УДК 621.396.931

Informatics and Mathematical Methods in Simulation
Vol. 5 (2015), No. 3, pp. 203-209

РЕКУРРЕНТНЫЕ МЕТОДЫ СИНТЕЗА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ С ОПТИМАЛЬНЫМ ПИК-ФАКТОРОМ СПЕКТРА УОЛША-АДАМАРА

М.И. Мазурков, А.В. Соколов

Одесский национальный политехнический университет,
пр. Шевченко 1, 65044, Одесса, Украина; e-mail: radiosquid@gmail.com

Предложены три метода синтеза бинарных последовательностей с оптимальным значением пик-фактора спектра Уолша-Адамара, которые могут быть использованы для построения С-кодов, применяемых в технологии CDMA. На основе данных конструкций разработан алгоритм синтеза бесконечных семейств последовательностей, обладающих оптимальным значеним пик-фактора спектра Уолша-Адамара.

Ключевые слова: оптимальная кодирующая последовательность, CDMA, С-код, бент-последовательность, пик-фактор.

Введение

Одной из наиболее актуальных технологий множественного доступа является технология MC-CDMA (Multi-Code Code Division Multiple Access), которая является ключевой при построении систем связи четвертого и пятого поколений G4 и G5 [1].

Известно, что в технологии MC-CDMA исходный бинарный вектор данных подвергается ортогональному преобразованию. Входные биты изменяют знак одной из ортогональной функций дискретного времени $h_i(t)$, в качестве которых чаще всего применяются функции Уолша. Таким образом, передаваемый в канал связи сигнал представляет собой коэффициенты преобразования Уолша-Адамара исходного сигнала [2].

Данное обстоятельство приводит к появлению такого недостатка технологии MC-CDMA как высокие значения пик-фактора передаваемого сигнала $S_c(t)$, который определяется как отношение максимальной мощности сигнала $P_{\max}$ к его средней мощности P_{cp}

$$\kappa = \frac{P_{\max}}{P_{cp}} = \frac{1}{N}\max_t\left\{ \left|S_c(t)\right|^2 \right\}, \tag{1}$$

где N — длина последовательности $h_i(t)$.

Высокие значения пик-фактора излучаемого сигнала приводят к нерациональному использованию мощности передатчика, искажениям передаваемого сигнала, усложнению применяемого оборудования. Это диктует необходимость поиска методов снижения величины κ [3]. Одним из наиболее распространенных методов снижения пик-фактора является метод, основанный на кодировании исходных сообщений d_i такими кодовыми словами С-кода, которые обладали бы низкими значениями пик-фактора κ (рис. 1) [2].

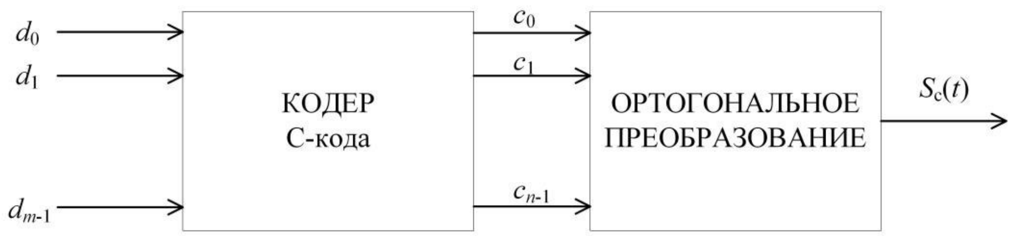

Рис. 1. Схема кодирования информации на основе С-кода

Для построения С-кода наилучшими, с точки зрения минимизации пик-фактора, кодовыми словами являются бент-последовательности [4] — бинарные последовательности $B = [b_0, b_1, ..., b_i, ..., b_{N-1}]$, где коэффициенты $b_i \in \{1, -1\}$, четной длины $N = 2^{2m}$, которые обладают равномерным по модулю спектром Уолша-Адамара [5], представимым в матричной форме

$$W_B(\omega) = B \cdot A_N, \quad \omega = \overline{0, N-1}, \tag{2}$$

где A_N — матрица Уолша-Адамара порядка $N = 2^{2m}$.

Существование бент-последовательностей возможно только, если их длина определена четной степенью двойки, т.е. $N = 2,4,16,64,256,1024...$, что является существенным ограничением для разрядности используемого в системах связи технологии MC-CDMA оборудования.

Целью настоящей статьи является разработка рекуррентных методов построения последовательностей длин нечетной степени двойки ($N = 2^{2m-1} = 8,32,128,512,...$), обладающих оптимальным значением пик-фактора $\kappa = 2$.

Определение 1. Оптимальной кодирующей последовательностью (ОКП) назовем такую последовательность, которая обладает значением пик-фактора спектра Уолша-Адамара $\kappa = 2$.

Экспериментальные исследования показывают, что значение пик-фактора $\kappa = 2$ является минимальным значением для длин последовательностей $N = 2^{2m-1}, m = 1,2,3...$.

Установлено, что для построения последовательностей с оптимальным значением пик-фактора $\kappa = 2$ могут быть использованы аналоги алгебраических конструкций, предложенных в работе [6] для синтеза бент-последовательностей.

В настоящей статье обобщен известный метод синтеза бент-последовательностей Майорана-МакФарланда (Метод 1), а также предложены два новых метода (Метод 2, Метод 3) рекуррентного построения ОКП.

Метод 1 (обобщенный метод Майорана-МакФарланда)

Как известно, одним из наиболее эффективных методов построения бент-последовательностей произвольной длины $N = 2^{2m}$ является конструкция Майорана-МакФарланда [5,7], которая основана на конкатенации строк матрицы Адамара A_L порядка $L = \sqrt{N}$, а также всех возможных $L!$ перестановок её строк и 2^L знаковых кодирований. Тогда как, в свою очередь, матрица Адамара A каждого следующего порядка $L = 2^k$ строится в соответствии с известным рекуррентным правилом [1]

$$A_{2^k} = \begin{bmatrix} A_{2^{k-1}} & A_{2^{k-1}} \\ A_{2^{k-1}} & -A_{2^{k-1}} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

где $A_1 = 1$.

Например, в соответствии с (3) построим матрицу Адамара A_8 (где для краткости $+1$ обозначены как “+”, а -1 как “–”)

$$A_8 = \begin{bmatrix} ++++++++ \\ +-+-+-+- \\ ++--++-- \\ +--++--+ \\ ++++---- \\ +-+--+-+ \\ ++----++ \\ +--+-++- \end{bmatrix}, \tag{4}$$

и, применяя последовательную конкатенацию её строк, получаем бент-последовательность длины $N = 64$, и в соответствии с (2) её спектр Уолша-Адамара

$$B = [+++++++++-+-+-+-++--++--+--++--+$$
$$++++----+-+--+-+++----+++--+-++-];$$

$$W_B = [\ 8\ 8\ 8\ 8\ 8\ 8\ 8\ 8\ 8\ \text{-}8\ 8\ \text{-}8\ 8\ \text{-}8\ 8\ \text{-}8\ 8\ 8\ \text{-}8\ \text{-}8\ 8\ 8\ \text{-}8\ \text{-}8\ 8$$
$$\text{-}8\ \text{-}8\ 8\ 8\ \text{-}8\ \text{-}8\ 8\ 8\ 8\ 8\ 8\ \text{-}8\ \text{-}8\ \text{-}8\ \text{-}8\ 8\ \text{-}8\ 8\ \text{-}8\ \text{-}8\ 8\ \text{-}8\ 8\ 8\ 8$$
$$\text{-}8\ \text{-}8\ \text{-}8\ \text{-}8\ 8\ 8\ 8\ \text{-}8\ \text{-}8\ 8\ \text{-}8\ 8\ 8\ \text{-}8], \tag{5}$$

т.е. последовательность (5) действительно удовлетворяет определению бент-последовательности.

В настоящей работе предлагается метод построения последовательностей длин $N = 8, 32, 128, 512...$, основанный на сегментарной конкатенации строк матрицы Уолша-Адамара для построения последовательностей с оптимальным значением пик-фактора $\kappa = 2$.

Рассмотрим, например, матрицу Адамара восьмого порядка A_8 (4). Путем конкатенации её первых четырех строк получаем последовательность Ω длины $N = 32$ и коэффициенты её преобразования Уолша-Адамара $W = \Omega A_{32}$ соответственно

$$\Omega = [+++++++++-+-+-+-++--++--+--++--+];$$

$$W = [8\ 8\ 8\ 8\ 0\ 0\ 0\ 0\ 8\ \text{-}8\ 8\ \text{-}8\ 0\ 0\ 0\ 0\ 8\ 8\ \text{-}8\ \text{-}8\ 0\ 0\ 0\ 0\ 8]. \tag{6}$$

Очевидно, что пик-фактор построенной последовательности может быть найден в соответствии с (1) как $\kappa = 8^2/32 = 2$, что, как показывают эмпирические исследования, является наилучшим (оптимальным) значением среди всех последовательностей длины $N = 32$, т.е. последовательность (6) является ОКП.

Установлено, что число ОКП длины 32, может быть существенно увеличено с помощью следующих правил размножения.

Правило 1. Выбор строк матрицы Адамара порядка L для конструирования последовательностей длины N различными $C_L^{L/2}$ способами.

В случае конструирования последовательностей длины $N = 32$ с помощью матрицы Адамара порядка $L = 8$ получаем количество возможных сочетаний

$$C_8^4 = \frac{8!}{4!(8-4)!} = 70. \tag{7}$$

Правило 2. Конкатенацию выбранных μ строк матрицы Адамара можно провести различными $\mu!$ способами, где $\mu = L/2$, при этом сохраняется оптимальное значение пик-фактора.

Так, например, при конструировании последовательностей длины $N = 32$ с помощью матрицы Адамара порядка $L = 8$ мы производим конкатенацию $\mu = 4$ строк матрицы следующим образом

$$\Omega = \left[\overset{1}{A_{\alpha_1,:}}, \quad \overset{2}{A_{\alpha_2,:}}, \quad \overset{3}{A_{\alpha_3,:}}, \quad \overset{4}{A_{\alpha_4,:}} \right], \tag{8}$$

где «,» — символ горизонтальной конкатенации, «:»— символ выбора всех элементов по столбцам.

Ясно, что в приведенном примере конкатенируемые строки $A_{i,:}$ могут быть переставлены $4! = 24$ различными способами.

Правило 3. Каждый сегмент исходной матрицы Адамара, участвующий в конкатенации, может быть подвергнут знаковому кодированию $2^{L/2}$ различными способами.

Так, при конструировании последовательностей длины $N = 32$, сегменты матрицы могут быть закодированы 16-ю различными способами, т.е.

$$\Omega = [(-1)^{\gamma_1} A_{\alpha_1,:}, \quad (-1)^{\gamma_2} A_{\alpha_2,:}, \quad (-1)^{\gamma_3} A_{\alpha_3,:}, \quad (-1)^{\gamma_4} A_{\alpha_4,:}], \tag{9}$$

где $\gamma_1, ..., \gamma_4 \in \{0,1\}$.

Таким образом, на основе Правил 1, 2, 3 может быть построен первый класс ОКП мощности

$$J_1 = C_L^{L/2} \cdot \left(L/2 \right)! \cdot 2^{L/2}. \tag{10}$$

Так, при $N = 2^3 = 8$ на основе Метода 1 может быть построено $J = 6 \cdot 2 \cdot 4 = 48$ ОКП. Путем полного перебора, найдено, что всего ОКП длины $N = 8$ существует $J_8 = 112$, десятичные эквиваленты которых приведены в виде следующей алгебраической конструкции

03	05	06	09	0A	0C	11	12	14	17	18	1B	1D	1E	21	22
24	27	28	2B	2D	2E	30	35	36	39	3A	3F	41	42	44	47
48	4B	4D	4E	50	53	56	59	5C	5F	60	63	65	6A	6C	6F
71	72	74	77	78	7B	7D	7E	81	82	84	87	88	8B	8D	8E
90	93	95	9A	9C	9F	A0	A3	A6	A9	AC	AF	B1	B2	B4	B7
B8	BB	BD	BE	C0	C5	C6	C9	CA	CF	D1	D2	D4	D7	D8	DB
DD	DE	E1	E2	E4	E7	E8	EB	ED	EE	F3	F5	F6	F9	FA	FC

. (11)

Например, $03 = \{11000000\} = \{- - + + + + + +\}$. Находя преобразование Уолша-Адамара (2) данной последовательности $W = \{4 \quad 0 \quad -4 \quad 0 \quad -4 \quad 0 \quad -4 \quad 0\}$, убеждаемся, что она действительно представляет собой ОКП.

Найденные $J_8 = 112$ ОКП могут быть положены в основу конструирования других двух классов оптимальных кодирующих последовательностей.

Метод 2

Проведенные в настоящей работе исследования полного класса из $J_8 = 112$ оптимальных последовательностей длины $N = 8$ позволили классифицировать его с точки зрения весовых структур последовательностей

Вес последовательности	2	4	6
Количество последовательностей	28	56	28

. (12)

Каждая последовательность длины 2^{k-2} из данного класса может быть использована для построения оптимальной, с точки зрения пик-фактора, последовательности длины 2^k по следующим правилам (с учетом допустимых знаковых кодирований)

$$ОКП_{2^k} = \begin{bmatrix} r \\ r \\ r \\ \bar{r} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r \\ r \\ \bar{r} \\ r \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r \\ \bar{r} \\ r \\ r \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{r} \\ r \\ r \\ r \end{bmatrix}, \tag{13}$$

где r — любая ОКП длины 2^{k-2}, k — нечетное.

Например, рассмотрим исходную ОКП длины $N = 8$

$$r = [--++++++], \tag{14}$$

в соответствии с (13) на её основе могут быть построены 4 новые ОКП длины $N = 32$, обладающие значением пик-фактора $\kappa = 2$

$$ОКП = \begin{bmatrix} --++++++--++++++--++++++++------ \\ --++++++--++++++++--------++++++ \\ --++++++++--------++++++--++++++ \\ ++--------++++++--++++++--++++++ \end{bmatrix}, \tag{15}$$

Отметим, что Метод 2 увеличивает мощность множества ОКП в 4 раза на каждой итерации увеличения длины.

Метод 3

Построение ОКП большей длины 2^k также возможно производить на основе 2-х различных ОКП меньшей длины 2^{k-2} с помощью следующей конструкции (и её возможного знакового кодирования)

$$ОКП_{2^k} = \begin{bmatrix} s \\ s \\ q \\ \bar{q} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s \\ \bar{s} \\ q \\ q \end{bmatrix}, \tag{16}$$

где s и q — любые различные ОКП длины 2^{k-2}, k — нечетное.

При генерации ОКП длины $N = 32$ при помощи множества ОКП длины $N = 8$ выбор исходной последовательности s может быть произведен 112 различными способами, тогда как последовательность r возможно выбрать лишь 111 различными способами так, чтобы они были разными. В общем случае, мощность множества ОКП на каждой последующей итерации Метода 3 с учетом всех правил размножения с помощью знакового кодирования и перестановок сегментов определяется как

$$J_{2^k} = 2 \cdot J_{2^{k-2}} \cdot (J_{2^{k-2}} - 1). \qquad (17)$$

Таким образом, учитывая особенности обобщенного в статье Метода 1 (обобщенный метод Майорана-МакФарланада) и разработанных Методов 2, 3, приведем алгоритм синтеза бесконечных семейств ОКП:

Шаг 1. Методом перебора находим полный класс ОКП длины $N = 8$ и мощности $J^8 = 112$.

Шаг 2. С помощью Конструкции 1 конструируем класс ОКП длины $4 \cdot N = 32$ и мощности $J_{1,32} = 26880$.

Шаг 3. Используя Конструкции 2 и 3 синтезируем классы ОКП длины $4 \cdot N = 32$ мощностей $J_{2,32} = 4 \cdot 112 = 448$ и $J_{3,32} = 2 \cdot 112 \cdot 111 = 24864$.

Шаг 4. Помещаем все последовательности в один массив объема $J_{32} = J_{1,32} + J_{2,32} + J_{3,32} = 26880 + 448 + 24864 = 52192$. Если заданная длина достигнута — останов, иначе возвращаемся на Шаг 2, используя найденные последовательности как исходные.

С помощью табл. 1 проиллюстрируем увеличение мощности класса ОКП с ростом их длины N при использовании разработанного алгоритма.

Таблица 1.

Увеличение мощности класса ОКП

Длина n	8	32	128	512	2048	8192
Мощность Конструкции 1	48	26880	$1.3284 \cdot 10^{11}$	$8.2420 \cdot 10^{26}$	$2.0711 \cdot 10^{63}$	$5.6061 \cdot 10^{145}$
Мощность Конструкции 2	—	448	101248	$6.1 \cdot 10^{11}$	$3.2969 \cdot 10^{27}$	$8.2844 \cdot 10^{63}$
Мощность Конструкции 3	—	24864	$2.0 \cdot 10^{10}$	$4.6513 \cdot 10^{22}$	$1.3587 \cdot 10^{54}$	$8.5789 \cdot 10^{126}$
Σ	112	52192	$1.525 \cdot 10^{11}$	$8.2422 \cdot 10^{26}$	$2.0711 \cdot 10^{63}$	$5.6061 \cdot 10^{145}$

Анализ данных табл. 1 показывает, что наиболее быстрорастущим рекуррентным классом ОКП, подобно рекуррентному классу бент-функций является модифицированная (обобщенная) конструкция Майорана-МакФарланда.

Выводы

1. Дальнейшее развитие получил метод рекуррентного синтеза бент-последовательностей Майорана-МакФарланада, который был обобщен на случай длин последовательностей $N = 2^{2m-1} = 8,32,128,512,...$, для синтеза ОКП (Метод 1).
2. Предложены два метода (Метод 2 и Метод 3) рекуррентного увеличения длины ОКП, использующие в качестве исходного материала полные множества ОКП меньшей длины N и позволяющие синтез бóльших множеств ОКП длины $4N$.
3. Разработан алгоритм рекуррентного построения ОКП, основанный на предложенных методах. Так, используя полное множество ОКП длины $N = 8$ и

мощности $J_8 = 112$, может быть построено, например, множество ОКП длины $N = 128$ мощности $J_{128} = 1.525 \cdot 10^{11}$.

Построенные ОКП могут быть рекомендованы к использованию в современных системах передачи информации, основанных на технологии CDMA, в частности, MC-CDMA в качестве кодовых слов С-кода, обладающих оптимальным значением пик-фактора $\kappa = 2$ спектра Уолша-Адамара.

Список литературы

1. Мазурков, М.И. Системы широкополосной радиосвязи / М.И. Мазурков // Одесса: Наука и Техника. — 2010. — 340 с.
2. Paterson, K. G. Sequences For OFDM and Multi-code CDMA: two problems in algebraic coding theory / K.G. Paterson // Sequences and their applications. Seta 2001. Second Int. Conference (Bergen, Norway, May 13–17, 2001). Proc. Berlin: Springer, 2002. — P. 46–71.
3. Гепко, И.А. Формирование частотно-компактных сигналов с минимальным пик-фактором для систем MC-CDMA с расширением спектра в частотной области / И.А. Гепко // Изв. вузов. Радиоэлектроника. — 2001. — № 11 — 12, [ч. 1]. — С. 15—25.
4. Rothaus, O.S. On “bent” functions / O.S. Rothaus // J. Comb. Theory Ser. A. — USA: Academic Press Inc. — 1976. — №20(3). — P. 300—305.
5. Токарева, Н.Н. Бент-функции: результаты и приложения. Обзор работ / Н.Н. Токарева // Приклад. дискрет. математика. — 2009. — Сер. №1(3). — С. 15—37.
6. Мазурков, М.И. Регулярные правила построения полного класса бент-последовательностей длины 16 / М.И. Мазурков, А.В. Соколов. — Труды Одес. нац. политехн. ун-та. — Одесса, 2013. — №1. — 40 с.
7. Дворников, В.Д. Метод формирования бент-последовательностей / В.Д. Дворников. — Доклады БГУИР, Минск, 2003. — С. 106—109.

РЕКУРЕНТНІ МЕТОДИ СИНТЕЗУ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ З ОПТИМАЛЬНИМ ПІК-ФАКТОРОМ СПЕКТРА УОЛША-АДАМАРА

М.І. Мазурков, А.В. Соколов

Одеський національний політехнічний університет,
пр. Шевченка, 1, 65044, Одеса, Україна; e-mail: radiosquid@gmail.com

Запропоновано три методи синтезу бінарних послідовностей з оптимальним значенням пік-фактору спектра Уолша-Адамара, які можуть бути використані для побудови С-кодів, що застосовуються в технології CDMA. На основі даних конструкцій розроблений алгоритм синтезу нескінченних сімейств послідовностей, що володіють оптимальними значеннями пік-фактору спектра Уолша-Адамара.

Ключові слова: оптимальна послідовність, яка кодує, CDMA, С-код, бент-послідовність, пік-фактор.

RECURRENT SYNTHESIS METHODS OF THE SEQUENCES WITH OPTIMAL PEAK-TO-AVERAGE POWER RATIO VALUE OF WALSH-HADAMARD SPECTRUM

M.I. Mazurkov, A.V. Sokolov

Odessa National Polytechnic University,
Shevchenko av. 1, 65044, Odessa, Ukraine; e-mail: radiosquid@gmail.com

In this paper three methods of synthesis of binary sequences with optimal value of the peak-to-average power ratio of Walsh-Hadamard spectrum which may be used to construct C-codes used in the CDMA technology are proposed. On the basis of these structures an synthesis algorithm of infinite families of sequences having optimal value of peak-to-average power ratio of Walsh-Hadamard spectrum is developed.

Keywords: optimal coding sequence, CDMA, C-code, bent-sequence, PAPR.