

DOI: <https://doi.org/10.15276/ict.01.2024.54>

УДК 004.05

Метод побудови GL-моделі для послідовної k-out-of-n системи

Романкевич Віталій Олескійович¹⁾

Д-р техніч. наук, проф., зав. каф. Системного програмування та спеціальних комп'ютерних систем
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4696-5935>; zavkaf@scs.kpi.ua. Scopus Author ID: 57193263058

Єрмоленко Ігор Андрійович¹⁾

Аспірант каф. Системного програмування та спеціальних комп'ютерних систем
ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-5298-4888>; yermolenkomail@gmail.com

Морозов Костянтин В'ячеславович¹⁾

Канд. техніч. наук, асистент каф. Системного програмування та спеціальних комп'ютерних систем
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0978-6292>; mcng@ukr.net; Scopus Author ID: 57222509251

Романкевич Олексій Михайлович¹⁾

Д-р техніч. наук, професор каф. Системного програмування та спеціальних комп'ютерних систем
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5634-8469>; romankev@scs.kpi.ua. Scopus Author ID: 6602114176

¹⁾ Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», пр. Перемоги, 37. Київ, 03056, Україна

АНОТАЦІЯ

Робота присвячена методу побудови GL-моделей поведінки багатопроцесорних систем у потоці відмов, зокрема розглянуті послідовні k-out-of-n системи, особливістю яких є вихід з ладу системи при відмові деякої кількості послідовно з'єднаних процесорів. В основі GL-моделей, що будуються, лежать базові моделі з мінімальним числом ребер, що втрачаються. Визначено, що для побудови GL-моделі систем такого типу достатньо розрахувати максимально можливу допустиму кількість процесорів, що відмовили, при якій система залишається у робочому стані. Будується GL-модель системи, що витримує таку кількість відмов, без урахування послідовності цих відмов. Наступним кроком визначаються всі можливі послідовні відмови, при яких система виходить з ладу, а модель змінюється так, щоб відображати вихід з ладу системи при появі послідовних відмов. У роботі описаний метод розрахунку максимально допустимої кількості відмов при якій система залишається у робочому стані. Наведений приклад побудови GL-моделей для послідовних k-out-of-n систем.

Ключові слова: багатопроцесорні системи; GL-моделі; надійність; k-out-of-n системи; MBP-моделі

Незважаючи на наявність вже відомих методів для розрахунку надійності систем, що виходять з ладу при відмові k послідовних процесорів, недоліком аналітичних підходів є те, що для кожного типу системи необхідно розробляти окремі формули або, навіть, методи. GL-моделі універсальні, і можуть застосовуватись до різних типів систем. При появі додаткових умов виходу системи з ладу, таких як вихід з ладу системи при відмові конкретних процесорів, або у випадку коли розглянута система є частиною більшої системи, де інші підсистеми виходять з ладу за інших умов, відобразити ці умови на GL-моделі відносно просто, в той час як аналітичні методи можуть потребувати значних перерахунків.

Отже, основна **мета роботи** – розробити метод побудови GL-моделей для послідовних k-out-of-n систем.

Сучасні автоматизовані системи керування (СК) [1, 2]. дозволяють зменшити залученість людини у процес управління. Такі системи зменшують вплив людського фактору та звільняють оператора від рутинної роботи, а в окремих випадках, виконують задачі з високою обчислювальною складністю, які людина в принципі не здатна вирішити за той же час. Як правило, СК складних об'єктів будуються на основі мікропроцесорних систем, які можуть приймати сигнали від сенсорів або керуючих пристроїв, обробляти їх і видавати відповідний керуючий сигнал. В деяких галузях, таких як медицина, військова промисловість, авіація, космічна промисловість, банківська сфера, а також інфраструктури критичного значення, відмова СК може призвести до фінансових і матеріальних збитків, або, навіть, фатальних наслідків.

This is an open access article under the CC BY license (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.uk>)

Тому, для побудови системи керування використовують відмовостійкі багатопроцесорні системи (ВБС), які складаються з великої кількості процесорів і можуть продовжувати повноцінно функціонувати, навіть коли частина процесорів виходить з ладу. Оскільки відмовостійкість є критично важливою властивістю таких систем, при проектуванні ВБС багато уваги приділяється розрахункам їх надійності і безпеки.

Відмовостійкі багатопроцесорні системи можуть бути класифіковані як базові та небазові. Базові системи залишаються у робочому стані за умови, що функціонує певна кількість будь-яких її процесорів. Небазова система може вести себе по-різному, при наявності однакової кількості відмов. Відомі декілька аналітичних методів розрахунку надійності базової системи (тобто k -out-of- n системи) – [3, 4, 5], проте для небазових систем розрахунки стають складнішими. Одним із найрозповсюджених типів небазових систем є послідовні k -out-of- n системи [6, 7, 8]. На відміну від базових k -out-of- n систем, єдиною умовою виходу з ладу всієї послідовної k -out-of- n системи є відмова k послідовно з'єднаних процесорів (далі – послідовних процесорів).

Окрім аналітичних методів розрахунку надійності ВБС, існують також методи засновані на статичних експериментах. Наприклад, моделювання поведінки системи в потоці відмов за допомогою графо-логічних моделей (далі – GL-моделі) [9, 10]. GL-моделі являють собою циклічний неорієнтований граф, кожному ребру якого приписуються булева функція. Аргументи x_i реберної функції відображають стани процесорів в системі. Аргумент x_i приймає значення 1, коли процесор функціонує, та 0, коли процесор вийшов з ладу. У випадку, коли функція набуває значення 0, відповідне ребро видаляється з графа. Втрата зв'язності графом відповідає виходу з ладу всієї системи.

GL-моделі можна поділити на базові і небазові. Базова модель відповідає ВБС, що містить n процесорів, і залишається в робочому стані при відмові m або менше з них ($n > m$). Слідуючи за [11] будемо говорити, що блокувати вектори можна шляхом послаблення – модель буде втрачати зв'язність на деякому векторі, що містить m або менше нулів, або шляхом підсилення – небазова GL-модель не буде втрачати зв'язність на векторах, що містять більше m нулів. Блокувати вектори можна декількома способами: за допомогою зміни реберних функцій графа, зміни структури графа або поєднуючи обидва цих підходи.

Побудувати небазову GL-модель можна шляхом модифікації базової таким чином, щоб її поведінка змінилась порівняно з базовою на певних векторах стану системи. Така модифікація моделі призводить до блокування цих векторів, і змінює модель так, щоб вона відображала поведінку системи у потоці відмов.

Метод побудови GL-моделі для послідовних k -out-of- n систем використовує МВР-моделі (мінімум втрачених ребер) [12]. Однією з особливостей МВР-моделей є втрата графом двох ребер, на векторах стану системи, що містять $m+1$ нулів, одного ребра на векторах, що містять m нулів. На векторах стану системи, що містять менше m нулів граф не втрачає ребра.

Кількість втрачених ребер можна описати як

$$\psi(m, l) = \begin{cases} 0, & \text{при } l < m \\ l - m, & \text{при } l \geq m \end{cases}$$

Кількість ребер графа, а, відповідно, і кількість реберних функцій МВР-моделі $K(m, n)$, як було продемонстровано в [13] може бути розрахована за формулою:

$$\rho(m, n) = n - m + 1.$$

Основною відмінністю послідовних k -out-of- n систем від базових k -out-of- n систем, є умова про вихід з ладу системи, при відмові k послідовних процесорів. Водночас, система буде функціонувати навіть при відмові більше ніж k непослідовних процесорів. Отже, для побудови GL-моделі такої системи, визначимо максимально допустиму кількість відмов, при

якій система залишається у робочому стані, без урахування умови про відмову k послідовних процесорів. Тобто спершу визначимо число m і побудуємо МВР-модель базової системи $K(m, n)$.

Логічно припустити, що максимально допустима кількість відмов буде у випадку, коли кожен k послідовних елементів в системі будуть містити лише один робочий елемент. Таким чином, система не буде містити k послідовних елементів, що відмовили і буде містити мінімальну кількість робочих елементів, щоб залишатись у робочому стані. Нехай робочим залишиться тільки кожен k -й елемент, а останній k -й елемент знаходиться на позиції d , тобто номери елементів, що залишаються у робочому стані будуть: $k, 2k, 3k, \dots, dk, dk \leq n$. Число d можна визначити, як найбільше ціле число, що не перевищує $\frac{n}{k}$, тобто $d = \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$. Оскільки d – це номер останньої послідовності k елементів, то воно, фактично і визначає мінімальну допустиму кількість робочих елементів в системі, при якій система залишатиметься у робочому стані.

Для того, щоб визначити максимально допустиму кількість елементів, що відмовили, тобто число m , достатньо відняти від n число d :

$$m = n - d = n - \lfloor \frac{n}{k} \rfloor.$$

Фактично, послідовні k -out-of- n системи поведуть себе як базові, але додатковою умовою виходу з ладу, окрім виходу з ладу більше ніж m процесорів, є відмова k послідовних процесорів. Тому, наступним кроком, визначимо вектори, на яких система перестане функціонувати, тобто усі вектори з k послідовними нулями. Оскільки достатньо визначити тільки вектори з k послідовними нулями, а не k нулями взагалі, то таких векторів буде відносно небагато. Далі, блокуємо всі отримані вектори шляхом послаблення. Послабити модель можна модифікувавши дві, або більше реберних функції, змінивши структуру графа, або поєднуючи обидва цих підходи.

Наприклад достатньо помножити дві будь-які реберні функції на f' – кон'юнкцію всіх диз'юнкцій кожних k послідовних аргументів функції. f' можна описати як:

$$f' = \bigwedge_{i=1}^{n-k+1} (\bigvee_{j=i}^{i+k-1} x_j).$$

Отримана GL-модель буде відповідати поведінці заданої системи у потоці відмов.

Приклад. В якості прикладу такої системи, можна навести систему, що складається з n процесорів, кожен з яких має по $2k$ портів для з'єднання з іншими процесорами та вузлами (наприклад, датчиками, контролерами шин тощо). Система організована так, що зв'язок встановлено між сусідніми процесорами, а також між процесорами, які знаходяться на відстані від 1 до k . Перший і останній процесори підключені до зовнішніх вузлів. При розрахунку надійності системи, зовнішні вузли враховувати не будемо, оскільки в такому випадку з'являться додаткові умови виходу з ладу системи. Розглянемо тільки ту частину, що відповідає наступній умові: система виходить з ладу при втраті зв'язку між двома кінцевими вузлами системи.

Нехай задана послідовна k -out-of- n система, де $k=2$, а $n=11$. Приклад такої системи зображений на Рис. 1.

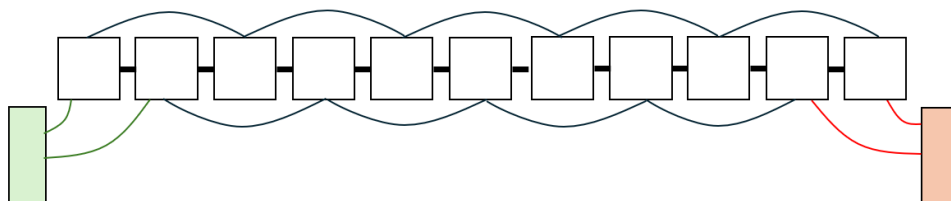


Рис. 1. Приклад системи для $n = 11, k = 2$

Почнемо з визначення кількості допустимих відмов m , при яких система залишиться у робочому стані:

$$m = 11 - \left\lfloor \frac{11}{2} \right\rfloor = 6.$$

Відповідно, граф GL-моделі не буде втрачати зв'язність на векторах з 6 і менше нулями.

Визначимо реберні функції для МВР-моделі $K(6, 11)$ відповідно до [12]:

$$f_1 = x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5 \vee x_6$$

$$f_2 = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) \wedge \left((x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4) \left((x_1 \vee x_2 \vee x_3) \left((x_1 \vee x_2) (x_1 x_2 \vee x_3) \vee x_4 \right) \vee x_5 \right) \vee x_6 \right) \vee x_7 x_8 x_9 x_{10} x_{11}$$

$$f_3 = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4) \left((x_1 \vee x_2 \vee x_3) \left((x_1 \vee x_2) (x_1 x_2 \vee x_3) \vee x_4 \right) \vee x_5 x_6 \right) \left((x_1 \vee x_2) (x_1 x_2 \vee x_3 x_4) (x_3 \vee x_4) \right) \vee (x_7 \vee x_8) (x_7 x_8 \vee x_9) (x_7 x_8 x_9 \vee x_{10} x_{11}) (x_{10} \vee x_{11})$$

$$f_4 = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \left((x_1 \vee x_2) (x_1 x_2 \vee x_3) \vee x_4 x_5 x_6 \right) (x_1 x_2 x_3 \vee (x_4 \vee x_5) (x_4 x_5 \vee x_6) (x_4 \vee x_5 \vee x_6)) \vee (x_7 \vee x_8 \vee x_9) \left((x_7 \vee x_8) (x_7 x_8 \vee x_9) \vee x_{10} x_{11} \right) (x_7 x_8 x_9 \vee x_{10} \vee x_{11})$$

$$f_5 = (x_1 \vee x_2) (x_1 x_2 \vee x_3 x_4) (x_3 \vee x_4) (x_1 x_2 x_3 x_4 \vee x_5 x_6) (x_5 \vee x_6) \vee \left((x_7 \vee x_8 \vee x_9 \vee x_{10}) \left((x_7 \vee x_8 \vee x_9) (x_7 \vee x_8) (x_7 x_8 \vee x_9) \vee x_{10} \right) \vee x_{11} \right)$$

$$f_6 = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 \vee x_7 \vee x_8 \vee x_9 \vee x_{10} \vee x_{11}$$

Визначимо всі вектори, які потрібно блокувати шляхом послаблення (Табл. 1).

Визначимо функцію f' :

$$f' = (x_1 \vee x_2) (x_2 \vee x_3) (x_3 \vee x_4) (x_4 \vee x_5) (x_5 \vee x_6) (x_6 \vee x_7) (x_7 \vee x_8) (x_8 \vee x_9) (x_9 \vee x_{10}) (x_{10} \vee x_{11})$$

Модифікуємо функції f_1 і f_6 шляхом множення на f' :

$$f_1' = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5 \vee x_6) (x_1 \vee x_2) (x_2 \vee x_3) (x_3 \vee x_4) (x_4 \vee x_5) (x_5 \vee x_6) (x_6 \vee x_7) (x_7 \vee x_8) (x_8 \vee x_9) (x_9 \vee x_{10}) (x_{10} \vee x_{11})$$

$$f_6' = (x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 \vee x_7 \vee x_8 \vee x_9 \vee x_{10} \vee x_{11}) (x_1 \vee x_2) (x_2 \vee x_3) (x_3 \vee x_4) (x_4 \vee x_5) (x_5 \vee x_6) (x_6 \vee x_7) (x_7 \vee x_8) (x_8 \vee x_9) (x_9 \vee x_{10}) (x_{10} \vee x_{11})$$

Таблиця 1. Всі вектори із двома нулями

№	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇	x ₈	x ₉	x ₁₀	x ₁₁
1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1
9	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0

Отримаємо небазову GL-модель $K'(6,11)$, що відповідає поведінці заданої послідовної k-out-of-n системи у потоці відмов. Наприклад, граф отриманої моделі буде втрачати зв'язність на векторах 0011111111, 1001111111, 1100111111, 1110011111, 1111001111, 1111100111, 1111110011, 1111111001, 1111111100. При цьому, на векторі 0101010101 зв'язність графа буде збережена.

Висновки. В роботі запропонований метод побудови GL-моделі для послідовних k-out-of-n систем. Особливістю цього типу систем є вихід з ладу всієї системи при відмові k послідовно з'єднаних процесорів, в той час як для виходу з ладу базової системи достатньо відмовити будь-яким $m+1$ процесорам. Визначений спосіб розрахунку допустимої кількості непослідовних відмов. Оскільки єдиною заданою умовою виходу системи з ладу є відмова k послідовних компонентів, розрахунок максимально допустимої кількості непослідовних відмов зводиться до пошуку мінімально необхідної кількості функціонуючих процесорів для роботи системи. Достатньо відняти отримане число від загальної кількості процесорів, щоб визначити максимально допустиму кількість відмов.

Метод побудови моделі базується на використанні МВР-моделей. Отримана МВР-модель послаблюється на попередньо визначених векторах, що містять k послідовних відмов. Послаблювати МВР-модель можна шляхом модифікації реберних функцій або через зміну структури графа. Наведений приклад побудови моделі для послідовної k-out-of-n системи, продемонстровано, що отримана модель відповідає заданій системі.

В роботі описується побудова GL-моделей для ВБС, де елементами системи є процесори. Проте описаний метод можна застосувати і для інших типів систем, компонентами яких можуть бути пам'ять, мережеві пристрої тощо.

Подальшими предметами дослідження може бути оптимізація підходу до модифікацій реберних функцій або побудова GL-моделей для інших видів небазових k-out-of-n систем.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Nazarova O. S., Osadchy V. V. & Rudim B. Y. "Computer simulation of the microprocessor liquid level automatic control system". *Applied Aspects of Information Technology*. 2023; 6 (2): 163–174. DOI: <https://doi.org/10.15276/aait.06.2023.12>.
2. Kotov D. O. "A generalized model of an adaptive information-control system of a car with multi-sensor channels of information interaction". *Applied Aspects of Information Technology*. 2021; 5 (1): 25–34. DOI: <https://doi.org/10.15276/aait.05.2022.2>.
3. Peiravi A., Nourelfath M. & Kazemi Zanjani, M. "Redundancy strategies assessment and optimization of k-out-of-n systems based on Markov chains and genetic algorithms". *Reliability Engineering & System Safety*. 2022; 221: 108277. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.res.2021.108277>.
4. Huynh K. T., Vu H. C., Nguyen T. D. & Ho A. C. "A predictive maintenance model for k-out-of-n continuously deteriorating systems subject to stochastic and economic dependencies". *Reliability Engineering & System Safety*. 2022; 226: 108671. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.res.2022.108671>.
5. Asadi M. "On the phase transition of k-out-of-n systems with applications to optimal maintenance". *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2024; 435: 115286. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cam.2023.115286>.
6. Dui H., Tian T., Zhao J. & Wu S. "Comparing with the joint importance under consideration of consecutive-k-out-of-n system structure changes". *Reliability Engineering & System Safety*. 2022; 219: 108255. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.res.2021.108255>.
7. Wang Y., Hu L., Yang L. & Li J. "Reliability modeling and analysis for linear consecutive-k-out-of-n: F retrial systems with two maintenance activities". *Reliability Engineering & System Safety*. 2022; 226: 108665. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.res.2022.108665>.

8. Rezaei E., Jafary B. & Fiondella L. “Optimal maintenance policies for linear consecutive k-out-of-n systems susceptible to dependent failures”. *Computers & Industrial Engineering*. 2022; 173: 108657. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cie.2022.108657>.

9. Романкевич А. М., Карачун Л. Ф., Романкевич В. А. «Графо-логические модели для анализа сложных отказоустойчивых вычислительных систем». *Электронное моделирование*. 2001; 23 (1): 102–111.

10. Романкевич В. А., Рабах Мох'д Ахмад Ал Шбул, Назаренко В. В. «О минимизации базовых циклических GL-моделей». *Вісник ТУП, «Технічні науки»*. 2004; 1 (2): 42–46.

11. Морозов К. В., Романкевич А. М., Романкевич В. А. «О характере влияния модификации реберных функций GL-модели на ее поведение в потоке отказов». *Радіоелектронні і комп'ютерні системи*. 2016; 6: 108–112.

12. Романкевич В. А., Потапова Е. Р., Бахтари Хедаятоллах, Назаренко В. В. «GL-модель поведения отказоустойчивых многопроцессорных систем с минимальным числом теряемых рёбер». *Вісник НТУУ «КПІ» – Інформатика, управління та ОТ*. 2006; 45: 93–100.

13. Романкевич А. М., Романкевич В. А., Майданюк И. В. «Граничные оценки числа рёбер GL-моделей поведения отказоустойчивых многопроцессорных систем в потоке отказов». *Электронное моделирование*. 2008; 1 (30): 59–70.

DOI: <https://doi.org/10.15276/ict.01.2024.54>

UDC 004.05

The method of constructing a GL-model for a consecutive k-out-of-n system

Vitaliy A. Romankevich¹⁾

Dr. Sc., Professor, Head of System Programming and Special Computer System Department
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4696-5935>; zavkaf@scs.kpi.ua. Scopus Author ID: 57193263058

Ihor A. Yermolenko¹⁾

Postgraduate student, System Programming and Special Computer System Department
ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-5298-4888>; yermolenkomail@gmail.com

Kostiantyn V. Morozov¹⁾

PhD, Assistant, System Programming and Special Computer System Department
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0978-6292>; mcng@ukr.net. Scopus Author ID: 57222509251

Alexei M. Romankevich¹⁾

Dr. Sc., Professor, System Programming and Special Computer System Department
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5634-8469>; romankev@scs.kpi.ua. Scopus Author ID: 6602114176

¹⁾ National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, 37, Peremoga Ave. Kyiv, 03056, Ukraine

ABSTRACT

The paper is devoted to the method of constructing GL-models of the behavior of multiprocessor systems in a failure flow, in particular, consecutive k-out-of-n systems are considered, whose main characteristic is the failure of the system when a certain number of processors connected consecutively fail. The GL-models under construction are based on the basic models with a minimum number of lost edges. It has been determined that to build a GL-model of systems of this type, it is sufficient to calculate the maximum possible number of failed processors at which the system remains operational. A GL-model of a system that can handle this number of failures is built without considering the consecutive failures. The next step is to determine all possible consecutive failures that cause the system to fail, and the model is modified to reflect the system failure when consecutive failures occur. The paper describes a method for calculating the maximum allowable number of failures at which the system remains operational. An example of building GL-models for consecutive k-out-of-n systems is given.

Keywords: Multiprocessor systems; GL-models; reliability; k-out-of-n systems; MLE-models