УДК 005.8

Лук'янов Д.В., *канд. техн. наук, доц.*
кафедра психології, Білоруський державний університет;
Колесніков О.Є., *к.т.н., доцент,*
кафедра Управління системами безпеки життєдіяльності,
Одеський національний політехнічний університет

ВЛАСТИВОСТІ СТРУКТУРНИХ МОДЕЛЕЙ ПРОЦЕСІВ ПРОЕКТНОГО УПРАВЛІННЯ

О.Є. Колесніков, Д.В. Лук'янов. ***Властивості структурних моделей процесів проектного управління.*** Виконано аналіз властивостей структурних моделей, які відображають топологію процесів управління проектами. Показана можливість аналізу структурних схем проектного управління завдяки використання специфічних властивостей матриц суміжності складних систем.

Ключові слова: проекти; топологія; структури; моделі; матриця суміжності; аналіз.

А.Е. Колесников Д.В. Лукьянов. ***Свойства структурных моделей процессов проектного управления.*** Выполнен анализ свойств структурных моделей, которые отражают топологию процессов управления проектами. Показана возможность анализа структурных схем проектного управления благодаря использованию специфических свойств матриц смежности сложных систем.

Ключевые слова*:* проекты; топология; структуры; модели; матрица смежности; анализ.

O.E Kolesnikov, D.V. Lukyanov. ***Properties of structural models of the processes of project management.*** The analysis of the properties of structural models that reflect the topology of project management processes. The possibility of structural analysis charts of project management through the use of specific properties of the adjacency matrix of complex systems.

Keywords*:* projects; topology; structure; model; adjacency matrix; analysis.

Метод Леонарда Ейлера щодо визначення циклів у графах заснований на обході вершин графа з використанням прийому фарбування тих ребер графа, які вже пройдені. Визначення циклів на планарних графах за цим алгоритмом фактично реалізує схему повного перебору всіх можливих варіантів з наявністю евристичної складової, що вносить певну складність у разі формалізації для автоматизованого розв'язання задачі. Визначення циклів у орієнтованих графах, що відображають топологію проектного управління є актуальним завданням для розв'язання низки задач [1 - 35].

В дослідженні для розв'язання задачі аналізу структурних схем проектів пропонується використовувати метод аналітичного визначення циклів в складних схемах управління. У розробленому нижче методі, на відміну від відомого методу Леонарда Ейлера, цикл визначається в результаті аналітичного розрахунку, а не евристичного пошуку [2]. Основою для аналітичного

© О.Є. Колесніков, Д.В. Лук'янов, 2015 *doi.org*\10.13140/RG.2.1.3655.0486

розв’язання задачі є використання характерних властивостей матриці суміжності [3].

Як відомо, систему, яка об’єднує множини деяких сутностей, наприклад, $S\{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$, які є вершинами орієнтованого графа, що зв’язані орієнтованими дугами і $G\{g_1, g_2, \ldots, g_r\}$, можна відобразити за допомогою матриці суміжності $[c_{ij}]_S = [i, j]$, кожний рядок якої показує зв'язки однієї вершини з іншими вершинам графа [4]. Елемент $c_{ij}=1$ відображає дугу між вершинами S_i та S_j. Якщо $c_{ij} = 0$, то дуга безпосередньо між вершинами графа i та j відсутня.

Зв’язки між елементами множин $S\{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ і $G\{g_1, g_2, \ldots, g_r\}$ можна описати також у вигляді матриці інциденцій $[h_{ij}]_S$, $g = [i, j]$, рядки якої відповідають вершинам, а стовпці дугам орієнтованого графа. При цьому h_{ij} -й елемент рівний +1, якщо S_i є початковою вершиною дуги і (– 1), якщо S_i, – кінцева вершина дуги [5].

На практиці для описання структурних схем найчастіше використовують матрицю процесу, як компактнішу форму описання. А для аналізу структур застосовують матрицю суміжності, яка має специфічні властивості [4]. У разі послідовного зведення матриці суміжності у ступені $n = 2, 3 \ldots$ елементи n-го ступеня $(c_{ij})^n$ показують шлях, що містить n дуг, між і-ою та j-ою вершинами графа. При піднесенні матриці суміжності у ступень n за наявності контуру деякі діагональні елементи стають нерівними нулю, що означає наявність зв'язку від i-ої до i-ої вершини через інші вершини графа. Такий шлях у графі є характерним тільки для замкнутого контуру. Множення матриць виконується за звичайним правилом [25]:

$$\left\| c_{ij}^{n+1} \right\| = \begin{Bmatrix} c_{1.1}^{n} & c_{1.2}^{n} & \cdots & c_{1.m}^{n} \\ c_{2.1}^{n} & c_{2.2}^{n} & \cdots & c_{2.m}^{n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m.1}^{n} & c_{m.2}^{n} & \cdots & c_{m.m}^{n} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} c_{1.1}^{1} & c_{1.2}^{1} & \cdots & c_{1.m}^{1} \\ c_{2.1}^{1} & c_{2.2}^{1} & \cdots & c_{2.m}^{1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m.1}^{1} & c_{m.2}^{1} & \cdots & c_{m.m}^{1} \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} \sum_{k=1}^{m} c_{1k}^{n} c_{k1}^{1} & \sum_{k=1}^{m} c_{1k}^{n} c_{k2}^{1} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} c_{1k}^{n} c_{km}^{1} \\ \sum_{k=1}^{m} c_{2k}^{n} c_{k1}^{1} & \sum_{k=1}^{m} c_{2k}^{n} c_{k2}^{1} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} c_{2k}^{n} c_{km}^{1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{k=1}^{m} c_{mk}^{n} c_{k1}^{1} & \sum_{k=1}^{m} c_{mk}^{n} c_{k2}^{1} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} c_{mk}^{n} c_{km}^{1} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

де n – ступені матриці суміжності; $n = 1, 2, \ldots$;

m – загальне число вершин у схемі.

Для відображення зв’язків між елементами складних схем використаємо таке спрощення: наявність зв’язку, який визначається з (1), будемо означати значенням елемента матриці

$$[c^{n}{}_{ij}] = 1; \quad (2)$$

У разі відсутності зв'язку – $[c^n_{ij}] = 0$. Тобто, операції множення (1) будемо виконувати за всіма прийнятими у математиці правилами, а на етапі відображення результатів скористаємось операцією перетворення:

$$\left\| c^{n+1}_{ij} \right\| = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \sum_{k=1}^{m} c^n_{ik} c^1_{kj} > 0 \text{ для } \{\forall i, j \in 1,2,..., m\}; \\ 0, \text{ якщо } \sum_{k=1}^{m} c^n_{ik} c^1_{kj} = 0 \text{ для } \{\forall i, j \in 1,2,..., m\}. \end{cases} \tag{3}$$

В опублікованих роботах щодо структурного аналізу складних схем приводяться, часто без доказу, рекомендації, у вигляді алгоритмів, для пошуку замкнутих контурів. Тому необхідно теоретично обґрунтувати достовірність пропонованих рішень [1, 25]. Теоретичне обґрунтування методів аналізу структур управління є вельми актуальним в проектному менеджменті, оскільки структура виробничих систем, які спрямовані на виконання проектів і програм, та інформаційні зв'язки в цих проектно-керованих організаціях суттєво впливають на результати діяльності. Виконаємо дослідження методів представлення різних структур за допомогою матриці суміжності, розглянемо властивості матриць суміжності і її ступенів з точки зору застосування цих властивостей для аналізу структурних схем з метою виділення контурів управління.

Лема 1. Дві дуги, одна з яких входить, а інша виходять з однієї вершини, складають два елементи в матриці суміжності, що зміщені від головної діагоналі на 1 стовпець за напрямом дуг, тоді і тільки тоді, коли три вершини орієнтованого графа представлено суміжними стовпцями.

Доказ. За правилом відображення орієнтованих графів в матриці суміжності номери рядків відповідають номеру вершини графа, з якої виходить дуга. А номери стовпців – номеру вершини, в яку входить дуга. Відмітимо, що в будь-якому орієнтованому графі, що має контур, можна виділити лінійну частину контуру у напрямі дуг орієнтованого графа і зворотний зв'язок (дугу), що утворює контур.

Оскільки номери вершин орієнтованого графа відіграють скоріше роль ідентифікаторів вершин і не визначають обов'язковий порядок слідування в матриці суміжності, а також не впливають на структуру зв'язків між вершинами, приймемо припущення, що вершини орієнтованого графа можуть бути пронумеровані довільним чином. Тому накладемо умову на присвоєння вершинам графа номерів: у лінійному підграфі $s \in S$ вершини нумеруються за напрямом дуг орграфа.

Розглянемо орієнтований граф з таких вершин: *a, b, c, d, e, f, g*. Хай вершини графа сполучені зв'язками: $a \to b \to c \to d \to e \to f \to g$. Оскільки вершини орієнтованого графа можуть бути пронумеровані довільним чином, приймемо таку нумерацію:

$$\begin{aligned} &a \to \{i\}; \\ &b \to \{i+1\}; \\ &c \to \{i+2\}; \\ &d \to \{i+3\}; \\ &e \to \{i+4\}; \end{aligned} \tag{4}$$

$$f \rightarrow \{i+5\};$$
$$g \rightarrow \{i+6\}.$$

У цьому випадку в матриці суміжності у наслідок (2.4) рядки і стовпці, що відповідають вершинам *a, b, …, g.,* будуть розташовані послідовно, а значення відповідних елементів матриці суміжності буде таким:

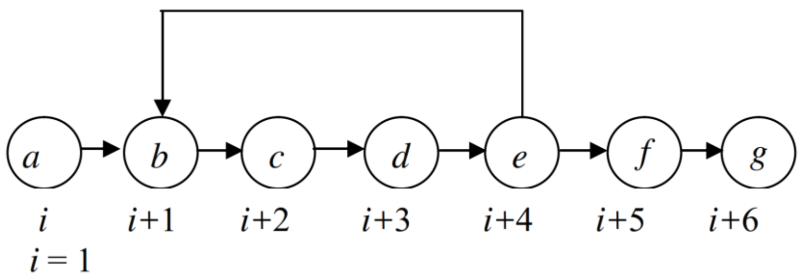
$$\begin{gathered} c_{i,i+1} = c_{a,b} = 1; \\ c_{i+1,i+2} = c_{b,c} = 1; \\ \ldots \\ c_{i+5,i+6} = c_{f,g} = 1. \end{gathered} \tag{5}$$

Визначені у (2.5) елементи матриці суміжності зміщені на один стовпець від головної діагоналі. Тобто дуги лінійної частини орієнтованого графа відображаються в матриці суміжності діагоналлю, яка паралельна головній, і зміщена від неї на 1 стовпець за умови, що вершини розташовані в матриці суміжності послідовно за напрямом дуг орієнтованого графа (рис. 1).

		До вершини						
		a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*
Від вершини	*a*	0	**1**	0	0	0	0	0
	b	0	0	**1**	0	0	0	0
	c	0	0	0	**1**	0	0	0
	d	0	0	0	0	**1**	0	0
	e	0	0	0	0	0	**1**	0
	f	0	0	0	0	0	0	**1**
	g	0	0	0	0	0	0	0

Рисунок 1 – Матриця суміжності фрагмента лінійної частини орграфа

Дуга, яка не утворює діагональ, що паралельна головній, не відноситься до лінійної частини дуг орієнтованого графа. Даний висновок є застосуванням леми 1 для випадку послідовності вершин, які сполучені дугами в контур. Наприклад, у разі існування контуру, що утворений дугою між вершинами *e* → *b,* у матриці суміжності елемент $[c_{eb}] = 1$, або з урахуванням нумерації (4) отримаємо значення $[c_{i+4,i+2}] = 1$ (рис. 2).



а)

		До вершини *i*+…						
		a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*
Від вершини	*a*	0	**1**	0	0	0	0	0
	b	0	0	**1**	0	0	0	0
	c	0	0	0	**1**	0	0	0
	d	0	0	0	0	**1**	0	0
	e	0	**1**	0	0	0	**1**	0
	f	0	0	0	0	0	0	**1**
	g	0	0	0	0	0	0	0

б)

Рисунок 2 – Матриця суміжності з дугою *e* → *b,* що утворює контур: *а*) орієнтований граф; *б*) матриця суміжності орграфу *а*.

Як видно з рис. 2, відображення дуги між вершинами $e \to b$ у матриці суміжності здійснюється через значення елемента $[c_{i+4,i+2}] = 1$. Цей елемент утворює «трикутник» з лінійною частиною контуру орієнтованого графа.

Лема 2. Елементи всіх стовпців контуру, окрім останнього, матриці суміжності ступеня n зміщуються у ступені n+1 на один стовпець за напрямом ребер орієнтованого графа.

Доказ. Скористаємося властивістю про довільну нумерацію вершин (див. лему 1). При цьому відмінні від нуля елементи матриці суміжності ступеня n= 1

$$\begin{aligned} &c^1_{i,i+1}=1,\ i = k,\ k+1,\ \ldots,\ m - 1;\ k \in 1,\ \ldots,\ m - 1; \\ &c^1_{m,k}= 1, \end{aligned} \qquad (6)$$

де k, m – початкова і кінцева вершини, що входять в контур, $k < m$.

Елементи матриці суміжності ступеня n+1 визначаються за (2):

$$c_{ij}^{n+1} = \sum_{h=k}^{m} c_{ih}^{n} c_{hj}^{1}, \quad j = 1, 2, \cdots, m; \quad i = 1, 2, \cdots, m. \qquad (7)$$

Виконаємо обчислення значень елементів одного з рядків $s\{1,\ 2,\ \ldots\ m\}$ матриці суміжності ступеня n+1:

$$\begin{aligned}
&c_{s,1}^{n+1} = c_{s,1}^{n} \cdot c_{1.1}^{1} + c_{s,2}^{n} \cdot c_{2.1}^{1} + c_{s,3}^{n} \cdot c_{3.1}^{1} + \cdots + c_{s,m}^{n} \cdot c_{m.1}^{1}; \\
&c_{s,2}^{n+1} = c_{s,1}^{n} \cdot \left(c_{1,2}^{1}\right) + c_{s,2}^{n} \cdot c_{2,2}^{1} + c_{s,3}^{n} \cdot c_{3,2}^{1} + \cdots + c_{s,m}^{n} \cdot c_{m,2}^{1}; \\
&c_{s,3}^{n+1} = c_{s,1}^{n} \cdot c_{1,3}^{1} + c_{s,2}^{n} \cdot \left(c_{2,3}^{1}\right) + c_{s,3}^{n} \cdot c_{3,3}^{1} + \cdots + c_{s,m}^{n} \cdot c_{m,3}^{1}; \\
&\vdots \\
&c_{s,m}^{n+1} = c_{s,1}^{n} \cdot c_{1,m}^{1} + c_{s,2}^{n} \cdot c_{2,m}^{1} + \cdots + c_{s,m-1}^{n} \cdot \left(c_{m-1,m}^{1}\right) + c_{s,m}^{n} \cdot c_{m,m}^{1},
\end{aligned} \qquad (8)$$

де m — номер елемента в рядку.

Дужками виділені ненульові елементи $c_{i,i+1} = 1$ (i = 1, 2, …, m − 1) матриці суміжності. Відкинувши решту елементів, і приймаючи значення елементів в дужках $c_{i,i+1} = 1$ (i = 1, 2, …, m − 1), отримаємо в загальному випадку, що значення елемента рядка $s\{1,\ 2,\ \ldots\ m\}$ для лінійної частини графа буде визначатись першим множником:

$$c_{s,h}^{n+1} = c_{s,h-1}^{n}; \quad h = 2, 3, \cdots, m. \qquad (9)$$

Наприклад, з (9) для n = 1 та s = 1 отримаємо $c^2_{1,h}= c^1_{1,h-1}$.

Зважаючи на те, що у першому рядку за умовою побудови матриці суміжності $c^1_{1,2} = 1$, то елемент $c^2_{1,3} = 1$. А це означає, що елемент першого рядка $c^1_{1,2} = 1$ переміститься з другого на третій стовпець $c^2_{1,3} = 1$. У другому рядку s=2 для n=1 з (8) отримаємо $c^2_{2,h}= c^1_{2,h-1}$. У другому рядку за умовою побудови матриці суміжності $c^1_{2,3} = 1$, що з (7) дозволяє визначити елемент $c^2_{2,4} = 1$. Таким чином, для 1-го і наступних рядків елементи, що відображають лінійну частину орієнтованого графа, у разі піднесення до наступних ступенів будуть переміщатися на один стовпець за напрямом дуг графа.

Графічна інтерпретація доказу Леми 2 на прикладі обчислення елемента результуючої матриці $[c^2_{2,4}]$ показана на рис. 3.

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
\times
\begin{array}{c|ccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
=
\begin{array}{c|ccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

$$\|c^1_{ij}\| \times \|c^1_{ij}\| = \|c^2_{ij}\|$$

Рисунок 3 – Схема зміщення елемента $[c^1_{2,3}] = 1$ на один стовпець у елемент матриці $[c^2_{2,4}] = 1$, що є результатом множення матриць

Для визначення з (2) значення елемента $[c^2_{2,4}]$ слід перемножити елементи рядка 2 і стовпця 4 та визначити суму. Елементи 2-го рядка і 4-го стовпця виділені на рис. 4 товстою лінією. Як видно, тільки два елементи 2-го рядка – $[c^1_{2,3}]$ =1 і 4-го стовпця – $[c^1_{3,4}] = 1$, мають значення відмінні від нуля. Саме вони за (2) дадуть значення $[c^2_{2,4}] = [c^1_{2,3}]\times[c^1_{3,4}] = 1$. Оскільки другий множник не змінюється і у відповідності до Леми 1 завжди $[c^1_{i,i+1}] = 1$, то можна говорити, що у загальному випадку для всіх рядків елементи, що відображають лінійну частину орієнтованого графа, у разі піднесення до наступних ступенів будуть переміщатися на один стовпець за напрямом дуг графа. Для прикладу, що приведений на рис. 3, отримаємо:

$$
\begin{aligned}
&[c^2_{1,3}] = [c^1_{1,2}];\\
&[c^2_{2,4}] = [c^1_{2,3}];\\
&[c^2_{3,5}] = [c^1_{3,4}];\\
&[c^2_{4,6}] = [c^1_{4,5}];\\
&[c^2_{5,7}] = [c^1_{5,6}].
\end{aligned} \tag{10}
$$

Доведено, що елементи всіх стовпців лінійної частини орієнтованого графа, окрім останнього, матриці суміжності ступеня n зміщуються у ступені n+1 на один стовпець за напрямом ребер орієнтованого графа.

Лема 3. В ступені n+1 матриці суміжності елементи останнього стовпця контуру ступеня n переходять в 1-й стовпець контуру.

Доказ. Хай дано орієнтований граф з контуром, що відображається матрицею суміжності з умовами, прийнятими в лемі 2 (рис. 2).

Розглянемо формування будь-якого стовпця k матриці суміжності ступеня n+1. Елементи стовпця k обчислюються за (2):

$$
\begin{aligned}
&c^{n+1}_{1,k} = c^n_{1,1}\cdot c^1_{1,k} + c^n_{1,2}\cdot c^1_{2,k} + \cdots + c^n_{1,m-2}\cdot c^1_{m-2,k} + c^n_{1,m-1}\cdot c^1_{m-1,k} + c^n_{1,m}\cdot c^1_{m,k};\\
&c^{n+1}_{2,k} = c^n_{2,1}\cdot c^1_{1,k} + c^n_{2,2}\cdot c^1_{2,k} + \cdots + c^n_{2,m-2}\cdot c^1_{m-2,k} + c^n_{2,m-1}\cdot c^1_{m-1,k} + c^n_{2,m}\cdot c^1_{m,k};\\
&c^{n+1}_{3,k} = c^n_{3,1}\cdot c^1_{1,k} + c^n_{3,2}\cdot c^1_{2,k} + \cdots + c^n_{3,m-2}\cdot c^1_{m-2,k} + c^n_{3,m-1}\cdot c^1_{m-1,k} + c^n_{3,m}\cdot c^1_{m,k};\\
&c^{n+1}_{4,k} = c^n_{4,1}\cdot c^1_{1,k} + c^n_{4,2}\cdot c^1_{2,k} + \cdots + c^n_{4,m-2}\cdot c^1_{m-2,k} + c^n_{4,m-1}\cdot c^1_{m-1,k} + c^n_{4,m}\cdot c^1_{m,k};\\
&\vdots\\
&c^{n+1}_{m,k} = c^n_{m,1}\cdot c^1_{1,k} + c^n_{m,2}\cdot c^1_{2,k} + \cdots + c^n_{m,m-2}\cdot c^1_{m-2,k} + c^n_{m,m-1}\cdot c^1_{m-1,k} + c^n_{m,m}\cdot c^1_{m,k};
\end{aligned} \tag{11}
$$

Для розв’язання системи рівнянь (11) слід ввести початкові умови: номери початку k та кінця контуру циклу r. Наприклад, для схеми на рис. 2, такими даними будуть $k = b = 2$ і $r = e = 5$. За таких умов елемент 2-го множника $[c^1_{5,2}] = 1$. А передостанній елемент контуру у першому множнику матриці $[c^{(n=1)}_{4,5}] = 1$, як слідство Леми 1 щодо паралельності головній діагоналі матриці елементів лінійної частини контуру.

Відкинувши нульові елементи з (11), і приймаючи значення відомих за початковими умовами елементів, отримаємо для $n = 1$:

$$c^2_{4,2} = c^1_{4,5} \cdot c^1_{5,2}. \tag{12}$$

Графічна інтерпретація доказу Леми 3 на прикладі обчислення елемента результуючої матриці $[c^2_{4,2}]$ показана на рис. 5.

Для визначення з (2) значення елемента $[c^2_{4,2}]$ слід перемножити елементи рядка 4 і стовпця 2 та визначити суму. Елементи 4-го рядка, 2-го стовпця та 2-го стовпця результату множення виділені на рис. 4 товстою лінією. Елемент 4-го рядка першого множника – $[c^1_{4,5}] = 1$ і елемент 2-го стовпця другого множника – $[c^1_{5,2}] = 1$, мають значення відмінні від нуля. Саме вони у відповідності до (2) дадуть значення: $[c^2_{4,2}] = [c^1_{4,5}] \times [c^1_{5,2}] = 1$.

Оскільки другий множник не змінюється і завжди $[c^1_{r,k}]=1$, то можна говорити, що у загальному випадку для всіх стовпців елементи, що відображають лінійну частину орієнтованого графа, у разі піднесення до наступних ступенів будуть перескакувати з передостаннього стовпця $(r - 1)$ у перший стовпець k контуру.

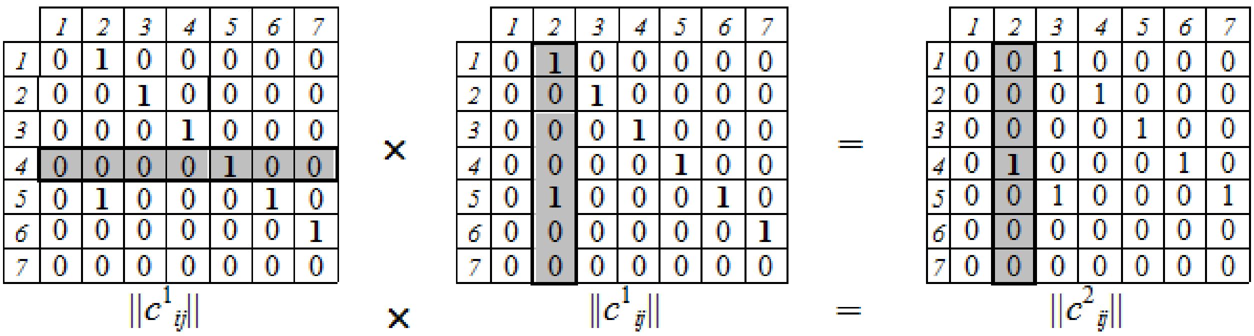
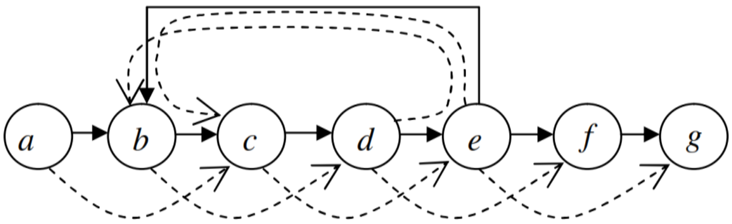


Рисунок 4 – Схема перескакування елемента передостаннього стовпця $[c^1_{4,5}]$ контуру першого множника у перший стовпець контуру матриці $[c^2_{4,2}] = 1$, що є результатом множення матриць

<u>Лема 4</u>. Зв'язки між вершинами графа через 1 … n дуг відображають ступені матриці суміжності від 1 до n, відповідно.

Доказ. Як визначено у лемі 2 елементи всіх стовпців контуру, окрім останнього, матриці суміжності ступеня n зміщуються у ступені n+1 на один стовпець за напрямом ребер орграфа. Тобто кожний n+1 ступень відображає зв'язки від i-ої до n+1 вершини графа. Так, зв'язки отримані на основі 2-го ступеня матриці суміжності відображають зв'язки у графі через одну транзитну вершину (пунктир, рис. 5-*а*).

Як видно, нові зв'язки сполучають ті вершини, які в початковій матриці були сполучені двома дугами (рис. 4 та рис 5). Ці висновки вірні і для 3-го ступеня матриці суміжності, з тією відмінністю, що виявлені зв'язки вже проходять через три дуги і дві вершини графа (рис. 6).



2-ий ступень		До вершини						
		a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*
Від вершини	*a*	0	0	1	0	0	0	0
	b	0	0	0	1	0	0	0
	c	0	0	0	0	1	0	0
	d	0	1	0	0	0	1	0
	e	0	0	1	0	0	0	1
	f	0	0	0	0	0	0	0
	g	0	0	0	0	0	0	0

а) *б*)

Рисунок 5 – Відображення зв'язків у матриці суміжності 2-го ступеня через одну вершину орієнтованого графа: *а*) зв’язки на орієнтованому графі; *б*) матриця суміжності 2-го ступеня

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*
a	0	1	0	0	0	0	0
b	0	0	1	0	0	0	0
c	0	0	0	1	0	0	0
d	0	0	0	0	1	0	0
e	0	1	0	0	0	1	0
f	0	0	0	0	0	0	1
g	0	0	0	0	0	0	0

а)

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*
a	0	0	1	0	0	0	0
b	0	0	0	1	0	0	0
c	0	0	0	0	1	0	0
d	0	1	0	0	0	1	0
e	0	0	1	0	0	0	1
f	0	0	0	0	0	0	0
g	0	0	0	0	0	0	0

б)

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*
a	0	0	0	1	0	0	0
b	0	0	0	0	1	0	0
c	0	1	0	0	0	1	0
d	0	0	1	0	0	0	1
e	0	0	0	1	0	0	0
f	0	0	0	0	0	0	0
g	0	0	0	0	0	0	0

в)

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*
a	0	0	0	0	1	0	0
b	0	1	0	0	0	1	0
c	0	0	1	0	0	0	1
d	0	0	0	1	0	0	0
e	0	0	0	0	1	0	0
f	0	0	0	0	0	0	0
g	0	0	0	0	0	0	0

г)

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*
a	0	1	0	0	0	1	0
b	0	0	1	0	0	0	1
c	0	0	0	1	0	0	0
d	0	0	0	0	1	0	0
e	0	1	0	0	0	1	0
f	0	0	0	0	0	0	0
g	0	0	0	0	0	0	0

д)

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*
a	0	0	1	0	0	0	1
b	0	0	0	1	0	0	0
c	0	0	0	0	1	0	0
d	0	1	0	0	0	1	0
e	0	0	1	0	0	0	1
f	0	0	0	0	0	0	0
g	0	0	0	0	0	0	0

е)

Рисунок 6 – Зміщення елементів матриці суміжності у ступенях від 1 до 6: *а)* 1-ий ступень; *б)* 2-ий ступень; *в)* 3-ий ступень; *г)* 4-ий ступень; *д)* 5-ий ступень; *е)* 6-ий ступень.

Як видно з рис. 6, існує певна закономірність у зміні зв’язків, що характерні для різних ступенів матриці суміжності. Елементи матриці суміжності переміщуються справа наліво (за напрямом дуг орграфа). У той же час специфічний шлях (з перескуванням) проходять передостанні елементи замкненого контуру. Означені властивості ступенів матриць суміжності дозволяють висунути гіпотезу про можливість розрахункового визначення контурів у орієнтованому графі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Vaysman, V.A. The planar graphs closed cycles determination method / V.A. Vaysman, D.V. Lukianov, K. V. Kolesnikova // Тр. Одес. политехн. ун-та. – 2012. – № 1(38). – С. 222 – 227.
2. Лук’янов, Д. В. Метод структурного аналізу компетенцій NCB / Д. В. Лук’янов, К. В. Колеснікова, В. Д. Гогунський // Управління проектами у розвитку суспільства. – К. : КНУБА, 2012. – С. 135 – 136

3. Колеснікова, К. В. Визначення ядер знань поведінкових компетенцій фахівців з управління проектами / К. В. Колеснікова, Д. В. Лук'янов, С. В. Руденко // Вісник НУК. - № 5 – 6. – Миколаїв : НУК, 2012. – С. 84 – 88.
4. Колеснікова, К. В. Матричная диаграмма и «сильная связность» индикаторов ценности в проектах / К. В. Колеснікова, Т. М. Олех // Электротехнические и компьютерные системы. – № 7(83). – К. : Техніка, 2012. – С. 148 – 153.
5. Лук'янов, Д. В. Розробка посадових інструкцій проектних менеджерів за компетенціями національного стандарту / Д. В. Лук'янов, С. О. Величко, К. В. Колеснікова // Шляхи реалізації кредитно-модульної системи: матер. наук.-метод. семінару. – О. : Наука і техніка, 2012. – № 6. – С. 61 – 65.
6. Колесникова, Е. В. Методы оценки качества технических систем / Е. В. Колесникова, Г. В. Кострова, И. В. Прокопович // Тр. Одес. политехн. ун-та. – 2007. – № 1(27). – С. 128 – 130.
7. Колеснікова, К. В. Оптимізація структури управління проектно керованої організації / К. В. Колеснікова, В. О. Вайсман // Вісник СевНТУ: зб. Серія: Автоматизація процесів та управління. – Вип. 125 (2012). – Севастополь : СевНТУ, 2012. – С. 218 – 221.
8. Колесникова, Е. В. Разработка марковской модели состояний проектно управляемой организации / Е. В. Колесникова, В. А. Вайсман, С. А. Величко // Сучасні технології в машинобудуванні: зб. наук. пр. – 2012. – № 7. – Харків, НТУ «ХПІ». – С. 217 – 223.
9. Олех, Т. М. Методы оценки проектов и программ / Т. М. Олех, А. Г. Оборская, Е. В. Колесникова // Тр. Одес. политехн. ун-та. – 2012. – № 2 (39) – С. 213 – 220.
10. Руденко, С. В. Сетевые процессы управления проектами в контексте отображения состояний проекта / С. В. Руденко, Е. В. Колесникова, В. И. Бондарь // Проблеми техніки. – 2012. – № 4. – С. 61 – 67.
11. Розробка марківської моделі зміни станів пацієнтів в проектах надання медичних послуг / С. В. Руденко, М. В. Романенко, О. Г. Катуніна Е. В. Колеснікова // Управління розвитком складних систем. – 2012. – № 12. – С. 86 – 89.
12. Колесникова, Е. В. Управление знаниями в IT-проектах / Е. В. Колесникова, А. А. Негри // Вост.-Європ. журнал передовых технологий. – 2013. – № 1/10 (61). – С. 213 – 215.
13. Колеснікова, К. В. Моделювання стратегічного управління міжнародною діяльністю університету / К. В. Колеснікова, С. М. Гловацька, С. В. Руденко // Проблеми техніки. – № 1. – 2013. – С. 95 – 101.
14. Ма Фен. Марковская модель процесса формирования и управления имиджем учебного заведения / Ма Фен, С. Н. Гловацкая, Е. В. Колесникова // Проблеми техніки. – 2013. – № 3. – С. 142 – 151.
15. Руденко, С. В. Анализ результатов реализации технико-экономической природоохранной региональной программы / С. В. Руденко, Е. В. Колесникова, Т. М. Олех // Проблеми техніки. – № 2. – 2013. – С. 161 – 169.
16. Руденко, С. В. Модель оценки эффективности портфеля проектов / С. В. Руденко, С. В. Гловацкая, Е. В. Колесникова // Вісник ОНМУ. – 2013. – № 2 (38). – С. 149 – 151.
17. Колесникова, Е. В. Оценка компетентности персонала сталеплавильной печи в проекте компьютерного тренажера / Е. В. Колесникова // Вост.-Європ. журнал передовых технологий. – 2013. – № 5/1 (65). – С. 45 – 48.
18. Вайсман, В. О. Сучасна концепція проектно-орієнтованого командного управління підприємством / В. О. Вайсман, К. В. Колеснікова, В. В.Натальчишин // Сучасні технології в машинобудуванні: зб. наук. праць. – 2013. – Вип. 8. – НТУ «ХПІ». – С. 246 – 253.
19. Рязанцев, В. М. Модель развития проектов карточного обслуживания клиентов банка / В. М. Рязанцев, Е. В. Колесникова, А. А. Негри // Зб. наук. пр. національного університету кораблебудування. – 2013. – №2. – С. 101 – 104.

20. Масленникова, К. С. Складники поведінкової компетенції учасників команди проекту на засадах компетентністного підходу / Е. С. Масленникова, К. В. Колеснікова // Управління розвитком складних систем. – 2013. – №14. – С. 48 – 51.
21. Колесникова, Е. В. Теория проектного управления: закон контроля параметров риска / Е. В. Колесникова // Вісник Одеського національного морського університету. – 2013. – № 3 (39). – С. 220 – 232.
22. Колесникова, Е. В. Моделирование структур управления программами проектов в организационно-технических системах / Е. В. Колесникова // Вісник Одеського національного морського ун-ту. – 2014. – № 1(40). – С. 228 – 235.
23. Колесникова, Е. В. Моделирование слабо структурированных систем проектного управления / Е.В. Колесникова // Тр. Одес. политехн. ун-та. – 2013. - № 3 (42). – С. 127 – 131.
24. Колесникова, Е. В. Фрактальная размерность как мера трансформации серийной проектной деятельности в операционную / Е. В. Колесникова, И. И. Становская // Тр. Одес. политехн. ун-та. – 2013. – № 2(41). – С. 282 – 288.
25. Колеснікова, К. В. Аналіз структурної моделі компетенцій з управління проектами національного стандарту України / К. В. Колеснікова, Д. В. Лук'янов // Управління розвитком складних систем. – 2013. – №13. – С. 19 – 27.
26. Колесникова, Е. В. Трансформация когнитивных карт в модели марковских процессов для проектов создания программного обеспечения / Е. В. Колесникова, А. А. Негри // Управління розвитком складних систем. – 2013. – №15. – С. 30 – 35.
27. Колеснікова, К. В. Розвиток теорії проектного управління: обґрунтування закону К. В. Кошкіна щодо завершення проектів / К. В. Колеснікова // Управління розвитком складних систем – 2013. – № 16. – С. 38 – 45.
28. Колеснікова, К. В. Розвиток теорії проектного управління: обґрунтування закону ініціації проектів / К. В. Колеснікова // Управління розвитком складних систем. – 2014. – № 17. – С. 24 – 31.
29. Колесникова, Е. В. Развитие теории проектного управления: закон Ю.Л. Воробьева о влиянии риска на успешность портфеля проектов / Е. В. Колесникова // Управління розвитком складних систем. – 2014. – № 18. – С.62 – 67.
30. Колесникова, Е. В. Экстремальное управление проектами / Е. В. Колеснікова, А. А. Негри // Матеріали міжнародної науково-практичної конференції «Управління проектами: стан та перспективи». – Миколаїв : НУК, 2012. – С. 135 – 136.
31. Колесникова, Е. В. Когнитивные модели слабо структурированных проектов создания программных продуктов // Материалы XX семинара «Моделирование в прикладных научных исследованиях». – Одесса : ОНПУ, 2012. – С. 48 – 50.
32. Колесникова, Е. В. Когнитивный анализ и моделирование сложных процессов для формирования профессиональных компетенций / Е. В. Колесникова, А. А. Негри, С. В. Ткачук // Матеріали наук.-метод. семінару «Шляхи реалізації кредитно-модульної системи організації навчання». – 2013. – Вип. 7. – С. 105 – 110.
33. Руденко, С. В. Ідентифікація марківської моделі управління медичними проектами / С. В. Руденко, О. Г. Катуніна, К. В. Колеснікова // Інформаційні технології в освіті, науці та виробництві: зб. наук. пр. – 2013. – № 2. – С. 243 – 249.
34. Колесникова, Е. В. Прикладные аспекты применения цепей Маркова для моделирования слабо структурированных систем проектного управления / Е. В. Колесникова // Інформаційні технології в освіті, науці та виробництві: зб. наук. пр. – 2014. – № 4(5). – С. 77 – 82.
35. Оборский, Г.А. Инструменты реализации ценностного подхода в проектах дистанционного обучения [Текст] / Г.А. Оборский, А.Е. Колесников, А.Н. Миколюк // Электротехнические и компьютерные системы. - 2015. - № 19. – С. 330 - 333.
36. Колесников, А.Е. Формирование информационной среды университета для дистанционного обучения / А.Е. Колесников // Управління розвитком складних систем. – 2014. - № 20. – С. 21 – 26.