центр розмаху варіаційного ряду, який вираховується за формулою:

, (4.14)

де *x*1, *xn* – крайні значення варіаційного ряду.

Однак ця оцінка дуже чутлива до результатів з грубої похибкою, так як вона визначається за найбільш віддаленим від центру розподілу результатом спостережень, якими і є промахи.

В умовах, коли відсутні відомості про закон і вигляді розподілу за оцінку центру *X*ц.р. рекомендується приймати медіану оцінок , розташованих в варіаційний ряд.

***4.2.2 Визначення оцінок середньоквадратичного відхилення***

Оцінка *S*2 генеральної дисперсії σ2 будь-якого закону розподілу може бути обчислена (при невідомому математичному очікуванні генерального середнього) за формулою:

. (4.15)

Ця оцінка є незсунутою, а для нормального розподілу – ще й ефективною. Для нормального закону розподілу оцінка генерального середнього відхилення (СКО) *S* результатів спостережень визначається:

. (4.16)

Оцінка є незсунутою і асимптотично ефективною тільки для нормального закону. Незсунута оцінка СКО для нормальних розподілів так само визначається за формулою:

, (4.17)

Значення коефіцієнту *Mk* наведені в таблиці 4.1.

Таблиця 4.1 - Значення коефіцієнта *Mk* залежно від кількості спостережень *n.*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *n* | *Mk* | *n* | *Mk* | *n* | *Mk* |
| 1 | 1,253 | 10 | 1.025 | 19 | 1.013 |
| 2 | 1,128 | 11 | 1.023 | 20 | 1.012 |
| 3 | 1,085 | 12 | 1.021 | 25 | 1.010 |
| 4 | 1,064 | 13 | 1.019 | 30 | 1.008 |
| 5 | 1,051 | 14 | 1.018 | 35 | 1.007 |
| 6 | 1,042 | 15 | 1.017 | 40 | 1.006 |
| 7 | 1,036 | 16 | 1.016 | 45 | 1.006 |
| 8 | 1,032 | 17 | 1.015 | 50 | 1.005 |
| 9 | 1,028 | 18 | 1.014 | 60 | 1.004 |

СКО випадкової похибки оцінки центру розподілу (СКО результату вимірювань) зменшується в порівнянні з СКО результату спостережень в, як показано за формулою:

. (4.18)

Визначення оцінок третього центрального моменту μ3, коефіцієнта асиметрії γa, СКО коефіцієнта асиметрії σ(γa) проводиться за формулами:

; (4.19)

; (4.20)

. (4.21)

***Лекція 5***МЕТОДИ ВИКЛЮЧЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ З ГРУБИМИ ПОХИБКАМИ.

***Питання, що розглядаються***

*Поняття грубої похибки. Причини виникнення грубих помилок. Апарат перевірки статистичних гіпотез. Помилки першого та другого роду. Виключення систематичних похибок.*

***5.1 Грубі похибки***

***Грубі похибки (промахи)*** відносяться до числа похибок, що змінюються випадковим чином при повторних спостереженнях. Вони явно перевищують за своїм значенням похибки, що викликані умовами проведення експерименту. Під промахом розуміється значення похибки, відхилення якого від центру розподілу істотно перевищує значення, викликане об'єктивними умовами вимірювання. Тому з точки зору теорії ймовірності поява промаху малоймовірно.

Причинами грубих похибок можуть бути неконтрольовані зміни умов вимірювань, несправність, помилки оператора і ін. Для виключення грубих похибок застосовують апарат перевірки статистичних гіпотез. У метрології використовуються статистичні гіпотези, під якими розуміють гіпотези про вид невідомого розподілу, або про параметри відомих розподілів. Прикладами статистичних гіпотез є:

1. розглянута вибірка (або її окремий результат) належить генеральної сукупності;
2. генеральна сукупність розподілена за нормальним законом;
3. дисперсії двох нормальних сукупностей рівні між собою.

Поряд з висунутої гіпотезою розглядають гіпотезу, що їй суперечить. Нульовою (основною) називають висунуту гіпотезу. А альтернативною називають ту, яка суперечить нульовій. При висуванні і прийнятті гіпотези можуть мати місце такі чотири випадки:

1) гіпотеза приймається, причому і в дійсності вона правильна;

2) гіпотеза вірна, але помилково відкидається. Виникає при цьому помилку називають ***помилкою першого роду***, а ймовірність її появи називають ***рівнем значущості*** і позначають *q*(α);

3) гіпотеза відкидається, причому в дійсності вона є неправильною;

4) гіпотеза невірна, але помилково приймається. Викликану при цьому помилку називають ***помилкою другого роду***, а ймовірність її появи позначають *β*.

Величину 1-*β*, тобто ймовірність, що гіпотеза буде відкинута, коли вона є хибною, називають ***потужністю критерію***.

***Областю прийняття гіпотези (областю допустимих значень)*** називають сукупність значення критерію, при яких гіпотезу приймають. ***Критичною*** називають сукупність значень критерію, при яких нульову гіпотезу відкидають. Область прийняття гіпотези і критична область розділені критичними точками, в якості яких і виступають табличні значення критеріїв.

На рисунку 5.1 наведена графічна інтерпретація до розподілу області прийняття гіпотези.



Рисунок 5.1 – Графічна інтерпретація до розподілу області прийняття гіпотези

Область неприйняття гіпотези, як показано на рисунку 5.1, може бути однобічною (правобічною або лівобічною) і двобічною.

Правобічною називають критичну область, яка визначається нерівністю *K*набл>*k*кр, де *k*кр - позитивне число (рисунок 3.1, а).

Лівобічною називають критичну область, яка визначається нерівністю *K*набл<*k*кр, де *k*кр- негативне число (рисунок 3.1, б).

Двобічною називають критичну область, яка визначається нерівностями *K*набл>*k*1; *K*набл<*k*2, де *k*2> *k*1.

Якщо критичні точки симетричні відносно нуля, двостороння критична область визначається нерівностями: *K*набл <-*k*кр, *K*набл> *k*кр, або рівносильним нерівністю *K*набл> *k*кр (рисунок 3.1, в).

Основний принцип перевірки статистичних гіпотез формулюється наступним чином: якщо спостережуване (дослідне) значення критерію належить критичної області – гіпотезу відкидають, якщо спостерігається значення критерію належить області прийняття гіпотези – гіпотезу приймають.

Перевірку статистичної гіпотези проводять для прийнятого рівня значущості *q* (приймається рівним 0,1; 0,05; 0,01 і т. д.). Так прийнятий рівень значущості *q* = 0,05 означає, що висунута нульова статистична гіпотеза може бути прийнята з довірчою ймовірністю *P* = 0,95. Або є ймовірність відкинути цю гіпотезу (припуститися помилки першого роду), що дорівнює *P* = 0,95. Нульова статистична гіпотеза підтверджує приналежність "підозрілого" результату вимірювання (спостереження) даній групі вимірювань.

Формальним критерієм аномальності результату спостережень (а, отже, і підставою для прийняття конкуруючої гіпотези: "Підозрілий" результат не належить даній групі вимірювань) при цьому служить межа, віднесена від центру розподілу на величину *tS*, тобто:

, (5.1)

де Хiпод – результат спостереження, що перевірявся на наявність грубої похибки;

*t* – коефіцієнт, що залежить від виду і закону розподілу, обсягу вибірки, рівня значущості.

Таким чином, межі похибки залежать від виду розподілу, обсягу вибірки і обраної довірчої ймовірності. При обробці вже наявних результатів спостережень довільно відкидати окремі результати не слід, так як це може призвести до фіктивного підвищення точності результату вимірювань. Група вимірювань (вибірка) може містити кілька грубих помилок і їх виключення проводять послідовно, по одному.

Всі методи виключення грубих похибок (промахів) можуть бути розділені на два основних типи:

а) методи виключення при відомому генеральному СКО;

б) методи виключення при невідомому генеральному СКО.

У першому випадку *X*ц.р. і СКО обчислюється за результатами всієї вибірки. У другому випадку з вибірки перед обчисленням видаляються підозрілі результати. У разі обмеженого числа спостережень і (або) складності оцінки параметрів закону розподілу рекомендується виключати грубі похибки, використовуючи наближені коефіцієнти виду розподілу. При цьому виключаються значення *xi*<*xr*- і *xi*>*xr*+, де *xr*- *xr*+  - межі промахів, які визначаються за формулами:

, (5.2)

, (5.3)

де *A* – коефіцієнт, значення якого вибирається залежно від заданої довірчої ймовірності в діапазоні від 0,85 до 1,30 (рекомендується вибирати максимальне значення *А*);

γ – контрексцес, значення якого залежить від форми закону розподілу величини (ЗРВ).

Після виключення промахів операції по визначенню оцінок центру розподілу і СКО результатів спостережень і вимірювань необхідно повторити. Оскільки критеріальні вимоги (коефіцієнти), що визначають межу, за якою знаходяться "грубі" (в сенсі похибок) результати спостережень у різних авторів різні, то перевірку слід виконувати відразу за кількома критеріями (рекомендується використовувати не менше трьох, з розглянутих нижче). Остаточний висновок щодо приналежності "підозрілих" результатів даній сукупності спостережень слід робити за більшістю критеріїв. Крім цього вибір критерію для визначення грубих похибок повинен виконуватися після побудови гістограми результатів спостережень. За виглядом гістограми виконується попередня ідентифікація виду закону розподілу (нормальний, близький до нормального або відмінний від нього).

5.2 Виключення систематичних похибок вимірювань

Основні способи виключення систематичних похибок зводяться до усунення їх до початку вимірювання, в процесі вимірювання, внесення поправок в результат вимірювання, а також оцінкою меж систематичних похибок.

***Усунення до початку вимірювання*** має на меті: попередню перевірку всіх приладів за еталонним зразком і перевірку з'єднання окремих елементів. Усунення впливу температури, наприклад, здійснюється різними способами термостатування. При цьому не завжди вдається природним шляхом зберегти температуру точно 20 ºС. Тоді її стабілізують на рівні (30-40) ºС з використанням рівномірного підігріву всього приміщення або способом кондиціонування повітря. Потім використовують поправочні коефіцієнти. Усунення впливу магнітних полів проводять за допомогою магнітного екранування. Усунення вібрацій проводять за допомогою губчастої гуми і еластичних підвісок.

***Усунення в процесі вимірювання*** – це найбільш ефективний прийом виключення похибок. Використовують спосіб заміщення, коли вимірюваний об'єкт заміщають еталонною моделлю, наприклад, зважування на важільних вагах за способом Борда. На одну шальку терезів кладуть масу, що зважують, на іншу – спеціальний вантаж (наприклад, дріб), до врівноваження ваг. Потім масу, що зважують, знімають і на її місце встановлюють гирі до досягнення рівноваги. Сумарна вага гир більш точно відповідає масі, зважують. Спосіб заміщення широко використовується при вимірюванні електричних параметрів опору, ємності, індуктивності з використанням мостової схеми. Застосовують також спосіб протиставлення, коли вимірювання проводять два рази таким чином, щоб причина систематичної похибки при другому вимірюванні була протилежна за знаком порівняно з першим вимірюванням. Наприклад, друге зважування маси проводять на іншій чашці терезів. Потім визначається середнє значення результатів двох зважувань. Аналогічно визначається опір рівноплечого моста.

***Внесення поправок в результат вимірювання*** застосовується, якщо в внаслідок перевірки виявилося, що, наприклад, вольтметр дає занижені показання. Тоді визначається поправочний коефіцієнт і результат вимірювання множиться на цей коефіцієнт. Зазвичай на різних діапазонах вимірювання поправочні коефіцієнти різні. Іноді таблицю поправочних коефіцієнтів завод-виготовлювач повинен додати до паспорту приладу.

Перераховані вище способи усунення похибок не виключають повністю систематичні похибки (існує її залишок – невиключена систематична похибка). Тому виконується оцінка меж систематичних похибок. Це зв'язано з тим що причини їх виникнення найрізноманітніші і не завжди правильно враховуються. Навіть якщо є поправки до показань спеціального лабораторного приладу, то вони різні для різних діапазонів вимірювання не тільки за величиною, а й за знаком.

Якщо дійсне показання приладу при проведенні експерименту може мати широкий діапазон, то приймають систематичну похибку в межах максимальної похибки за паспортом заводу - виготовлювача. Постійні систематичні похибки вимірювань можуть бути виявлені шляхом порівняння результатів вимірювань з іншими, отриманими більш точними методами і засобами.

Постійна складова систематичної похибки не може бути виявлена, ні тим більше знайдена методами спільної обробки результатів. Тому завдання виключення змінної систематичної похибки може вирішуватися як за відсутності, так і при наявності постійної систематичної похибки. Якщо у всіх результатах спостережень міститься постійна систематична похибка, можна виключити її після обчислення середнього арифметичного невиправлених результатів спостережень.

Мінлива систематична похибка представляє проблему, яку не завжди можна вирішити однозначно. Вона може бути виявлена досить складними методами дисперсійного аналізу. Однак для вирішення інженерних задач досить застосувати графічний метод. Для цього по осі ординат на графік наносять результати спостережень, а по осі абсцис – моменти часу його отримання (або порядковий номер результату при рівномірному у часу їх отримання). Для наочності точки з'єднують послідовно прямими лініями (отримують ламану криву). На графіку проводять плавну криву (виконують апроксимацію), яка виражає тенденцію зміни результату вимірювання (якщо вона видна) або констатують, що така тенденція не спостерігається, і тоді вважають змінну систематичну похибку практично відсутньої (несуттєвою).

***Лекція 8***ВИКЛЮЧЕННЯ СИСТЕМАТИЧНИХ ПОХИБОК ВИМІРЮВАННЯ. КРИТЕРІЙ ІРВІНА, КРИТЕРІЙ РОМАНОВСЬКОГО, КРИТЕРІЙ ВАРИАЦІЙНОГО РОЗМАХУ, КРИТЕРІЙ ДІКСОНА.

***Питання, що розглядаються***

*Критерії виключення систематичних похибок. Критерій Ірвіна, Критерій Романовського, Критерій вариаційного розмаху, Критерій Діксона.*

***6.1 Критерій Ірвіна***

Для отриманих експериментальних даних визначають коефіцієнт за формулою:

, (6.1)

де *xn*+1, *xn* – найбільші значення випадкової величини;

*S* – середньоквадратичне відхилення, обчислене за всіма значеннями вибірки.

Потім цей коефіцієнт порівнюється з табличним значенням λ*q*, можливі значення якого наведені в таблиці 6.1.

Таблиця 6.1 – Критерій Ірвіна λ*q*

|  |  |
| --- | --- |
| Число вимірювань *n* | Рівень значимості |
| q=0.05 | q=0.01 |
| 1 | 2 | 3 |
| 2 | 2,8 | 3,7 |
| 3 | 2,2 | 2,9 |
| 10 | 1,5 | 2,0 |
| 20 | 1,3 | 1,8 |
| 30 | 1,2 | 1,7 |
| 50 | 1,1 | 1,6 |
| 100 | 1,0 | 1,5 |
| 400 | 0,9 | 1,3 |
| 1000 | 0,8 | 1,2 |

Якщо λ>λ*q*, то нульова гіпотеза не підтверджується, тобто результат – помилковий, і він повинен бути виключений при подальшій обробці результатів спостережень.

***6.2 Критерій Романовського***

Конкуруюча гіпотеза про наявність грубих похибок у підозрілих результатах підтверджується, якщо виконується нерівність:

, (6.2)

де *tp* – квантиль розподілу Стьюдента при заданій довірчої ймовірності з числом ступенів свободи *k* = *n* - *kn* (*kn* – число підозрілих результатів спостережень).

Фрагмент квантилів для розподілу Стьюдента представлений в таблиці 6.2. Точкові оцінки розподілу *X*ц.р. і СКО *S* результатів спостережень обчислюється без урахування *kn* підозрілих результатів спостережень.

Таблиця 6.2 – Критерій Стьюдента *tp* (квантилі Стьюдента)

|  |
| --- |
| Число ступенів свободи *k* |
| Довірча ймовірність *р* | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 10 | 12 | 18 | 22 | 30 | 40 | 60 | 120 | ∞ |
| 0,90 | 2,35 | 2,13 | 2,01 | 1,94 | 1,86 | 1,81 | 1,78 | 1,73 | 1,72 | 1,70 | 1,68 | 1,67 | 1,66 | 1,64 |
| 0,95 | 3,18 | 2,78 | 2,57 | 2,45 | 2,31 | 2,23 | 2,18 | 2,10 | 2,07 | 2,04 | 2,02 | 2,00 | 1,98 | 1,96 |
| 0,99 | 5,84 | 4,60 | 4,03 | 3,71 | 3,36 | 3,17 | 3,06 | 2,98 | 2,82 | 2,75 | 2,70 | 2,86 | 2,62 | 2,58 |

***6.3 Критерій варіаційного розмаху***

Є одним з простих методів виключення грубої похибки вимірювань (промахи). Для його використання визначають розмах варіаційного ряду впорядкованої сукупності спостережень (*х*1 ≤ *x*2 ≤ ... ≤ *xk* ≤ ... ≤ *xn*):

, (6.3)

Якщо який-небудь член варіаційного ряду, наприклад *xk*, різко відрізняється від усіх інших, то проводять перевірку, використовуючи наступну нерівність:

, (6.4)

де – вибіркове середнє арифметичне значення, обчислене після виключення передбачуваного промаху;

*z* – критеріальне значення.

Нульову гіпотезу (про відсутність грубої похибки) приймають, якщо вказане нерівність виконується. Якщо *xk* не задовольняє умові (6.4), то цей результат виключають з варіаційного ряду.

Коефіцієнт *z* залежить від числа членів варіаційного ряду *n*, що представлено в таблиці 6.3.

Таблиця 6.3 – Критерій варіаційного розмаху

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *n* | 5 | 6 | 7 | 8-9 | 10-11 | 12-15 | 16-22 | 23-25 | 26-63 | 64-150 |
| *z* | 1.7 | 1.6 | 1.5 | 1.4 | 1.3 | 1.2 | 1.1 | 1.0 | 0.9 | 0.8 |

***6.4 Критерій Діксона***

Критерій заснований на припущенні, що похибки вимірювань підкоряються нормальному закону (попередньо необхідно побудова гістограми результатів спостережень) і провести перевірку гіпотези про приналежності нормальному закону розподілу. При використанні критерію обчислюють коефіцієнт Діксона (спостережуване значення критерію) для перевірки найбільшого або найменшого екстремального значення в залежності від числа вимірювань. У таблиці 6.4 наведені формули для обчислення коефіцієнтів. Коефіцієнти *r*10, *r*11 застосовують, коли є один викид, а *r*21 і *r*22 – коли два викиди. Потрібно початкове упорядкування результатів вимірювань (обсягу вибірки). Критерій застосовується, коли вибірка може містити більш однієї грубої похибки.

Таблиця 6.4 – Формули коефіцієнтів Діксона

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Об’єм вибірки *n* | Коефіцієнт Діксона | Для найменшого екстремального значення | Для найбульшого екстремального значення |
| 3-7 | *r*10 |  |  |
| 8-10 | *r*11 |  |  |
| 11-13 | *r*12 |  |  |
| 14-25 | *r*13 |  |  |

Обчислені для вибірки за формулами значення коефіцієнтів Діксона *r* порівнюють з прийнятим (табличним) значенням критерію Діксона *rq* (таблиця 6.5). Нульова гіпотеза про відсутність грубої похибки виконується, якщо виконується нерівність *r* < *rq*. Якщо *r* > *rq*, то результат визнається грубої похибкою і виключається з подальшої обробки.

Таблиця 6.5 - Критеріальні значення коефіцієнтів Діксона (при прийнятому рівні значущості *q*)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Статистика | Число вимірювань | *rq* при рівні значимості *q* |
|  |  |  |  |
| *r*10 | 34567 | 0,8860,6790,5570,4820,434 | 0,9410,7650,6420,5600,507 | 0,9760,8460,7290,6440,586 | 0,9880,8990,7800,6980,637 |
| *r*11 | 8910 | 0,4790,4410,409 | 0,5540,5120,477 | 0,6310,5870,551 | 0,6830,6360,597 |
| *r*21 | 111213 | 0,5170,4900,467 | 0,5760,5460,521 | 0,5380,6050,578 | 0,6790,6420,615 |
| *r*22 | 141516171819202122232425 | 0,4620,4720,4520,4380,4240,4120,4010,3910,3820,3740,3670,360 | 0,5460,5250,5070,4900,4750,4620,4500,4400,4300,4210,4130,406 | 0,6020,5790,5590,5420,5270,5140,5020,4910,4810,4720,4640,457 | 0,6410,6160,5950,5770,5610,5470,5350,5240,5140,5050,4970,489 |

***Лекція 7***ВИКЛЮЧЕННЯ СИСТЕМАТИЧНИХ ПОХИБОК ВИМІРЮВАННЯ. КРИТЕРІЙ "3σ " РАЙТА, КРИТЕРІЙ СМИРНОВА, КРИТЕРІЙ ШОВЕНЕ.

*Питання, що розглядаються*

*Критерій "3σ " Райта, Критерій Смирнова, Критерій Шовене.*

***7.1 Критерії "3σ", Райта***

Критерій "правило трьох сигм" є одним з найпростіших для перевірки результатів, що підкоряються нормальному закону розподілу. Сутність правила трьох сигм: якщо випадкова величина розподілена нормально, то абсолютна величина її відхилення від математичного сподівання не перевершує потроєного середнього квадратичного відхилення.

На практиці правило трьох сигм застосовують так: якщо розподіл досліджуваної випадкової величини невідомо, але умова, вказана в наведеному правилі, виконується, то є підстави припускати, що досліджувана величина розподілена нормально; в іншому випадку вона не розподілена нормально. З цією метою для вибірки (включаючи підозрілий результат) обчислюється центр розподілу і оцінка СКО результату спостережень. Результат, який задовольняє умові *xi*под - *X*ц.р. ≥ 3*S*, вважається у яких грубу похибку і віддаляється, а раніше обчислені характеристики розподілу уточнюються.

Цьому критерію аналогічний критерій Райта, заснований на тому, що якщо залишкова похибка більше чотирьох сигм, то цей результат вимірювання є грубою помилкою і повинен бути виключений при подальшій обробці. Обидва критерії надійні при числі вимірювань більше 20 ... 50. Їх є правомочним застосовувати, коли відома величина генерального середнього відхилення (*S*). Може виявитися, що при нових значеннях *X*ц.р. і *S* інші результати потраплять в категорію аномальних. Однак, двічі використовувати критерії грубої похибки не рекомендується.

***7.2 Критерій Смирнова***

Критерій Смирнова використовується при обсягах вибірки *n* ≥ 25 або при відомих значеннях генеральних середнього і СКО. Він встановлює менш жорсткі кордону грубої похибки. Для реалізації цього критерію обчислюються дійсні значення квантилів розподілу (Спостережуване значення критерію) за формулою:

, (7.1)

Знайдене значення порівнюється з критеріальним *βk*, наведеними в таблиці 7.1.

Таблица 7.1 – Квантилі розподілу β*k*

|  |  |
| --- | --- |
| Об’єм вибірки *n* | Граничне значення *βk* при рівні значущості *q* |
| 0,100  | 0,050 | 0,0010 | 0,005 | 0,001 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 1,282  | 1,645 | 2,326 | 2,576 | 3,090 |
| 2 | 1,632  | 1,955 | 2,575 | 2,807 | 3,290 |
| 3 | 1,818  | 2,121 | 2,712 | 2,935 | 3,403 |
| 4 | 1,943  | 2,234 | 2,806 | 3,023 | 3,481 |
| 5 | 2,036  | 2,319 | 2,877 | 3,090 | 3,540 |
| 6 | 2,111  | 2,386 | 2,934 | 3,143 | 3,588 |
| 7 | 2,172  | 2,442 | 2,981 | 3,188 | 3,628 |
| 8 | 2,224  | 2,490 | 3,022 | 3,227 | 3,662 |
| 9 | 2,269  | 2,531 | 3,057 | 3,260 | 3,692 |
| 10 | 2,309  | 2,568 | 3,089 | 3,290 | 3,719 |
| 15 | 2,457  | 2,705 | 3,207 | 3,402 | 3,820 |
| 20 | 2,559  | 2,799 | 3,289 | 3,480 | 3,890 |
| 25 | 2,635  | 2,870 | 3,351 | 3,539 | 3,944 |
| 30 | 2,696  | 2,928 | 3,402 | 3,587 | 3,988 |
| 40 | 2,792  | 3,015 | 3,480 | 3,662 | 4,054 |
| 50 | 2,860  | 3,082 | 3,541 | 3,716 | 4,108 |
| 100 | 3,076  | 3,285 | 3,723 | 3,892 | 4,263 |
| 250 | 3,339  | 3,534 | 3,946 | 4,108 | 4,465 |
| 500 | 3,528  | 3,703 | 4,108 | 4,263 | 4,607 |

***7.3 Критерій Шовене***

Критерій Шовене застосовується для законів, які суперечать нормальному, і будується на визначенні числа очікуваних результатів спостережень *n*оч, які мають настільки ж великі похибки, як і підозрілий. Гіпотеза про наявність грубої похибки приймається, якщо виконується умова:

 . (7.2)

Порядок перевірки гіпотези наступний:

1) обчислюються середнє арифметичне і СКО результатів спостережень для всієї вибірки;

2) з таблиці нормованого нормального розподілу (Додаток А - інтегральна функція нормованого нормального розподілу) за величиною визначається ймовірність появи підозрілого результату в генеральної сукупності чисел *n*:

, (7.3)

3) число очікуваних результатів *n*оч визначається за формулою:

 (7.4)

Зазначені вище критерії в багатьох випадках виявляються "жорсткими". Тоді рекомендується користуватися критерієм грубої похибки "*k*", що залежить від обсягу вибірки *n* і прийнятої довірчої ймовірності *Р*.

Таблиця 7.2 - Залежність критерію грубої похибки *k* від обсягу вибірки *n* і довірчої ймовірності *Р.*

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *n* | *P* = 95,00 | *P* = 99,00 | *P* = 99,73 | *n* | *P* = 95,00 | *P* = 99,00 | *P* = 99,73 |
| 9 | 4,42 | 7,10 | 11,49 | 25 | 3,84 | 5,14 | 6,25 |
| 10 | 4,31 | 6,99 | 10,26 | 30 | 3,80 | 5,00 | 5,95 |
| 12 | 4,16 | 6,38 | 8,80 | 40 | 3,75 | 4,82 | 5,56 |
| 15 | 4,03 | 5,88 | 7,66 | 50 | 3,73 | 4,70 | 5,34 |
| 20 | 3,90 | 5,41 | 6,73 |  |  |  |  |

Для розподілів, відмінних від нормального, таких класів, як двомодальних кругловершинних композицій нормального і дискретного розподілу c ексцесом ε = 1,5 … 3,0; гостровершинних двумодальних; композицій дискретного двозначного розподілу і розподілу Лапласа з ексцесом ε = 1,5 … 6,0; композицій рівномірного розподілу з експоненціальним розподілом ексцесом ε = 1,8 … 6,0 і класом експоненційних розподілів в межах зміни ексцесу ε = 1,8 … 6,0 межа грубої похибки визначається величиною ± (*t*гр⋅σ) або ± (*t*гр⋅*S*), де:

, (7.5)

где γ – контрексцес;

, (7.6)

Похибки у визначенні оцінок *S* СКО і *t*гр є негативно корельованими,тобто зростання СКО *S* супроводжується зменшенням *t*гр. Тому визначення меж грубої похибки для законів, відмінних від нормального, з ексцесом *ε* ≤6 за допомогою критерію *t*гр є досить точним і може широко використовуватися на практиці. Оцінки , *S* і *ε* повинні обчислюватися після виключення підозрілих результатів з вибірки.

Після розрахунку меж грубої похибки результати спостережень, які опинилися всередині меж, повертаються, а раніше знайдені характеристики розподілу уточнюються. Для рівномірного розподілу за межами грубої похибки можна прийняти величину ± 1,8*S*.

***Лекція 8***СТАТИСТИЧНА ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ СПОСТЕРЕЖЕНЬ ПРИ РІВНОТОЧНИХ ВИМІРЮВАННЯХ.

***Питання, що розглядаються***

*Визначення точкових оцінок виправлених результатів вимірювання. Визначення закону розподілу результатів вимірювання.*

Після виключення результатів з грубими похибками і внесення поправок на систематичну похибку проводять математико-статистичну обробку виправлених результатів вимірювань.

***8.1 Визначення точкових оцінок виправлених результатів вимірювань***

Для цього за формулами визначають точкові оцінки координати центру розподілу і СКО результатів спостережень і вимірювань. Точкові оцінки можуть відрізнятися від визначених раніше, так як може зменшитися число результатів (якщо є грубі похибки), а при наявності систематичної складової похибки, розрахунок точкових оцінок повинен бути виконаний за виправленим (після виключення систематичної похибки) результатами спостережень. Для розрахунку середньоквадратичного відхилення середнього арифметичного значення (результату вимірювань) може бути так само використана формула Пітерса:

, (8.1)

де Δ*xi* – відхилення окремих, отриманих при вимірюваннях значень від середнього арифметичного.

Якщо *n*<4 замість формули (8.1) для оцінки середньоквадратичного відхилення середнього арифметичного значення використовують наближену формулу:

. (8.2)

Якщо кількість вимірювань досить велика (не менше 40…50), то потрібно систематизація вихідних даних і поділ варіаційного ряду на інтервали. Для інтервальних варіаційних рядів використовують формули:

, (8.3)

де *xi*o – значення вимірюваної величини в середині *k*-го інтервалу;

*k* - кількість інтервалів, на які розбитий варіаційний ряд.

, (8.4)

де - статистична ймовірність попадання *i*-го результату в даний інтервал. Вона знаходиться за формулою:

, (8.5)

де *mi* – частота потрапляння результатів в кожен k-й інтервал.

Причому, слід зауважити, що *S*\* - зміщена оцінка СКО результатів спостережень. Для визначення незміщеної оцінки необхідно отримати результат, використовуючи формулу:

, (8.6)

Число інтервалів визначають, користуючись формулою Старджесса:

, (8.7)

или

. (8.8)

Можна використовувати наведені в таблиці 8.1 рекомендовані числа інтервалів *k*, що визначаються залежно від числа експериментальних даних *n*.

Таблиця 8.1 – Рекомендоване число інтервалів

|  |  |
| --- | --- |
| Число експериментальних даних *n* | Рекомендоване число інтервалів *k* |
| 40 - 100 | 7 – 9 |
| 100 - 500 | 8 – 12 |
| 500 - 1000 | 10 - 16 |
| 1000 - 10000 | 12 - 22 |

Рекомендується вибирати непарне число інтервалів. При розрахунку числа інтервалів також слід округляти значення до цілого числа. Застосування числа інтервалів менше 3 не рекомендується, оскільки це не інформативно.

Потім обчислюють ширину інтервалу *h* за формулою:

, (8.9)

де *x*max, *x*min – найбільше та найменше значення даного варіаційного ряду (розмах).

Визначають межі інтервалів. Потім визначають частоту потрапляння в інтервали та середини інтервалів. Впорядковані значення рекомендується оформляти таблицею по формі, представленої у вигляді таблиці 8.2

Таблиця 8.2 - Проміжні значення інтервального ряду

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Межі інтервалів*xi* − *xi*+1 | СерединиІнтервалів *xio* | Частота потрапляння до інтервалів *mi* | Статистична ймовірність (частість)  |
|  |  |  |  |

***8.2 Визначення закону розподілу результатів вимірювань***

Для визначення закону розподілу випадкової величини необхідно, перш за все, віднести її або до дискретної, або до безперервної. Більшість вимірюваних величин ми вважаємо безперервними. У ряді випадків це пов'язано з недостатньою чутливістю наявних ЗВТ, які не дають можливості проводити вимірювання шляхом рахунку окремих частинок. Також слід зауважити, що межа між дискретними і безперервними величинами далеко не так визначена, як це може здатися на перший погляд. Наприклад, деяка кількість води, визначається лічильником витрати, може розглядатися як величина безперервна. Але вода складається з окремих молекул, і кількість її може відрізнятися одне від іншого тільки на ціле число молекул, тобто, якби ми могли враховувати молекули, кількість води потрібно було б розглядати як переривчасту (дискретну) величину.

Випадкова величина *X* може бути повністю охарактеризована з ймовірнісної точки зору, якщо є можливість обчислити ймовірність появи кожного її значення. Цим встановлюється закон розподілу випадкової величини.

Дискретна випадкова величина може бути задана переліком всіх її можливих значень і їх ймовірностей, але це неможна зробити для безперервних випадкових величин, оскільки неможливо скласти перелік всіх можливих значень *X*, які суцільно заповнюють деякий інтервал (*a*, *b*). З цією метою вводиться універсальний спосіб завдання будь-яких типів випадкових величин у вигляді функції розподілу ймовірностей. ***Функцією розподіл***у випадкової величини називають функцію *F*(*x*), що визначає ймовірність того, що випадкова величина *X* в результаті випробування (вимірювання) прийме значення, менше *x*, тобто:

. (8.10)

Іноді замість терміна "функція розподілу" використовують термін "***Інтегральна функція***". Можна дати більш точне (з урахуванням розглянутого поняття про *F*(*x*)) означення неперервної випадкової величини: випадкову величину називають безперервною, якщо її функція розподілу *F*(*x*) є безперервна, кусочно-диференційна функція з неперервною похідною. Безперервну випадкову величину можна також задати, використовуючи іншу функцію, яку називають ***щільністю розподілу*** або ***щільністю ймовірності*** (іноді її називають ***диференційною функцією***). Щільністю розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини *X* називають функцію *f*(*x*) – першу похідну від функції розподілу *F*(*x*):

. (8.11)

У математичній статистиці (в тому числі і метрологічної практиці) для опису статистичного розподілу частот кількісної ознаки *X* користуються емпіричної функцією розподілу. ***Емпіричної функцією розподілу*** (функцією розподілу вибірки) називають функцію *F*(*x*), що визначає для кожного значення *x* відносну частоту події *X*<*x*, тобто:

, (8.12)

де *nx*– число варіант, менших x;

*n* – обсяг вибірки.

Різниця між емпірично. і теоретично. функціями полягає в тому, що теоретична функція *F*(*x*) генеральної сукупності визначає ймовірність події *X*<*x*, а емпірична *F*(*x*) визначає відносну частоту цього ж події. Можна сказати, що емпірична функція розподілу вибірки служить для оцінки теоретичної функції розподілу генеральної сукупності. Для наочності використовують графічне представлення статистичного розподілу у вигляді полігону, гістограми та багатокутника розподілу. Нагадаємо, що полігон є ламаною кривою, яка з'єднує середини верхніх основ кожного стовпчика гістограми. Він більш наочно, ніж гістограма, відображає форму кривої розподілу для неперервної випадкової величини.

Полігон частот може бути використаний і для дискретної випадкової величини. В цьому випадку він являє собою ламану, відрізки якої з'єднують точки (*x*1; *n*1), (*x*2; *n*2), ..., (*xk*; *nk*), тобто показують відповідність між результатами спостережень і відповідними їм частотами появи *ni*. Статистичний розподіл представлений багатокутником розподілу або гістограмою має диференційну форму. В якості опції щільності розподілу ймовірностей похибки вимірювань або її складових слід приймати закон, близький до нормального, при дотриманні наступного умови: є підстави вважати, що реальна (статистична) функція щільності розподілу – функція симетрична, одномодальна, відмінна від нуля на кінцевому інтервалі значень аргументу, і інша інформація про щільність розподілу відсутня згідно.

У тих випадках, коли немає підстави вважати, що вказана вище умова виконується, слід приймати будь-яку іншу апроксимацію функції щільності розподілу ймовірностей похибки вимірювань. Прийнята апроксимація вважається задовільною при наступних умовах:

а) вона дозволяє розраховувати інтервальні характеристики похибки вимірювань за її середнім квадратичним відхиленням;

б) можливі значення похибки розрахунку, обумовлені відмінністю прийнятої апроксимації від реальної функції щільності розподілу, лежать в межах, допустимих для вирішення даного кінцевого завдання (ланцюга) вимірювань. При відсутності відомостей про задовільну апроксимацію функції щільності розподілу ймовірностей похибки вимірювань не можуть бути розраховані інтервальні характеристики похибки вимірювань і похибки випробувань, а також показники достовірності контролю параметрів зразків продукції.

За видом статистичних кривих можна також зробити висновок щодо нормальності розподілу експериментальних даних, хоча для остаточного діагнозу потрібна перевірка за критеріями згоди (або наближена ідентифікація за точковими числовими характеристиками). Остаточно результати по визначенню імовірнісних характеристик окремих груп спостережень слід оформляти у вигляді таблиці за формою, представленої в таблиці 8.3. Після обробки всіх груп спостережень, якщо вимірювання нерівноточні, отримані значення точкових оцінок числових характеристик варіаційного ряду слід звести в таблицю наступної форми, показаної в таблиці 8.4.

Таблиця 8.3 – Параметри функцій розподілів i-ої групи спостережень

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Межі інтервалів*xi* − *xi*+1 | СерединиІнтервалів *xio* | Нормований параметр *ti* | Диференційна функція нормування нормального розподілу *f*(*ti*) | Диференційна функція в одиницях обраної величини *p*(*xi*) | Емпірична диференційна функція | Емпірична інтегральна функція  | Нормована інтегральна функція *F*(*x*)=*F*(*t*) |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

Таблиця 8.4 – Результати вимірювань в групах спостережень

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Група спостережень | Об’єм вибірки | Координата центру розподілу | СКО спостережень |
|  |  |  |  |

# *Лекція 9* СТАТИСТИЧНА ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ СПОСТЕРЕЖЕНЬ ПРИ НЕРІВНОТОЧНИХ ВИМІРЮВАННЯХ

*Питання, що розглядаються*

*Перевірка гіпотези щодо нерівно точності результатів спостережень. Визначення точкових оцінок параметрів розподілу.*

Нагадаємо, що за ступенем точності вимірювання діляться на рівноточні і нерівноточні. Якщо в процесі проведення вимірювального експерименту могло використовуватися різне обладнання (засоби вимірювальної техніки, випробувань, контролю та ін.), вимірювання виконували різні оператори, мало місце калібрування обладнання, змінено установки навколишнього середовища (температура, вологість, забруднення повітря і т. д), а також вимірювання виконувалися в різний час (великий інтервал часу між вимірюваннями) необхідно переконатися, що вимірювання є рівноточними. Іншими словами, якщо відсутні відомості про рівноточні вимірюваня, то необхідно всю представлену сукупність спостережень розбити на групи (серії), в межах яких вони є рівноточними. Оскільки спільна обробка результатів серій можлива за умови, що їх значення однорідні, що оцінюється з використанням методів математичної статистики.

Групи спостережень при вимірюваннях називаються однорідними, якщо складаються зі значень, що підкоряються одному і тому ж закону розподілу ймовірності. В іншому випадку серії вважаються неоднорідними. Перевірка однорідності є обов'язковою при виборі способу спільної обробки результатів декількох серій вимірювань. При такій перевірці порівнюються між собою середнє арифметичне значення серії, дисперсії і розраховується довірчий інтервал оцінок середньоквадратичного відхилення.

***9.1 Перевірка гіпотези щодо нерівноточності результатів спостережень***

Ряди результатів спостережень приймаються нерівнорозсіяними (нерівноточними), якщо їх центри розподілів є оцінками одного і того ж значення вимірюваної величини, а оцінки їх дисперсій незначно відрізняються один від одного. Правомочність прийняття рішення щодо приналежність рядів до нерівноточних перевіряється за допомогою дисперсійного аналізу. При цьому визначаються центри розподілів, СКО, що є оцінками числових характеристик розподілів окремих рядів, мають випадковим впливає чинникам, за якими проводиться об'єднання результатів спостережень за групами (серіями), відносяться, як зазначено раніше, зовнішні умови (температура, тиск, вологість і т. д.), тимчасова послідовність проведення вимірювань і т. п.

У метрологічній практиці необхідність порівняння дисперсій виникає, якщо потрібно порівняти точність приладів, самих методів вимірювань і т. д. Очевидно, краще той прилад і метод, який забезпечує найменше розсіювання результатів вимірювань, тобто найменшу дисперсію. Оскільки на вимірювальну процедуру діє велика кількість факторів, що обумовлюють появу як позитивних, так і негативних відхилень (похибок), то приймемо в якості закону розподілу результатів спостережень нормальний. Тоді центром розподілу закону буде вибіркове середнє арифметичне значення отриманих результатів.

***9.1.1 Аналіз однорідності середніх арифметичних значень***

Якщо середнє арифметичне рядів значимо відрізняються один від одного, то це вказує на появу при вимірюваннях в одному з рядів домінуючого фактора або групи факторів, що зміщують центр розподілу, що свідчить про появу систематичної похибки. Для порівняння проводять дві серії експериментів при оптимальних для кожного процесу умовах і за отриманими результатами розраховують середнє арифметичне в кожній серії

. Гіпотеза про рівність математичних очікувань двох рядів спостережень або допустимому відмінність їх оцінок перевіряється за допомогою критерію Стьюдента. Для цього дисперсії обох серій повинні бути однорідними, що перевіряється за критерієм Кочрена або Фішера (методика перевірки приведена далі). Потім розраховують середню квадратичну похибку для різниці двох середніх значень з *n*I і *n*II вимірювань:

, (9.1)

з числом ступенів свободи:

, (9.2)

Різниця є випадковою величиною і при зазвичай наявному малому числі вимірювань підкоряється *t*-розподілу. Для порівняння двох середніх арифметичних використовують критерій Стьюдента:

, (9.3)

В залежності від прийнятої довірчої ймовірності *P* (рівня значущості *q*) і числа ступенів свободи *k* знаходять *t* (*P*,*k*). Якщо бачимо, що значення критерію Стьюдента виявилося не більше критичного, то немає підстави відкинути висунуту раніше гіпотезу про допустиму відмінність оцінок середніх арифметичних. Іншими словами: якщо *tp* ≤ *t*(*P,q*), то , тобто, середні однорідні. Якщо *tp* ≥ *t*(*P,q*), то відмінність між середніми визнається значущим, тобто про вимірювання кажуть, що вони не сходяться чи не відтворюються.

***9.1.2 Перевірка однорідності дисперсій***

Якщо число спостережень в серіях однаково, то однорідність оцінок дисперсій можна проаналізувати за допомогою критерію Кочрена *G* (Використання цього критерію краще, оскільки його розподіл знайдено точно). Нульова гіпотеза, яка полягає в тому, що дисперсії нормально розподілених сукупностей рівні між собою, підтверджуються, якщо бачимо значення критерію менше критичної точки, тобто:

. (9.4)

В цьому випадку розраховують відношення максимальної оцінки дисперсії до суми оцінок всіх дисперсій

 (9.5)

і порівнюють це відношення з критичним значенням критерію Кочрена *G*кр. Слід підкреслити, що мова йде про виправлені дисперсії, тобто обчислених після виключення грубих і систематичних похибок.

Розподіл випадкової величини *G* залежить тільки від числа ступенів свободи *k* і кількості вибірок *l*. Якщо *G* < *G*кр, то оцінки однорідні. *G*кр знаходять по таблиці Додатки Б в залежності від числа ступенів свободи *k* чисельника числа порівнюваних дисперсій *N* (кількість вибірки *l*) і прийнятого рівня значущості *q*.

Якщо число повторень (число спостережень) в серіях різне, однорідність дисперсій можна проаналізувати за допомогою критерію Фішера-Снедекора *FТ*. Для цього з усіх *N* оцінок дисперсій вибирають дві – максимальну і мінімальну. Якщо виявиться, що різниця між ними незначима, то тим більше незначима і відмінність між іншими дисперсіями. З цією метою обчислюють відношення:

. (9.6)

Якщо *F* < *FТ*, то все оцінки дисперсій однорідні. Значення *FТ* дано в таблиці Додатка В в залежності від прийнятого рівня значущості α(*q*) і числа ступенів свободи *k*I і *k*II відповідно для і . Гіпотеза в цьому випадку приймається, якщо виконується умова:

, (9.7)

де SI > SII;

 - квантиль розподілу Фішера при рівні значущості *q*/2 і числі ступенів свободи *k*I = *n*I-1, *k*II = *n*II-1 (*n*I, *n*II – обсяги вибірки).

Рівень значущості рекомендується призначати в діапазоні *q* = 0,01 ... 0,1. Якщо дисперсії двох рядів спостережень значимо відрізняються один від одного, то ступінь довіри до результатів вимірювань різні. Ступінь довіри виражається вагою *Pj*. Ваги можуть встановлюватися суб'єктивно на підставі думки експериментатора або об'єктивно – за числом спостережень в рядах, чутливості засобів або методів вимірювань. Наприклад, при порівнянні результатів вимірювань рядів, що містять число спостережень *nj*, результату кожного ряду присвоюється вага згідно з формулою:

, (9.8)

де *c* – постійна величина.

Аналіз формули показує, що більший ступінь довіри має результат ряду з великим об'ємом вибірки. На підставі теорії ймовірності та математичної статистики критерієм ваги спостережень є величина, зворотна дисперсіям розподілів або їхніми оцінками:

, (9.9)

Зазвичай чисельник у формулі (9.9) вибирається таким, щоб частка від поділу була невеликою і зручною для подальших розрахунків.

***9.1.3 Визначення довірчого інтервалу оцінок середньоквадратичного відхилення***

Мінливість результатів вимірювань характеризує коефіцієнт варіації, який визначається за такою формулою:

 (9.10)

Чим вище *КB*, тим більше мінливість вимірювань щодо середніх значень. Коефіцієнт варіації оцінює розкид при оцінці декількох вибірок і використовується для порівняння точності тієї чи іншої серії (групи) вимірювань. Для отримання максимально точної оцінки дисперсії потрібно провести експеримент з якомога більшою кількістю спостережень. При кінцевому числі ступенів свободи отримана оцінка дисперсії є зміщеною і довірчий інтервал оцінки не буде симетричний щодо неї:

, (9.11)

де σ – істинне значення середньоквадратичного відхилення;

, – коефіцієнти з таблиці Додатка Г в залежності від рівня значущості *q* і числа ступенів свободи *k* при оцінці дисперсії ; *z*I> *z*II.

***9.2 Визначення точкових оцінок параметрів розподілу***

Найімовірніше значення вимірюваної фізичної величини, що називається середнім зваженим, знаходиться за формулою:

, (9.12)

де *m* – число груп (серій) спостережень;

 – середнє арифметичне в *j*-й групі спостережень;

 *Pj* – вага кожної *j*-ї групи спостережень.

Значення оцінки СКО для кожного ряду спостережень визначають по формулою:

, (9.13)

де *m* – число груп (серій) спостережень.

Оцінка СКО середнього зваженого обчислюється за формулою:

, (9.14)

или

, (9.15)

де - СКО результату спостережень в окремій групі (ряду).

З формули (9.15) видно, що оцінка СКО середнього зваженого менше будь-якої оцінки СКО рядів. Тому при обробці нерівноточних рядів точність результатів вимірювань значно підвищується.

# *Лекція 10* ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ЗАКОНУ РОЗПОДІЛУ СПОСТЕРЕЖЕНЬ ЗА СТАТИСТИЧНИМИ КРИТЕРІЯМИ.

*Питання, що розглядаються*

*Перевірка нормальності розподілу за критерієм Пірсона. Перевірка нормальності розподілу за складеним критерієм . Перевірка нормальності розподілу за критерієм згоди Колмогорова А.М. Коефіцієнт асиметрії та ексцесу. Графо-аналітичний метод*

***10.1 Основні теоретичні відомості***

При використанні методів математичної статистики надзвичайно важливо знати закон розподілу властивості, що вивчається. По суті, вже сама досліджувана змінна представлена масивом емпіричних даних з певним законом розподілу ймовірностей реалізації її значень. Тому будь-яка статистична обробка починається, як правило, зі спроби оцінити закон розподілу. Прагнення застосувати методи, які розроблено для певного закону розподілу, в умовах, коли реальний розподіл відрізняється від гіпотетичного, є найбільш розповсюдженою помилкою, що призводить у підсумку і до помилкових висновків.

Критерії перевірки гіпотез щодо закону розподілу прийнято називати *критеріями згоди,* які можна розділити на дві групи: *загальні* та *спеціальні*. Загальні критерії застосовують до формулювань гіпотез про згоду спостережень з будь-яким можливим розподілом. Спеціальні критерії згоди використовують у разі перевірки гіпотези щодо конкретної форми розподілу – нормальної, рівномірної, експоненціальної тощо. Такі критерії носять відповідну назву – *критерії нормальності, критерії рівномірності* й т.п.

Розрахунки емпіричного розподілу та його графічна візуалізація не дають надійних підстав для висновку щодо закону розподілу ознаки у сукупності, з якої взята вибірка. Тим часом знання цього закону є необхідною умовою використання багатьох математичних методів. Наприклад, застосування параметричних критеріїв, дисперсійного аналізу вимагає попередньої перевірки нормальності розподілу досліджуваної ознаки.

Серед методів оцінювання законів розподілу ймовірностей випадкових величин біля двох десятків було спеціально розроблено для перевірки нормальності. Процедура перевірки гіпотези про відповідність емпіричного розподілу теоретичному складається з таких етапів:

1. Обчислення оцінок параметрів передбачуваного розподілу на основі даних вибіркового спостереження.

2. Визначення теоретичних частот на основі одержаних оцінок параметрів, виходячи з теоретичної функції частот.

3. Оцінка близькості емпіричного розподілу теоретичному на основі певного критерію згоди.

Оскільки нормальний розподіл зустрічається досить часто, то найчастіше перевіряють гіпотези про відповідність вибіркового розподілу нормальному. Однак, поряд з нормальним розподілом генеральні сукупності можуть бути розподілені і за іншими законами. Тому вибір теоретичного закону розподілу повинен базуватись на глибокому розумінні характеру формування досліджуваного явища або процесу. Певну роль у вирішенні цього питання може відігравати розрахунок статистичних характеристик вибіркових розподілів і побудова графіків (гістограми, полігону, кумулятивної кривої).

Для нормального закону розподілу щільність розподілу задається рівнянням:

 (10.1)

де *т* — математичне сподівання,

*σ* — середнє квадратичне відхилення ( — дисперсія).

*Унормованим нормальним розподілом* називають нормальний закон розподілу з нульовим математичним сподіванням 0 і дисперсією 1. Тоді щільність розподілу задається рівнянням:

  (10.2)

Щільність унормованого нормального розподілу має вигляд, представлений на рис.2.1.



Рисунок 2.1 – Графік функції щільності унормованого нормального розподілу випадкових величин

Дисперсія  характеризує квадрат розсіювання випадкової величини. Для того, щоб отримати характеристику розсіювання, використовують стандартне відхилення σ. Зміна математичного сподівання не змінює форму кривої, а лише переміщує її вздовж осі *.* При зміні дисперсії форма кривої змінюється (рис. 2.2).



Рисунок 2.2 - Графік функції щільності ймовірності при різних  ()

Що більше значення дисперсії, тобто що вищий ступінь розсіювання випадкових величин, тим більше пологою і розтягнутою стає крива і навпаки. Площа під графіком функції щільності становить 1 — це ймовірність достовірної події.

Основна кількість отриманих результатів групується навколо найімовірнішого значення. У практичних застосування важливим є правило “трьох сигм”: , тобто ймовірність того, що нормально розподілена випадкова величина відрізняється від свого математичного сподівання більше ніж на три сигми, приблизно дорівнює 0,0027. Така подія є практично неможливою.

***10.2 Критерій Пірсона***

Одним з найбільш поширених критеріїв узгодження, за допомогою яких перевіряють гіпотезу про вид розподілу ймовірностей, є так званий *«критерій χ*2*» Пірсона*. Цей критерій використовується для вибірок, об’ємом більше 50.

Відповідно до цього методу, емпіричне розподілення вибірки, що виражене абсолютними, відносними або відносними накопиченими частотами згрупованого ряду вимірювань порівнюється з гіпотетичним теоретичним розподіленням відповідної генеральної сукупності.

Для того, щоб при заданому рівні значимості перевірити гіпотезу, що генеральна сукупність розподілена нормально, необхідно спочатку розрахувати теоретичні частоти, а потім значення критерію χ2р.

 . (10.3)

Теоретичні частоти *n*i/ знаходять за формулою:

 , (10.4)

де *N* – об’єм вибірки;

*h* – різниця між двома сусідніми варіантами;

 - середнє квадратичне відхилення;

 - функція Лапласа, значення якої обирається з таблиці в залежності від *u*i (Додаток А);

 - кінці інтервалів нормального розподілу.

Таблиці 10.2 та 10.3 – розрахункові, за допомогою яких найбільш зручно проводити розрахунки.

Таблиця 10.2 – Розрахункова таблиця

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № п/п | *х*і | *ui* | φi(*ui*) | n/i |
|  |  |  |  |  |

Таблиця 10.3 – Розрахункова таблиця

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № п/п | ni | n/i | ni - n/i | (ni - n/i)2 | (ni - n/i)2/ n/i |
|  |  |  |  |  |  |

Після розрахунку за таблицею критичних точок χ2 (Додаток Д), за заданим рівнем значимості α та числом ступенів свободи *k* = *s* – 3 (*s* – число груп вибірки) необхідно знайти критичну точку χ2кр(α; *k*).

Якщо χ2р < χ2кр – немає причин відхилити гіпотезу.

Якщо χ2р > χ2кр – гіпотезу відхиляють.

***10.3 Перевірка нормальності розподілу за складним критерієм***

При малих обсягах вибірки 10≤n<50 для перевірки згоди експериментального розподілу з нормальним застосовується складений критерій *.* При перевірці задаються рівнем значущості *q*I(*α*I) (для критерію I) і *q*II(*α*II) (для критерію II). Рівень значущості складеного критерію повинні задовольняти умові:

. (10.5)

Гіпотеза про узгодженість експериментального розподілу з теоретичним нормальним перевіряється наступним чином:

1) перевіряємо виконання критерію I. Для цього визначається значення за формулою:

, (10.6)

де *S*\*(σ\*) – незсунута оцінка СКО результату спостережень, знайдена за формулою:

, (10.7)

Нульова гіпотеза про приналежність емпіричного розподілу нормальному справедлива, якщо виконується умова:

, (10.8)

, – кванти лі розподілу .

2) виконуємо перевірку за критерієм II. Гіпотеза про нормальність розподілу підтверджується, якщо не більше *m* різниць перевершили значення .

Незсунута оцінка СКО результату спостережень (*S*) визначається за відомою формулою:

 (10.7)

Верхній квантиль інтегральної функції нормованого розподілу Лапласа , що відповідає ймовірності 2 p знаходиться по таблиці 10.3.

Таблиця 10.3 – Квантилі інтегральної функції Лапласа

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *P* | 0,90 | 0,95 | 0,96 | 0,97 | 0,98 | 0,99 |
|  | 1,65 | 1,96 | 2,06 | 2,17 | 2,33 | 2,58 |

Задаються рівнем значущості *q*2 і для відомого *n* з таблиці 10.5 знаходять значення *P* і *m*.

Таблиця 10.4 - Квантилі розподілу статистики d

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *n* | *d*0,01 | *d*0,05 | *d*0,10 | *d*0,90 | *d*0,95 | *d*0,99 |
| 11 | 0,9359 | 0,9073 | 0,8899 | 0,7409 | 0,7153 | 0,6675 |
| 16 | 0,9137 | 0,8884 | 0,8733 | 0,7452 | 0,7236 | 0,6829 |
| 21 | 0,9001 | 0,8768 | 0,8631 | 0,7495 | 0,7304 | 0,6950 |
| 26 | 0,8901 | 0,8625 | 0,8570 | 0,7530 | 0,7360 | 0,7040 |
| 31 | 0,8827 | 0,8625 | 0,8511 | 0,7559 | 0,7404 | 0,7110 |
| 36 | 0,8769 | 0,8578 | 0,8468 | 0,7583 | 0,7440 | 0,7167 |
| 41 | 0,8722 | 0,8540 | 0,8436 | 0,7604 | 0,7470 | 0,7216 |
| 46 | 0,8682 | 0,8508 | 0,8409 | 0,7621 | 0,7496 | 0,7256 |
| 51 | 0,8648 | 0,8481 | 0,8385 | 0,7636 | 0,7518 | 0,7291 |

Результуючий рівень значущості складеного критерію:

. (10.8)

Якщо виявиться, що хоча б один з критеріїв не виконується, то вважають, що розподіл досліджуваної сукупності результатів вимірювань не відповідає нормальному закону.

Таблиця 10.5 – Значення *m* і *P*, які відповідають різним *n* і *q*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *n* | *m* | *P* при рівні значимості *q*, що дорівнює |
| 0,01 | 0,02 | 0,05 |
| 10 | 1 | 0,98 | 0,98 | 0,96 |
| 11-14 | 1 | 0,99 | 0,98 | 0,97 |
| 15-20 | 1 | 0,99 | 0,99 | 0,98 |
| 21-22 | 2 | 0,98 | 0,97 | 0,96 |
| 23 | 2 | 0,98 | 0,98 | 0,97 |
| 23-27 | 2 | 0,98 | 0,98 | 0,97 |
| 28-32 | 2 | 0,99 | 0,98 | 0,97 |
| 33-35 | 2 | 0,99 | 0,98 | 0,98 |
| 36-49 | 2 | 0,99 | 0,99 | 0,98 |

***10.4 Перевірка нормальності розподілу за критерієм згоди Колмогорова А.М.***

В якості міри розбіжності між емпіричним і теоретичним законами розподілу в критерії Комогорова А.М. обрано максимальне значення *D* модуля різниці між емпіричною функцією розподілу *F*\*(*x*) і обраною теоретичної функцією розподілу *F*(*x*).

. (10.9)

При цьому Колмогоровим А.М. доведено, що незалежно від виду передбачуваної функції розподілу неперервної випадкової величини *X* в разі необмеженого збільшення числа незалежних вимірювань *n* ймовірність нерівності

прагне до межі ймовірності p(λ), рівному:

 . (10.10)

При практичному застосуванні критерію згоди Колмогорова А.М. величина λ, що є критеріальним параметром, приймається рівною λ = *D*⋅. Значення *D* знаходиться після побудови на одному графіку емпіричної і теоретичної функцій. Потім по обчисленому значенню λ по таблиці 10.6 визначається ймовірність *p*(λ) як ймовірність того, що за рахунок випадкових причин максимальне розбіжність між емпіричної і теоретичної функціями розподілу буде не менше, ніж отримане з результатів вимірювань.

Отже, якщо ймовірність *p*(λ) досить велика, то гіпотезу про відповідності емпіричного розподілу теоретичному слід розглядати як правдоподібну, яка не суперечить емпіричним даними.

Таблиця 10.6 – Критеріальні значення

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| λ | *p*(λ ) | λ | *p*(λ ) | λ | *p*(λ ) |
| 0,0 | 1,000 | 0,7 | 0,711 | 1,2 | 0,112 |
| 0,3 | 1,000 | 0,8 | 0,544 | 1,3 | 0,068 |
| 0,4 | 0,997 | 0,9 | 0,393 | 1,4 | 0,040 |
| 0,5 | 0,964 | 1,0 | 0,270 |  |  |
| 0,6 | 0,864 | 1,1 | 0,178 |  |  |

***10.5 Коефіцієнт асиметрії та ексцесу***

Перевірку гіпотези щодо нормального розподілу випадкових величин можна зробити, обчислюючи значення коефіцієнтів асиметрії *s* та ексцесу ε. Коефіцієнт асиметрії розраховується за такою формулою:

 , (10.11)

де *n* – кількість результатів вимірювання;

*хі* – результат вимірювання;

 - середнє значення.

Коефіцієнт асиметрії характеризує несиметричність розподілу (наприклад, один бік розподілу пологий, а інший крутий). Для симетричних розподілів (зокрема, для нормального) коефіцієнт асиметрії дорівнює нулю.

Характеристикою точності визначення коефіцієнта асиметрії може бути його нормоване стандартне відхилення. Яке залежить лише від кількості результатів спостереження.

 . (10.12)

Коефіцієнт асиметрії вважається значним, якщо виконується умова:

s ≥ 3σs . (10.13)

Коефіцієнт ексцесу характеризує сплющеність розподілу та протяжність його спадів. Він розраховується за формулою:

 . (10.14)

Аналогічно як для коефіцієнта асиметрії характеристикою точності знаходження коефіцієнта ексцесу може бути його нормоване стандартне відхилення:

 . (10.15)

Тут також коефіцієнт ексцесу вважають значним, якщо виконується умова:

ε ≥ 3σε . (10.16)

Якщо нерівності (2.7) та (2.10) виконуються, то вважають, що закон розподілу випадкової величини відрізняється від нормального.

***10.6 Графоаналітичний метод***

Для порівняно невеликих сукупностей перевірку нормальності закону розподілу величин можна здійснити графоаналітичним методом: для даної вибірки за певними правилами будують графік емпіричного розподілу, і якщо точки цього графіку розташуються приблизно на прямій лінії, то дана сукупність відповідає нормальному закону розподілу. Цей метод придатний для вибірок за кількості спостережень 3 < *n* < 40.

Застосовуючи графоаналітичний метод, слід передусім упорядкувати вибірку, розмістивши значення *х* в порядку зростання: *х*1 ≤ *х*2 ≤…≤ *хn*

Якщо деякі значення в цьому варіаційному ряді повторюються, то до робочої таблиці їх заносять один раз, але вказують частоту *mj* даної варіанти *xj*. В наступній графі записують наростаючим підсумком так звані накопичені частоти *Мj* (сумарна кількість значень *mj* від початку до *xj* включно), після чого обчислюють інтеграл Лапласа:

 . (10.17)

За таблицею додатка Е слід встановити значення *tj*, а потім побудувати графік *tj=f(xj)*. Якщо графік цієї функції приблизно прямолінійний, то можна вважати, що дана вибірка не суперечить нормальному законові розподілу.

# *Лекція 11* ПРИБЛИЗНА ІДЕНТИФІКАЦІЯ ФОРМИ ТА ВИДУ ЗАКОНУ РОЗПОДІЛУ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ.

*Питання, що розглядаються*

*Приблизна оцінка характеристик розподілів, відмінних від нормальних.*

При вивченні розподілів, відмінних від нормальних, виникає необхідність кількісно оцінити цю різницю. З цією метою вводять специфічні характеристики, зокрема асиметрію і ексцес. Для нормального розподілу ці характеристики дорівнюють нулю. У метрологічній практиці використовують емпіричні моменти. Всі моменти являють собою деякі середні значення, причому якщо усереднюються величини, відлічувані від початку координат, то моменти називають початковими, а якщо від центру розподілу – то центральними. Початкові і центральні моменти *r*-го порядку визначаються відповідно за формулами:

; (11.1)

 (11.2)

При обчисленні статичних оцінок невідомого параметра – теоретичного розподілу результатів спостережень, які являють собою функції від спостережуваних випадкових величин, оперують лише обмеженими даними (вибіркою). Тому при обчисленні емпіричних моментів усереднення випадкової величини (результату спостереження) здійснюється через підсумовування (арифметичне або геометричне), а не через операцію інтегрування.

Наближена оцінка (як частина етапу ідентифікації) форми розподілу може здійснюватися за поєднанням оцінок параметрів розподілу з використанням критеріальних значень характеристик розподілу, зазначених в таблиці Ж.1 Додатка Ж. Оцінка першого центрального моменту визначається за формулою:

 (11.3)

При = 0 оцінкою центру розподілу є середнє арифметичн. Оцінка другого центрального моменту μ2, що характеризує дисперсію *D* розподілу, визначається за формулою:

 . (11.4)

Для оцінки дисперсії і СКО за експериментальними даними використовується співвідношення для незсунутої дисперсії:

 . (11.5)

Оцінка третього центрального моменту μ*3* (характеристика моменту вказує на асиметрію) характеризує скошеність спадів і визначається за формулою:

 . (11.6)

Розподіл вважається симетричним, якщо виконується умова:

, (11.7)

 – коефіцієнт асиметрії;

 – оцінка СКО коефіцієнта асиметрії, яка визначається за формулою:

 . (11.8)

Коефіцієнт асиметрії визначається за формулою:

. (11.9)

Оцінка четвертого центрального моменту μ4 (характеризує протяжність спадів) визначають за формулою:

 . (11.10)

Ексцес закону розподілу визначають за формулою:

 . (11.11)

Коефіцієнт ексцесу визначається за формулою:

. (11.12)

Величина, зворотна ексцесу, називається контрексцесом, він визначається виразом:

. (11.13)

Ідентифікація розподілу обов'язково включає визначення показника форми α, який є функцією ексцесу і знаходиться за графіком, показаним на рисунку 11.1.



Рисунок 11.1 – Показник форми α розподілу

Інформаційними характеристиками розподілу є ентропійне значення похибки, яке визначається як:

 (11.14)

та ентропійний коефіцієнт, що визначає форму розподілу

. (11.15)

# *Лекція 12* ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ПРЯМИХ ОДНОКРАТНИХ ТА ОПОСЕРЕДКОВАНИХ ВИМІРЮВАНЬ.

*Питання, що розглядаються*

*Оцінка та підсумовування випадкових та систематичних похибок при прямих вимірюваннях. Обробка результатів опосередкованих вимірювань.*

***12.1 Обробка результатів прямих однократних вимірювань***

Прямі одноразові вимірювання мають найбільше поширення в вимірювальній техніці, побуті, медичній практиці проведення біохімічних аналізів з метою постановки попереднього аналізу і у всіх випадках, де одноразове вимірювання може дати уявлення про вимірювані величини.

При одноразових вимірюваннях показання приладу *xi* приймають рівним результату вимірювання, при цьому трудомісткість і час вимірювання істотно зменшуються. Одноразові вимірювання з точки зору співвідношення випадкових і систематичних похибок доцільні тоді, коли збіжність результатів вимірювань висока, а поява систематичної похибки неминуча. Таким чином, одноразові вимірювання застосовують в тому випадку, якщо середнє квадратичне відхилення СКО результатів спостережень, виконаних в однакових умовах (а саме СКО є параметром збіжність) близько до нуля. Тоді результати окремих спостережень практично збігаються і, отже, середнє арифметичне значення результатів спостережень і його математичне очікування практично рівні між собою. Що означає, що випадкова похибка зневажливо мала і немає необхідності в виконанні повторних спостережень.

За результат одноразового вимірювання приймається значення величини, отримане при вимірюванні (після виключення систематичної похибки). Відмінність результату вимірювання від спостереження полягає в тому, що останній містить у собі похибки (як систематичні, так і випадкові), відсутні довірчі межі в яких слід очікувати знаходження істинного (дійсного) значення випадкової величини.

Оцінка похибки результату обчислюється попередньо за відомими оцінками складових похибки. Всі складові розглядаються як випадкові величини, кожна з яких підпорядковується своїми законами розподілу. Сумарна похибка результату вимірювання має розподіл як композиція зі складових розподілів. Аналітичне рішення такого завдання трудомістке і стає практично нерозв'язною вже для 3-4 складових. Тому для оцінки похибки однократного прямого вимірювання використовують наближені методи.

Щоб оцінити сумарну похибку результату, необхідно провести ретельний попередній аналіз всіх факторів, що впливають (похибка ЗВТ, методу, суб'єктивна похибка та ін.). За своїм проявом вони можуть бути віднесені до невиключеної систематичної та випадкової похибок. Невиключені систематичні похибки, якщо їх довірчі межі задані різними можливостями, підсумовуються за формулою:

, (12.1)

де *ki* – коефіцієнт, що відповідає довірчій ймовірності, який може набувати значень: *ki* = 0,95 при *P* = 0,90; *ki* = 1,1 при *P* = 0,95 і ki = 1,4 при *P* = 0,99.

Якщо невиключені систематичні похибки визначені при однаковою довірчої ймовірності, то формула підсумовування має вид:

, (12.2)

де *θi* – межа *i*-й невиключеної систематичної похибки;

*K* – коефіцієнт залежності окремих невиключених систематичних похибок від обраної довірчої ймовірності *P* при їх рівномірному розподілі (при *P* = 0,99; *K* ≈ 1,4).

Якщо випадкові складові похибки задані довірчими кордонами, отриманими з різними можливостями, то випадкова похибка прямого виміру визначається за формулою:

, (12.3)

де ;

 – верхній квантиль інтегральної функції нормованого розподілу Лапласа, що відповідає ймовірності *P*/2.

У разі однакової ймовірності завдання меж випадкових похибок формула (12.3) перетворюється до виду:

. (12.4)

Слід зазначити, що правило підсумовування випадкових похибок справедливо для широкого класу розподілів (від Лапласа до рівномірного) при довірчій ймовірності *P* = 0,90. При інших *P* оцінка сумарної похибки є наближеною.

Якщо відомі за попередніми дослідженнями СКО складових випадкових похибок, то довірча межа сумарної випадкової похибки знаходиться за формулою:

, (12.5)

де .

Межа основної абсолютної похибки вимірювальної системи при висуванні гіпотези щодо їх нормального розподілу обчислюється за формулою:

, (12.6)

де Δп – основна абсолютна похибка приладу;

Δд – основна абсолютна похибка вимірювального перетворювача (датчика);

Δ*i* – абсолютна похибка інших елементів вимірювальної системи.

Нагадаємо, що ЗВТ в загальному випадку являє собою деяку систему, що складається з перетворювачів, блоків посилення, порівняння, фільтрації, виведення і каналів інтерфейсу. Вимірювальні канали або системи включають в себе ЗВТ, засоби перетворення та ін. Якщо на основі проведеної метрологічної атестації вимірювальної системи встановлено абсолютні похибки кожного з її елементів, що відповідають іншим значенням діапазону вимірюваної величини, то основна абсолютна похибка системи, яка відповідає цим окремим значенням діапазону, визначається за формулою:

, (12.7)

***12.2 Обробка результатів опосередкованих вимірювань***

При непрямих вимірюваннях значення шуканої фізичної величини *Y* знаходиться на підставі результатів вимірювань аргументів (окремі результати спостережень в ряду вимірювань) *x*1, *x*2, ..., *xm*, пов'язаних з шуканою величиною відомою функціональною залежністю:

, (12.8)

Результати вимірювань аргументів і оцінки їх похибок можуть бути отримані з прямих, непрямих, сукупних, сумісних вимірювань або з літературних джерел. Функція *F* повинна бути відома з теоретичних передумов або встановлена експериментально з похибкою, якою можна знехтувати.

При оцінюванні довірчих меж похибок результату непрямого вимірювання зазвичай приймають ймовірність, рівну 0,95 або 0,99. Використання інших ймовірностей повинна бути обґрунтована.

***12.2.1 Обробка результатів непрямих вимірювань при лінійної залежно***

Для вирішення завдання опосередкованих вимірювань необхідно, щоб були відомі: вид функцій, результати вимірювань аргументів *x*1, *x*2, ..., *xm*, і оцінки їх похибок. Умовою справедливості нульової статичної гіпотези про відсутності кореляційної зв'язку між похибками результатів вимірювання *i*-го і (*i*+1)-го аргументів є виконання нерівності для критерію Стьюдента.

 (12.9)

где *n* – число вимірювань.

Значення *t*, отримане з (12.9), зіставляють з табличним значенням *tq*, яке беруть для прийнятого рівня значущості *q* і числа ступенів свободи *f* = *n* - 2. При *t*>*tq* підтверджується значущість вибіркового коефіцієнта кореляції. За умови, що розподіл випадкових похибок результатів вимірювань аргументів суперечить нормальному розподілу, критерієм відсутності кореляційної зв'язку між похибками результатів вимірювань аргументів є виконання нерівності:

, (12.10)

де *tq* – коефіцієнт Стьюдента, який відповідає рівню значущості *q* і числа ступенів свободи *f* = *n* - 2;

 - оцінка коефіцієнта кореляції між похибками аргументів *xh* і *xj,* знайдена за формулою:

, (12.11)

де *xhi*; *xji* – результати *i*-го вимірювання *h*-го і *j*-го аргуменов;

*nj* = *ni* = *n* – число вимірювань кожного з аргументів.

Якщо вимірювана величина залежить від *m* аргументів, необхідно перевірити відсутність кореляційних зв'язків між похибками всіх парних поєднань аргументів. Якщо існує лінійна залежність і відсутня кореляція між похибками вимірювань аргументів, то обробку результатів виконують в такій послідовності. Шукане значення *Y* пов'язано з *m* вимірюваними аргументами *x*1, *x*2, ..., *xm*, рівнянням:

 (12.12)

де *b*1, *b*2, ..., *bm* – постійні коефіцієнти при аргументах *x*1, *x*2, ..., *xm*, відповідно.

При експериментальному визначенні коефіцієнтів *b*1, *b*2, ..., *bm* результат вимірювання величини виходить після виконання 2-х етапів.

На першому етапі оцінюються кожний доданок *bixi* як побічно вимірювану величину, отриману в результаті твори двох вимірюваних величин. На другому етапі знаходять оцінку вимірюваної величини *Y*.

Результат опосередкованого вимірювання для відомих значень результатів аргументів (тобто точкові оцінки рядів вимірювань аргументів) *x*1, *x*2, ..., *xm* дорівнює:

. (12.13)

Або, з урахуванням залежності (12.12), результат *Y* обчислюється за формулою:

, (12.14)

де *хi* - результат вимірювання *i*-го аргументу (параметра *хi*);

*m* - число аргументів.

Причому, слід нагадати, що кожен аргумент (в разі багаторазових вимірювань) може бути повторений *n* раз. Оцінка середнього квадратичного відхилення результату непрямого вимірювання обчислюється за формулою:

, (12.15)

де - оцінка середнього квадратичного відхилення вимірювання аргументу xi, що визначається за відомою формулою.

***12.2.2 Представлення результатів вимірювань***

З огляду на те, що кожен аргумент може мати відповідні довірчі межі невиключеної систематичної і випадкової похибок, то завдання визначення похибки опосередкованого вимірювання в цих випадках ділиться на три етапи:

а) підсумовування часткових невиключених систематичних похибок аргументів;

б) підсумовування часткових випадкових похибок аргументів;

в) складання систематичної і випадкової складових похибки.

Довірча межа невиключеної систематичної похибки непрямого вимірювання за умови однакової довірчої ймовірності часткових похибок і їх рівномірного розподілу всередині заданих меж визначається за формулою (без урахування знака):

, (12.16)

 - довірча межа невиключену систематичної похибки середнього значення -го аргументу.

При відсутності кореляційної зв'язку між аргументами оцінка СКО випадкової похибки непрямого вимірювання обчислюється по формулою:

 , (12.17)

 - оцінка СКО випадкової похибки результату вимірювання -го аргументу.

При нормальному розподілі похибок непрямого вимірювання довірча межа випадкової складової похибки обчислюється за формулою:

, (12.18)

де *tp* – квантиль Стьюдента при довірчій ймовірності *P* з ефективним числом ступенів свободи *k*еф, який визначається при малих обсягах вибірки за формулою:

. (12.19)

При великих обсягах число ступенів свободи знаходиться за формулою:

 . (12.20)

Довірча межа сумарної похибки результату непрямого вимірювання визначається за правилами, викладеним вище.

***12.3 Обробка результатів непрямих вимірювань при нелінійній залежно***

Існують два методу визначення точкової оцінки результату непрямого вимірювання та її похибки: лінеаризації і приведення.

***12.3.1 Метод лінеаризації***

Для опосередкованих вимірювань при нелінійних залежностях і некорельованих похибок вимірювань аргументів використовується метод лінеаризації. Метод лінеаризації заснований на тому, що похибка вимірювання значно менше вимірюваної величини, і тому поблизу середніх значень аргументів нелінійна функціональна залежність лінеаризується і розкладається в ряд Тейлора (члени високого порядку не враховуються). Лінеаризучи функцію декількох випадкових аргументів (якими і є результати вимірювань і їх похибки), можна отримати, як правило, досить просту формулу для обчислення оцінок середнього значення і середнього квадратичного відхилення функції. Розкладання нелінійної функції в ряд Тейлора має вигляд:

*.* (12.21)

Метод лінеаризації допустимий, якщо можна знехтувати залишковим членом R.

Залишковим членом нехтують, якщо , де - середнє відхилення випадкових похибок результату вимірювання *xi* -го аргументу.

Перший доданок правої частини рівняння є точкова оцінка істинного значення непрямої величини, яка виходить підстановкою в функціональну залежність середніх арифметичних , значень аргументів:

. (12.22)

Другий доданок є сума складових похибки опосередкованого вимірювання, що називаються частковими похибками, а часткові похідні - коефіцієнтами впливу.

Відхилення Δ*Xi* повинні бути взяті з отриманих значень похибок і такими, щоб вони максимізували вираз для залишкового члена *R*. Якщо часткові похибки непрямого вимірювання не залежать один від одного, тобто є некорельованими, і відомі довірчі межі похибки аргументів при однаковій ймовірності, то гранична похибка (без урахування знака) непрямого вимірювання обчислюється за формулою:

 , (12.23)

де – значення часткових похідних функціональної залежно визначаються при середніх значеннях аргументів .

Цей метод, званий максимум-мінімум, дає значно завищений значення похибки непрямого вимірювання.

Відносно правильна оцінка похибки непрямого вимірювання, виходить методом квадратичного підсумовування:

 (12.24)

У ряді випадків розрахунок похибки непрямого вимірювання значно спрощується при переході до відносних похибок. Для цього використовується прийом логарифмування і подальшого диференціювання функціональної залежності. Коли гранична похибка непрямого вимірювання, отримана за методом максимуму-мінімуму:

, (12.25)

або за методом квадратичного підсумовування:

. (12.26)

***12.3.2 Метод приведення***

Цей метод оцінювання похибок непрямих вимірювань застосовують, коли не відомі закони розподілу похибок вимірювань аргументів, а між аргументами існує кореляція. Метод заснований на приведенні ряду окремих значень опосередковано вимірюваної величини до ряду прямих вимірювань. Отримувані поєднання окремих результатів вимірювань аргументів підставляють в формулу (12.1) і обчислюють окремі значення вимірюваної величини *Y*: *X*1, *X*2, …, *Xm* за якими потім обчислюють результат непрямого вимірювання:

 , (12.27)

де *m* - число окремих значень вимірюваної величини;

*xi*- *i*-е окреме значення вимірюваної величини, отримане внаслідок підстановки *i*-го поєднання узгоджених результатів вимірювань аргументів на формулу.

Оцінку середнього квадратичного відхилення випадкових похибок результату непрямого вимірювання обчислюють за формулою:

. (12.28)

Довірчі кордону випадкової похибки для результату вимірювання обчислюють за формулою:

 (12.29)

де *T* – коефіцієнт, що залежить від виду розподілу окремих значень вимірюваної величини, обраної довірчої ймовірності.

# *Лекція 13* ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ СУМІСНИХ ВИМІРЮВАНЬ.

*Питання, що розглядаються*

*Методика регресійного аналізу, перевірка статистичної гіпотези про адекватність моделі.*

Сумісні вимірювання є проведені одночасно вимірювання двох або декількох, як правило, неодноіменних величин для знаходження залежності між ними. Цей вид вимірювань знаходить широке застосування в наукових, технічних і метрологічних вимірюваннях. Сумісні вимірювання застосовуються в метрологічній практиці при експериментальному визначенні градуювальних характеристик засобів вимірювальної, в тому числі різних перетворювачів.

Градуювальна характеристика засобів вимірювальної техніки являє собою залежність між значеннями величин на вході і виході ЗВТ. Вона може бути представлена у вигляді таблиці, графіка або формули (тобто в аналітичному вигляді). Найбільш універсальною формою градуювальної характеристики є її представлення у вигляді формули, яку зручно використовувати при автоматизованих випробуваннях із застосуванням ЕОМ.

Кожному ЗВТ або перетворювачу відповідають власна індивідуальна залежність між вхідною величиною *X* і вихідний *Y*, яка в загальному випадку залежить також і від часу *t*. Функціональна залежність *y* = *f*(*x*, *t*) являє собою функцію перетворення ЗВТ (або перетворювача) і є градуювальною характеристикою.

При градуюванні виконують сумісні вимірювання вхідних і вихідних величин. Якщо число точок вимірювання *n*, то отримують набір результатів вимірювань (*xi*; *yi*), *i* = 1…*n*, за якими визначають градуювальну характеристику. В кожній досліджуваної точці вимірювання проводяться багаторазово (в прямому і зворотному напрямку зміни вхідної величини). Найкращою градуировочной характеристикою є залежність лінійного виду:

*,*  (13.1)

де α – константа (вільний член);

β – коефіцієнти, які визначають за експериментальними даними під час градуювання ЗВТ методом регресійного аналізу.

У регресійному аналізі для визначення коефіцієнтів застосовують метод найменших квадратів (МНК), який передбачає, що виконані дві основні вимоги:

1) значення вхідних величин *xi* відомі точно;

2) результати виміряних вихідних величин *yi*містять незалежні випадкові похибки, які розподілені за нормальним законом.

Необхідно спеціально перевірити справедливість виконання умови 2. Значення, які різко виділяються (промахи), повинні бути виключені. Для цього застосовують розглянуті вище критерії перевірки статичних гіпотез. Для визначення коефіцієнтів *a* і *b* в рівнянні регресії (13.2) використовують регресійний аналіз:

*,* (13.2)

де – лінія регресії (функція відгуку).

***13.1 Методика регресійного аналізу***

Розглянемо методику регресійного аналізу для пасивного експерименту, коли експеримент заздалегідь не планується. Рівнянню (13.1) відповідає парна регресія, коефіцієнти якої визначають за формулами:

, (13.3)

 (13.4)

Дисперсія буде складатися з двох компонентів – дисперсії параметра *a* і дисперсії параметра *b*. Верхня *yh* і нижня *yi*кордону для мають вигляд:

 , (13.5)

де *tq*– коефіцієнт Стьюдента.

Середнє квадратичне відхилення відгуку y обчислюють за формулою:

, (13.6)

де .

Якщо нанести довірчі межі на графіку, наведеному на рисунку 13.1, то вони розташуються відповідно вище і нижче лінії регресії у вигляді гілок гіперболи, що обмежують довірчу область.



Рисунок 13.1 – Межі довірчого інтервалу лінійного рівняння парної регресії

Для визначення довірчої області з урахуванням відхилень окремих вимірювань необхідно обчислити середньоквадратичне відхилення за формулою:

/ (13.7)

Тоді довірчі межі будуть дорівнювати:

 , (13.8)

Якщо виникає необхідність перевірки статичної гіпотези про рівність двох рівнянь регресії, то така перевірка включає послідовну перевірку справедливості трьох статичних гіпотез:

1. про залишкові дисперсії;
2. про значення коефіцієнтів регресії *b*;
3. про значення коефіцієнтів (константа) *a*.

У розглянутій парній регресії значення *y* залежать від значень тільки однієї змінної x. Однак в загальному випадку y може залежати від декількох змінних *x*1, *x*2, ..., *xn*. Це так званий випадок множинної регресії.

Оцінка параметрів регресії зазвичай супроводжується розрахунком додаткової характеристики, що називаєтсья коефіцієнтом кореляції. Вибірковий коефіцієнт кореляції є емпіричною (тобто визначеною за експериментальними результатами) мірою лінійної залежності між *x* і *y*. У математичній статистиці ступінь кореляції змінних (*n* пар випадкових величин *xi*, *yi*, *i* = 1, 2, 3, ..., *n*) оцінюють вибірковим коефіцієнтом кореляції Пірсона:

. (13.9)

Якщо *rb* > 0, то при збільшенні *x* зростає *y*, при *rb* < 0, з ростом *x*, *y* – зменшується. Прийнято вважати, що при виконанні умови 0,75 < *rb* < 0,95 існує сильний зв'язок, а при 0,95 < *rb* ≤ 1 – функціональна залежність.

Для невеликих значень *n* (так звана мала вибірка) коефіцієнт кореляції *r* повинен бути скоректований:

. (13.10)

Вибірковий коефіцієнт *rb* (або ) повинен бути перевірений на істотність, тобто наскільки значимо він відрізняється від нуля. Для перевірки статичної гіпотези про суттєвість (значущисть) кореляції між досліджуваними величинами *X* і *Y* та побудови довірчих інтервалів для коефіцієнта кореляції використовують перетворення Фішера:

, (13.11)

що апроксимується нормальним законом з розподілом:

. (13.12)

Якщо , то коефіцієнт кореляції істотно відрізняється від нуля. Прийнявши, що справедливий нормальний закон (для довірчої ймовірності *P* = 0,95), знаходять верхню *Uh* і нижню *UI*межі довірчого інтервалу:

; . (13.13)

Якщо число вимірювань *n*>50, то при довірчій ймовірності 0,95 довірчі межі вибіркового значення коефіцієнта кореляції мають вигляд:

; . (13.14)

За допомогою перетворення (13.11) можна встановити рівність між собою двох вибіркових коефіцієнтів кореляції. При обраному рівні значущості *q* потрібно перевірити нульову гіпотезу про рівність нулю генерального коефіцієнта кореляції (при конкуруючій гіпотезі: вибірковий коефіцієнт кореляції *rb* відмінний від нуля). Якщо нульова гіпотеза відкидається, то це означає, що вибірковий коефіцієнт кореляції значимо відрізняється від нуля, а *X* і *Y* корельовані, тобто зв'язані лінійною залежністю.

Як критерій перевірки нульової гіпотези беруть випадкову величину:

. (13.15)

Величина *T* при справедливості нульової гіпотези має розподіл Стьюдента з *k* = *n* - 2 ступенями свободи.

11.2 Перевірка статистичної гіпотези про адекватність моделі

Метою перевірки адекватності математичної (регресійній) моделі є підтвердження того, що дана модель правильно описує досліджуваний процес. Для цього визначаються похибки математичної моделі і експериментальних даних. Якщо похибки моделі перевищують похибки експериментальних даних, то гіпотеза про адекватність математичної моделі відхиляється.

; (13.16)

; (13.17)

. (13.18)

Для перевірки використовують критерій Фішера (13.15), в чисельник якого записують дисперсію адекватності , а в знаменник – усереднену дисперсію , яка обчислюється за формулою (13.16) при умови підтвердження однорідності дисперсій за (13.17). Дисперсію адекватності визначають за формулою:

, (13.19)

де *c* - число коефіцієнтів рівняння регресії;

 – середнє арифметичне значення експериментальних даних;

 – значення функції відгуку, обчислене за рівнянням регресії.

***Лекція 14*** ПРЕДСТАВЛЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ

***Питання, що розглядаються***

*Визначення довірчих інтервалів випадкової похибки. Визначення меж невиключеної систематичної похибки результату вимірювань. Правила округлення результатів вимірювань. Форми представлення результатів вимірювань. Запис результату вимірювань при прямих вимірюваннях.*

За результат вимірювань при статистичній обробці вибірки, що складається з багаторазових спостережень, приймається координата центру розподілу при рівноточних вимірюваннях; середньозважене значення центрів розподілів в групах – при нерівноточних. В силу кінцевого обсягу вибірки, наявності невиключених складових похибок і різних законів розподілу, результат вимірювання має невизначеність. Зона невизначеності (довірчі межі) генерального середнього встановлюються похибкою результату вимірювання ± Δ.

Межі можуть бути задані як симетричними, так і несиметричними, вони залежать від обраної довірчої ймовірності. Найчастіше використовуються симетричні межі з двосторонної ймовірністю *P*. За похибку результату вимірювання може бути прийнято:

а) тільки випадкова складова похибки;

б) систематична складова похибки;

в) композиція випадкової і систематичної складових похибок.

Характеристики похибки вимірювань вказуються в одиницях вимірюваної величини (абсолютні) і у відсотках (відносні) щодо результатів вимірювань або істинних значень вимірюваної величини.

***14.1 Визначення довірчих інтервалів випадкової похибки***

У разі відсутності в результатах спостережень систематичних похибок або за умови, що відношення невиключеної систематичної похибки *θ* до оцінки *Sx* СКО результату вимірювання відповідає умові:

 , (14.1)

то в якості похибки результату вимірювання приймається випадкова складова похибки:

 (14.2)

де *t* – коефіцієнт, що залежить від обсягу вибірки, виду розподілу і довірчої ймовірності *P*.

При виконанні технічних вимірювань, а також при контролі параметрів технологічного процесу, наприклад, в харчовій і автомобільної промисловості приймають довірчу ймовірність *P* = 0,95. При неможливості повторного вимірювання, довірчу ймовірність *P* допускається приймати рівною 0,99. В особливих випадках, коли результати вимірювання мають велике значення для здоров'я людей, допускається замість ймовірності, що дорівнює *P* = 0,99 приймати більш високу довірчу ймовірність.

Зі збільшенням довірчої ймовірності *P* квантиль Стьюдента *t* зменшується, ступінь довіри до результату вимірювання підвищується, і тому можуть бути використані більш вузькі межі (що задають інтервали), в яких очікується поява даного результату. Існує ряд рекомендацій по вибору коефіцієнта *t*:

а) при нормальному законі розподілу випадкової величини коефіцієнт *t* вибирається з таблиці квантилів Стьюдента при прийнятої довірчої ймовірності *P* і числі ступенів свободи *k* = *n*-1;

б) для розподілів виду Лапласа з ексцесом ε = 6, нормального розподілу з ексцесом ε = 3, рівномірного розподілу з ексцесом ε = 1,8, трапецеидального з ексцесом ε = 2 і похибкою, що не перевищує 4 % і при ймовірності *P* = 0,9 ÷ 0,99 коефіцієнт визначається за формулою:

; (14.3)

в) для кругловершинних двомодальних розподілів з ексцесом ξ = 1 ÷ 3 з довірчою ймовірністю *P* = 0,8 ÷ 0,999 і похибкою не менше 10 %:

; (14.4)

г) для розподілу типу Шапо з ексцесом ε = 1,8 ÷ 6 з похибкою до 8 %:

; (14.5)

д) для гостровершинних двомодальних розподілів з ексцесом ε = 1,8 ÷ 6 при *P* = 0,9 ÷ 0,999 з похибкою 5 %:

; (14.6)

е) для законів розподілу від Лапласа до рівномірного і деяких двумодальних з похибкою до 10 %:

; . (14.7)

***14.2 Визначення меж невиключеної систематичної похибки результату вимірювань***

Якщо невиключені систематичні похибки в 8 і більше разів перевищують оцінки *Sx* СКО результату вимірювання, тобто:

 , (14.8)

то за похибка результату вимірювання приймається систематична похибка.

В якості невиключеної систематичної похибки приймають складову похибки результату вимірювань, обумовлену похибками обчислення і введення поправок на вплив систематичних похибок або систематичної похибку, поправка, на дію якої не введена внаслідок її малості.

Невиключена систематична похибка характеризується її межами і розглядається як квазівипадкова. Межі невиключеної систематичної похибки *θ* при числі доданків *N*≤3 обчислюють за формулою:

. (14.9)

При числі невиключених систематичних похибок N≥4 обчислення проводять за формулою:

, (14.10)

де *θi*– межа *i*-й невиключеної систематичної похибки;

*K* – коефіцієнт залежності окремих невиключених систематичних похибок від обраної довірчої ймовірності *P* при їх рівномірному розподілі (за *P* = 0,99; *K* ≈ 1,4).

Значення коефіцієнта для інших випадків представлені в таблиці 14.1. Невиключена систематична похибка *θ* розглядається в даному випадку як довірча квазівипадкова похибка. Довірча межа *θi* для *i*-ї складової похибки може бути знайдена з урахуванням значень квантилів tα рівномірного закону розподілу, використовуючи принцип геометричного підсумовування.

Таблиця 14.1 – Коефіцієнт *K* систематичної похибки

|  |  |
| --- | --- |
| Довірча ймовірність | Число складових похибки N |
| 2 | 3 | 4 | 5 | … | середня |
| 0,90 | 0,97 | 0,95 | 0,95 | 0,95 | … | 0,95 |
| 0,95 | 1,10 | 1,12 | 1,12 | 1,12 | … | 1,11 |
| 0,99 | 1,27 | 1,37 | 1,41 | 1,42 | … | 1,40 |

Слід зазначити, що межі невиключеної систематичної похибки обчислюються шляхом побудови композицій невиключених похибок ЗВТ, методу і похибок, викликаних іншими факторами (умови вимірювання і ін.). При підсумовуванні похибок за формулами (14.9), (14.10) передбачається їх рівномірний розподіл в установлених межах. Для деяких законів розподілу квантилі *tk* представлені в таблиці 14.2:

Таблиця 14.2 – Квантилі закону розподілу

|  |  |
| --- | --- |
| Закони розподілу | Значення α |
| 0,90 | 0,95 | 0,99 |
| Нормальний | 1,645 | 1,96 | 2,576 |
| Рівномірний | 1,55 | 1,64 | 1,71 |
| Трикутний | 1,67 | 1,90 | 2,20 |

Якщо відношення невиключеної систематичної складової похибки до оцінки СКО знаходиться в межах:

. (14.11)

то за похибку результату вимірювання без урахування знака приймають композицію випадкової і систематичної складових похибки:

 (14.12)

де k - коефіцієнт, що залежить від співвідношення .

Його значення зведені в таблицю 14.3

Таблиця 14.3 – Значення коефіцієнта *K*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| . | 0,5  | 0,75 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| *k*(*P*=0,95) | 0,81  | 0,77 | 0,74 | 0,71 | 0,73 | 0,76 | 0,78 | 0,79 | 0,8 | 0,81 |
| *k*(*P*=0,99) | 0,87  | 0,85 | 0,82 | 0,8 | 0,81 | 0,82 | 0,83 | 0,83 | 0,84 | 0,85 |

***14.3 Правила округлення результатів вимірювань***

Найменші розряди числових значень результатів вимірювань повинні бути такими ж, як найменші розряди числових значень середнього квадратичного відхилення абсолютної похибки вимірювань або значень меж, в яких знаходиться абсолютна похибка вимірювань (або статистичних оцінок цих характеристик похибки). Числове значення результату вимірювань представляється так, щоб воно закінчувалося десятковим знаком того ж розряду, який має похибка цього результату.

Числові значення іменованої фізичної величини і її похибки (відхилення) треба записувати із зазначенням розмірності одиниці фізичної величини, наприклад, (80,550 ± 0,002) кг.

Значущі цифри числа – це все цифри від першої зліва, не рівної нулю, до останньої записаної праворуч цифри. При цьому нулі в множнику 10 не враховуються. У наближеному числі розрізняють вірні і сумнівні цифри. Вірні цифри наближеного числа визначають за його абсолютною похибкою. Прийнято вважати:

а) якщо відмінна від нуля перша (зліва) цифра абсолютної похибки дорівнює або менше 5, то всі цифри наближеного числа, розташовані лівіше, будуть вірними;

б) якщо ця цифра абсолютної похибки більше 5, то вірними цифрами наближеного числа будуть тільки ті, які розташовані на одну цифру того ж розряду, до якого вона належить.

Рекомендується записувати наближені числа так, щоб усі цифри були вірними і тільки одна, остання була сумнівною.

В кінцевому записі похибку вимірювання прийнято виражати числом з однією або двома значущими цифрами. Дві значущі цифри наводять у разі виконання точних вимірювань. Емпірично встановлені такі правила округлення розрахованого значення похибки і отриманого результату вимірів:

а) похибка результату вимірювання вказується двома значущими цифрами, якщо перша з них дорівнює 1 і 2, і однією, - якщо перша цифра дорівнює 3 або більше;

б) результат вимірювання округлюється до того ж десяткового знака, яким закінчується округлене значення абсолютної похибки. Якщо десяткова дріб в числовому значенні результату вимірювань закінчується нулями, то нулі відкидаються до того розряду, який відповідає розряду числового значення похибки;

в) якщо цифра старшого з розрядів, що відкидаються, менше 5, то цифри, що залишаються, в числі не змінюють. Якщо ця цифра дорівнює або більше 5, то останню цифру, що залишається, збільшують на одиницю. Зайві цифри в цілих числах замінюють нулями, а в десяткових дробах відкидають;

г) якщо цифра, що відкидається, дорівнює п'яти, а наступні за нею цифри невідомі (відсутні) або нулі, то останню цифру числа не змінюють, якщо вона парна, і збільшують на одиницю, якщо вона непарна. Число 105,5 при збереженні трьох значущих цифр округлюють до 106. Ще приклад: Число 1234,50 округлюють до 1234; число 5465,50 – до 5466; число 43210,500 - до 43210;

д) округлення проводиться лише в остаточній відповіді, а всі попередні обчислення проводять з одним – двома зайвими знаками (або числом розрядів, які вдається отримати).

Таким чином, при виконанні обчислень може бути залишена одна сумнівна цифра, а в остаточному необхідно залишати в наближеному числі тільки вірні цифри. Якщо керуватися цими правилами округлення, то кількість значущих цифр в числовому значенні результату вимірювань дає можливість орієнтовно судити про точність вимірювання.

Гранична похибка, обумовлена округленням, дорівнює половині одиниці останнього розряду числового значення результату вимірювання.

***14.4 Форми представлення результатів вимірювань***

Результат вимірювань представляється іменованим або неіменованим числом.

350 кВт; 100 °С – іменовані числа;

0,57; 7,95 – неіменовані числа.

Спільно з результатом вимірювань повинні бути представлені характеристики його похибки або їх статистичні оцінки.

 Якщо результат вимірювань або певна група результатів вимірювань отримані за атестованою методикою виконання вимірювань, то їх можна супроводжувати, замість характеристик похибки вимірювань, посиланням на документ (атестат), що засвідчує характеристики похибок, одержуваних при використанні даної методики, і умови застосовності цієї методики.

Якщо результат вимірювань отримано за такою методикою, коли характеристики похибки вимірювань оцінювалися в процесі самих вимірювань або безпосередньо перед ними, він (результат) повинен супроводжуватися статистичними оцінками характеристик похибки вимірювань. Допускається подання результату вимірювань довірчим інтервалом, що покриває з відомою довірчою ймовірністю істинне значення вимірюваної величини. В цьому випадку статистичні оцінки характеристик похибки вимірювань окремо не вказуються. Така форма представлення результатів вимірювань допускається в випадках, коли характеристики похибки вимірювань заздалегідь не встановлені і похибка вимірювань оцінюється в процесі самих вимірювань або безпосередньо перед ними.

При практичних записах характеристик похибок вимірювань необов’язково кожен раз писати словами назву характеристики і умови, яким вони відповідають. Краще характеристики і умови записувати умовними позначеннями, приклавши окремий список позначень. При реєстрації характеристик похибки вимірювань за допомогою автоматичних пристроїв рекомендується позначати характеристики словами і не користуватися умовними позначеннями.

Статистичні оцінки характеристик похибки вимірювань представляються однією або, при необхідності, декількома характеристиками. Додатково можуть вказуватися частотний спектр або швидкість зміни вимірюваної величини (або частотний спектр, швидкість зміни параметрів, функціоналом яких є вимірювана величина); значення або діапазони значень величин, що істотно впливають, а також, при необхідності, і інші фактори, що характеризують проведені вимірювання.

Кожна статистична оцінка характеристики похибки вимірювань відноситься до певного результату вимірювання або значення вимірюваної величини. Статистичні оцінки характеристик похибки вимірювань вказуються в одиницях вимірюваної величини (абсолютні) або в відсотках від результату вимірювання (відносні).

Характеристики похибки вимірювань і їх статистичні оцінки можуть вказуватися у вигляді постійних величин або як функції часу, вимірюваної або іншої величини у вигляді формули, таблиці, графіка. Характеристики похибки і їх статистичні оцінки виражаються числом, що містить не більше двох значущих цифр. При цьому для статистичних оцінок характеристик третій розряд (невказаний молодший) округляється в більшу сторону.

Допускається характеристики похибки і їх статистичні оцінки виражати числом, що містить одну значущу цифру. В цьому випадку для статистичних оцінок характеристик число виходить округленням у більшу сторону, якщо цифра подальшого невказаного молодшого розряду дорівнює або більше п'яти, або в меншу сторону, якщо ця цифра менше п'яти.

Характеристики похибки вимірювань і умови, для яких вони дійсні, повинні зазначатися спільно з результатом вимірювань, до якого вони належать, або спільно з групою результатів вимірювань, до яких вони належать, або в документі (атестаті), що засвідчує властивості методики виконання вимірювань, за якими отримані дані результати вимірювань.

***14.5 Запис результату вимірювань при прямих вимірюван***нях

При симетричній довірчій похибці результати вимірювань для груп рівноточних рядів записують так:

або

де Δ – межі;

*P* = *P*д – прийнята довірча ймовірність;

*n* – кількість спостережень.

Якщо вимірювання нерівноточні, то за результат приймають оцінку середньозваженого значення для груп спостережень і тоді остаточно пишуть:

де *m*1 = ; *m*2 = … - кількість спостережень в i-групі (серії) нерівноточних вимірювань;

*n* = … - загальна кількість спостережень.

При несиметричній похибці вимірювань результати представляють у формі:

де Δн і Δв – значення нижньої і верхньої меж похибки вимірювань.

Якщо відсутні дані про функції розподілу складових похибки, то результати вимірювань представляють у вигляді: ; *Sx*; *n*; *θ* при довірчій ймовірності *P* = *P*д.

***Лекція 15*** МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ПЛАНУВАННЯ ТА АНАЛІЗУ АКТИВНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

***Питання, що розглядаються***

***Перевірка гіпотези про нормальний закон розподілу похибок експерименту. Перевірка гіпотези про відтворюваності дослідів***

Обробку результатів активного експерименту здійснюють на основі регресійного аналізу. Для використання регресійного аналізу необхідні наступні передумови:

а) помилки експерименту повинні бути розподілені по нормальному закону;

б) досліди повинні бути відтворені.

Отже, перед виконанням активного експерименту необхідно провести попередні серії дослідів на досліджуваному об'єкті, щоб виявити наявність або відсутність цих передумов.

***15.1 Перевірка гіпотези про нормальний закон розподілу похибок експерименту***

Існує кілька способів перевірки гіпотези щодо нормального закону розподілу помилок експерименту. Для цієї мети часто використовують *W*-критерій.

Статичний критерій *W* (критерій згоди Шапіро-Уілкі) призначений для двох статичних моделей (нормальної і експоненційної). Він є більш потужним, тобто забезпечує більшу ймовірність відкидання неправильної гіпотези в порівнянні з χ2 (хі квадрат). У такому випадку потрібно від 3 до 50 паралельних дослідів, виконаних в однакових умовах.

Перевірка нульової гіпотези про приналежність невідомого експериментального закону розподілу похибок експерименту теоретичному нормальному закону здійснюється в наступній послідовності:

а) результати вмиірювань розташовують у вигляді неспадної послідовності:

 . (15.1)

де *k* – число паралельних дослідів;

б) обчислюють значення величини:

 . (15.2)

г) обчислюють значення величини за формулою:

, (15.3)

де значення коефіцієнтів *a*k-i+1 для *i* = 1…*l* беруться з таблиці З.1 в Додатку З (для *l* = 3…50). Якщо *k* – парне число, то приймають *l*=*k*/2, а якщо *k* – непарне, то *l*=(*k-*1)/2 (в цьому випадку *yl*+1 не використовується при обчисленні);

д) знаходять розрахункове значення *W*-критерію за формулою:

 ; (15.4)

е) при певному рівні значущості *q* (зазвичай *q* = 0,05) перевіряють виконання умови:

, (15.5)

де *Wq* – критичне значення критерію, взяте з таблиці З.2 в Додатку З.

Слід зазначити, що в Додатку З наведені таблиці для числа паралельних дослідів *k* від 3 до 16. Якщо умова (15.5) виконано, то гіпотезу про справедливість нормального закону розподілу похибок експерименту приймають.

***15.2 Перевірка гіпотези про відтворюваності дослідів***

***15.2.1 Перевірка гіпотези про відтворюваності за допомогою критерію Кочрена***

Для перевірки гіпотези про приналежність двох вибіркових дисперсій одній генеральный сукупності (їх однорідності), а, отже, і рівноточних серій вимірювань (показник відтворюваності вимірювань в експерименті) використовується критерій Кочрена.

Для перевірки гіпотези за допомогою критерію Кочрена необхідні результати декількох серій паралельних вимірювань. У кожній з них кількість дослідів має бути однаковою. Зазвичай число серій не велика - 2 ÷ 3. Кількість дослідів в серії також може бути невеликим - 2 ÷ 3. Результати експерименту поміщають до таблиці 15.1.

Таблиця 15.1 – Експеримент для перевірки гіпотези про відтворюваності дослідів за критерієм Кочрена

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Номер серії дослідів | Результати паралельних дослідів |  |  |
| 1 | *y*11 | *y*12 | … | *y*1*k* | *y*1 |  |
| … | … | … | … | … | … | … |
| *N* | *yN*1 | *yN*2 | … | *yNk* | *yN* |  |

Для кожної серії паралельних дослідів обчислюють середнє арифметичне значення функції відгуку *yN*. Далі розраховують оцінки дисперсій для всіх серій дослідів .

Розрахункове значення критерію Кочрена є відношенням найбільшої з оцінок дисперсій до суми всіх знайдених оцінок дисперсій:

. (15.6)

Критичне значення критерію Кочрена G знаходять в таблиці Додатки І. Гіпотезу про відтворюваності дослідів приймають, якщо виконано умова:

*.*  (15.7)

В цьому випадку оцінки дисперсій всіх серій проведених дослідів вважаються однорідними, тобто належать до однієї генеральної сукупності. На підставі однорідних оцінок дисперсій обчислюють величину, що зветься оцінкою дисперсії відтворюваності дослідів, за формулою:

. (15.8)

З нею пов'язано число ступенів свободи, що обчислюється за формулою:

. (15.8)

Оцінка дисперсії відтворюваності використовується при аналізі результатів активного експерименту для перевірки статистичних гіпотез про значущість коефіцієнтів регресії і про адекватність рівняння регресії.

***15.2.2 Перевірка гіпотези за допомогою критерію Бартлетта***

Характеристикою відтворюваності результатів серій (груп) вимірювань як в попередньому випадку є їх вибіркові дисперсії. Відтворюваність і збіжність є показниками прецизійності вимірювань і кількісно виражаються через міжгрупову і внутрішньогрупову дисперсію. Гіпотеза про рівність декількох вибіркових дисперсій (для декількох серій вимірювань), тобто їх однорідність, характеризує відтворюваність (тобто ступінь близькості один одного) результатів вимірювань, отриманих в різних умови.

Критерій Бартлетта використовується для перевірки гіпотези про відтворюваність дослідів в тих випадках, коли є результати декількох серій паралельних дослідів, проте число дослідів в цих серіях різне. Експериментальні дані, які використовуються для перевірки гіпотези, поміщають до таблиці 15.3. Для кожної серії дослідів обчислюється середнє арифметичне значення та оцінка дисперсії.

Таблиця 15.3 – Експеримент для перевірки гіпотези про відтворюваності дослідів за критерієм Бартлетта

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер серії дослідів | Результати паралельних дослідів | *fj* |  |  |
| 1 | *y*11 | *y*12 | … | *y*1*k* | *k*1-1 | *y*1 |  |
| … | … | … | … | … | … | … | … |
| *N* | *yN*1 | *yN*2 | … | *yNk* | *k*N-1 | *yN* |  |

З кожною з цих оцінок дисперсій пов'язано число ступенів свободи *fj.*

Далі розраховують середньозважену оцінку дисперсії за формулою:

. (15.9)

Для спрощення подальших розрахункових формул введемо в розгляд величину:

. (15.10)

за допомогою якої розраховується допоміжний коефіцієнт:

. (15.11)

Розрахункове значення коефіцієнта Бартлетта обчислюється за формулою:

. (15.12)

Після цього перевіряється виконання умови:

. (15.13)

Значення *B* порівнюється зі значенням *W*-критерію для рівня значущості *q* і числа ступенів свободи *f* = *N* - 1. Якщо умова (15.13) виконана, то приймається гіпотеза про відтворюваність дослідів. В якості оцінки дисперсії відтворюваності приймається величина , з якою пов'язано число ступенів свободи *f*, яке визначається по формулою (15.10).

# ДОДАТОК А

Функція розподілу Лапласа

Таблиця А.1 – Значення функції розподілу Лапласа



Продовження таблиці А.1



#

Додаток Б
(Довідковий)
Перевірка гіпотези за допомогою W-критерію

Таблиця Б.1 – Значення коефіцієнтів *ak*-i+1,



Примітка:

*k* - загальна кількість експериментів.

Таблиця Б.2 – Критичні значення W-критерію



Додаток В

(Довідковий)

Значення критерію Фішера-Снедекора

Таблиця В.1 – Критерій Фішера для різних рівнів значимості



Примітка:

В таблиці:

*k*1 – число ступенів свободи більшої дисперсії;

*k*2 – число ступенів свободи меншою дисперсії.

Додаток Г

(Довідковий)

Значення коефіцієнтів, що визначають величину довірчого інтервалу оцінки дисперсії

Таблиця Г.1



Додаток Д.

Значення  залежно від  і 

Таблиця Д.1

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| k /α | 0,01 | 0,025 | 0,05 | 0,95 | 0,975 | 0,99 |
| 1 | 6,63490 | 5,02389 | 3,84146 | 0,00393 | 0,00098 | 0,00016 |
| 2 | 9,21034 | 7,37776 | 5,99146 | 0,10259 | 0,05064 | 0,02010 |
| 3 | 11,34487 | 9,34840 | 7,81473 | 0,35185 | 0,21580 | 0,11483 |
| 4 | 13,2767 | 11,14329 | 9,48773 | 0,71072 | 0,48442 | 0,29711 |
| 5 | 15,08627 | 12,8325 | 11,0705 | 1,14548 | 0,83121 | 0,55430 |
| 6 | 16,81189 | 14,44938 | 12,59159 | 1,63538 | 1,23734 | 0,87209 |
| 7 | 18,47531 | 16,01276 | 14,06714 | 2,16735 | 1,68987 | 1,23904 |
| 8 | 20,09024 | 17,53455 | 15,50731 | 2,73264 | 2,17973 | 1,64650 |
| 9 | 21,66599 | 19,02277 | 16,91898 | 3,32511 | 2,70039 | 2,08790 |
| 10 | 23,20925 | 20,48318 | 18,30704 | 3,94030 | 3,24697 | 2,55821 |
| 11 | 24,72497 | 21,92005 | 19,67514 | 4,57481 | 3,81575 | 3,05348 |
| 12 | 26,21697 | 23,33666 | 21,02607 | 5,22603 | 4,40379 | 3,57057 |
| 13 | 27,68825 | 24,7356 | 22,36203 | 5,89186 | 5,00875 | 4,10692 |
| 14 | 29,14124 | 26,11895 | 23,68479 | 6,57063 | 5,62873 | 4,66043 |
| 15 | 30,57791 | 27,48839 | 24,99579 | 7,26094 | 6,26214 | 5,22935 |
| 16 | 31,99993 | 28,84535 | 26,29623 | 7,96165 | 6,90766 | 5,81221 |
| 17 | 33,40866 | 30,19101 | 27,58711 | 8,67176 | 7,56419 | 6,40776 |
| 18 | 34,80531 | 31,52638 | 28,86930 | 9,39046 | 8,23075 | 7,01491 |
| 19 | 36,19087 | 32,85233 | 30,14353 | 10,11701 | 8,90652 | 7,63273 |
| 20 | 37,56623 | 34,16961 | 31,41043 | 10,85081 | 9,59078 | 8,26040 |
| 21 | 38,93217 | 35,47888 | 32,67057 | 11,59131 | 10,2829 | 8,89720 |
| 22 | 40,28936 | 36,78071 | 33,92444 | 12,33801 | 10,98232 | 9,54249 |
| 23 | 41,63840 | 38,07563 | 35,17246 | 13,09051 | 11,68855 | 10,19572 |
| 24 | 42,97982 | 39,36408 | 36,41503 | 13,84843 | 12,40115 | 10,85636 |
| 25 | 44,31410 | 40,64647 | 37,65248 | 14,61141 | 13,11972 | 11,52398 |
| 26 | 45,64168 | 41,92317 | 38,88514 | 15,37916 | 13,84391 | 12,19815 |
| 27 | 46,96294 | 43,19451 | 40,11327 | 16,15140 | 14,57338 | 12,87850 |
| 28 | 48,27824 | 44,46079 | 41,33714 | 16,92788 | 15,30786 | 13,56471 |
| 29 | 49,58788 | 45,72229 | 42,55697 | 17,70837 | 16,04707 | 14,25645 |
| 30 | 50,89218 | 46,97924 | 43,77297 | 18,49266 | 16,79077 | 14,95346 |
| 31 | 52,19139 | 48,23189 | 44,98534 | 19,28057 | 17,53874 | 15,65546 |
| 32 | 53,48577 | 49,48044 | 46,19426 | 20,07191 | 18,29076 | 16,36222 |
| 33 | 54,77554 | 50,72508 | 47,39988 | 20,86653 | 19,04666 | 17,07351 |
| 34 | 56,06091 | 51,96600 | 48,60237 | 21,66428 | 19,80625 | 17,78915 |
| 35 | 57,34207 | 53,20335 | 49,80185 | 22,46502 | 20,56938 | 18,50893 |
| 36 | 58,61921 | 54,43729 | 50,99846 | 23,26861 | 21,33588 | 19,23268 |
| 37 | 59,89250 | 55,66797 | 52,19232 | 24,07494 | 22,10563 | 19,96023 |
| 38 | 61,16209 | 56,89552 | 53,38354 | 24,8839 | 22,87848 | 20,69144 |
| 39 | 62,42812 | 58,12006 | 54,57223 | 25,69539 | 23,65432 | 21,42616 |
| 40 | 63,69074 | 59,34171 | 55,75848 | 26,5093 | 24,43304 | 22,16426 |
| 41 | 64,95007 | 60,56057 | 56,94239 | 27,32555 | 25,21452 | 22,90561 |
| 42 | 66,20624 | 61,77676 | 58,12404 | 28,14405 | 25,99866 | 23,65009 |
| 43 | 67,45935 | 62,99036 | 59,30351 | 28,96472 | 26,78537 | 24,39760 |
| 44 | 68,70951 | 64,20146 | 60,48089 | 29,78748 | 27,57457 | 25,14803 |
| 45 | 69,95683 | 65,41016 | 61,65623 | 30,61226 | 28,36615 | 25,90127 |
| 46 | 71,20140 | 66,61653 | 62,82962 | 31,43900 | 29,16005 | 26,65724 |
| 47 | 72,44331 | 67,82065 | 64,00111 | 32,26762 | 29,95620 | 27,41585 |
| 48 | 73,68264 | 69,02259 | 65,17077 | 33,09808 | 30,75451 | 28,17701 |
| 49 | 74,91947 | 70,22241 | 66,33865 | 33,93031 | 31,55492 | 28,94065 |
| 50 | 76,15389 | 71,42020 | 67,50481 | 34,76425 | 32,35736 | 29,70668 |

Додаток Е.

Таблиця Е.1

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|    | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** |
| **0,0** | 0,3989 | 0,3989 | 0,3989 | 0,3988 | 0,3986 | 0,3984 | 0,3982 | 0,3980 | 0,3977 | 0,3973 |
| **0,1** | 0,3970 | 0,3965 | 0,3961 | 0,3956 | 0,3951 | 0,3945 | 0,3939 | 0,3932 | 0,3925 | 0,3918 |
| **0,2** | 0,3910 | 0,3902 | 0,3894 | 0,3885 | 0,3876 | 0,3867 | 0,3857 | 0,3847 | 0,3836 | 0,3825 |
| **0,3** | 0,3814 | 0,3802 | 0,3790 | 0,3778 | 0,3765 | 0,3752 | 0,3739 | 0,3726 | 0,3712 | 0,3698 |
| **0,4** | 0,3683 | 0,3668 | 0,3652 | 0,3637 | 0,3621 | 0,3605 | 0,3589 | 0,3572 | 0,3555 | 0,3538 |
| **0,5** | 0,3521 | 0,3503 | 0,3485 | 0,3467 | 0,3448 | 0,3429 | 0,3410 | 0,3391 | 0,3372 | 0,3352 |
| **0,6** | 0,3332 | 0,3312 | 0,3292 | 0,3271 | 0,3251 | 0,3230 | 0,3209 | 0,3187 | 0,3166 | 0,3144 |
| **0,7** | 0,3123 | 0,3101 | 0,3079 | 0,3056 | 0,3034 | 0,3011 | 0,2989 | 0,2966 | 0,2943 | 0,2920 |
| **0,8** | 0,2897 | 0,2874 | 0,2850 | 0,2827 | 0,2803 | 0,2780 | 0,2756 | 0,2732 | 0,2709 | 0,2685 |
| **0,9** | 0,2661 | 0,2637 | 0,2613 | 0,2589 | 0,2565 | 0,2541 | 0,2516 | 0,2492 | 0,2468 | 0,2444 |
| **1,0** | 0,2420 | 0,2396 | 0,2371 | 0,2347 | 0,2323 | 0,2299 | 0,2275 | 0,2251 | 0,2227 | 0,2203 |
| **1,1** | 0,2179 | 0,2155 | 0,2131 | 0,2107 | 0,2083 | 0,2059 | 0,2036 | 0,2012 | 0,1989 | 0,1965 |
| **1,2** | 0,1942 | 0,1919 | 0,1895 | 0,1872 | 0,1849 | 0,1826 | 0,1804 | 0,1781 | 0,1758 | 0,1736 |
| **1,3** | 0,1714 | 0,1691 | 0,1669 | 0,1647 | 0,1626 | 0,1604 | 0,1582 | 0,1561 | 0,1539 | 0,1518 |
| **1,4** | 0,1497 | 0,1476 | 0,1456 | 0,1435 | 0,1415 | 0,1394 | 0,1374 | 0,1354 | 0,1334 | 0,1315 |
| **1,5** | 0,1295 | 0,1276 | 0,1257 | 0,1238 | 0,1219 | 0,1200 | 0,1182 | 0,1163 | 0,1145 | 0,1127 |
| **1,6** | 0,1109 | 0,1092 | 0,1074 | 0,1057 | 0,1040 | 0,1023 | 0,1006 | 0,0989 | 0,0973 | 0,0957 |
| **1,7** | 0,0940 | 0,0925 | 0,0909 | 0,0893 | 0,0878 | 0,0863 | 0,0848 | 0,0833 | 0,0818 | 0,0804 |
| **1,8** | 0,0790 | 0,0775 | 0,0761 | 0,0748 | 0,0734 | 0,0721 | 0,0707 | 0,0694 | 0,0681 | 0,0669 |
| **1,9** | 0,0656 | 0,0644 | 0,0632 | 0,0620 | 0,0608 | 0,0596 | 0,0584 | 0,0573 | 0,0562 | 0,0551 |
| **2,0** | 0,0540 | 0,0529 | 0,0519 | 0,0508 | 0,0498 | 0,0488 | 0,0478 | 0,0468 | 0,0459 | 0,0449 |
| **2,1** | 0,0440 | 0,0431 | 0,0422 | 0,0413 | 0,0404 | 0,0395 | 0,0387 | 0,0379 | 0,0371 | 0,0363 |
| **2,2** | 0,0353 | 0,0347 | 0,0339 | 0,0332 | 0,0325 | 0,0317 | 0,0310 | 0,0303 | 0,0297 | 0,0290 |
| **2,3** | 0,0283 | 0,0277 | 0,0270 | 0,0264 | 0,0258 | 0,0252 | 0,0246 | 0,0241 | 0,0235 | 0,0229 |
| **2,4** | 0,0224 | 0,0219 | 0,0213 | 0,0208 | 0,0203 | 0,0198 | 0,0194 | 0,0189 | 0,0184 | 0,0180 |
| **2,5** | 0,0175 | 0,0171 | 0,0167 | 0,0163 | 0,0158 | 0,0154 | 0,0151 | 0,0147 | 0,0143 | 0,0139 |
| **2,6** | 0,0136 | 0,0132 | 0,0129 | 0,0126 | 0,0122 | 0,0119 | 0,0116 | 0,0113 | 0,0110 | 0,0107 |
| **2,7** | 0,0104 | 0,0101 | 0,0099 | 0,0096 | 0,0093 | 0,0091 | 0,0088 | 0,0086 | 0,0084 | 0,0081 |
| **2,8** | 0,0079 | 0,0077 | 0,0075 | 0,0073 | 0,0071 | 0,0069 | 0,0067 | 0,0065 | 0,0063 | 0,0061 |
| **2,9** | 0,0060 | 0,0058 | 0,0056 | 0,0055 | 0,0053 | 0,0051 | 0,0050 | 0,0048 | 0,0047 | 0,0046 |
| **3,0** | 0,0044 | 0,0043 | 0,0042 | 0,0040 | 0,0039 | 0,0038 | 0,0037 | 0,0036 | 0,0035 | 0,0034 |
| **3,1** | 0,0033 | 0,0032 | 0,0031 | 0,0030 | 0,0029 | 0,0028 | 0,0027 | 0,0026 | 0,0025 | 0,0025 |
| **3,2** | 0,0024 | 0,0023 | 0,0022 | 0,0022 | 0,0021 | 0,0020 | 0,0020 | 0,0019 | 0,0018 | 0,0018 |
| **3,3** | 0,0017 | 0,0017 | 0,0016 | 0,0016 | 0,0015 | 0,0015 | 0,0014 | 0,0014 | 0,0013 | 0,0013 |
| **3,4** | 0,0012 | 0,0012 | 0,0012 | 0,0011 | 0,0011 | 0,0010 | 0,0010 | 0,0010 | 0,0009 | 0,0009 |
| **3,5** | 0,0009 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0007 | 0,0007 | 0,0007 | 0,0007 | 0,0006 |
| **3,6** | 0,0006 | 0,0006 | 0,0006 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0004 |
| **3,7** | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 |
| **3,8** | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 |
| **3,9** | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0001 |

додаток Ж

(Довідковий)

Критеріальні значення характеристик розподілу

Таблиця Ж.1 – Характеристики розподілу



Додаток З

(Довідковий)

Перевірка гіпотези за допомогою критерію Кочрена

Таблиця З.1 – Критичні точки розподілу Кочрена (*f* – число ступенів свободи, *N* - кількість вибірок), при рівні значущості *q* = 0,01



# СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Оборський Г.О. Методичні вказівки до виконання практичних робіт з дисципліни «Управління якістю» для студентів спеціальностей 6.051001 та 6.051002 очної форми навчання/ Укл.: Г.О. Оборський, М.О. Голофєєва, С.А. Зелинський – Одеса: ОНПУ, 2014. – 35 с.
2. Дорожовець М. та ін. Основи вимірювальної техніки: Підручник: У2 т. / М. Дорожовець. В. Мотало, Б. Стадник, В. Василюк, Р. Борек. А. Ковальчик; за ред.. Б. Стадника. – Львів: Видавництво Національного університету «Львівська політехніка». 2005. – Т.1. Основи метрології. – 532 с.
3. Захожай В.Б.. Чорний А.Ю. Статистичне забезпечення управління якістю: Навчальний посібник. – Київ: Центр навчальної літератури, 2005. – 340 с.

*Навчальне видання*

ОПРАЦЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ

Конспект лекцій

для студентів спеціальності 175 очної та заочної форми навчання

 Автори: Голофєєва Марина Олександрівна

 Левинський Олександр Сергійович