УДК 519.7

Informatics and Mathematical Methods in Simulation
Vol. 5 (2015), No. 4, pp. 383-388

ОБ УСТОЙЧИВОМ ПРЕЦИЗИОННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ОПЕРАТОРА ЗАПАЗДЫВАНИЯ

А.А. Стопакевич[1], А.А. Стопакевич[2]

[1]Одесский национальный политехнический университет,
просп. Шевченко, 1,Одесса, Украина;
[2]Одесская национальная академия связи им. Попова,
ул. Кузнечная, 1,Одесса, Украина; e-mail: stopakevich@gmail.com

Исследуются особенности моделирования оператора запаздывания с использованием рядов Тейлора и Паде. Целью исследования является определение границ устойчивости аппроксимации запаздывания рядом Тейлора при увеличении числа членов ряда. Научной значимостью работы является уточнение условий применимости ряда Тейлора для аппроксимации оператора запаздывания, что стало особенно актуально в связи с распространением современных программных пакетов, позволяющих прецизионное моделирование сложных систем. Для определения границ устойчивости использован критерий Рауса. Проведено вычисление распределения корней аппроксимации для различного количества членов ряда и величины времени запаздывания. Получен вывод, что доказательства сходимости соответствующего функционального ряда недостаточно и, сходимость никак не гарантирует устойчивости аппроксимации на основе ряда.
Практическим значением результатов является обоснование требования исследования не только сходимости функционального ряда, но и его устойчивости в зависимости от порядка аппроксимации и параметров аппроксимируемого оператора.

Ключевые слова: аппроксимация, ряд, Тейлор, устойчивость, экспонента, оператор, запаздывание.

Введение

Проблема повышения точности моделирования сложных систем стала одной из наиболее актуальных в связи с широким распространением таких современных программных средств как, например, Matlab, Mathcad, Maple [1-2]. Однако, оказывается, что иногда стремление к высокой точности моделирования того или иного объекта приводит к потере устойчивости модели.

Одним из наиболее распространенных элементов моделей сложных систем является оператор чистого запаздывания [3], представляемый при использовании преобразования Лапласа экспонентой от отрицательной величины запаздывания, умноженной на оператор Лапласа [4]. Известно, что во многих публикациях экспонента, особенно матричная, определяются через ряд Тейлора [5-7], имеется множество работ, в которых точность аппроксимации экспоненты связывается с числом взятых членов ряда Тейлора, причем, чем больше взято членов, тем точнее аппроксимация [8-9]. Для повышения скорости сходимости аппроксимации (что известно практически, хотя и не доказано теоретически), на основе ряда Тейлора построена дробно-рациональная аппроксимация Паде [10].

Цель работы

Целью работы является исследование соотношения точности аппроксимации оператора запаздывания и устойчивости этой аппроксимации при использовании ряда Тейлора и аппроксимации Паде.

Основная часть

Общеизвестно, что экспонента аппроксимируется рядом Тейлора в виде:

$$e^{\alpha \cdot x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha \cdot x)^k}{k!} .$$

В соответствии с указанной аппроксимацией в теории систем экспоненту запаздывания, то есть оператор, полученный в результате преобразования Лапласа задержки сигнала на время τ, записывают в виде:

$$e^{-\tau \cdot s} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{(\tau \cdot s)^k}{k!}} ,$$

где s – оператор Лапласа.

Однако оказывается, что такое представление не вполне корректно. При $n > 4$ выражение в правой части теряет устойчивость. Причем, граница устойчивости не зависит от времени запаздывания.

Докажем это аналитически для уравнения пятого порядка

$$e^{-\tau \cdot s} = \frac{1}{\frac{\tau^5}{120} s^5 + \frac{\tau^4}{24} s^4 + \frac{\tau^3}{6} s^3 + \frac{\tau^2}{2} s^2 + \tau \cdot s + 1} .$$

Для этого составим таблицу Рауса [4] (табл. 1).

Таблица 1.

Таблица Рауса для уравнения 5 порядка

Вспомогательные коэффициенты	Основные коэффициенты		
	$c_{11} = \tau^5 / 120$	$c_{12} = \tau^3 / 6$	$c_{13} = \tau$
	$c_{21} = \tau^4 / 24$	$c_{22} = \tau^2 / 2$	$c_{23} = 1$
$r_3 = c_{11} / c_{21} = 0.2 \cdot \tau$	$c_{31} = c_{12} - \tau_3 \cdot c_{22} = 0.4 \cdot \tau^4$	$c_{32} = c_{13} - \tau_3 \cdot c_{23} = 0.8 \cdot \tau$	
$r_4 = c_{21} / c_{31} = 5 \cdot \tau / 48$	$c_{41} = c_{22} - \tau_4 \cdot c_{32} = 5 \cdot \tau^2 / 12$	$c_{42} = c_{23} - \tau_4 \cdot c_{33} = 1$	
$r_5 = c_{31} / c_{41} = 0.96 \cdot \tau$	$c_{51} = c_{32} - \tau_5 \cdot c_{42} = -0.16 \cdot \tau$		
$r_6 = c_{41} / c_{51} = -2.6 \cdot \tau < 0$			

Поскольку $r_6 < 0$, то полином пятого порядка не устойчив. Можно показать, что неустойчивы и все полиномы более высокого порядка. И этот вывод не зависит от величины запаздывания. Для иллюстрации данного утверждения, вычислим и представим на рис. 1 распределение корней аппроксимации экспоненты для $n = 4, 5, 10, 20, 100, 1000$ и для $\tau = 0.1, 1, 5, 10, 50, 100$.

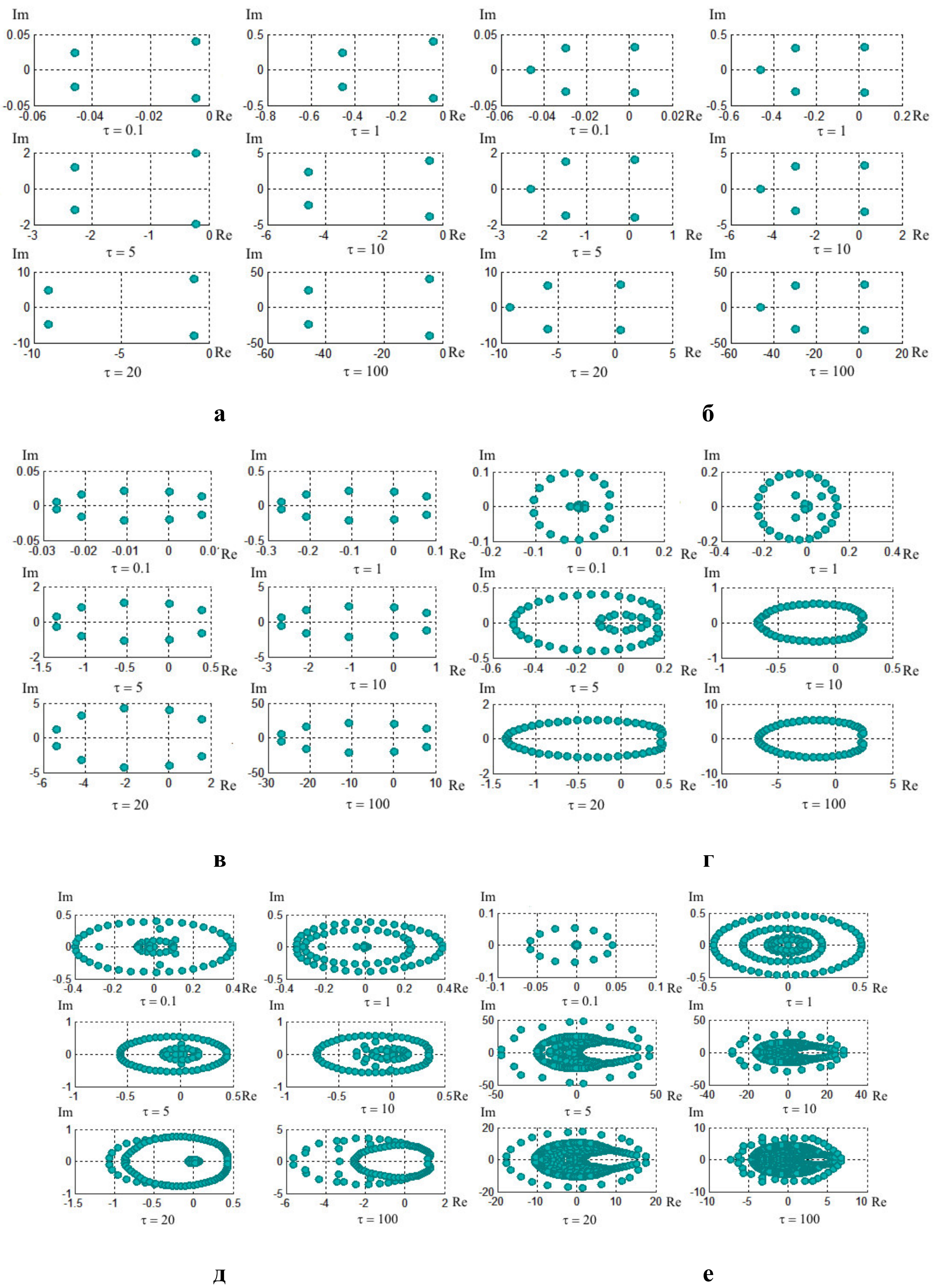

Рис. 1. Распределение корней экспоненты запаздывания при различных n: а – n = 4; б – n = 5; в – n = 10; г – n = 20; д – n = 100; е – n = 1000

Исследуем более подробно, как ведут себя корни s_i при изменении порядка аппроксимации. На рис. 2 и 3 показано изменение максимальной действительной части корня *max(real(s_i))*, минимальной действительной части корня *min(real(s_i))*, максимальной мнимой части корня *max(imag(s_i))*, максимального размаха между максимальной и минимальной действительными частями корней. Из рисунков видно, что с ростом порядка аппроксимации максимальное расстояние между максимальной и минимальной действительными частями корней растет, устремляясь к бесконечности. Скорость роста зависит от времени запаздывания экстремально, то есть она увеличивается при росте запаздывания от 0.1 до 5 и уменьшается при дальнейшем росте запаздывания.

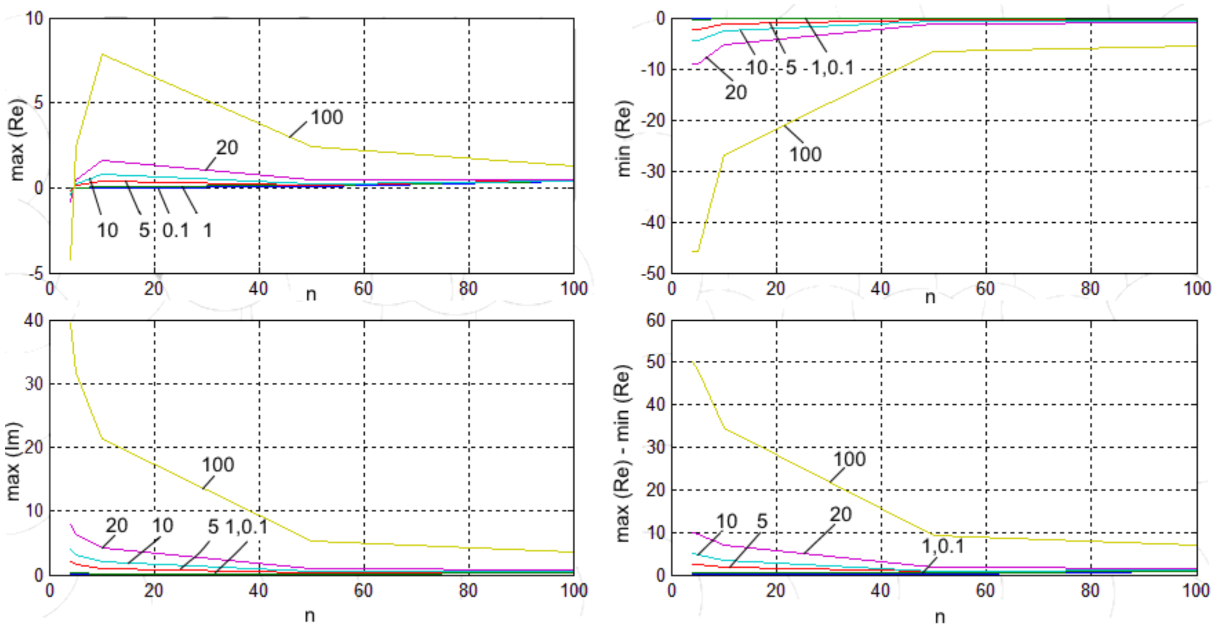

Рис. 2. Поведение корней в функции порядка аппроксимации при n=5..100 и различных τ

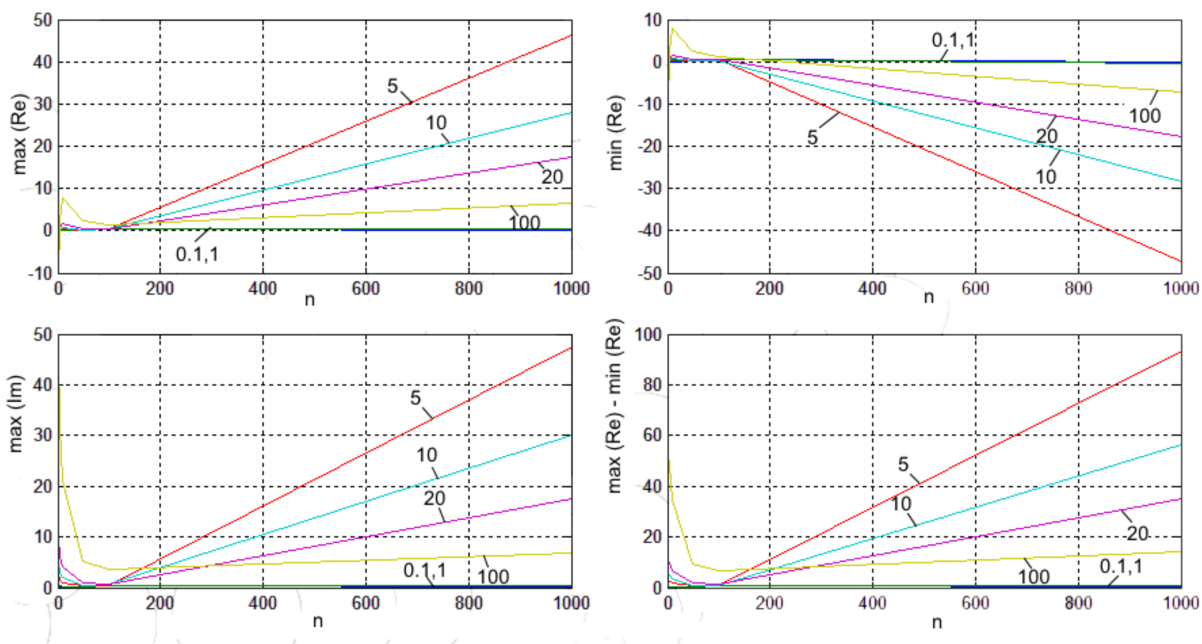

Рис. 3. Поведение корней в функции порядка аппроксимации при n=5..1000 и различных τ

Интересно отметить, что построенная на том же ряде Тейлора аппроксимация Паде имеет значительно больший запас устойчивости. Так для указанного выше набора времен запаздывания симметричная аппроксимация Паде устойчива до 75 порядка.

Причем, как и в случае ряда Тейлора, устойчивость не зависит от времени запаздывания. Однако, при порядке 75 корни оказываются настолько близкими к мнимой оси, что численное моделирование показывает неустойчивый процесс. Так что реальным порядком, при котором аппроксимация сходится, является 70. И действительно, с увеличением порядка постепенно улучшается качество аппроксимации.

Результаты исследования

Результаты исследования границ устойчивости аппроксимации оператора запаздывания рядом Тейлора показывают, что количество допустимых членов ряда для аппроксимации экспоненциальной функции равно пяти, с его превышением теряется устойчивость аппроксимации. Анализ корней при изменении порядка аппроксимации показывает, что с ростом порядка аппроксимации максимальное расстояние между максимальной и минимальной действительными частями корней растет, устремляясь к бесконечности. В то же время использование симметричной аппроксимации Паде дает устойчивое решение, не зависящее от времени запаздывания, при большом порядке теоретически равном 75, а практически - 70. Точность аппроксимации Паде с увеличением числа членов, как и ожидалось, плавно увеличивается.

Выводы

При использовании аппроксимации операторов доказательства сходимости соответствующего функционального ряда недостаточно и, собственно, сходимость никак не гарантирует применимости ряда. Помимо сходимости необходимо исследовать устойчивость и ее поведение в зависимости от порядка аппроксимации и, возможно, параметров аппроксимируемого оператора.

Список литературы

1. Алексеев, В.Р. Решение задач вычислительной математики в пакетах MathCAD 12, MATLAB 7, Maple 9 / В.Р. Алексеев, О.В. Чеснокова.– М.:НТ-Пресс, 2006. –360 с.
2. Коробейников, А.Г. Разработка и анализ математических моделей с использованием MATLAB и Maple /А.Г. Коробейников.– СПб.:СПбГУ ИТМО, 2010. –280 с.
3. Бесекерский, В.А. Теория систем автоматического управления / В.А. Бесекерский, Е.П. Попов.– СПб.: Профессия, 2003. –395 с.
4. Огнев, С.П. Вариантные аппроксимации звена запаздывания. / С.П. Огнев // Сборник научных трудов SWorld. Технические науки.– 2011.– Вып.3.– С. 25-29.
5. Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б. В. Шабат.– М.: Наука, 1987. –425 с.
6. Moler, C. Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix, Twenty-Five Years Later. Society for Industrial and Applied Mathematics / C. Moler, C. Loan // SIAM Rev. – 2003. – Вып. 45.– С. 3-49.
7. Shao, M. Aggressively truncated Taylor series method for accurate computation of exponentials of essentially nonnegative matrices / M. Shao, W. Gao, J. Xue // SIAM. J. Matrix Anal. & Appl. – 2014.– Вып. 35.– С. 317–338.
8. Ильин, В. А. Математический анализ, ч. 1 / В.А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов.– М.: Проспект, 2004. –590 с.
9. Thomas, G. Calculus and Analytic Geometry / G. Thomas, R. Finney.– Boston, Ma: Addison Wesley, 1996. –650 c.
10. Бейкер, Дж. Аппроксимации Паде / Дж. Бейкер, П. Грейвс-Моррис.– М.: Мир, 1986.
11. Макаров, И.М. Линейные автоматические системы / И.М. Макаров, Б.М. Менский.– М.:Машиностроение, 1977. –370 с.

СТІЙКЕ ПРЕЦИЗІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОПЕРАТОРА ЗАПІЗНЕННЯ

О.А. Стопакевич, А.О. Стопакевич

Одеський національний політехнічний університет,
просп. Шевченко 1, Одеса 65044, Україна; e-mail: stopakevich@gmail.com

Досліджуються особливостей моделювання оператора запізнення із використанням рядів Тейлора і Паде. Метою дослідження є визначення меж стійкості апроксимації запізнення рядом Тейлора при збільшенні кількості членів ряду. Науковою значимістю роботи є уточнення умов застосування ряду Тейлора для апроксимації оператора запізнення, що стало особливо актуально в зв'язку із поширенням сучасних програмних пакетів, які дозволяють прецизійне моделювання складних систем. Для визначення меж стійкості використано критерій Рауса. Був проведений розрахунок розподілення корнів апроксимації для різної кількості членів ряду і величини часу запізнення.

Отримано висновок, що доказу збіжності відповідного функціонального ряду недостатньо, і, збіжність ніяк не гарантує стійкості апроксимації на основі ряду. Практичним значенням результатів роботи є обґрунтування вимоги дослідження не тільки збіжності функціонального ряду, але і його стійкості в залежності від порядку апроксимації і, параметрів апроксимуючого оператора.

Ключові слова: апроксимація, ряд, Тейлор, стійкість, експонента, оператор, запізнення.

PRECISION RACK DESIGN OPERATOR DELAY

O.A. Stopakevych, A.O. Stopakevych

Odessa national polytechnic university,
1, Shevchenko Ave., Odessa 65044, Ukraine; e-mail: stopakevich@gmail.com

The article is devoted to the research of delay operator modeling features using Taylor and Pade series. The purpose of the research is to determine the stability boundaries for approximation of the delay operator by Taylor series when the number of terms in the series is increasing. The scientific significance of the research states the Taylor series applicability conditions for the delay operator modelling. The conditions are important for modern software that allows precise modeling of complex systems. The Routh criterion is used to determine the stability boundaries. The calculations of the delay operator approximation poles for different number of series terms and the delay value were made.

The scientific value of the research is the conclusion that the proof of corresponding functional series convergence is insufficient to use this series in modelling systems. The convergence of series does not guarantee the approximation stability and, respectively, applicability of the series.

The practical value of the work results is grounded on the requirement to investigate not only convergence of the series, but also the approximation stability taking into account the approximation order and the operator parameters.

Keywords: approximation, series, Taylor, stability, Pade, operator, time delay, modelling.